Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. К. Гупта, К. Сингла, Симметричный анализ систем нелинейных уравнений в частных производных дробного порядка по времени с переменными коэффициентами, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 3, 397–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:13:24

© 2018 г.

Р. К. Гупта^{*†}, К. Сингла[‡]

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С использованием метода симметрий Ли исследованы некоторые известные системы нелинейных уравнений в частных производных с дробными производными по времени и переменными коэффициентами. Получены их симметрии и редукции к системам нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Ключевые слова: симметричный анализ, системы нелинейных уравнений дробного порядка, дифференциальные уравнения в частных производных с переменными коэффициентами, операторы Эрдейи–Кобера.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9447>

1. ВВЕДЕНИЕ

Вначале изучение производных дробного порядка ограничивалось только математическим сообществом. Ученым потребовалось много времени, чтобы признать тот факт, что дробные производные имеют потенциал для описания природных явлений [1]–[3]. Математическое моделирование систем в терминах дробных производных приводит к дифференциальным уравнениям дробного порядка и, следовательно, к необходимости их решения [3]. Дифференциальные уравнения дробного порядка имеют большое значение из-за их широкого применения в физике, при

Р. К. Гупта благодарит University Grants Commission Центрального университета Пенджаба (Бхатинда, Индия) за поддержку данного исследования в рамках Research Award Scheme (грант F.30-105/2016 (SA-II)).

^{*}Department of Mathematics and Statistics, Central University of Punjab, Bathinda, Punjab, India. E-mail: rajeshateli@gmail.com

[†]Department of Mathematics, School of Physical and Mathematical Sciences, Central University of Haryana, Mahendergarh, Haryana, India

[‡]School of Mathematics, Thapar University, Patiala, Punjab, India.
E-mail: komalsingla11@gmail.com

изучении процессов памяти, аномальной диффузии, квантовой механики, сложных сред [1]–[3].

Хорошо известным подходом к изучению дифференциальных уравнений дробного порядка является метод симметрий Ли. Первоначально он был предложен для дифференциальных уравнений целого порядка [4]–[6], а затем получил свое развитие в случае дробного порядка [7]–[10]. В недавнем исследовании [11] было предложено применять метод симметрий к системам дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), содержащих дробные производные по времени. Однако ДУЧП с переменными коэффициентами широко не обсуждались из-за сложности вычислений с участием нелокальных дробных дифференциальных операторов. С другой стороны, исследование нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами имеет важное значение, поскольку они широко применяются в физике, описывая, например, распространение нелинейных диспергирующих волн в неоднородных средах [12], [13]. С использованием метода симметрий были изучены только некоторые одиночные ДУЧП с переменными коэффициентами [14]. Новизна нашего исследования состоит в том, что на сегодняшний день в литературе не обсуждался симметричный анализ нелинейных ДУЧП и систем ДУЧП высокого порядка с дробными производными по времени. Таким образом, нашей основной целью является изучение таких ДУЧП и систем ДУЧП с помощью метода симметрий Ли, где дробные производные имеют тип Римана–Лиувилля.

Структура статьи следующая. Раздел 2 посвящен инфинитезимальным симметриям и редукциям некоторых нелинейных ДУЧП дробного порядка с переменными коэффициентами, а именно дробного уравнения КдФ–Бюргерса–Курамото и дробного обобщенного уравнения КдФ седьмого порядка. В разделе 3 рассматривается применение симметричного анализа к трем системам нелинейных уравнений дробного порядка: к одному из вариантов системы Буссинеска, системе связанных уравнений КдФ и системе Хироты–Сацумы для связанных уравнений КдФ. Раздел 4 содержит заключение.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ДУЧП С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПО ВРЕМЕНИ И ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Цель данного раздела – представить применение метода симметрий Ли [9], [10] к двум нелинейным ДУЧП с дробными производными высших порядков и переменными коэффициентами. В рассматриваемых уравнениях мы полагаем, что порядок α производной по времени удовлетворяет неравенству $0 < \alpha < 1$, а коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $e(t)$, $f(t)$, $g(t)$ являются ненулевыми функциями от t . Явные симметрии Ли этих уравнений позволяют редуцировать ДУЧП к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) дробного порядка в терминах операторов Эрдейи–Кобера.

2.1. Уравнение КдФ–Бюргерса–Курамото с дробной производной по времени. Уравнение КдФ–Бюргерса–Курамото [15], [16] имеет широкий диапазон применений ко многим физическим явлениям, особенно в теории солитонов. Уравнение КдФ–Бюргерса–Курамото четвертого порядка с дробной производной по времени [15] записывается как

$$\partial_t^\alpha u + a(t)uu_x + b(t)u_{xx} + c(t)u_{3x} + u_{4x} = 0, \quad (1)$$

где $u_{jx} = \partial^j u / \partial x^j$, а $\partial_t^\alpha u = \partial^\alpha u / \partial t^\alpha$ обозначает дробную производную Римана–Лиувилля [1], [3]; нижние индексы здесь и далее обозначают частные производные. Предположим, что генератор симметрии, допустимой для этого уравнения, имеет вид

$$X = \xi(x, t, u) \partial_x + \tau(x, t, u) \partial_t + \eta(x, t, u) \partial_u. \quad (2)$$

Тогда критерий инвариантности для уравнения (1) можно записать как

$$\begin{aligned} & [\eta^{\alpha, t} + a(t)(\eta u_x + u \eta^x) + b(t)\eta^{2x} + c(t)\eta^{3x} + \\ & + \tau(a'(t)u u_x + b'(t)u_{2x} + c'(t)u_{3x}) + \eta^{4x}] \Big|_{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя инфинитезимальные операторы продолжения [8]–[10] и сравнивая коэффициенты при различных производных и степенях функции u , получаем следующую переопределенную систему нелинейных ДУЧП целого и дробного порядка:

$$\begin{aligned} & \xi_t = \xi_u = 0, \quad \tau_x = \tau_u = 0, \quad \eta_{uu} = 0, \\ & \alpha \tau_t - 4\xi_x = 0, \quad \binom{\alpha}{n} \partial_t^n \eta_u - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1} \tau = 0, \\ & a(t)u(\alpha \tau_t - \xi_x) + \eta a(t) + \tau a'(t)u + \\ & + b(t)(2\eta_{xu} - \xi_{xx}) + c(t)(3\eta_{xxu} - \xi_{xxx}) + (4\eta_{xxu} - \xi_{xxx}) = 0, \\ & b(t)(\alpha \tau_t - 2\xi_x) + \tau b'(t) + 3c(t)(\eta_{xu} - \xi_{xx}) + (6\eta_{xxu} - 4\xi_{xxx}) = 0, \\ & c(t)u(\alpha \tau_t - 3\xi_x) + \tau c'(t)u + (4\eta_{xu} - 6\xi_{xx}) = 0, \\ & \partial_t^\alpha \eta - u \partial_t^\alpha \eta_u + a(t)u \eta_x + b(t)\eta_{xx} + c(t)u \eta_{xx} + \eta_{4x} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь D_t обозначает оператор полной производной, а штрихом обозначены производные первого порядка. Решение системы (4) с начальным условием $\tau|_{t=0} = 0$ имеет вид

$$\xi = \frac{C_1 x}{4} + C_2, \quad \tau = \frac{C_1 t}{\alpha}, \quad \eta = C_3 u, \quad (5)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} & a(t) \left(C_3 + \frac{3C_1}{4} \right) + \left(\frac{C_1 t}{\alpha} \right) a'(t) = 0, \\ & b(t) \left(\frac{C_1}{2} \right) + \left(\frac{C_1 t}{\alpha} \right) b'(t) = 0, \quad c(t) \left(\frac{C_1}{4} \right) + \left(\frac{C_1 t}{\alpha} \right) c'(t) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, генератор симметрий первого порядка, допускающихся дробным ДУЧП (1), можно записать следующим образом:

$$X = \left(\frac{C_1 x}{4} + C_2 \right) \partial_x + \left(\frac{C_1 t}{\alpha} \right) \partial_t + (C_3 u) \partial_u. \quad (7)$$

Отсюда получаются ассоциированные векторные поля

$$V_1 = \frac{x}{4} \partial_x + \frac{t}{\alpha} \partial_t, \quad V_2 = \partial_x, \quad V_3 = u \partial_u. \quad (8)$$

Поскольку любая линейная комбинация генераторов также является инфинитезимальным генератором, для любой линейной комбинации вышеупомянутых векторных полей можно получить симметричную редукцию вида

$$a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3. \quad (9)$$

Однако таких возможных линейных комбинаций бесконечно много, поэтому необходимо определить те из них, которые порождают неэквивалентные симметричные редукции. Это приводит к понятию оптимальной системы [4]–[6]. Оптимальная система генераторов (8) имеет следующие компоненты: V_1 , $V_3 + rV_1$.

