Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Абловиц, Бао-Фэн Фэн, Сюй-Дань Ло, З. Мус-
слимани, Метод обратной задачи рассеяния для нело-
кального нелинейного уравнения Шредингера с обра-
щением пространства-времени, *ТМФ*, 2018, том 196, но-
мер 3, 343–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:00:50

© 2018 г. М. Д. Абловиц*, Бао-Фэн Фэн[†], Сюй-Дань Ло[‡],
З. Мусслимани[§]

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ОБРАЩЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Недавно были введены нелокальные уравнения типа нелинейного уравнения Шредингера с обращением пространства-времени, а также было показано, что они являются интегрируемыми бесконечномерными динамическими системами, и построен метод обратной задачи рассеяния для быстроубывающих начальных условий. Здесь представлен метод обратной задачи рассеяния для нелинейного уравнения Шредингера с обращением времени с ненулевыми граничными условиями на бесконечности. Такая задача труднее из-за сложной структуры ветвления связанных с ней линейных собственных функций. Проанализированы два случая, соответствующие двум различным значениям фазы на бесконечности. Обсуждаются специальные солитонные решения и в явном виде построены одно- и двухсолитонные решения. Также рассмотрены пространственно-зависимые граничные условия.

Ключевые слова: обратная задача рассеяния, нелокальное нелинейное уравнение Шредингера с обращением пространства-времени.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9449>

Работа М. Д. Абловица частично поддержана NSF (грант № DMS-1310200), Бао-Фэн Фэн частично поддержан NSF (грант № DMS-171599) и NSFC for Overseas Scholar Collaboration Research (№ 11728103).

*Department of Applied Mathematics, University of Colorado at Boulder, Boulder, CO, USA.
E-mail: mark.ablowitz@colorado.edu

[†]School of Mathematical and Statistical Sciences, University of Texas Rio Grande Valley, Edinburg, TX, USA. E-mail: baofeng.feng@utrgv.edu

[‡]Department of Mathematics, State University of New York at Buffalo, Buffalo, NY, USA.
E-mail: xudanluo@buffalo.edu

[§]Department of Mathematics, Florida State University, Tallahassee, FL, USA.
E-mail: muslimani@math.fsu.edu

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1965 г. Зубацкий и Крускал обнаружили [1], что решения уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) в виде уединенных волн проявляют особые свойства при взаимодействии; они назвали эти решения *солитонами*. Это послужило мотивацией Гарднеру, Грину, Крускалу и Миуре [2] в 1967 г. связать уравнение КдФ с линейным уравнением Шредингера для быстроубывающих начальных условий на прямой и наметить подход к решению задачи Коши для уравнения КдФ с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). Лакс узнал об этих результатах и вскоре показал [3], что уравнение КдФ и другие уравнения можно получить из условия совместности двух линейных операторов; одним из таких операторов для уравнения КдФ было линейное уравнение Шредингера.

В 1972 г. Захаров и Шабат обнаружили [4], что еще одно физически важное уравнение, нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), также имеет пару Лакса и может быть решено (линеаризовано) с помощью МОЗР. Было известно, что НУШ, как и уравнение КдФ, возникает повсюду [5]. Под влиянием этих результатов в 1973 г. Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сегур (АКНС) обобщили [6] линейные операторы, использованные Захаровым и Шабатом; они показали, что НУШ, уравнение синус-Гордон [7], модифицированное уравнение КдФ, уравнение КдФ можно решить (линеаризовать) с помощью МОЗР. Вскоре после этого, в 1974 г. [8], был развит общий подход для нахождения интегрируемых систем, решаемых методом, который авторы назвали МОЗР. Метод был связан с классами уравнений (которые позже назвали рекуррентными операторами) и был применен для нахождения решений задачи с начальными условиями, быстроубывающими на прямой.

Чтобы решить нелинейное уравнение с помощью МОЗР, нужно сначала связать [9]–[11] нелинейное волновое уравнение с совместной линейной задачей рассеяния (или спектральной задачей) или парой Лакса, одно из уравнений которой представимо в виде $v_x = Xv$, а соответствующее эволюционное уравнение – в виде $v_t = Tv$. В операторе X есть функция (или функции), называемая потенциалом (или потенциалами). Оператор X и соответствующий линейный оператор эволюции во времени, обозначенный T , взаимно совместны с нелинейным волновым уравнением, которому удовлетворяет потенциал. Здесь мы обозначим потенциал (решение) нелинейного уравнения через $q(x, t)$.

