Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Розенхаус, Р. Шанкар, Подсимметрии и их свойства,
ТМФ, 2018, том 197, номер 1, 138–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9440>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 04:02:20

© 2018 г.

В. Розенхаус*, Р. Шанкар†

ПОДСИММЕТРИИ И ИХ СВОЙСТВА

Введено понятие подсимметрии дифференциальной системы как инфинитезимального преобразования подмножества системы, которое сохраняет это подмножество инвариантным на пространстве решений всей системы. Обсуждаются геометрический смысл и свойства подсимметрий, предложен алгоритм нахождения подсимметрий системы. Показано, что по сравнению с обычной симметрией подсимметрия представляет собой значительно более мощный инструмент с точки зрения деформации законов сохранения. Показано, что все низшие законы сохранения нелинейной телеграфной системы могут быть генерированы с помощью подсимметрий системы.

Ключевые слова: симметрии и их расширение, дифференциальные системы, инвариантные свойства.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9440>

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что теория Ли групповых свойств дифференциальных уравнений представляет универсальный и мощный подход для исследования разнообразных свойств дифференциальных систем: аналитические решения и редуцированные системы, преобразования между решениями заданного уравнения в частных производных, отображения на различные уравнения, задача линеаризации, законы сохранения и т. д. (см., например, [1] или [2]). Мотивацией настоящей работы являются введение понятия подсимметрии дифференциальной системы и демонстрация того, что в некоторых аспектах по сравнению с обычными симметриями, подсимметрии дифференциальных систем являются более эффективным и общим инструментом.

Обычная симметрия – это преобразование дифференциальной системы, которое оставляет все уравнения системы инвариантными на пространстве решений системы (см., например, [1] или [2]). В настоящей работе мы рассматриваем преобразования, характеризующие инвариантные свойства некоторой части системы (подсистемы) на решениях полной системы. В отличие от симметрий подсимметрии оставляют

*Department of Mathematics and Statistics, California State University, Chico, CA, USA.
E-mail: vrosenhaus@csuchico.edu

†Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA, USA.
E-mail: shankarr@uw.edu

инвариантными только некоторые уравнения системы или их комбинации на решениях полной системы.

В разделе 2 приведено качественное описание подсимметрий для системы двух дифференциальных уравнений. В разделе 3 представлено определение преобразований подсимметрий, обсуждается их геометрический смысл, а также исследована связь между подсимметриями, симметриями и условными симметриями. В разделе 4 приведено обсуждение некоторых свойств подсимметрий, а также алгоритм нахождения подсимметрий. В разделе 5 представлены примеры подсимметрий для некоторых физически интересных систем и обсуждается их связь с линеаризацией. В разделе 6 исследовано преобразование известных законов сохранения в новые законы сохранения с использованием инфинитезимальных преобразований. Показано, что в этом аспекте подсимметрии играют существенно более важную роль по сравнению с симметриями. Установлено, что в случае нелинейной телеграфной системы все низшие законы сохранения могут быть получены путем преобразований подсимметрий.

В последующих публикациях (в частности, в будущей статье [3]) мы продемонстрируем роль субсимметрии в расщеплении дифференциальной системы и ее решении, а также природу соотношений между подсимметриями и законами сохранения.

2. УСЛОВИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ И ПОДСИММЕТРИЯ

Рассмотрим инфинитезимальное преобразование с оператором

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^a \frac{\partial}{\partial u^a} + \zeta_i^a \frac{\partial}{\partial u_i^a} + \dots \quad (2.1)$$

или соответствующий канонический или эволюционный оператор (вертикальное векторное поле)

$$X_\alpha = X - \xi^i D_i = \alpha^a \frac{\partial}{\partial u^a} + (D_j \alpha^a) \frac{\partial}{\partial u_j^a} + \dots, \quad (2.2)$$

где $x = (x^1, \dots, x^p)$, $u = (u^1, \dots, u^q)$, $a = 1, \dots, q$, α^a – инфинитезимальный оператор, D_j – оператор полной производной:

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + u_j^a \frac{\partial}{\partial u^a} + \dots.$$

Далее, если специально не оговорено, под инфинитезимальным оператором X мы понимаем вертикальное векторное поле $X_\alpha(X)$, действующее в пространстве зависимых переменных.

Рассмотрим систему $\Delta(x, u, \dots) \equiv \Delta[u]$ двух дифференциальных уравнений для двух функций u^1, u^2 двух переменных (x^1, x^2) :

$$\Delta_v(x^i, u^a, u_j^a, \dots) = 0, \quad v = 1, 2. \quad (2.3)$$

Если преобразование X является *симметрией* системы (2.3), удовлетворяются следующие условия:

$$X\Delta_i|_{\Delta_1=\Delta_2=0} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.4)$$

Условие симметрии (2.4) может быть записано в более явной форме в терминах Δ [1] (мы предполагаем, что наша система является невырожденной, т.е. она локально имеет решение в каждой точке, а также обладает максимальным рангом [1]). В частности, можно найти некоторые функции $\Gamma_i^I(x, u, u_{(1)}, \dots)$ такие, что

$$X\Delta_i = \Gamma_i^{j0}\Delta_j + \Gamma_i^{jk}D_k\Delta_j + \dots, \quad i = 1, 2. \quad (2.5)$$

Поскольку правая часть обращается в нуль на решениях u , равенство (2.5) влечет за собой условие симметрии (2.4). Заметим, что это равенство справедливо для каждого уравнения системы Δ_i , и в общем случае все Δ_j могут присутствовать в правой части.