Следующим шагом является вычисление симметричных редукций для двух компонент оптимального множества. Напомним, что левый дробный дифференциальный оператор Эрдейи–Кобера задается как [9], [17]

$$(\mathcal{P}_\delta^{\zeta, \alpha} h)(z) := \left(\prod_{j=0}^{m-1} \left(\zeta + j - \frac{1}{\delta} z \frac{d}{dz} \right) \right) (\mathcal{K}_\delta^{\zeta + \alpha, m - \alpha} h)(z), \quad (10)$$

где

$$z > 0, \quad \delta > 0, \quad \alpha > 0, \quad m = \begin{cases} [\alpha] + 1, & \text{если } \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha, & \text{если } \alpha \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (11)$$

и

$$(\mathcal{K}_\delta^{\zeta, \alpha} h)(z) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (s-1)^{\alpha-1} s^{-(\zeta+\alpha)} h(zs^{1/\delta}) ds, & \text{если } \alpha > 0, \\ h(z), & \text{если } \alpha = 0, \end{cases} \quad (12)$$

есть дробный интегральный оператор Эрдейи–Кобера.

Для генератора V_1 , используя переменные и преобразования подобия из табл. 1, можно провести редукцию дробного ДУЧП (1), как описано в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $\alpha > 0$ преобразование $u = F(z)$ с $z = xt^{-\alpha/4}$ редуцирует уравнение (1) к следующему нелинейному ОДУ дробного порядка:

$$(\mathcal{P}_{4/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} F)(z) + aFF'(z) + bF''(z) + cF'''(z) + F''''(z) = 0, \quad (13)$$

где $(\mathcal{P}_{4/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} F)(z)$ – дробный дифференциальный оператор Эрдейи–Кобера (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего получим дробную производную Римана–Лиувилля функции $u = F(z)$ при $z = xt^{-\alpha/4}$ для всех α , удовлетворяющих неравенству $n-1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}$):

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} F(xs^{-\alpha/4}) ds \right]. \quad (14)$$

Пусть $w = t/s$, тогда мы можем переписать последнее выражение как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^\infty (w-1)^{n-\alpha-1} w^{-(n-\alpha+1)} F(zw^{\alpha/4}) dw \right] = \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} [t^{n-\alpha} (\mathcal{K}_{4/\alpha}^{1, n-\alpha} F)(z)]. \end{aligned} \quad (15)$$

ТАБЛИЦА 1. Симметричные редукции дробного ДУЧП (1) к нелинейным ОДУ дробного порядка.

Генераторы	Инварианты	Анзац	Переменные коэффициенты	Редуцированные дробные ОДУ
V_1	$(xt^{-\alpha/4}, u)$	$u = F(xt^{-\alpha/4})$	$a(t) = at^{-3\alpha/4},$ $b(t) = bt^{-\alpha/2},$ $c(t) = ct^{-\alpha/4}$	уравнение (13)
$V_3 + rV_1$	$(xt^{-\alpha/4}, x^{-4/r}u)$	$u = x^{4/r}F(xt^{-\alpha/4})$	$a(t) = at^{-(1+3r/4)\alpha/r},$ $b(t) = bt^{-\alpha/2},$ $c(t) = ct^{-\alpha/4}$	уравнение (20)

Это соотношение выполнено и для $\alpha = n = 1, 2, \dots$, поскольку $(\mathcal{K}_\delta^{\zeta,0}F)(z) = F(z)$. Также для дифференцируемых функций $\psi(z)$, где $z = xt^{-\alpha/4}$, должно выполняться следующее равенство:

$$t \frac{\partial}{\partial t} \psi(z) = -\frac{\alpha}{4} z \frac{d}{dz} \psi(z). \quad (16)$$

Следовательно, можно упростить выражение (15) следующим образом:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} [t^{n-\alpha} (\mathcal{K}_{4/\alpha}^{1,n-\alpha} F)(z)] = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left[t^{n-\alpha-1} \left(n - \alpha - \frac{\alpha}{4} z \frac{d}{dz} \right) (\mathcal{K}_{4/\alpha}^{1,n-\alpha} F)(z) \right]. \quad (17)$$

Повторяя данную процедуру $n - 1$ раз, получаем следующий результат:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} [t^{n-\alpha} (\mathcal{K}_{4/\alpha}^{1,n-\alpha} F)(z)] = t^{-\alpha} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \alpha + j - \frac{\alpha}{4} z \frac{d}{dz} \right) (\mathcal{K}_{4/\alpha}^{1,n-\alpha} F)(z). \quad (18)$$

Подставим это равенство в (15) и получим окончательное выражение для дробной производной по времени:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = t^{-\alpha} (\mathcal{P}_{4/\alpha}^{1-\alpha,\alpha} F)(z), \quad \alpha > 0. \quad (19)$$

Для генератора V_1 , являющегося решением уравнений (6), переменные коэффициенты можно получить, как указано в табл. 1. Это завершает доказательство теоремы.

Для генератора $V_3 + rV_1$ инвариантные решения можно найти, пользуясь табл. 1. Далее, следуя рассуждениям теоремы 1, проиллюстрируем редуцированное уравнение следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\alpha > 0$ дробное уравнение (1) можно редуцировать к нелинейному ОДУ дробного порядка

$$(\mathcal{P}_{4/\alpha}^{1-\alpha,\alpha} F)(z) + A_1(z)F(z) + A_2(z)F^2(z) + A_3(z)F'(z) + A_4(z)FF'(z) + A_5(z)F''(z) + A_6(z)F'''(z) + F''''(z) = 0, \quad (20)$$

где $A_i(z)$ ($i = 1, \dots, 6$) задаются как

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \frac{4b}{r} \left(\frac{4}{r} - 1 \right) z^{-2} + \frac{4c}{r} \left(\frac{4}{r} - 1 \right) \left(\frac{4}{r} - 2 \right) z^{-3} + \frac{12}{r} \left(\frac{4}{r} - 1 \right) \left(\frac{4}{r} - 2 \right) \left(\frac{4}{r} - 3 \right) z^{-4}, \\ A_2(z) &= \frac{4a}{r} z^{4/r-1}, \quad A_3(z) = \frac{8b}{r} z^{-1} + \frac{12c}{r} \left(\frac{4}{r} - 1 \right) z^{-2} + \frac{16}{r} \left(\frac{4}{r} - 1 \right) \left(\frac{4}{r} - 1 \right) z^{-3}, \\ A_4(z) &= az^{4/r}, \quad A_5(z) = b + \frac{12c}{r} z^{-1} + \frac{24}{r} \left(\frac{4}{r} - 1 \right) z^{-2}, \quad A_6(z) = c + \frac{16}{r} z^{-1}. \end{aligned}$$

2.2. Обобщенное уравнение КдФ седьмого порядка с дробной производной по времени. Уравнения с дробной производной по времени типа уравнения КдФ возникают во многих задачах теоретической физики, например в теории длинных волн на мелкой воде и физике плазмы [18]. Рассматриваемое нами обобщенное уравнение КдФ седьмого порядка с дробной производной по времени и переменными коэффициентами имеет вид [19]