В работе [8] было предложено рассмотреть задачу рассеяния

$$v_x = Xv = \begin{pmatrix} -ik & q(x, t) \\ r(x, t) & ik \end{pmatrix} v, \quad (1.1)$$

где $v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t))^T$, k – не зависящий от времени спектральный параметр, а $q(x, t)$, $r(x, t)$ – комплексные функции вещественных переменных x , t . С задачей рассеяния АКНС (1.1) связано эволюционное уравнение

$$v_t = Tv, \quad (1.2)$$

где (2×2) -матрица T является функцией от $q(x, t)$, $r(x, t)$ и спектрального параметра k . Различные матрицы T порождают различные спаренные уравнения в частных производных для $q(x, t)$ и $r(x, t)$ из условия совместности $v_{xt} = v_{tx}$. При наличии

определенных связей между $q(x, t)$ и $r(x, t)$ (которые называются также симметричными редукциями) получается совместная система, которая сводится к одному интегрируемому эволюционному уравнению для $q(x, t)$ или $r(x, t)$. Важным примером является НУШ

$$iq_t = q_{xx} - 2\sigma|q|^2q, \quad \sigma = \mp 1. \quad (1.3)$$

Многие исследования МОЗР посвящены задаче с быстроубывающими начальными условиями; например, $q(x, t), r(x, t) \rightarrow 0$ быстро при $x \rightarrow \pm\infty$ (см. работы [9]–[11]). Однако живой интерес был проявлен к другим задачам типа НУШ с ненулевыми граничными условиями. Первое исследование такого рода было проведено для НУШ [12]. В первоначальном МОЗР для ненулевых граничных условий использовались две поверхности Римана, связанные с точкой ветвления квадратного корня в собственных функциях и данных рассеяния. Важное продвижение было сделано с введением униформизирующей переменной [13], что позволило привести обратную задачу к более стандартной обратной задаче на верхней или нижней полуплоскости новой переменной. Впоследствии многие ученые исследовали НУШ и связанные с ним задачи именно таким способом (см. [14]–[21]), таким образом существенно расширив применимость и диапазон использования МОЗР.

Недавно были найдены новые нелокальные симметричные редукции в задаче рассеяния АКСС [22]. Среди них (здесь $\sigma = \mp 1$):

- $r(x, t) = \sigma q^*(x, -t)$;
- $r(x, t) = \sigma q^*(-x, t)$;
- $r(x, t) = \sigma q(-x, -t)$;
- $r(x, t) = \sigma q^*(-x, -t)$.

Каждая из этих симметричных редукций приводит к новому классу нелокальных нелинейных интегрируемых уравнений и новому типу обратных задач, при этом была построена ОЗР с убывающими данными для многих соответствующих уравнений [22]. Важным примером является PT -симметричное НУШ [23], [24], нелокальное PT -симметричное уравнение Дэви–Стюартсона также было изучено [25]. Напомним, что эволюционное уравнение является PT -симметричным, если оно инвариантно относительно совместного действия оператора четности $P(x \rightarrow -x)$ и оператора обращения времени (комплексного сопряжения) T . До сих пор ОЗР с ненулевыми граничными условиями рассматривалась только для PT -симметричного случая: $r(x, t) = \sigma q^*(-x, t)$ [26], т. е. для PT -симметричного НУШ

$$iq_t = q_{xx} - 2\sigma q^2(x, t)q^*(-x, t), \quad \sigma = \mp 1. \quad (1.4)$$

Кроме PT -симметричного НУШ (1.4), соответствующего симметричной редукции $r(x, t) = \sigma q(-x, -t)$, была установлена интегрируемость следующего нелокального НУШ с обращением пространства-времени:

$$iq_t(x, t) = q_{xx}(x, t) - 2\sigma q^2(x, t)q(-x, -t), \quad (1.5)$$

а также изучена ОЗР для быстроубывающих граничных условий [22]. Замечательно то, что это уравнение является такой простой модификацией НУШ (1.3). Укажем два аспекта, касающиеся приведенного выше НУШ с обращением пространства-времени (1.5). Во-первых, коэффициент σ может принимать значения не только ± 1 , этот параметр может быть расположен где-нибудь на единичной окружности, т. е.