Расширим набор инвариантных преобразований X и потребуем инвариантности только подсистемы (2.3) относительно X , т.е. Δ_1 . Рассмотрим векторные поля X , которые удовлетворяют условиям

$$X\Delta_1|_{\Delta_1=\Delta_2=0} = 0 \quad (2.6)$$

или

$$X\Delta_1 = \Gamma_1^{j0}\Delta_j + \Gamma_1^{jk}D_k\Delta_j + \dots \quad (2.7)$$

с некоторыми функциями $\Gamma_1^{jI}(x, u, u_{(1)}, \dots)$. Если выполняется условие (2.6) (или условие (2.7)), X является *подсимметрией* исходной системы.

Так как любая симметрия X системы (2.3) удовлетворяет условию (2.6) (см. (2.4)), симметрия системы также является подсимметрией; обратное утверждение не обязательно выполняется.

3. БОЛЕЕ ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Теперь рассмотрим более общие подсистемы системы (Δ_1, Δ_2) , чем просто Δ_1 . Например, для линейных гиперболических систем

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= u_t + c(x)^2 v_x, \\ \Delta_2 &= v_t + u_x \end{aligned} \quad (3.1)$$

можно рассмотреть подсистему, зависящую только от функции u :

$$D_t\Delta_1 - c(x)^2 D_x\Delta_2 = u_{tt} - c(x)^2 u_{xx}. \quad (3.2)$$

Существование такой расщепленной подсистемы может быть полезно для построения решений системы (3.1).

Для нелинейной системы Шредингера, записанной в виде вещественных функций $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -v_t + u_{xx} - ku(u^2 + v^2) = 0, \\ \Delta_2 &= u_t + v_{xx} - kv(u^2 + v^2) = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

представляется естественным рассмотреть закон сохранения массы

$$v\Delta_1 - u\Delta_2 = -D_t\left(\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right) + D_x(vu_x - uv_x) \quad (3.4)$$

как подсистему.

Под подсистемой мы подразумеваем линейную комбинацию (линейные комбинации) уравнений Δ_i с некоторыми множителями $\beta^i[u]$ (β^i могут в общем случае быть дифференциальными операторами: $\beta^i = \beta_0^i + \beta^{ij}D_j + \dots$). Условие инвариантности (2.6) для такого рода подсистемы записывается как

$$X(\beta^i \Delta_i)|_{\Delta_1=\Delta_2=0} = 0. \quad (3.5)$$

Пара $(X, \beta^i \Delta_i)$ представляет собой *подсимметрию* системы (Δ_1, Δ_2) . Здесь X – векторное поле подсимметрии подсистемы $\beta^i \Delta_i$; для того чтобы обеспечить невырожденность, положим, что подсистема обладает максимальным рангом [1]. Заметим, что подсимметрия определяется видом подсистемы $\beta^i \Delta_i$, и различные подсистемы могут иметь различные наборы допустимых векторных полей.

Приведем альтернативное геометрическое определение. Пусть $\mathcal{S}$ – многообразие решений системы (Δ_1, Δ_2) , а $\mathcal{R}$ – то же для подсистемы $\beta^i \Delta_i$. Тогда $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ ($\mathcal{S}$ представляет собой регулярное подмногообразие $\mathcal{R}$). Пара $(X, \mathcal{R})$ представляет собой *подсимметрию* многообразия $\mathcal{S}$, если векторное поле X является касательным к многообразию $\mathcal{R}$ в точках $\mathcal{S}$. (Если $\mathcal{R} = \mathcal{S}$, X представляет собой симметрию $\mathcal{S}$.)

Перейдем теперь к определению подсимметрии для общей дифференциальной системы.

Пусть q гладких функций $u = (u^1, u^2, \dots, u^q)$ от p независимых переменных $x = (x^1, x^2, \dots, x^p)$ определены на некотором открытом подмножестве $\mathbb{R}^p$. Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ максимального ранга ℓ -го порядка:

$$\Delta_b(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(l)}) = 0, \quad b = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

В данном случае каждая функция $\Delta_b(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \dots, u_{(l)})$, $b = 1, 2, \dots, n$, представляет собой гладкую функцию от x, u , а также всех частных производных каждой функции u^v , $v = 1, \dots, q$, по x^i , $i = 1, \dots, p$, до ℓ -го порядка (иными словами, $\Delta_b[u]$ является дифференциальной функцией, см. [1]).

Рассмотрим инфинитезимальное преобразование с каноническим инфинитезимальным оператором (2.2)

$$X = (D_J \alpha^a) \frac{\partial}{\partial u^a_J}, \quad (3.7)$$

где $\alpha^a = \alpha^a(x, u, u_{(1)}, \dots)$ и сумма берется по всем мультииндексам $J = (J_1, \dots, J_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $D_J = D_1^{J_1} \dots D_p^{J_p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пара $(X, \Xi_i^b \Delta_b)$ является *подсимметрией* системы (3.6), если

$$X(\Xi_i^b \Delta_b)|_{\Delta=0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.8)$$

Здесь $\Xi_i^b \Delta_b$ является подсистемой максимального ранга, $\Xi_i^b = \Xi_i^{bJ}[u]D_J$, $1 \leq m \leq n$, и X представляет собой инфинитезимальный оператор (3.7).