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha u + a(t)u^3u_x + b(t)u_x^3 + c(t)uu_xu_{xx} + d(t)u^2u_{3x} + \\ + e(t)u_{xx}u_{3x} + f(t)u_xu_{4x} + g(t)uu_{5x} + u_{7x} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Определяющие уравнения можно получить, используя расширенные операторы симметрии в соответствующем критерии инвариантности и приравнявая коэффициенты. Решение полученной системы уравнений дает следующие инфинитезимальные величины:

$$\xi = \frac{C_1 x}{7} + C_2, \quad \tau = \frac{C_1 t}{\alpha}, \quad \eta = C_3 u, \quad (22)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные. Переменные коэффициенты должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} a(t) \left(3C_3 + \frac{6C_1}{7} \right) + \left(\frac{C_1 t}{\alpha} \right) a'(t) &= 0, & b(t) \left(2C_3 + \frac{4C_1}{7} \right) + \left(\frac{C_1 t}{\alpha} \right) b'(t) &= 0, \\ c(t) \left(2C_3 + \frac{4C_1}{7} \right) + \left(\frac{C_1 t}{\alpha} \right) c'(t) &= 0, & d(t) \left(2C_3 + \frac{4C_1}{7} \right) + \left(\frac{C_1 t}{\alpha} \right) d'(t) &= 0, \\ e(t) \left(C_3 + \frac{2C_1}{7} \right) + \left(\frac{C_1 t}{\alpha} \right) e'(t) &= 0, & f(t) \left(C_3 + \frac{2C_1}{7} \right) + \left(\frac{C_1 t}{\alpha} \right) f'(t) &= 0, \\ g(t) \left(C_3 + \frac{2C_1}{7} \right) + \left(\frac{C_1 t}{\alpha} \right) g'(t) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Соответствующие инфинитезимальные генераторы задаются как

$$V_1 = \frac{x}{7} \partial_x + \frac{t}{\alpha} \partial_t, \quad V_2 = \partial_x, \quad V_3 = u \partial_u, \quad (24)$$

и оптимальная система натянута на следующие генераторы симметрии:

$$V_1, \quad V_3 + rV_1. \quad (25)$$

В табл. 2 перечислены инварианты, генераторы преобразований подобия, переменные коэффициенты и пр. для генераторов (25). Симметричные редукции для обоих генераторов симметрии обсуждаются в следующих теоремах.

ТАБЛИЦА 2. Симметричные редукции дробного ДУЧП (21) к нелинейным ОДУ дробного порядка.

Генераторы	Инварианты	Анзац	Переменные коэффициенты	Редуцированные дробные ОДУ
V_1	$(xt^{-\alpha/7}, u)$	$u = F(xt^{-\alpha/7})$	$a(t) = at^{-6\alpha/7},$ $b(t) = bt^{-4\alpha/7},$ $c(t) = ct^{-4\alpha/7},$ $d(t) = dt^{-4\alpha/7},$ $e(t) = et^{-2\alpha/7},$ $f(t) = ft^{-2\alpha/7},$ $g(t) = gt^{-2\alpha/7}$	Уравнение (26)
$V_3 + rV_1$	$(xt^{-\alpha/7}, x^{-7/r}u)$	$u = x^{7/r}F(xt^{-\alpha/7})$	$a(t) = at^{-(3+6r/7)\alpha/r},$ $b(t) = bt^{-(2+4r/7)\alpha/r},$ $c(t) = ct^{-(2+4r/7)\alpha/r},$ $d(t) = dt^{-(2+4r/7)\alpha/r},$ $e(t) = et^{-(1+2r/7)\alpha/r},$ $f(t) = ft^{-(1+2r/7)\alpha/r},$ $g(t) = gt^{-(1+2r/7)\alpha/r}$	Уравнение (27)

ТЕОРЕМА 3. Для любого $\alpha > 0$ преобразование $u = F(z)$ с $z = xt^{-\alpha/7}$ редуцирует уравнение (21) в случае генератора V_1 к следующему нелинейному ОДУ дробного порядка:

$$(\mathcal{P}_{7/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}F)(z) + aF^3F'(z) + bF'^3(z) + cFF'F''(z) + dF^2F'''(z) + \\ + eF''F'''(z) + fF'F''''(z) + gFF''''(z) + F''''''(z) = 0, \quad (26)$$

где $(\mathcal{P}_{7/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}F)(z)$ – дробный дифференциальный оператор Эрдейи–Кобера.

ТЕОРЕМА 4. Для любого $\alpha > 0$ ДУЧП (21) с дробной производной по времени в случае генератора $V_3 + rV_1$ можно редуцировать к нелинейному ОДУ дробного порядка

$$(\mathcal{P}_{7/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}F)(z) + A_1z^{-7}F(z) + A_2z^{7/r-5}F^2(z) + A_3z^{14/r-3}F^3(z) + \frac{7a}{r}z^{21/r-1}F^4(z) + \\ + A_4z^{-6}F'(z) + A_5z^{7/r-4}FF'(z) + A_6z^{7/r-2}F'^2(z) + A_7z^{14/r-1}FF'^2(z) + \\ + A_8z^{14/r-2}F^2F'(z) + az^{21/r}F^3F'(z) + A_9z^{7/r-3}F'^2(z) + bz^{14/r}F'^3(z) + \\ + A_{10}z^{-5}F''(z) + A_{11}z^{7/r-3}FF''(z) + A_{12}z^{14/r-1}F^2F''(z) + \\ + A_{13}z^{7/r-2}F'F''(z) + \frac{21e}{r}z^{7/r-1}(F'')^2(z) + cz^{14/r}FF'F''(z) + \\ + A_{14}z^{-4}F'''(z) + A_{15}z^{7/r-2}FF'''(z) + dz^{14/r}F^2F'''(z) + \\ + A_{16}z^{7/r-1}F'F'''(z) + ez^{7/r}F''F'''(z) + A_{17}z^{-3}F''''(z) + \\ + \left(\frac{7f}{r} + g\right)z^{7/r-1}FF''''(z) + fz^{7/r}F'F''''(z) + A_{18}z^{-2}F''''''(z) + \\ + gz^{7/r}FF''''''(z) + \frac{49}{r}z^{-1}F''''''(z) + F''''''''(z) = 0, \quad (27)$$

где A_i ($i = 1, \dots, 18$) задаются как

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{823543}{r^7} - \frac{2470629}{r^6} + \frac{2941225}{r^5} - \frac{1764735}{r^4} + \frac{557032}{r^3} - \frac{86436}{r^2} + \frac{5040}{r}, \\
 A_2 &= \frac{49e}{r^2} \left(\frac{7}{r} - 1 \right)^2 \left(\frac{7}{r} - 2 \right) + \frac{7f}{r} \left(\frac{2901}{r^4} - \frac{2058}{r^3} + \frac{539}{r^2} - \frac{42}{r} \right) + \\
 &\quad + g \left(\frac{16807}{r^5} - \frac{24010}{r^4} + \frac{12005}{r^3} - \frac{2450}{r^2} + \frac{168}{r} \right) z^{7/r-5}, \\
 A_3 &= \frac{343b}{r^3} + c \left(\frac{343}{r^3} - \frac{49}{r^2} \right) + d \left(\frac{343}{r^3} - \frac{147}{r^2} \right), \\
 A_4 &= \frac{823543}{r^6} - \frac{1764735}{r^5} + \frac{1428595}{r^4} - \frac{540225}{r^3} + \frac{93982}{r^2} - \frac{5880}{r}, \\
 A_5 &= \frac{49e}{r^2} \left(\frac{245}{r^2} - \frac{84}{r} + 7 \right) + f \left(\frac{12005}{r^4} - \frac{6174}{r^3} + \frac{931}{r^2} - \frac{42}{r} \right) + \\
 &\quad + g \left(\frac{12005}{r^4} - \frac{10290}{r^3} + \frac{2695}{r^2} - \frac{210}{r} \right), \\
 A_6 &= \frac{294e}{r^2} \left(\frac{7}{r} - 1 \right), \quad A_7 = \frac{21b}{r} + \frac{14c}{r}, \\
 A_8 &= \frac{147b}{r^2} + c \left(\frac{147}{r^2} - \frac{7}{r} \right) + d \left(\frac{147}{r^2} - \frac{21}{r} \right), \quad A_9 = f \left(\frac{1372}{r^3} - \frac{588}{r^2} + \frac{56}{r} \right), \\
 A_{10} &= \frac{352947}{r^5} - \frac{504210}{r^4} + \frac{252105}{r^3} - \frac{51450}{r^2} + \frac{3528}{r}, \\
 A_{11} &= e \left(\frac{1372}{r^3} - \frac{294}{r^2} + \frac{14}{r} \right) + f \left(\frac{2058}{r^3} - \frac{294}{r^2} \right) + g \left(\frac{3430}{r^3} - \frac{1470}{r^2} + \frac{140}{r} \right), \\
 A_{12} &= \frac{7c}{r} + \frac{21d}{r}, \quad A_{13} = e \left(\frac{441}{r^2} - \frac{21}{r} \right) + f \left(\frac{294}{r^2} - \frac{42}{r} \right), \\
 A_{14} &= \frac{84035}{r^4} - \frac{72030}{r^3} + \frac{18865}{r^2} - \frac{1470}{r}, \quad A_{15} = e \left(\frac{49}{r^2} - \frac{7}{r} \right) + \frac{7f}{r} + g \left(\frac{490}{r^2} - \frac{70}{r} \right), \\
 A_{16} &= \frac{14e}{r} + \frac{28f}{r}, \quad A_{17} = \frac{12005}{r^3} - \frac{5145}{r^2} + \frac{490}{r}, \quad A_{18} = \frac{1029}{r^2} - \frac{147}{r}.
 \end{aligned}$$