$\sigma = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Во-вторых, в этом случае, в отличие от НУШ или PT -симметричного НУШ, коэффициент σ можно убрать масштабированием. Именно преобразование уравнения (1.5) с помощью подстановки $q \rightarrow (-1/\sigma)^{1/2}q$ позволяет без потери общности рассмотреть только случай $\sigma = 1$.

Хотя МОЗР в присутствии симметричной редукции $r(x, t) = \sigma q(-x, -t)$ был исследован для убывающих данных, ОЗР для нелокального НУШ с обращением пространства-времени с ненулевыми граничными условиями является пока новой и нерешенной задачей. Есть существенное различие между этим случаем и PT -симметричным случаем, рассмотренным в работе [26]. Эти нелокальные системы проявляют много интересных различий с их локальными аналогами.

В процессе построения решений с помощью МОЗР используются прямое и обратное рассеяния. Кратко этот процесс можно описать следующим образом. Исходя из нужным образом подобранного начального условия для потенциала ($q(x, t = 0)$) начальные данные преобразуются с помощью прямой задачи рассеяния X в данные рассеяния $S(k, t = 0)$. Соответствующий оператор T определяет эволюцию во времени данных рассеяния в любой момент времени $t \neq 0$: $S(k, t)$. Затем с помощью МОЗР данные рассеяния в любой момент времени t используются для построения собственных функций линейных интегральных уравнений; по этой информации восстанавливается решение $q(x, t)$ нелинейного эволюционного уравнения.

В то время как МОЗР в качестве метода решения (линеаризации) начальной задачи Коши с убывающими, а иногда с ненулевыми граничными условиями на бесконечности использовался для многочисленных нелинейных уравнений, МОЗР с ненулевыми граничными условиями сложнее из-за более сложной структуры ветвления соответствующих линейных собственных функций.

В настоящей работе исследуются прямое и обратное спектральные преобразования, связанные с нелокальным НУШ с обращением пространства-времени со следующими ненулевыми граничными условиями:

$$q(x, t) \rightarrow q_0 e^{i(2\sigma q_0^2 t + \theta_{\pm})}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (1.6)$$

где $\theta_+ + \theta_- = 0$ и $\theta_+ + \theta_- = \pi$. Заметим, что некоторые свойства ненулевых граничных условий, связанных с НУШ с обращением пространства-времени (1.5), можно получить непосредственно. Если предположить, что $q \rightarrow q_{\pm}(t)$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то из уравнения (1.5) получим

$$iq_{\pm,t}(t) = -2\sigma q_{\pm}^2(t)q_{\mp}(-t). \quad (1.7)$$

Это означает, что

$$q_+(t)q_-(-t) = C_0 = \text{const}, \quad (1.8)$$

следовательно, уравнение (1.7) упрощается до

$$iq_{\pm,t}(t) = -2\sigma C_0 q_{\pm}(t). \quad (1.9)$$

У этого уравнения есть решение

$$q_{\pm}(t) = |q_{\pm}(0)| e^{2i\sigma C_0 t} e^{i\theta_{\pm}}, \quad (1.10)$$

где $\theta_{\pm}$ – постоянные. Поскольку $C_0 = |q_+(0)| \cdot |q_-(0)| \cdot e^{i(\theta_+ + \theta_-)}$, C_0 является вещественной константой, если $\theta_+ + \theta_- = 0$ или $\theta_+ + \theta_- = \pi$. В противном случае она

комплексная и фон либо экспоненциально растет, либо убывает при $|t| \rightarrow \infty$. Без потери общности положим $q_{\pm}(0) = q_0 = \text{const}$.