Заметим, что мы можем эквивалентно потребовать существования линейных дифференциальных операторов Λ_i^b с гладкими коэффициентами таких, что следующее соотношение справедливо для любых функций u ($1 \leq m \leq n$):

$$X(\Xi_i^b \Delta_b) = \Lambda_i^b \Delta_b, \quad \Lambda_i^b = \Lambda_i^{bJ}[u]D_J, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad b = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Специальный случай $\Lambda^{ib} = a\Xi^{ib}$ приводит к *симметрии подсистемы*

$$X(\Xi_i^b \Delta_b) = a(\Xi_i^b \Delta_b). \quad (3.10)$$

Приведем бескоординатное определение подсимметрий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть M и N – регулярные подмногообразия пространства потоков J . Если X является векторным полем на J , мы говорим, что (X, N) является *подсимметрией* M , если выполняются следующие условия: 1) $M \subset N$ (M – регулярное подмногообразие N); 2) продолжение X является касательным к N в точках многообразия M .

В локальных координатах многообразия M является набором решений дифференциальной системы Δ : $\Delta_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, и $N \supset M$ – набор решений некоторой подсистемы системы Δ , определяемой дифференциальными операторами Ξ_i^b : $\Xi_i^b \Delta_b = 0$, $i = 1, \dots, m$, с условиями касания (3.8). Если $N = M$, тогда векторное поле X является касательным к M в точках многообразия M и, следовательно, X представляет собой симметрию многообразия.

Заметим, что в настоящей работе мы рассматриваем классические подсимметрии и не обсуждаем более высокие подсимметрии, которые могут быть определены на бесконечном пространстве потоков.

3.1. Связь с симметриями и условными симметриями. В случае $m = n$ подсимметрии становятся обычными симметриями. Действительно, когда $m = n$ и Ξ_i^j , Λ_i^j ($i, j = 1, \dots, n$) представляют собой дифференциальные функции, определение (3.9) подсимметрии приводит к классической точечной симметрии Ли системы (без потери общности мы можем положить $\Xi_i^j = \delta_i^j$). Случай $m = n$, когда Ξ_i^j являются дифференциальными функциями ($\Xi_i^j = \delta_i^j$), а Λ_i^j – дифференциальными операторами, соответствует касательным преобразованиям или обобщенным симметриям. С вычислительной точки зрения симметрии и подсимметрии очень похожи. Определяющие уравнения для обоих случаев выглядят одинаково в пространстве потоков перед проведением замен. Однако в случае $m < n$ преобразование X в (3.9) не является преобразованием симметрии Ли. В этом смысле множество подсимметрий может рассматриваться как расширение множества симметрий Ли.

Проведем сравнение подсимметрии с неклассическими симметриями [4]. В случае неклассического метода начальная система (3.6) дополняется набором условий *инвариантной поверхности*

$$Xu^a = \phi^a - u_i^a \xi^i = 0, \quad a = 1, 2, \dots, q. \quad (3.11)$$

Если E представляет собой многообразие решений системы (3.6), а P – многообразие решений системы (3.11), тогда неклассические симметрии определяются как симметрии Ли дополненной системы (3.6)–(3.11) на подмногообразии $E \cap P$. Важно отметить, что условие инвариантности $X\hat{\Delta}_v = \Lambda_v^j \hat{\Delta}_j$ должно соблюдаться для всех уравнений дополненной системы: $v = 1, 2, \dots, n + q$. Аналогичное требование инвариантности всех уравнений исходной системы имеет место для условных симметрий, когда вместо условия инвариантной поверхности к системе добавлена некая дифференциальная связь (см., например, [5], [6], а также [7]); это также имеет место в случае частичных симметрий [8], [9]. В противоположность данному условию для

подсимметрии X только некоторые комбинации исходных уравнений должны удовлетворять требованиям инвариантности по отношению к действию X на E , а другие уравнения могут не быть (и в общем случае не являются) инвариантными относительно X . Например, для преобразований системы $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$ преобразование X , которое удовлетворяет $X\Delta_1 = A\Delta_1 + B\Delta_2$, представляет собой подсимметрию, даже если $X\Delta_2$ не равно нулю при $\Delta = 0$ ($\Delta_1 = \Delta_2 = 0$).

4. СВОЙСТВА ПОДСИММЕТРИИ

Рассмотрим систему двух уравнений $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$.

1. *Алгебра подсимметрии.* Если X является симметрией подсистемы (например, X удовлетворяет (3.10)), тогда набор операторов X должен обладать свойствами обычных алгебр симметрии Ли (ограниченных на соответствующую подсистему). Этот факт позволяет найти инвариантные решения подсистемы, ее законы сохранения, линеаризацию и т. д.

В общем случае набор всех подсимметрий дифференциального уравнения может и не быть алгеброй Ли. Например, если $X_i\Delta_1 = \Delta_i$ для двух подсимметрий (X_1, Δ_1) и (X_2, Δ_1) , тогда $[X_1, X_2]\Delta_1 = X_1\Delta_2 - \Delta_2$, что может не равняться нулю на решениях; в этом случае коммутатор $[X_1, X_2]$ не является подсимметрией системы $\Delta_i = 0$, $i = 1, 2$.

В случае скалярных дифференциальных уравнений для функции $u(x)$ набор подсимметрий образует алгебру симметрии Ли для данного уравнения. Действительно, предположим, что дифференциальное уравнение $\Delta[u] = 0$ и подсимметрия X удовлетворяет условию $X(\beta\Delta) = 0$ на решениях. Поскольку $X(\beta\Delta) = \beta X\Delta$ на решениях, то $X\Delta = 0$ на решениях, это показывает, что X является симметрией Δ . Заметим, что для скалярного дифференциального уравнения можно ввести подходящие *нелокальные переменные* и получить соответствующую нелокальную систему уравнений [2]. Подсимметрии данной (нелокальной) системы будут соответствовать нелокальным подсимметриям нашего исходного уравнения.

2. *Векторные пространства подсимметрий.* Если $(X, \beta^i\Delta_i)$ и $(Y, \beta^i\Delta_i)$ представляют собой подсимметрии, тогда $(aX + bY, \beta^i\Delta_i)$ тоже является подсимметрией для постоянных a, b .