3. СИСТЕМА НЕЛИНЕЙНЫХ ДУЧ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ И ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В данном разделе с использованием подхода симметрий Ли исследуются три физически значимые системы нелинейных уравнений с дробной производной по времени и переменными коэффициентами. Мы полагаем, что $0 < \alpha < 1$ и $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $e(t)$, $f(t)$, $g(t)$ – ненулевые функции от t . Основная идея состоит в том, чтобы сформулировать систематическую процедуру задания инфинитезимальных симметрий исследуемых уравнений и редуцировать эти системы к системам неэквивалентным между собой нелинейных ОДУ дробного порядка.

3.1. Вариант системы Буссинеска с дробной производной по времени.

Уравнения Буссинеска [20] играют важную роль во многих областях физики, описывая, например, колебания нелинейной струны. Они также моделируют крупномасштабные атмосферные и океанические потоки, которые отвечают за холодные фронты и струйные течения [21], [22]. Решение уравнения Буссинеска целого порядка с переменными коэффициентами было найдено с помощью метода симметрий Ли в работе [23]. Система Буссинеска с дробной производной по времени [24] и с переменными коэффициентами может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha u + a(t)v_x + b(t)uu_x + c(t)u_{xx} &= 0, \\ \partial_t^\alpha v + d(t)uv_x + e(t)vu_x + f(t)v_{xx} + g(t)u_{xxx} &= 0.\end{aligned}\quad (28)$$

Группа симметрий этой системы дает следующий критерий инфинитезимальной инвариантности:

$$\begin{aligned}&[\eta^{\alpha,t} + a(t)\phi^x + b(t)(u\eta^x + \eta u_x) + c(t)\eta^{xx} + \\&+ \tau(a'(t)v_x + b'(t)uu_x + c'(t)u_{xx})]\Big|_{(28)} = 0, \\&[\phi^{\alpha,t} + d(t)(\eta v_x + u\phi^x) + e(t)(\phi u_x + v\eta^x) + f(t)\phi^{xx} + g(t)\eta^{xxx} + \\&+ \tau(d'(t)uv_x + e'(t)vu_x + f'(t)v_{xx} + g'(t)u_{xxx})]\Big|_{(28)} = 0.\end{aligned}\quad (29)$$

При этом ассоциированный оператор симметрии имеет вид

$$X = \xi(x, t, u, v)\partial_x + \tau(x, t, u, v)\partial_t + \eta(x, t, u, v)\partial_u + \phi(x, t, u, v)\partial_v. \quad (30)$$

Подставляя операторы продолжения из работы [11] и сравнивая коэффициенты при различных частных и дробных производных функций u и v , получаем определяющие уравнения:

$$\begin{aligned}\xi_t = \xi_u = \xi_v = 0, \quad \tau_x = \tau_u = \tau_v = 0, \quad \eta_v = \eta_{uu} = 0, \quad \phi_u = \phi_{vv} = 0, \\ \binom{\alpha}{n}\partial_t^n \eta_u - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau = 0, \\ \binom{\alpha}{n}\partial_t^n \phi_v - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ a(t)(\phi_v - \eta_u + \alpha\tau_t - \xi_x) + \tau a'(t) = 0, \quad b(t)u(\alpha\tau_t - \xi_x) + b(t)\eta + \tau b'(t)u = 0, \\ c(t)(\alpha\tau_t - 2\xi_x) + \tau c'(t) = 0, \quad g(t)(\alpha\tau_t - 3\xi_x) + \tau g'(t) = 0, \\ d(t)u(\alpha\tau_t - \xi_x) + d(t)\eta + \tau d'(t)u + f(t)(2\phi_{xv} - \xi_{xx}) + g(t)(3\phi_{xv} - \xi_{xxx}) = 0, \\ e(t)v(\eta_u - \phi_v + \alpha\tau_t - \xi_x) + e(t)\phi + \tau e'(t)v = 0, \\ f(t)(\alpha\tau_t - 2\xi_x) + \tau f'(t) + 3g(t)(\phi_{xv} - \xi_{xx}) = 0, \\ \partial_t^\alpha \eta - u\partial_t^\alpha \eta_u + a(t)\phi_x + b(t)u\eta_x + c(t)\eta_{xx} = 0, \\ \partial_t^\alpha \phi - v\partial_t^\alpha \phi_v + d(t)u\phi_x + e(t)v\eta_x + f(t)\phi_{xx} + g(t)\phi_{xxx} = 0.\end{aligned}$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}\xi &= A_1 x + A_2, \quad \tau = \frac{1}{c^{1/\alpha}(t)} \left(\frac{2A_1}{\alpha} \int c^{1/\alpha}(t) dt + A_5 \right), \\ \eta &= A_3(t)u, \quad \phi = A_4(t)v,\end{aligned}\quad (31)$$

где A_1, A_2, A_5 – произвольные постоянные, а на функции $A_3(t), A_4(t)$ наложены условия

$$\tau(0) = 0, \quad A'_3(t) = A'_4(t) = \left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)\tau_{tt},$$

$$\begin{aligned} a(t)(A_3(t) - A_4(t) + \alpha\tau_t - A_1) + \tau a'(t) &= 0, & b(t)(A_3(t) + \alpha\tau_t - A_1) + \tau b'(t) &= 0, \\ d(t)(A_3(t) + \alpha\tau_t - A_1) + \tau d'(t) &= 0, & e(t)(A_3(t) + \alpha\tau_t - A_1) + \tau e'(t) &= 0, \\ f(t)(\alpha\tau_t - 2A_1) + \tau f'(t) &= 0, & g(t)(\alpha\tau_t - 3A_1) + \tau g'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Понятно, что симметрии (31) являются обобщенными в отличие от симметрий в случае целого порядка [23], поскольку система (28) дробного порядка при $\alpha = 1$ совпадает с системой целого порядка [23]. В общем случае весьма сложно далее редуцировать систему (28) к системе дробных ОДУ, используя инвариантные решения, получающиеся из ассоциированных векторных полей. На данный момент в частном случае $c(t) = c = \text{const}$ эта проблема считается решенной, но поиск редуцированной системы для общего случая продолжается. В этом частном случае с использованием условия $\tau(0) = 0$ получаем следующие симметрии:

$$\xi = A_1x + A_2, \quad \tau = \frac{2A_1t}{\alpha}, \quad \eta = A_3u, \quad \phi = A_4v. \quad (32)$$

Постоянные A_i ($i = 1, \dots, 4$) и переменные коэффициенты должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} a(t)(A_4 - A_3 + A_1) + \tau a'(t) &= 0, & b(t)(A_3 + A_1) + \tau b'(t) &= 0, \\ d(t)(A_3 + A_1) + \tau d'(t) &= 0, & e(t)(A_3 + A_1) + \tau e'(t) &= 0, \\ f(t) &= \text{const}, & g(t)(-A_1) + \tau g'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Ассоциированная алгебра Ли порождается генераторами симметрии

$$V_1 = x\partial_x + \frac{2t}{\alpha}\partial_t, \quad V_2 = \partial_x, \quad V_3 = u\partial_u, \quad V_4 = v\partial_v. \quad (33)$$

В соответствии с концепцией оптимальной системы [4]–[6] оптимальная система генераторов (33) имеет компоненты

$$\Delta_1 = V_4 + rV_3 + sV_1, \quad \Delta_2 = V_3 + pV_1, \quad \Delta_3 = V_1. \quad (34)$$