В разделе 3 при $\sigma = 1$, $\theta_+ + \theta_- = 0$ получено следующее несингулярное односолитонное темное решение:

$$q(x, t) = \frac{q_0 e^{2iq_0^2 t} [e^{i\theta_+} \cdot e^{2q_0 x \sin \theta_+} + e^{-i\theta_+} \cdot e^{2q_0^2 t \sin(2\theta_+)}]}{e^{2q_0 x \sin \theta_+} + e^{2q_0^2 t \sin(2\theta_+)}}. \quad (1.11)$$

В разделе 4 при $\sigma = 1$, $\theta_+ + \theta_- = \pi$ показано отсутствие соответствующего экспоненциально убывающего односолитонного решения, поскольку единственное собственное значение находится в непрерывном спектре. Простейший убывающий полностью безотражательный потенциал порождает двухсолитонное решение. Существуют несингулярные двухсолитонные решения.

В разделе 5 показано существование решений для нелокального НУШ с обращением пространства-времени, которые удовлетворяют следующим пространственно-зависимым граничным условиям:

$$q(x, t) \rightarrow q_0 e^{i(\alpha t + \beta x + \theta_{\pm})} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (1.12)$$

где как α , так и β вещественны. Для классического НУШ справедлива галилеева инвариантность.

Мы также можем найти новые типы решений для указанных выше уравнений, которые сингулярны вдоль пространственно-временных линий (см. [27]).

Наконец, подчеркнем, что МОЗР с ненулевыми граничными условиями, связанный с новым нелокальным НУШ с обращением пространства-времени, приводит к новым решениям. Рассмотренные здесь граничные задачи расширяют технику и границы применения МОЗР.

2. НУШ С ОБРАЩЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ: СОВМЕСТНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА

Нелокальное НУШ с обращением пространства-времени (1.5) связано со следующей совместной (2×2) -системой:

$$v_x = Xv = \begin{pmatrix} -ik & q(x, t) \\ \sigma q(-x, -t) & ik \end{pmatrix} v, \quad (2.1)$$

$$v_t = Tv = \begin{pmatrix} 2ik^2 + i\sigma q(x, t)q(-x, -t) & -2kq(x, t) - iq_x(x, t) \\ -2\sigma kq(-x, -t) - \sigma iq_x(-x, -t) & -2ik^2 - i\sigma q(x, t)q(-x, -t) \end{pmatrix} v. \quad (2.2)$$

Такие соотношения совместности хорошо известны (ср. с [8], [9]).

Мы видим, что при $x \rightarrow \pm\infty$ собственные функции пространственной задачи рассеяния асимптотически удовлетворяют соотношению

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} -ik & q_0 e^{i(\alpha t + \theta_{\pm})} \\ \sigma q_0 e^{i(-\alpha t + \theta_{\mp})} & ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где $\alpha = 2\sigma q_0^2$ (см. уравнение (1.6)).

3. НЕЛОКАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОБРАЩЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ: $\sigma = 1$ И $\theta_+ + \theta_- = 0$

3.1. Прямое рассеяние. Рассмотрим ненулевые граничные условия вида (1.6) при $\sigma = 1$ и $\theta_+ + \theta_- = 0$. При таких условиях уравнение (2.3) удобно свести к виду

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} = -(k^2 - q_0^2)v_j, \quad j = 1, 2. \quad (3.1)$$

Каждое из двух уравнений имеет два линейно независимых решения $e^{i\lambda x}$ и $e^{-i\lambda x}$ при $|x| \rightarrow \infty$, где $\lambda = \sqrt{k^2 - q_0^2}$. При этом переменная k считается принадлежащей поверхности Римана $\mathbb{K}$, состоящей из двух листов $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ с разрезом комплексной плоскости вдоль $(-\infty, -q_0] \cup [q_0, +\infty)$, а ее края склеены таким образом, что функция $\lambda(k)$ непрерывна в разрезе. Введем локальные полярные координаты

$$k - q_0 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad k + q_0 = r_2 e^{i\theta_2}, \quad -\pi \leq \theta_2 < \pi, \quad (3.2)$$

где $r_1 = |k - q_0|$ и $r_2 = |k + q_0|$. Тогда функция $\lambda(k)$ становится однозначной на поверхности $\mathbb{K}$, т. е.