3. *Тождества на векторных полях подсимметрий.*

А. Если $(X, \beta^i\Delta_i)$ – подсимметрия и Y – симметрия, то $(Y, X(\beta^i\Delta_i))$ также является подсимметрией.

Б. Если $(X, \beta^i\Delta_i)$ – подсимметрия и Y является симметрией подсистемы $\beta^i\Delta_i$, то $(X, Y(\beta^i\Delta_i))$ также является подсимметрией.

В. Если $(X, \beta^i\Delta_i)$ является подсимметрией и Y является симметрией и системы, и ее подсистемы $\beta^i\Delta_i$, тогда $([X, Y], \beta^i\Delta_i)$ также является подсимметрией.

4.1. Нахождение подсимметрий. Алгоритм нахождения подсимметрий заданной системы аналогичен алгоритму нахождения ее регулярной симметрии. Для нахождения подсимметрий $(X, \beta^i\Delta_i)$ (т. е. инфинитезимальей $\alpha^i(x^j, u^j, u_k^j, \dots)$ оператора X (2.2) и коэффициентов β^i) следует решить условие инвариантности (3.5) для X и β^i , иными словами,

$$\beta^i X\Delta_i|_{\Delta_1=\Delta_2=0} = 0. \quad (4.1)$$

Для оценки левой части уравнения (4.1) на решениях необходимо решить систему (2.3) в отношении производных функций высших порядков и подставить эти выражения в (4.1). Все остальные производные при этом становятся независимыми переменными. Приравнявая соответствующие коэффициенты к нулю, мы получаем переопределенную систему, билинейную по α^i и β^i . Из-за наличия функций β^i определяющие уравнения для подсимметрий являются нелинейными.

5. ПРИМЕРЫ

5.1. Дилатационно-инвариантные подсистемы. Система Захарова

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= i\psi_t + \nabla^2 \psi - n\psi = 0, \\ \Delta_2 &= (c^{-2} \partial_t^2 - \nabla^2)n + \nabla^2(|\psi|^2) = 0\end{aligned}\quad (5.1)$$

является дилатационно-инвариантной относительно единственной симметрии

$$X = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \psi \frac{\partial}{\partial \psi} - \psi^* \frac{\partial}{\partial \psi^*} - 2n \frac{\partial}{\partial n}. \quad (5.2)$$

Однако эта система имеет множество дилатационных подсимметрий, включая

$$\begin{aligned}(X_1, \Delta_1) : \quad X_1 &= \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \psi^* \frac{\partial}{\partial \psi^*}, \\ (X_2, \Delta_2) : \quad X_2 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + x^i \frac{\partial}{\partial x^i} - n \frac{\partial}{\partial n}, \\ (X_3, \Delta_2) : \quad X_3 &= t \frac{\partial}{\partial t} + x^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \\ (X_4, \Delta_2) : \quad X_4 &= 2n \frac{\partial}{\partial n} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \psi^* \frac{\partial}{\partial \psi^*}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

В частности, X_1 существует, поскольку Δ_1 является линейным уравнением для ψ . Данная “эффективная линейность” подсистем также возникает в уравнениях Навье–Стокса

$$\begin{aligned}\Delta_u &= \mathbf{u}_t + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla P - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \\ \Delta_4 &= \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Первые три уравнения являются нелинейными по вектору скорости $\mathbf{u}$, но они могут быть переформулированы как линейные в терминах вектора вихря $\omega \equiv \nabla \times \mathbf{u}$:

$$\nabla \times \Delta_u = (\nabla \times \mathbf{u})_t + \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}) - \nu \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}) = 0. \quad (5.5)$$

Более точно, если определить вихрь добавлением уравнения $\Delta_\omega = \omega - \nabla \times \mathbf{u}$ к системе Навье–Стокса, можно представить уравнения Навье–Стокса как нелокальную систему:

$$\begin{aligned}\Delta_u &\equiv \mathbf{u}_t + \omega \times \mathbf{u} + \nabla P - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \\ \Delta_v &\equiv \omega_t + \nabla \times (\omega \times \mathbf{u}) - \nu \nabla^2 \omega = 0, \\ \Delta_4 &= \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \Delta_\omega &= \omega - \nabla \times \mathbf{u} = 0.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Поскольку Δ_u и Δ_v являются эффективно линейными уравнениями по $\mathbf{u}$, P и ω соответственно, система Навье–Стокса естественным образом обладает следующими дилатационными подсимметриями:

$$\begin{aligned}(X_u, \Delta_u) : \quad & u^i \frac{\partial}{\partial u^i} + P \frac{\partial}{\partial P}, \\ (X_v, \Delta_v) : \quad & \omega^i \frac{\partial}{\partial \omega^i}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Напротив, система Дэви–Стьюартсона

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= i\psi_t + c_0\psi_{xx} + \psi_{yy} - (c_1|\psi|^2 + c_2\varphi_x)\psi = 0, \\ \Delta_2 &= \varphi_{xx} + \varphi_{yy} - (|\psi|^2)_x = 0\end{aligned}\tag{5.8}$$

является нелинейной по ψ и имеет меньше подсимметрий. Она дилатационно-инвариантна относительно единственной симметрии

$$X = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - \psi \frac{\partial}{\partial \psi} - \psi^* \frac{\partial}{\partial \psi^*} - \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}.\tag{5.9}$$