Для генератора Δ_1 симметричная редукция задается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 5. Для любого $\alpha > 0$ систему Буссинеска (28) с дробной производной по времени в случае генератора Δ_1 можно редуцировать к системе нелинейных ОДУ дробного порядка

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} F)(z) + \frac{cr}{s} \left(\frac{r}{s} - 1\right) z^{-2} F(z) + \frac{a}{s} z^{(1-r)/s-1} G(z) + \\ + \frac{br}{s} z^{r/s-1} F^2(z) + \frac{2cr}{s} z^{-1} F'(z) + az^{(1-r)/s} G'(z) + bz^{r/s} (FF')(z) + cF''(z) = 0, \\ (\mathcal{P}_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} G)(z) + \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s} - 1\right) \left(fz + g\left(\frac{1}{s} - 2\right)\right) z^{-3} G(z) + \\ + \frac{1}{s} (d + er) z^{r/s-1} (FG)(z) + \frac{1}{s} \left(2fz + 3g\left(\frac{1}{s} - 1\right)\right) z^{-2} G'(z) + \\ + z^{r/s} (dFG' + eGF')(z) + \left(fz + \frac{3g}{s}\right) z^{-1} G''(z) + gG'''(z) = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\mathcal{P}_\delta^{\zeta, \alpha}$ – дробный оператор Эрдеи–Кобера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем следующее преобразование подобия с функциями F, G для генератора Δ_1 :

$$z = xt^{-\alpha/2}, \quad u = x^{r/s}F(z), \quad v = x^{1/s}G(z). \quad (36)$$

Используя определение дробной производной Римана–Лиувилля, получаем для α из интервала $n - 1 < \alpha < n$

$$\partial_t^\alpha u = x^{r/s} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} F(xs^{-\alpha/2}) ds \right]. \quad (37)$$

Если положить $t/s = \lambda$, это соотношение можно переписать как

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha u &= x^{r/s} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^\infty (\lambda-1)^{n-\alpha-1} \lambda^{-(n-\alpha+1)} F(z\lambda^{\alpha/2}) d\lambda \right] = \\ &= x^{r/s} \frac{\partial^n}{\partial t^n} [t^{n-\alpha} (\mathcal{K}_{2/\alpha}^{1, n-\alpha} F)(z)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Также, используя определение оператора Эрдейи–Кобера (12), мы видим, что результат (38) имеет место для $\alpha = n = 1, 2, \dots$. Следовательно, дробная производная функции $u(x, t)$ для любого $\alpha > 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha u &= x^{r/s} t^{-\alpha} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \alpha + j - \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dz} \right) (\mathcal{K}_{2/\alpha}^{1, n-\alpha} F)(z) = \\ &= x^{r/s} t^{-\alpha} (\mathcal{P}_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} F)(z). \end{aligned} \quad (39)$$

Аналогичное равенство справедливо для $v(x, t)$: для любого $\alpha > 0$

$$\partial_t^\alpha v = x^{1/s} t^{-\alpha} (\mathcal{P}_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} G)(z). \quad (40)$$

Это завершает доказательство теоремы.

Далее можно доказать следующие утверждения для генераторов Δ_2, Δ_3 .

ТЕОРЕМА 6. Для любого $\alpha > 0$ систему (28) в случае генератора Δ_2 можно редуцировать к системе нелинейных ОДУ дробного порядка

$$\begin{aligned} &(\mathcal{P}_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} F)(z) + \frac{c}{p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) z^{-2} F(z) + \frac{b}{p} z^{1/p-1} F^2(z) + \frac{2c}{p} z^{-1} F'(z) + \\ &+ az^{-1/p} G'(z) + bz^{1/p} (FF')(z) + cF''(z) = 0, \\ &(\mathcal{P}_{2/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} G)(z) + \frac{e}{p} z^{1/p-1} (FG)(z) + \\ &+ z^{1/p} (dFG' + eGF')(z) + fG''(z) + gG'''(z) = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

ТАБЛИЦА 3. Симметричные редукции системы (28) к системе нелинейных ОДУ дробного порядка.

Генераторы	Инварианты	Анзац	Переменные коэффициенты	Редуцированные системы
Δ_1	$(xt^{-\alpha/2}, x^{-r/s}u, x^{-1/s}v)$	$u = x^{r/s}F(z),$ $v = x^{1/s}G(z)$	$a(t) = at^{-(1-r+s)\alpha/2s},$ $b(t) = bt^{-(r+s)\alpha/2s},$ $d(t) = dt^{-(r+s)\alpha/2s},$ $e(t) = et^{-(r+s)\alpha/2s},$ $g(t) = gt^{\alpha/2}$	Система (35)
Δ_2	$(xt^{-\alpha/2}, x^{-1/p}u, v)$	$u = x^{1/p}F(z),$ $v = G(z)$	$a(t) = at^{(1-p)\alpha/2p},$ $b(t) = bt^{-(1+p)\alpha/2p},$ $d(t) = dt^{-(1+p)\alpha/2p},$ $e(t) = et^{-(1+p)\alpha/2p},$ $g(t) = gt^{\alpha/2}$	Система (41)
Δ_3	$(xt^{-\alpha/2}, u, v)$	$u = F(z),$ $v = G(z)$	$a(t) = at^{-\alpha/2},$ $b(t) = bt^{-\alpha/2},$ $d(t) = dt^{-\alpha/2},$ $e(t) = et^{-\alpha/2},$ $g(t) = gt^{-\alpha/2}$	Система (42)

ТЕОРЕМА 7. Для любого $\alpha > 0$ систему (28) в случае генератора Δ_3 можно редуцировать к системе нелинейных ОДУ дробного порядка

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}F)(z) + aG'(z) + b(F F')(z) + cF'''(z) &= 0, \\
 (\mathcal{P}_{2/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}G)(z) + d(F G')(z) + e(G F')(z) + fG''(z) + gG'''(z) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Для краткости мы опускаем детали и приводим инвариантные решения, переменные коэффициенты и пр. в табл. 3.

3.2. Система связанных уравнений КдФ дробного порядка. В уравнении КдФ представлена простейшая комбинация нелинейности и дисперсии при отсутствии диссипации. Система уравнений КдФ целого порядка, а также система связанных уравнений КдФ дробного порядка с переменными коэффициентами обсуждались многими авторами с использованием различных подходов (см., например, работы [25], [26]). Система связанных уравнений КдФ дробного порядка с переменными коэффициентами [11], [26] выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \partial_t^\alpha u + a(t)uu_x + b(t)vv_x + c(t)u_{xxx} &= 0, \\
 \partial_t^\alpha v + d(t)uv_x + e(t)vu_x + f(t)v_{xxx} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Используя подход симметрий Ли [11] и решая возникающие определяющие уравнения, мы получаем симметрии в явном виде:

$$\xi = \frac{A_1 x}{3} + A_2, \quad \tau = \frac{1}{c^{1/\alpha}(t)} \left(\frac{A_1}{\alpha} \int c^{1/\alpha}(t) dt + A_5 \right), \quad \eta = A_3(t)u, \quad \phi = A_4(t)v.$$

Для постоянных A_1, A_2, A_5 и функций $A_3(t), A_4(t)$ должны быть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \tau(0) &= 0, & A'_3(t) &= A'_4(t) = \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\tau_{tt}, \\ a(t)\left(\alpha\tau_t - \frac{A_1}{3} - A_3(t)\right) + \tau a'(t) &= 0, & b(t)\left(\alpha\tau_t - \frac{A_1}{3} - A_3(t) + 2A_4(t)\right) + \tau b'(t) &= 0, \\ d(t)\left(\alpha\tau_t - \frac{A_1}{3} + A_3(t)\right) + \tau d'(t) &= 0, & e(t)\left(\alpha\tau_t - \frac{A_1}{3} + A_3(t)\right) + \tau e'(t) &= 0, \\ f(t)v\left(\alpha\tau_t - \frac{A_1}{3}\right) + \tau f'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы найти редукции системы (43) к системам нелинейных ОДУ дробного порядка, положим $c(t) = c \equiv \text{const}$ и получим симметрии в упрощенном виде

$$\xi = \frac{A_1 x}{3} + A_2, \quad \tau = \frac{A_1 t}{\alpha}, \quad \eta = A_3 u, \quad \phi = A_4 v; \quad (44)$$

должны выполняться уравнения

$$\begin{aligned} a(t)\left(\frac{2}{3}A_1 - A_3\right) + \tau a'(t) &= 0, & b(t)\left(\frac{2}{3}A_1 - A_3 + 2A_4\right) + \tau b'(t) &= 0, \\ d(t)\left(\frac{2}{3}A_1 + A_3\right) + \tau d'(t) &= 0, & e(t)\left(\frac{2}{3}A_1 + A_3\right) + \tau e'(t) &= 0, & f(t) &= \text{const}. \end{aligned}$$

Следовательно, соответствующие векторные поля имеют вид

$$V_1 = \frac{x}{3}\partial_x + \frac{t}{\alpha}\partial_t, \quad V_2 = \partial_x, \quad V_3 = u\partial_u, \quad V_4 = v\partial_v. \quad (45)$$

Оптимальная система содержит следующие линейные комбинации генераторов:

$$\Delta_1 = V_4 + pV_3 + qV_1, \quad \Delta_2 = V_3 + rV_1, \quad \Delta_3 = V_1. \quad (46)$$

Для них редуцированные системы задаются следующими теоремами.

