Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. К. Бакалинский, Динамика булева усреднения в одномерных решетчатых моделях с антиферромагнитным взаимодействием, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 3, 435–441

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf944>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:45:46

© 1998 г.

Л. К. Бакалинский*

ДИНАМИКА БУЛЕВА УСРЕДНЕНИЯ В ОДНОМЕРНЫХ РЕШЕТЧАТЫХ МОДЕЛЯХ С АНТИФЕРРОМАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрена модель Хаббарда одномерного решетчатого газа с антиферромагнитным взаимодействием. Минимизация энергии этой модели осуществляется с помощью булева усреднения. Для случая произвольного начального распределения частиц газа на прямой показано, что зависимость концентрации газа от химического потенциала имеет вид канторовой лестницы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим модель одномерного решетчатого газа [1]. Расположение частиц в нем описывается двусторонней последовательностью $(u_n): Z \rightarrow \{0, 1\}$. Ячейки, для которых $u_n = 1$, заняты частицами газа. Энергия γ_i взаимодействия частиц, находящихся на расстоянии i друг от друга, предполагается такой, что: $\gamma_i > 0$ (антиферромагнитный характер взаимодействия); последовательность (γ_i) монотонно убывает;

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i < \infty.$$

Энергия системы в модели Хаббарда [2, 3] может быть записана как формальный гамильтониан

$$H = -\psi \sum_{i \in Z} u_i + \sum_{i \in Z, j \in Z, i > j} \gamma_{i-j} u_i u_j, \quad (1)$$

где ψ — химический потенциал.

Вопросы минимизации энергии такой системы решались для периодических последовательностей в работах [1–4] разными способами. В [4] это делалось в духе динамического программирования при помощи булевой усредняющей процедуры (БУП), что позволяло снять требование выпуклости весовой последовательности (γ_i) , необходимое в подходе работ [1–3].

Следуя статье [4], рассмотрим задачу минимизации как задачу управления. Предположим, что все значения u_m при $m < n$ определены; необходимо определить значение u_n

*Челябинский государственный педагогический университет, Челябинск, Россия

так, чтобы энергия системы не увеличилась. Выделим в гамильтониане (1) только те слагаемые, которые содержат переменные u_n , и получим приращение энергии

$$\Delta H = u_n \left(\sum_{j < n} \gamma_{n-j} u_j - \psi \right).$$

Чтобы сделать ΔH неположительным, следует считать, что

$$u_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i u_{n-i} \leq \psi; \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i u_{n-i} > \psi. \end{cases} \quad (2)$$

Соотношение (2) называется БУП. До сих пор были исследованы только периодические основные состояния в моделях одномерного решетчатого газа с антиферромагнитным взаимодействием [1–5]. В данной работе рассматриваются основные состояния, построенные с помощью БУП, при произвольном, не обязательно периодическом распределении частиц на прямой.

Числом вращения траектории (u_n) будем называть долю единиц в общем потоке значений (u_n) при $n > 0$. Для рассматриваемой модели одномерного решетчатого газа число вращения представляет собой концентрацию молекул газа. Необходимо показать, что число вращения последовательности (u_n) , порождаемой БУП, не зависит от значений u_n при $n < 0$, а зависит только от значения параметра ψ . Этот результат можно интерпретировать как доказательство того, что в динамике изменения решетчатого газа установившееся значение концентрации зависит только от химического потенциала.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим двустороннюю бинарную последовательность $(u_n): Z \rightarrow \{0, 1\}$ такую, что для всех $n > 0$ выполняется соотношение (2). Последовательность (u_n) при $n \leq 0$ назовем начальным условием, а при $n > 0$ – траекторией БУП. Число вращения ω траектории (u_n) определим формулой

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i.$$

Пусть $e_1 e_2 \dots e_l$ – это слово в алфавите $\{0; 1\}$, его числом вращения назовем число

$$\frac{1}{l} \sum_{i=1}^l e_i.$$

Введем понятие области существования цикла. Для этого рассмотрим начальное условие – периодическую последовательность с периодом $e_1 e_2 \dots e_l$. Областью существования цикла $e_1 e_2 \dots e_l$ назовем множество значений переменной ψ , при которых действие БУП (2) не нарушает периодичности начального условия (т.е. $u_n = u_{n+l}$ для всех $n \in Z$).

Для периодической траектории взвешенные суммы

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i u_{n-i}$$

при различных n принимают последовательно ровно l различных значений:

$$S_1 = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{lk+1-j} e_j, \quad S_i = \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k e_{i-k} + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{lk+i-j} e_j \quad (2 \leq i \leq l).$$

Для того чтобы значение переменной ψ принадлежало области существования цикла $e_1 e_2 \dots e_l$, необходимо и достаточно выполнение следующих l неравенств: $S_i \leq \psi$, если $e_i = 1$, и $S_i > \psi$, если $e_i = 0$. Поэтому непустая область существования цикла $e_1 e_2 \dots e_l$ есть полуинтервал $[S'; S'')$, границы которого суть $S' = \max\{S_i : e_i = 1\}$; $S'' = \min\{S_i : e_i = 0\}$.