Единственная дилатационная подсимметрия Δ_1 – это (X, Δ_1) , и поскольку уравнение Δ_2 линейно по φ , оно имеет дополнительные дилатационные подсимметрии:

$$\begin{aligned}(X_1, \Delta_2) : \quad & X_1 = 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \psi^* \frac{\partial}{\partial \psi^*}, \\ (X_2, \Delta_2) : \quad & X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

5.2. Линейные подсистемы. В случае нелинейной системы все возможные линейные подсистемы единственным образом определены подсимметриями системы с точностью до возможных неоднородных членов. Например, система Бумерона

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= u_t - \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_x = 0, \\ \Delta &= \mathbf{v}_{xt} - u_{xx}\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{v}_x - 2\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) = 0,\end{aligned}\tag{5.11}$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, имеет подсимметрию

$$(X, \Delta_1) : \quad X = f(x, t) \frac{\partial}{\partial u} + g^i(x, t) \frac{\partial}{\partial v^i},\tag{5.12}$$

где f и $\mathbf{g}$ являются произвольными решениями линейного уравнения $f_t - \mathbf{b} \cdot \mathbf{g}_x = 0$. Если $X\Omega[u, \mathbf{v}] = 0$, то $\Omega[u, \mathbf{v}] = 0$ должно быть эквивалентно $\Delta_1[u, \mathbf{v}] + h(x, t)$ для некоторой функции $h(x, t)$.

Аналогично система Навье–Стокса (5.4) имеет подсимметрию

$$(Y, \Delta_4) : \quad Y = f^i(x, t) \frac{\partial}{\partial u^i} + h(x, t) \frac{\partial}{\partial P},\tag{5.13}$$

где h является произвольной функцией, а $\mathbf{f}$ является произвольным решением линейного уравнения $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$. Этот факт однозначно определяет уравнение вида $\Omega[\mathbf{u}, P] = 0$ с точностью до возможного неоднородного члена.

6. ДЕФОРМАЦИИ СИММЕТРИИ

Хорошо известно (см., например, [1], [2]), что применение преобразования симметрии к закону сохранения вновь приводит к закону сохранения, который может не быть новым. Рассмотрим вновь систему (2.3) ((3.6) с $n = q = 2$). Предположим, что она имеет закон сохранения вида

$$D_1 A^1 + D_2 A^2|_{\Delta=0} = 0, \quad (6.1)$$

где A – некоторые функции $(x_i, u^i, u_j^i, \dots)$. Эквивалентно существуют Γ такие, что

$$D_i A^i = \Gamma^j \Delta_j + \Gamma^{jk} D_k \Delta_j + \dots. \quad (6.2)$$

Если X является симметрией данной системы, то, применяя оператор X к данному равенству, используя правила Лейбница и применяя коммутационную формулу $XD_i = D_i X$, мы имеем

$$D_i (XA^i) = (X\Gamma^j) \Delta_j + \Gamma^j (X\Delta_j) + (X\Gamma^{jk}) D_k \Delta_j + \Gamma^{jk} D_k (X\Delta_j) + \dots. \quad (6.3)$$

Поскольку X является симметрией, правая часть (6.3) равна нулю на решениях:

$$D_i (XA^i)|_{\Delta=0} = 0, \quad (6.4)$$

что является законом сохранения. Векторное поле X деформирует закон сохранения $D_i A^i$ в закон сохранения $D_i (XA^i)$. В зависимости от X и Γ данный закон сохранения может быть тривиальным (без сохраняющихся интегралов), эквивалентным закону (6.1) или полностью отличным от него.

Рассмотрим обратную задачу и установим, возможно ли деформировать два закона сохранения $D_i A^i$ и $D_i P^i$ друг в друга, используя преобразования симметрии X так, что $P^i = XA^i$. Общий ответ на этот вопрос является отрицательным, поскольку набор локальных преобразований симметрии обычно довольно ограничен. Даже для вариационных задач с взаимно однозначным соответствием между вариационными симметриями и локальными законами сохранения [1] часто не существует соответствующей деформации симметрии. Рассмотрим в качестве примера уравнение Хопфа (Эйлера, Бюргерса) для $u(x, t)$

$$\Delta = u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 \right)_x = 0. \quad (6.5)$$

Само по себе это уравнение представляет собой закон сохранения $D_i A^i = 0$. Оно также обладает бесконечным числом законов сохранения $D_i P^i = 0$ [10]:

$$f''(u) \Delta = (f'(u))_t + (u f'(u) - f(u))_x = 0, \quad (6.6)$$

где $f(u)$ является произвольной функцией ($f'' \neq 0$). Легко показать, что не существует симметрии $X = \alpha \partial_u$ для уравнения (6.5) такой, что $P^i = XA^i$. Действительно, в данном случае

$$\begin{aligned} P^t &= XA^t = Xu = \alpha = f'(u), \\ P^x &= XA^x = X \left(\frac{u^2}{2} \right) = u\alpha = u f'(u) - f(u), \end{aligned} \quad (6.7)$$

что, очевидно, невозможно удовлетворить при $f(u) \neq 0$. Добавление калибровочного преобразования $P^t \rightarrow P^t - D_x R$, $P^x \rightarrow P^x + D_t R$ с произвольной функцией R не изменяет этот результат.