ТЕОРЕМА 8. Для любого $\alpha > 0$ систему (43) в случае генератора Δ_1 можно редуцировать к системе нелинейных ОДУ дробного порядка

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} F)(z) + \frac{3cp}{q}\left(\frac{3p}{q} - 1\right)\left(\frac{3p}{q} - 2\right)z^{-3}F(z) + \frac{3ap}{q}z^{3p/q-1}F^2(z) + \\ + \frac{3b}{q}z^{(6-3p)/q-1}G^2(z) + \frac{9cp}{q}\left(\frac{3p}{q} - 1\right)z^{-2}F'(z) + \\ + az^{3p/q}(FF')(z) + bz^{(6-3p)/q}(GG')(z) + \frac{9cp}{q}z^{-1}F''(z) + cF'''(z) = 0, \\ (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} G)(z) + \frac{3f}{q}\left(\frac{3}{q} - 1\right)\left(\frac{3}{q} - 2\right)z^{-3}G(z) + \frac{3}{q}(ep + d)z^{3p/q-1}(FG)(z) + \\ + z^{3p/q}(dFG' + eGF')(z) + \frac{9f}{q}\left(\frac{3}{q} - 1\right)z^{-2}G'(z) + \frac{9f}{q}z^{-1}G''(z) + fG'''(z) = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

с дифференциальным оператором Эрдейи-Кобера $(\mathcal{P}_\delta^{\zeta, \alpha})$, заданным в (10).

ТАБЛИЦА 4. Симметричные редукции системы (43) к системам нелинейных ОДУ дробного порядка

Генераторы	Инварианты	Анзац	Переменные коэффициенты	Редуцированные системы
Δ_1	$(xt^{-\alpha/3}, x^{-3p/q}u, x^{-3/q}v)$	$u = x^{3p/q}F(z),$ $v = x^{3/q}G(z)$	$a(t) = at^{-(3p+2q)\alpha/3q},$ $b(t) = bt^{-(6-3p+2q)\alpha/3q},$ $d(t) = dt^{-(3p+2q)\alpha/3q},$ $e(t) = et^{-(3p+2q)\alpha/3q}$	Система (47)
Δ_2	$(xt^{-\alpha/3}, x^{-3/r}u, v)$	$u = x^{3/r}F(z),$ $v = G(z)$	$a(t) = at^{(3+2r)\alpha/3r},$ $b(t) = bt^{-(3+2r)\alpha/3r},$ $d(t) = dt^{-(3+2r)\alpha/3r},$ $e(t) = et^{-(3+2r)\alpha/3r}$	Система (48)
Δ_3	$(xt^{-\alpha/3}, u, v)$	$u = F(z),$ $v = G(z)$	$a(t) = at^{-2\alpha/3},$ $b(t) = bt^{-2\alpha/3},$ $d(t) = dt^{-2\alpha/3},$ $e(t) = et^{-2\alpha/3}$	Система (49)

ТЕОРЕМА 9. Для любого $\alpha > 0$ систему (43) в случае генератора Δ_2 можно редуцировать к системе нелинейных ОДУ дробного порядка

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}F)(z) + \frac{3c}{r}\left(\frac{3}{r}-1\right)\left(\frac{3}{r}-2\right)z^{-3}F(z) + \frac{3a}{r}z^{3/r-1}F^2(z) + \frac{9c}{r}\left(\frac{3}{r}-1\right)z^{-2}F'(z) + \\
 + az^{3/r}(FF')(z) + bz^{-3/r}(GG')(z) + \frac{9c}{r}z^{-1}F''(z) + cF'''(z) = 0, \\
 (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}G)(z) + \frac{3e}{r}z^{3/r-1}(FG)(z) + z^{3/r}(dFG' + eGF')(z) + fG'''(z) = 0.
 \end{aligned} \tag{48}$$

ТЕОРЕМА 10. Для любого $\alpha > 0$ систему (43) в случае генератора Δ_3 можно редуцировать к системе нелинейных ОДУ дробного порядка

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}F)(z) + a(FF')(z) + b(GG')(z) + cF'''(z) = 0, \\
 (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha,\alpha}G)(z) + d(FG')(z) + e(GF')(z) + fG'''(z) = 0.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Инварианты, переменные коэффициенты и симметричные редукции перечислены в табл. 4.

3.3. Система Хироты–Сацумы связанных уравнений КдФ с дробной производной по времени. Система Хироты–Сацумы связанных уравнений КдФ имеет обширные приложения в нелинейных явлениях и изучалась многими авторами (см., например, работы [11], [27], [28]). В работе [28] данная система целого порядка с переменными коэффициентами изучалась с использованием метода групп Ли. Рассматриваемая в настоящей работе система Хироты–Сацумы связанных уравнений

КдФ с дробной производной по времени и переменными коэффициентами записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha u + a(t)uu_x + b(t)(vw_x + wv_x) + c(t)u_{xxx} &= 0, \\ \partial_t^\alpha v + d(t)uv_x + e(t)v_{xxx} &= 0, \\ \partial_t^\alpha w + f(t)uw_x + g(t)w_{xxx} &= 0.\end{aligned}\tag{50}$$

Пусть допустимые для данной системы генераторы симметрии имеют вид

$$\begin{aligned}X = \xi(x, t, u, v, w)\partial_x + \tau(x, t, u, v, w)\partial_t + \\ + \eta(x, t, u, v, w)\partial_u + \phi(x, t, u, v, w)\partial_v + \psi(x, t, u, v, w)\partial_w.\end{aligned}$$

Тогда критерий инвариантности записывается как

$$\begin{aligned}[\eta^{\alpha, t} + a(t)(\eta u_x + u\eta^x) + b(t)(\phi w_x + v\psi^x + \psi v_x + w\phi^x) + \\ + \tau(a'(t)uu_x + b'(t)(vw_x + wv_x)) + \tau c'(t)u_{xxx} + c(t)\eta^{xxx}] \Big|_{(50)} = 0, \\ [\phi^{\alpha, t} + d(t)(\eta v_x + u\phi^x) + \tau(d'(t)uv_x + e'(t)v_{xxx}) + e(t)\phi^{xxx}] \Big|_{(50)} = 0, \\ [\psi^{\alpha, t} + f(t)(\eta w_x + u\psi^x) + \tau(f'(t)uw_x + g'(t)w_{xxx}) + g(t)\psi^{xxx}] \Big|_{(50)} = 0.\end{aligned}\tag{51}$$

С помощью операторов продолжения [11] мы получаем переопределенную систему ДУЧ целого и дробного порядка в указанной группе инфинитезимальных величин ξ , τ , η , ϕ , ψ . Решение уравнений дает симметрии Ли

$$\begin{aligned}\xi = A_1x + A_2, \quad \tau = \frac{1}{c^{1/\alpha}(t)} \left(\frac{3A_1}{\alpha} \int c^{1/\alpha}(t) dt + A_6 \right), \quad \eta = A_3(t)u, \\ \phi = A_4(t)v, \quad \psi = A_5(t)w,\end{aligned}\tag{52}$$