В качестве циклов будем рассматривать слова, в которых единицы “равномерно распределены” среди нулей и наоборот. Таким словам разные авторы давали разные названия: штурмовы цепочки [6], равномерно 2-раскрашенные слова [7], хаббардовы конфигурации [1]. Эти определения описывают один и тот же тип последовательностей [8]. Следуя работе [1], дадим определение хаббардовой конфигурации. Предварительно введем следующее определение: слово A , состоящее из нулей и единиц, является сдвигом слова B , если существуют такие слова C и D , что $A = CD$ и $B = DC$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слово $e_1 e_2 \dots e_l$ является хаббардовой конфигурацией, если в этом слове и в любом его сдвиге между любой единицей и i -й единицей справа от нее находится либо $[i/w] - 1$, либо $[i/w]$ букв.

Для каждого рационального числа w существует ровно одна (с точностью до сдвига) хаббардова конфигурация, число вращения которой равно w . Например, слова 01, 01011, 01011011 суть хаббардовы конфигурации с числами вращения $1/2$, $3/5$, $5/8$, соответственно. Однако слово 0011 с числом вращения $1/2$ не является хаббардовой конфигурацией.

Периодические траектории и начальные условия, периоды которых являются хаббардовыми конфигурациями, будем называть регулярными. Известно [5], что: 1) области существования хаббардовых конфигураций образуют на оси значений ψ систему интервалов, дополнение к объединению этой системы интервалов есть множество нулевой лебеговой меры, гомеоморфное канторову; 2) если область существования цикла, не являющегося хаббардовой конфигурацией, непуста, то она лежит внутри области существования хаббардовой конфигурации с тем же числом вращения. Построенная таким образом зависимость числа вращения от химического потенциала ψ имеет вид канторовой лестницы. Мы хотим показать, что при переходе к произвольным начальным условиям БУП зависимость числа вращения от химического потенциала не изменяется. Таким образом, мы докажем, что канторова лестница характеризует фазовые переходы в модели Хаббарда не только при периодических начальных условиях, как показано в [1–5], но и при произвольных начальных условиях. Этот факт непосредственно вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если ψ — внутренняя точка области существования цикла $e_1 e_2 \dots e_l$, являющегося хаббардовой конфигурацией с числом вращения w , то для любой последовательности (u_n) , удовлетворяющей при $n > 0$ условию (2), имеет место равенство

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i.$$

Кроме того, мы покажем, что при любых значениях химического потенциала ψ и при произвольном начальном распределении частиц на прямой число вращения траектории (u_n) существует. Это следует из теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2. При всех значениях переменной ψ для любой последовательности (u_n) , удовлетворяющей при $n > 0$ условию (2), существует предел

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Пусть в результате действия БУП образовалась траектория (u_n) , $n \in N$. Если $\psi \leq 0$, то заключения теорем 1, 2 очевидны. Рассмотрим случай $\psi > 0$. Легко показать, что в этом случае в силу условия $\gamma_i > 0$ множество единиц в последовательности (u_n) при $n > 0$ бесконечно. Построим функцию $f(n)$, аргументом которой является номер единицы в траектории, а значением — номер позиции, которую эта единица занимает в траектории. Например, если $(u_n) = 0100101\dots$, то $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(3) = 7$. В дальнейшем мы используем следующее свойство хаббардовой конфигурации, почти непосредственно вытекающее из ее определения: если $f(n)$ — функция, построенная по траектории u'_n , соответствующей правой границе области существования хаббардовой конфигурации $e_1 e_2 \dots e_l$ с числом вращения w , то график $f(n)$ всюду лежит выше прямой $p'(n) = n/w$, но прилегает к ней плотно (т.е. между прямой и графиком регулярной траектории нет узлов целочисленной решетки [5]).

ЛЕММА 1. Если $\psi < S'$, где S' — правая граница области существования хаббардовой конфигурации $e_1 e_2 \dots e_l$ с числом вращения w , то существует натуральное число k такое, что для любого натурального n выполняется неравенство

$$f(n) \geq \frac{n}{w} - \frac{k}{w}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С геометрической точки зрения утверждение леммы означает, что существует прямая $p(n) = n/w - k/w$ такая, что график $f(n)$ всюду лежит выше этой прямой. Найдем число $r \in N$ такое, что

$$\psi < \sum_{i=1}^r \gamma_i u'_{m-i},$$

где (u'_m) – регулярная траектория, соответствующая S' . Искомая константа k равна

$$\sum_{i=1}^r u'_{m-i}.$$

Действительно, для всех значений $n \leq k$ неравенство (3), очевидно, выполняется. Предположим (для приведения к противоречию), что существуют значения $n > k$, для которых неравенство (3) не выполняется, и пусть n_0 – наименьшее из таких чисел. Тогда для всех натуральных n из интервала $[n_0 - k, n_0]$ выполняется неравенство $f(n) \geq p(n)$ и тем более выполняется неравенство $f(n) > p_1(n)$, где $p_1(n) = (n - n_0)/w + f(n_0)$. Сравним сумму