Еще одним примером является уравнение синус-Гордон в следующем виде (нелокальная формулировка уравнения $u_{xt} = \sin u$):

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= u_x - v = 0, \\ \Delta_2 &= v_t - \sin u = 0.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Для данной системы существуют три точечные симметрии

$$\begin{aligned}X_1 &= \partial_t, \\ X_2 &= \partial_x, \\ X_3 &= t \partial_t - x \partial_x + v \partial_v.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Система синус-Гордон (6.8) имеет только один закон сохранения с потоками низких порядков:

$$v \Delta_2 - \sin u \Delta_1 = \left(\frac{1}{2} v^2 \right)_t + (\cos u)_x = 0.\tag{6.10}$$

Однако можно показать, что точечные симметрии X данной системы (6.9) деформируют нетривиальный закон сохранения (6.10) в тривиальный. Например, используя вертикальную форму X_1 , $X_1 = -u_t \partial_u - v_t \partial_v$, имеем

$$X_1(v \Delta_2 - \sin u \Delta_1) = -(v v_t)_t + (u_t \sin u)_x = -D_t(v \Delta_2 - \sin u \Delta_1).\tag{6.11}$$

Это тривиальный закон сохранения, его поток исчезает на решениях. Таким образом, деформация симметрии X не существует.

6.1. Деформации подсимметрии и обратная задача. Возможности деформации законов сохранения друг в друга у подсимметрий намного выше, чем у классических симметрий. Покажем, что во многих случаях, когда *деформации подсимметрии* законов сохранения существуют и являются взаимно однозначными. В этих случаях подсимметрии обеспечивают эффективный подход для генерирования новых законов сохранения дифференциальной системы.

Чтобы продемонстрировать деформации закона сохранения для подсимметрии, напомним равенство

$$D_i(XF^i)|_{\Delta_1=\Delta_2=0} = 0,\tag{6.12}$$

которое выражает инвариантность подсистемы системы (2.3) ((3.6) с $n = q = p = 2$), имеющей вид закона сохранения $\beta^i \Delta_i = D_i F^i$ в отношении подсимметрии X . Но условие (6.12) является законом сохранения с деформированными потоками XF^i . Следовательно, аналогично симметриям подсимметрии деформируют законы сохранения в законы сохранения, а коммутационное тождество $XD_i = D_i X$ делает эту деформацию возможной. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(X, \beta^i \Delta_i)$ является подсимметрией. Если $\beta^i \Delta_i = D_i F^i$ является законом сохранения, тогда $X(\beta^i \Delta_i) = D_i(XF^i)$ также представляет собой закон сохранения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для проверки того, является ли $D_i(XF^i)$ нетривиальным законом сохранения, проведем расчет его характеристики. Поскольку $(X, \beta^i \Delta_i)$ является подсимметрией, существуют такие Γ , что

$$X(\beta^i \Delta_i) = \Gamma^{iI} D_I \Delta_i = [(-D)_I \Gamma^{iI}] \Delta_i + D_j \Phi_I^j [\Gamma^{iI}, \Delta_i], \quad (6.13)$$

где $(-D)_I = (-D)_{I_1} \cdots (-D)_{I_k}$ – сопряженный оператор, а Φ_I^j – билинейное выражение, которое обращается в нуль при $\Delta = 0$ (т.е. тривиальный поток), см. [11]. Следовательно,

$$D_i(XF^i) = [(-D)_I \Gamma^{iI}] \Delta_i + D_j \Phi_I^j [\Gamma^{iI}, \Delta_i]. \quad (6.14)$$

Этот закон сохранения является нетривиальным, если его характеристика $(-D)_I \Gamma^{iI}$ ненулевая.

Вновь рассмотрим обратную задачу деформирования закона сохранения (6.10) в себя, но на этот раз не преобразованием симметрии, а с использованием некоторого векторного поля $X = \alpha \partial_u + \beta \partial_v$. Если такое векторное поле существует, оно должно удовлетворять следующей системе:

$$v\beta = \frac{1}{2}v^2 - D_x R, \quad (6.15)$$

$$-\sin u \alpha = \cos u + D_t R,$$

где R представляет собой произвольную функцию, которую мы выбираем таким образом, чтобы существовало решение. Можно видеть, что выбор $\beta = v/2$, $\alpha = -\operatorname{ctg} u$, $R = 0$ удовлетворяет системе (6.15), а векторное поле X деформирует (6.10) в себя. Поскольку левая часть уравнения (6.10) равна нулю на решениях, можно также заключить, что $(X, v \Delta_2 - \sin u \Delta_1)$ является подсимметрией. Таким образом, подсимметрия $X = -\operatorname{ctg} u \partial_u + v \partial_v / 2$ деформирует закон сохранения (6.10) в себя. Аналогичное заключение может быть сделано в более общей ситуации.

Пусть $D_t P + D_x Q = 0$ представляет собой закон сохранения системы (6.8). Аналогично нашему примеру можно заключить, что преобразование

$$X = -\frac{1}{\sin u} Q \partial_u + \frac{1}{v} P \partial_v \quad (6.16)$$

деформирует закон сохранения (6.10) в любой закон сохранения системы синус-Гордон: $D_t P + D_x Q = 0$, это означает, что $(X, v \Delta_2 - \sin u \Delta_1)$ является подсимметрией.

Таким образом, набор подсимметрий уравнения синус-Гордон отображает один из его законов сохранения на полный набор законов сохранения. Данное соответствие между подсимметриями и законами сохранения является однозначным, если наши преобразования подсимметрии X определены с точностью до векторных (калибровочных) полей вида

$$X_R = -\frac{1}{\sin u} D_t R \partial_u - \frac{1}{v} D_x R \partial_v, \quad (6.17)$$

где R – произвольная функция.