где A_1 , A_2 , A_6 – произвольные постоянные, а $A_3(t)$, $A_4(t)$, $A_5(t)$ – произвольные функции от t , удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned}\tau(0) = 0, \quad A'_3(t) = A'_4(t) = A'_5(t) = \left(\frac{\alpha - 1}{2} \right) \tau_{tt}, \\ a(t)(\alpha\tau_t - A_1 + A_3(t)) + \tau a'(t) = 0, \\ b(t)(\alpha\tau_t - A_1 - A_3(t) + A_4(t) + A_5(t)) + \tau b'(t) = 0, \\ d(t)(\alpha\tau_t - A_1 + A_3(t)) + \tau d'(t) = 0, \quad e(t) = K_1 c(t), \\ f(t)(\alpha\tau_t - A_1 + A_3(t)) + \tau f'(t) = 0, \quad g(t) = K_2 c(t),\end{aligned}\tag{53}$$

в которых K_1 , K_2 – произвольные постоянные. Далее рассмотрим частный случай $c(t) = c \equiv \text{const}$, облегчающий расчет симметричных редукций. В этом случае симметрии упрощаются и принимают вид

$$\xi = A_1x + A_2, \quad \tau = \frac{3t}{\alpha}A_1, \quad \eta = A_3u, \quad \phi = A_4v, \quad \psi = A_5w.\tag{54}$$

Для коэффициентов A_i ($i = 1, \dots, 5$) должны выполняться следующие уравнения:

$$\begin{aligned} a(t)(2A_1 + A_3) + \left(\frac{3t}{\alpha}A_1\right)a'(t) &= 0, \\ b(t)(2A_1 - A_3 + A_4 + A_5) + \left(\frac{3t}{\alpha}A_1\right)b'(t) &= 0, \\ d(t)(2A_1 + A_3) + \left(\frac{3t}{\alpha}A_1\right)d'(t) &= 0, \quad e(t) = \text{const}, \\ f(t)(2A_1 + A_3) + \left(\frac{3t}{\alpha}A_1\right)f'(t) &= 0, \quad g(t) = \text{const}. \end{aligned} \quad (55)$$

Соответствующие генераторы симметрии записываются как

$$V_1 = x\partial_x + \frac{3t}{\alpha}\partial_t, \quad V_2 = \partial_x, \quad V_3 = u\partial_u, \quad V_4 = v\partial_v, \quad V_5 = w\partial_w.$$

Расчет показывает, что оптимальная система содержит компоненты

$$\Delta_1 = V_5 + kV_4 + lV_3 + mV_1, \quad \Delta_2 = V_4 + rV_3 + sV_1, \quad \Delta_3 = V_3 + \beta V_1, \quad \Delta_4 = V_1,$$

которые приводят к редуцированным системам нелинейных уравнений дробного порядка, описанным в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 11. Для любого $\alpha > 0$ систему (50) в случае генератора Δ_1 можно редуцировать к системе нелинейных ОДУ дробного порядка

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} F)(z) + \frac{3cl}{m} \left(\frac{l}{m} - 1\right) \left(\frac{l}{m} - 2\right) z^{-3} F(z) + \frac{al}{m} z^{l/m-1} F^2(z) + \\ + az^{l/m} (FF')(z) + \frac{3cl}{m} \left(\frac{l}{m} - 1\right) z^{-2} F'(z) + bz^{(1+k-l)/m-1} (1+k)(HG)(z) + \\ + bz^{(1+k-l)/m} (GH' + HG')(z) + \frac{3cl}{m} z^{-1} F''(z) + cF'''(z) = 0, \\ (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} G)(z) + \frac{dk}{m} z^{l/m-1} (FG)(z) + \frac{3ek}{m} \left(\frac{k}{m} - 1\right) \left(\frac{k}{m} - 2\right) z^{-3} G(z) + \\ + dz^{l/m} (FG')(z) + \frac{3ek}{m} \left(\frac{k}{m} - 1\right) z^{-2} G'(z) + \frac{3ek}{m} z^{-1} G''(z) + eG'''(z) = 0, \\ (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} H)(z) + fz^{l/m-1} (FH)(z) + \frac{3g}{m} \left(\frac{1}{m} - 1\right) \left(\frac{1}{m} - 2\right) z^{-3} H(z) + \\ + fz^{l/m} (FH')(z) + \frac{3g}{m} \left(\frac{1}{m} - 1\right) z^{-2} H'(z) + \frac{3g}{m} z^{-1} H''(z) + gH'''(z) = 0, \end{aligned} \quad (56)$$

где $(\mathcal{P}_{\delta}^{\zeta, \alpha})$ – дифференциальный оператор Эрдейи–Кобера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение Римана–Лиувилля для дробной производной, получаем, что должно быть выполнено следующее равенство:

$$\partial_t^\alpha u = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} x^{l/m} F(xs^{-\alpha/3}) ds \right]. \quad (57)$$

Положив $\rho = t/s$, для любого $\alpha > 0$ перепишем это выражение как

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha u &= x^{l/m} \frac{\partial^n}{\partial t^n} [t^{n-\alpha} (\mathcal{K}_{3/\alpha}^{1, n-\alpha} F)(z)] = \\ &= x^{l/m} t^{-\alpha} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \alpha + j - \frac{\alpha}{3} \frac{d}{dz} \right) (\mathcal{K}_{3/\alpha}^{1, n-\alpha} F)(z).\end{aligned}\quad (58)$$

Следовательно, для любого $\alpha > 0$ производную $\partial_t^\alpha u$ можно переписать в терминах дробного оператора дифференцирования Эрдейи–Кобера:

$$\partial_t^\alpha u = x^{l/m} t^{-\alpha} (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} F)(z). \quad (59)$$

Аналогично для любого $\alpha > 0$ получаются следующие выражения:

$$\partial_t^\alpha v = x^{k/m} t^{-\alpha} (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} G)(z), \quad \partial_t^\alpha w = x^{1/m} t^{-\alpha} (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} H)(z). \quad (60)$$

Отсюда, используя переменные коэффициенты из табл. 5, мы получаем утверждение теоремы.

Таким же способом выводятся симметричные редукции для остальных генераторов Δ_i , $i = 2, 3, 4$.

ТЕОРЕМА 12. Для любого $\alpha > 0$ систему (50) в случае генератора Δ_2 можно редуцировать к системе нелинейных ОДУ дробного порядка

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} F)(z) &+ \frac{3cr}{s} \left(\frac{r}{s} - 1 \right) \left(\frac{r}{s} - 2 \right) z^{-3} F(z) + \frac{ar}{s} z^{r/s-1} F^2(z) + \\ &+ \frac{b}{s} z^{(1-r-s)/s} (HG)(z) + \frac{3cr}{s} \left(\frac{r}{s} - 1 \right) z^{-2} F'(z) + az^{r/s} (FF')(z) + \\ &+ bz^{(1-r)/s} (GH' + HG')(z) + \frac{3cr}{s} z^{-1} F''(z) + cF'''(z) = 0, \\ (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} G)(z) &+ \frac{3e}{s} \left(\frac{1}{s} - 1 \right) \left(\frac{1}{s} - 2 \right) z^{-3} G(z) + \frac{d}{s} z^{r/s-1} (FG)(z) + \\ &+ \frac{3e}{s} \left(\frac{1}{s} - 1 \right) z^{-2} G'(z) + dz^{r/s} (FG')(z) + \frac{3e}{s} z^{-1} G''(z) + eG'''(z) = 0, \\ (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} H)(z) &+ fz^{r/s} (FH')(z) + gH'''(z) = 0.\end{aligned}\quad (61)$$

ТЕОРЕМА 13. Для любого $\alpha > 0$ систему (50) в случае генератора Δ_3 можно редуцировать к системе нелинейных ОДУ дробного порядка

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} F)(z) &+ \frac{3c}{\beta} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \left(\frac{1}{\beta} - 2 \right) z^{-3} F(z) + \\ &+ \frac{a}{\beta} z^{1/\beta-1} F^2(z) + \frac{3c}{\beta} \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) z^{-2} F'(z) + az^{1/\beta} (FF')(z) + \\ &+ bz^{-1/\beta} (GH' + HG')(z) + \frac{3c}{\beta} z^{-1} F''(z) + cF'''(z) = 0, \\ (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} G)(z) &+ dz^{1/\beta} (FG')(z) + eG'''(z) = 0, \\ (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} H)(z) &+ fz^{1/\beta} (FH')(z) + gH'''(z) = 0.\end{aligned}\quad (62)$$