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i u_{f(n_0)-i}$$

с регулярной суммой

$$S' = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i u'_{m-i}.$$

Для этого (см. рисунок) отложим от точки $(n_0; f(n_0))$ назад график регулярной траектории (u'_m) (ломаная 2), так чтобы сумма S' считывалась из этой точки аналогично сумме S . Этот график плотно прилегает к прямой $p_1(n)$ (линия 3 на рисунке). Поэтому график траектории $f(n)$ (ломаная 1) на отрезке длиной k расположен не ниже графика регулярной траектории. Таким образом, если при считывании из точки $(n_0; f(n_0))$ выписать друг под другом ненулевые слагаемые сумм S и S' , то слагаемыми суммы S

будут члены последовательности (γ_i) с номерами, не меньшими номеров соответствующих слагаемых суммы S' . В силу монотонного убывания весовой последовательности (γ_i) получаем, что

$$\psi < \sum_{i=1}^r \gamma_i u'_{m-i} \leq \sum_{i=1}^r \gamma_i u_{f(n_0)-i} < \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i u_{f(n_0)-i},$$

и, следовательно, $u_{f(n_0)} = 0$, что противоречит построению функции $f(n)$. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим теперь аналогично долю нулей в траектории. Подобно функции $f(n)$ построим функцию $g(n)$, ставящую в соответствие номеру нуля в траектории номер его позиции. Аналогично лемме 1 доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 2. Если $\psi > S''$, где S'' – левая граница области существования табардовой конфигурации $e_1 e_2 \dots e_l$ с числом вращения w , то существует такое натуральное число k , что для любого натурального n выполняется неравенство

$$g(n) \geq \frac{n}{1-w} - \frac{k}{1-w}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Исходя из определений функций $f(n)$ и $g(n)$ число вращения может быть вычислено следующим образом:

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{f(n)} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{g(n)}.$$

Из леммы 1 следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{n}{f(n)} \leq w,$$

а из леммы 2 –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{n}{g(n)} \leq 1 - w.$$

Поэтому $\omega = w$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если ψ является внутренней точкой области существования цикла, то заключение теоремы 2 следует из теоремы 1. В противном случае выберем возрастающую (v'_j) и убывающую (v''_j) последовательности из внутренних точек областей существования циклов, сходящиеся к ψ . Точкам v'_j и v''_j соответствуют числа вращения w'_j и w''_j . Тогда для любого j выполняются неравенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \leq w''_j$$

(лемма 1) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \geq w'_j$$

(лемма 2). Очевидно, что $\lim_{j \rightarrow \infty} w'_j = \lim_{j \rightarrow \infty} w''_j$, откуда и следует наше утверждение.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из доказательств теорем 1 и 2 следует, что предел устанавливается тем медленнее, чем сильнее выражено дальноедействие в модели. В случае же быстрого убывания весовой последовательности (γ_i) (когда для любого i выполняется неравенство $\gamma_{i+1} \leq \gamma_i/2$) можно, кроме того, показать, что для почти всех значений химического потенциала и при любом начальном условии траектория БУП становится периодической.

Список литературы

- [1] *С.Е. Бурков, Я.Г. Синай.* УМН. 1983. Т. 38. Вып. 4. С. 205–225.
- [2] *J. Hubbard.* Phys. Rev. B. 1978. V. 17. P. 494–505.
- [3] *P. Bak, R. Bruinsma.* Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. № 4. P. 249–251.
- [4] *М.М. Кипнис.* Докл. РАН. 1994. Т. 336. Вып. 3. С. 316–319.
- [5] *М.М. Кипнис.* Russ. J. Math. Phys. 1996. V. 4. № 3. P. 397–402.
- [6] *M. Morse, G.A. Hedlund.* Amer. J. Math. 1940. V. 62. P. 1–42.
- [7] *V. Baladi, D. Rostmore, N. Tongring, C. Tresser.* Nonlinearity. 1992. V. 5. P. 1111–1136.
- [8] *М. М. Кипнис.* Теория булева усреднения для исследования явления равномерного 2-раскрашивания в системах управления, в преобразователях сигналов и в моделях статистической механики. Дисс. на соискание уч. ст. д-ра физ.-мат. наук. М.: Ин-т системного анализа РАН, 1995.

Поступила в редакцию 13.III.1998 г.
после доработки 26.V.1998 г.