Причиной того, что мы смогли установить однозначное соответствие между подсимметриями и законами сохранения (с точностью до калибровочных преобразований), является то, что закон сохранения (6.10) “достаточно гибкий”, что позволяет решить деформационную систему (6.15) для X . Аналогичное построение возможно и в более общих ситуациях.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что двумерная система (3.6) с двумя независимыми переменными ($n = q = p = 2$) обладает нетривиальным законом сохранения вида*

$$D_1 A^1(x, u) + D_2 A^2(x, u) = 0 \quad (6.18)$$

так, что

$$|\partial A| := \frac{\partial(A^1, A^2)}{\partial(u^1, u^2)} \neq 0. \quad (6.19)$$

Тогда для каждого закона сохранения $D_i P^i = 0$ системы существует подсимметрия (6.18) вида

$$X = \frac{1}{|\partial A|} [(A_{u^2}^2 P^1 - A_{u^2}^1 P^2) \partial_{u^1} + (A_{u^1}^1 P^2 - A_{u^1}^2 P^1) \partial_{u^2}], \quad (6.20)$$

которая деформирует $D_i A^i$ в $D_i P^i$. Данная подсимметрия является единственной с точностью до калибровочной подсимметрии ($X_R, D_i A^i$) вида

$$X_R = \frac{1}{|\partial A|} [-(A_{u^2}^2 D_2 R + A_{u^2}^1 D_1 R) \partial_{u^1} + (A_{u^1}^1 D_1 R + A_{u^1}^2 D_2 R) \partial_{u^2}]. \quad (6.21)$$

Иногда говорят, что законы сохранения типа (6.18) приводят к гидродинамическим интегралам [12].

Существует аналогичный результат для дифференциальных систем n уравнений для q функций $u^a(x_1, \dots, x_p)$. Закон сохранения $D_i A^i(x, u) = 0$ может быть деформирован в любой закон сохранения $D_i P^i = 0$ с помощью подсимметрии, единственной с точностью до калибровочной подсимметрии X_R , если ранг якобиана $\partial A / \partial u$ равен p . Теорема 2 формулируется для $n = p = q = 2$.

Рассмотрим нелинейную телеграфную систему, изученную в работе [13] для $u, v = f(x, t)$:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= u_t - v_x = 0, \\ \Delta_2 &= v_t - F(u)u_x - G(u), \end{aligned} \quad (6.22)$$

что является нелокальной формулировкой нелинейного уравнения телеграфного типа:

$$u_{tt} - F(u)u_{xx} - F'(u)u_x^2 - G'(u)u_x = 0, \quad (6.23)$$

где F и G – произвольные функции (см. [13] и ссылки в этой работе).

При заданном законе сохранения (6.22),

$$D_t P + D_x Q = 0, \quad (6.24)$$

найдем его возможную деформацию векторным полем подсимметрии

$$X = \alpha \partial_u + \beta \partial_v \quad (6.25)$$

из подсистемы Δ_1 .

Для системы (6.22) Δ_1 является законом сохранения (6.18) с $A^1 = u$, $A^2 = -v$, $x_1 = t$, $x_2 = x$. Имеем $\partial(A^1, A^2)/\partial(u, v) = -1$, так что удовлетворяется условие (6.19), и мы можем применить теорему 2, а это означает, что мы можем решить уравнения деформации

$$\begin{aligned} \alpha &= P - D_x R, \\ -\beta &= Q + D_t R. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Таким образом, $X = P \partial_u - Q \partial_v$ является единственным векторным полем подсимметрии, соответствующим $P_t + Q_x = 0$ с точностью до калибровочного преобразования в форме $X_R = -D_x R \partial_u - D_t R \partial_v$. Следовательно, нелинейная телеграфная система (6.22) представляет собой пример системы, для которой все законы сохранения могут быть генерированы с помощью набора подсимметрий из единственного закона сохранения (Δ_1). Существует много систем с нелокальными формулировками, которые допускают соответствие между подсимметрией и законом сохранения. Очевидное обобщение (6.22) – это система с Δ_2 , замененным на $v_t - F(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots)$. В общем случае ключевым условием для рассмотрения данной нелокальной формулировки является условие (6.19), а Δ_1 в (6.22) является типичным примером, который удовлетворяет данному требованию.

6.2. Подсимметрии нелинейной телеграфной системы. В [13], [14] было проанализировано соответствие между классическими точечными симметриями Ли и низшими законами сохранения для нелинейной телеграфной системы (6.22). Они продемонстрировали, что для некоторых функций $F(u)$ и $G(u)$ набор законов сохранения данной системы шире, чем набор ее симметрий. Они заключили, что в этих случаях симметрии системы (6.22) не генерируют все ее законы сохранения.

Однако, как следует из теоремы 2 и уравнений деформации (6.26), *любой закон сохранения (6.24) системы (6.22) может быть сгенерирован подсимметрией* (X, Δ_1) , где $X = P \partial_u - Q \partial_v$. Действительно,

$$X \Delta_1 = X(u_t - v_x) = D_t P - D_x(-Q). \quad (6.27)$$

В качестве явного примера рассмотрим следующие четыре закона сохранения системы (6.22) для $F(u) = G(u) = \operatorname{tg} u$ [14]:

$$\begin{aligned} P_{1\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos u)^{\pm 1} e^{u \pm 2x + \sqrt{2}(v \mp t)}, \\ Q_{1\pm} &= \pm \frac{1}{2} (\operatorname{tg} u \mp 1) (\cos u)^{\pm 1} e^{u \pm 2x + \sqrt{2}(v \mp t)}, \\ P_{2\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos u)^{\pm 1} e^{u \pm 2x - \sqrt{2}(v \mp t)}, \\ Q_{2\pm} &= \pm \frac{1}{2} (\operatorname{tg} u \mp 1) (\cos u)^{\pm 1} e^{u \pm 2x - \sqrt{2}(v \mp t)}. \end{aligned}$$