ТАБЛИЦА 5. Симметричные редукции системы (50) к системам нелинейных ОДУ дробного порядка

Генераторы	Инварианты	Анзац	Переменные коэффициенты	Редуцированные системы
Δ_1	$(xt^{-\alpha/3}, x^{-l/m}u, x^{-k/m}v, x^{-1/m}w)$	$u = x^{l/m}F(z),$ $v = x^{k/m}G(z),$ $w = x^{1/m}H(z)$	$a(t) = at^{-(2m+l)\alpha/3m},$ $b(t) = bt^{-(1+2m-l+k)\alpha/3m},$ $d(t) = dt^{-(2m+l)\alpha/3m},$ $f(t) = ft^{-(2m+l)\alpha/3m}$	Система (56)
Δ_2	$(xt^{-\alpha/3}, x^{-r/s}u, x^{-1/s}v, w)$	$u = x^{r/s}F(z),$ $v = x^{1/s}G(z),$ $w = H(z)$	$a(t) = at^{-(2s+r)\alpha/3s},$ $b(t) = bt^{-(1+2s-r)\alpha/3s},$ $d(t) = dt^{-(2s+r)\alpha/3s},$ $f(t) = ft^{-(2s+r)\alpha/3s}$	Система (61)
Δ_3	$(xt^{-\alpha/3}, x^{-1/\beta}u, v, w)$	$u = x^{1/\beta}F(z),$ $v = G(z)$ $w = H(z)$	$a(t) = at^{-(2\beta+1)\alpha/3\beta},$ $b(t) = bt^{-(2\beta-1)\alpha/3\beta},$ $d(t) = dt^{-(2\beta+1)\alpha/3\beta},$ $f(t) = ft^{-(2\beta+1)\alpha/3\beta}$	Система (62)
Δ_4	$(xt^{-\alpha/3}, u, v, w)$	$u = F(z),$ $v = G(z),$ $w = H(z)$	$a(t) = at^{-2\alpha/3},$ $b(t) = bt^{-2\alpha/3},$ $d(t) = dt^{-2\alpha/3},$ $f(t) = ft^{-2\alpha/3}$	Система (63)

ТЕОРЕМА 14. Для любого $\alpha > 0$ в случае генератора Δ_4 система (50) редуцируется к системе нелинейных ОДУ дробного порядка

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} F)(z) + a(FF')(z) + b(GH' + HG')(z) + cF'''(z) &= 0, \\
 (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} G)(z) + d(FG')(z) + eG'''(z) &= 0, \\
 (\mathcal{P}_{3/\alpha}^{1-\alpha, \alpha} H)(z) + f(FH')(z) + gH'''(z) &= 0.
 \end{aligned} \tag{63}$$

В табл. 5 приведен краткий список инвариантных решений и симметричных редукций для системы Хироты–Сацумы (50) связанных уравнений КдФ с дробной производной по времени.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы показали эффективность метода симметрий Ли, успешно исследовав два нелинейных ДУЧП высокого порядка с дробными производными по времени и три системы дробных нелинейных ДУЧП с переменными коэффициентами. Мы обсудили полную групповую классификацию уравнения КдФ–Бюргерса–Курамото четвертого порядка и обобщенного уравнения КдФ седьмого порядка, позволившую получить их редукции к нелинейным ОДУ в терминах

операторов Эрдейи–Кобера. Также мы рассмотрели симметричный анализ трех систем дробных нелинейных ДУЧП с переменными коэффициентами. В сравнении с соответствующими системами целого порядка мы получили обобщенные результаты для систем уравнений с дробными производными по времени. Полученные инфинитезимальные операторы сгруппированы в классы неэквивалентных генераторов оптимальной системы. Каждый генератор оптимальных систем был использован для получения групповых инвариантных решений, приводящих к редуцированным системам нелинейных ОДУ.

Нам представляется очень важным дополнительно распространить результаты и методы настоящей работы на системы уравнений с пространственными и временными дробными производными и с переменными коэффициентами.

Список литературы

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, **204**, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [2] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [3] I. Podlubny, *An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Fractional Differential Equations, **198**, Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [4] G. W. Bluman, S. C. Anco, *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*, Springer, New York, 2002.
- [5] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [6] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, М., Наука, 1978.
- [7] E. Buckwar, Y. Luchko, “Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **227**:1 (1998), 81–97.
- [8] Р. К. Газизов, А. А. Касаткин, С. Ю. Лукашук, “Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка”, *Вестн. УГАТУ*, **9**:32(21) (2007), 125–135.
- [9] G. W. Wang, X. Q. Liu, Y. Y. Zhang, “Lie symmetry analysis to the time fractional generalized fifth-order KdV equation”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **18**:9 (2013), 2321–2326.
- [10] Q. Huang, R. Zhdanov, “Symmetries and exact solutions of the time fractional Harry-Dym equation with Riemann–Liouville derivative”, *Phys. A*, **409** (2014), 110–118.
- [11] K. Singla, R. K. Gupta, “On invariant analysis of some time fractional nonlinear systems of partial differential equations. I”, *J. Math. Phys.*, **57**:10 (2016), 101504, 14 pp.
- [12] N. A. Lai, Z. Yi, “Global existence of critical nonlinear wave equation with time dependent variable coefficients”, *Commun. Partial Diff. Equations*, **37**:11 (2012), 1913–1939.
- [13] T. Su, H.-H. Dai, X. Geng, “On the application of a generalized dressing method to the integration of variable-coefficient coupled Hirota equations”, *J. Math. Phys.*, **50**:11 (2009), 113507, 12 pp.
- [14] S. Yu. Lukashchuk, A. V. Makunin, “Group classification of nonlinear time-fractional diffusion equation with a source term”, *Appl. Math. Comput.*, **257** (2015), 335–343.
- [15] Z. Fu, S. Liu, S. Liu, “New exact solution to the KdV–Burgers–Kuramoto equation”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **23**:2 (2005), 609–616.
- [16] M. A. Akinlar, A. Secer, M. Bayram, “Numerical solution of fractional Benney equation”, *Appl. Math. Inf. Sci.*, **8**:4 (2014), 1633–1637.
- [17] V. S. Kiryakova, *Generalized Fractional Calculus and Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **301**, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994.

- [18] S. A. El-Wakil, E. M. Abulwafa, E. K. El-Shewy, A. A. Mahmoud, “Time-fractional KdV equation for plasma of two different temperature electrons and stationary ion”, *Phys. Plasmas*, **18**:9 (2011), 092116, 7 pp.
- [19] Y. Pomeau, A. Ramani, B. Grammaticos, “Structural stability of the Korteweg–de Vries solitons under a singular perturbation”, *Phys. D*, **31**:1 (1988), 127–134.
- [20] J. Boussinesq, “Théorie de l’intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **72** (1871), 755–778.
- [21] А. Гилл, *Динамика атмосферы и океана*, Мир, М., 1986.
- [22] A. J. Majda, *Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean*, Courant Lecture Notes in Mathematics, **9**, AMS, Providence, RI, 2003.
- [23] K. Singh, R. K. Gupta, “Exact solutions of a variant Boussinesq system”, *Internat. J. Eng. Sci.*, **44**:18–19 (2006), 1256–1268.
- [24] M. S. Mohamed, K. A. Gepreel, “Numerical solutions for the time fractional variant Bussinesq equation by homotopy analysis method”, *Sci. Res. Essays*, **8**:44 (2013), 2163–2170.
- [25] H. M. Jaradat, “Dynamic behavior of traveling wave solutions for a class for the time-space coupled fractional KdV system with time-dependent coefficients”, *Ital. J. Pure Appl. Math.*, **36** (2016), 945–958.
- [26] K. Singh, R. K. Gupta, “On symmetries and invariant solutions of a coupled KdV system with variable coefficients”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **2005**:23 (2005), 3711–3725.
- [27] H. Zhang, “New exact solutions for two generalized Hirota–Satsuma coupled KdV systems”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **12**:7 (2007), 1120–1127.
- [28] K. Singh, R. K. Gupta, “Lie symmetries and exact solutions of a new generalized Hirota–Satsuma coupled KdV system with variable coefficients”, *Internat. J. Eng. Sci.*, **44**:3–4 (2006), 241–255.

Поступила в редакцию 14.08.2017,
после доработки 15.02.2018