Половина этих законов сохранения учитывается зеркальной симметрией $(t, v) \rightarrow (-t, -v)$, которая по-прежнему оставляет два закона сохранения, которые не могут быть получены с помощью точечных симметрий ∂_t и ∂_x . Однако нетрудно найти подсимметрии, которые генерируют данные законы сохранения:

$$\begin{aligned} X_{1\pm} &= \frac{1}{2} (\cos u)^{\pm 1} e^{u \pm 2x + \sqrt{2}(v \mp t)} [\partial_u + \sqrt{2}(1 \mp \operatorname{tg} u) \partial_v], \\ X_{2\pm} &= \frac{1}{2} (\cos u)^{\pm 1} e^{u \pm 2x - \sqrt{2}(v \mp t)} [\partial_u + \sqrt{2}(1 \mp \operatorname{tg} u) \partial_v]. \end{aligned}$$

В качестве другого примера рассмотрим случай, когда $F(u)$ является произвольной функцией, а $G(u) = u$ (см. табл. 1 в работе [14]). Закон сохранения, который не

может быть получен с помощью классических симметрий

$$P = \left(x - \frac{t^2}{2}\right)u + tv, \quad Q = \left(\frac{t^2}{2} - x\right)v - t \int^u F(s) ds,$$

может быть получен с помощью подсимметрии

$$X = \left[\left(x - \frac{t^2}{2}\right)u + tv\right] \partial_u + \left[\left(x - \frac{t^2}{2}\right)v + t \int^u F(s) ds\right] \partial_v.$$

В случае $F(u) = e^u + \alpha^2$ и $G(u) = e^u$ система (6.22) имеет четыре закона сохранения (см. табл. 6 в работе [14]), но только три из них могут быть получены с помощью преобразований симметрии ∂_t , и $(t, v) \rightarrow (-t, -v)$. Оставшийся закон сохранения имеет вид

$$P = e^{x+\alpha t} \left(e^u + \frac{A^2}{2}\right),$$

$$Q = -e^{x+\alpha t} \left((A - \alpha)e^u + \frac{\alpha A^2}{2}\right),$$

где $A = 2\alpha(x + \alpha t) + (v + \alpha u - \alpha)$. Подсимметрия, генерирующая данный закон сохранения, может быть легко получена:

$$X = e^{x+\alpha t} \left(e^u + \frac{A^2}{2}\right) \partial_u + e^{x+\alpha t} \left((A - \alpha)e^u + \frac{\alpha A^2}{2}\right) \partial_v.$$

Случай произвольного $F(u)$ и $G(u) = 1/u$ (см. табл. 1 в работе [14]) соответствует распространению волны в сверхупругом однородном стержне с экспоненциально изменяющимся поперечным сечением [15]. Закон сохранения, который не может быть получен из точечной симметрии

$$P = \left(x + \frac{v^2}{2}\right)u + \int^u \int^s z F(z) dz ds,$$

$$Q = -xv - \frac{v^3}{6} - v \int^u s F(s) ds,$$

может быть сгенерирован с использованием следующей подсимметрии:

$$X = \left[\left(x + \frac{v^2}{2}\right)u + \int^u \int^s z F(z) dz ds\right] \partial_u + \left[xv + \frac{v^3}{6} + v \int^u s F(s) ds\right] \partial_v.$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введено понятие подсимметрии дифференциальной системы, обсуждается геометрический смысл и основные свойства подсимметрий. Показано, что подсимметрии являются естественным инструментом для исследования преобразований между законами сохранения системы. Приведено обсуждение механизма деформации законов сохранения с использованием подсимметрий, а также возможности подсимметрий генерировать все законы сохранения системы.

Список литературы

- [1] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics, **107**, Springer, New York, 2000.
- [2] G. W. Bluman, A. Cheviakov, S. Anco, *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, **168**, Springer, New York, 2010.
- [3] V. Rosenhaus, R. Shankar, “Sub-symmetries and the decoupling of differential systems”, to be submitted for publication.
- [4] G. W. Bluman, J. D. Cole, “The general similarity solution of the heat equation”, *J. Math. Mech.*, **18**:11 (1969), 1025–1042.
- [5] В. И. Фущич, “Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики”, *Укр. матем. журн.*, **43**:11 (1991), 1456–1470.
- [6] P. J. Olver, P. Rosenau, “Group-invariant solutions of differential equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **47**:2 (1987), 263–278.
- [7] D. Levi, P. Winternitz, “Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation”, *J. Phys. A*, **22**:15 (1989), 2915–2924.
- [8] P. J. Olver, E. M. Vorob’ev, “Nonclassical and conditional symmetries”, *Lie Group Analysis of Differential Equations*, v. 3: *New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods*, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994, 291–328.
- [9] G. Cicogna, G. Gaeta, “Partial Lie-point symmetries of differential equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:3 (2001), 491–512.
- [10] В. Розенхаус, “О бесконечном множестве законов сохранения для бесконечномерных симметрий”, *ТМФ*, **151**:3 (2007), 518–528.
- [11] V. Rosenhaus, R. Shankar, “Second Noether theorem for quasi-Noether systems”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **49**:17 (2016), 175205, 22 pp.
- [12] С. П. Царев, “Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [13] G. W. Bluman, Temuerchaolu, “Comparing symmetries and conservation laws of nonlinear telegraph equations”, *J. Math. Phys.*, **46**:7 (2005), 073513, 14 pp.
- [14] G. W. Bluman, “Conservation laws for nonlinear telegraph equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **310**:2 (2005), 459–476.
- [15] A. Jeffrey, “Acceleration wave propagation in hyperelastic rods of variable cross-section”, *Wave Motion*, **4**:2 (1982), 173–180.