$$\lambda(k) = \begin{cases} \lambda_1(k) = (r_1 r_2)^{1/2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}, & k \in \mathbb{C}_1, \\ \lambda_2(k) = -(r_1 r_2)^{1/2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}, & k \in \mathbb{C}_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Более того, если $k \in \mathbb{C}_1$, то $\text{Im } \lambda \geq 0$; а если $k \in \mathbb{C}_2$, то $\text{Im } \lambda \leq 0$. Таким образом, переменная λ считается принадлежащей комплексной плоскости, состоящей из верхней полуплоскости U_+ : $\text{Im } \lambda \geq 0$ и нижней полуплоскости U_- : $\text{Im } \lambda \leq 0$, склеенных вместе вдоль вещественной оси; переход происходит при $\text{Im } \lambda = 0$. Преобразование $k \rightarrow \lambda$ отображает $\mathbb{C}_1$ в U_+ , $\mathbb{C}_2$ в U_- , разрез $(-\infty, -q_0] \cup [q_0, +\infty)$ в вещественную ось, а точки $\pm q_0$ — в нуль (см. [26], стр. 6, рис. 1, 2).

3.2. Собственные функции. Естественнo ввести собственные функции, заданные с помощью следующих граничных условий:

$$\phi(x, k) \sim w e^{-i\lambda x}, \quad \bar{\phi}(x, k) \sim \bar{w} e^{i\lambda x} \quad (3.4)$$

при $x \rightarrow -\infty$,

$$\psi(x, k) \sim v e^{i\lambda x}, \quad \bar{\psi}(x, k) \sim \bar{v} e^{-i\lambda x} \quad (3.5)$$

при $x \rightarrow +\infty$. Подставив эти выражения в (2.3), получим

$$w = \begin{pmatrix} \lambda + k \\ i q_+ \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} -i q_- \\ \lambda + k \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -i q_+ \\ \lambda + k \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} \lambda + k \\ i q_- \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

что удовлетворяет граничным условиям. Эти граничные условия сводятся к хорошо известным граничным условиям в убывающем случае. Заметим, что функции q_+ , q_- в действительности зависят от времени; для функций w , $\bar{w}$, граничные условия для которых вычисляются на $-\infty$, имеем $q_+ = q_+(-t)$, $q_- = q_-(t)$, а для v , $\bar{v}$, граничные условия для которых вычисляются на $+\infty$, имеем $q_+ = q_+(t)$, $q_- = q_-(-t)$. Но для целей данного подраздела точная зависимость от времени не важна, поэтому мы используем упрощенные обозначения, опустив явную зависимость от времени.

В дальнейшем анализе удобно рассматривать функции с постоянными граничными условиями. Определим ограниченные собственные функции следующим образом:

$$\begin{aligned} M(x, k) &= e^{i\lambda x} \phi(x, k), & \overline{M}(x, k) &= e^{-i\lambda x} \overline{\phi}(x, k), \\ N(x, k) &= e^{-i\lambda x} \psi(x, k), & \overline{N}(x, k) &= e^{i\lambda x} \overline{\psi}(x, k). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Собственные функции можно представить с помощью следующих интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} M(x, k) &= \begin{pmatrix} \lambda + k \\ iq_+ \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{+\infty} G_-(x - x', k) ((Q - Q_-)M)(x', k) dx', \\ \overline{M}(x, k) &= \begin{pmatrix} -iq_- \\ \lambda + k \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_-(x - x', k) ((Q - Q_-)M)(x', k) dx', \\ N(x, k) &= \begin{pmatrix} -iq_+ \\ \lambda + k \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{+\infty} G_+(x - x', k) ((Q - Q_+)M)(x', k) dx', \\ \overline{N}(x, k) &= \begin{pmatrix} \lambda + k \\ iq_- \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_+(x - x', k) ((Q - Q_+)M)(x', k) dx'. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Используя метод преобразования Фурье, получим

$$\begin{aligned} G_-(x, k) &= \frac{\theta(x)}{2\lambda} [(1 + e^{2i\lambda x})\lambda I - i(e^{2i\lambda x} - 1)(ikJ + Q_-)], \\ \overline{G}_-(x, k) &= \frac{\theta(x)}{2\lambda} [(1 + e^{-2i\lambda x})\lambda I + i(e^{-2i\lambda x} - 1)(ikJ + Q_-)], \\ G_+(x, k) &= -\frac{\theta(-x)}{2\lambda} [(1 + e^{-2i\lambda x})\lambda I + i(e^{-2i\lambda x} - 1)(ikJ + Q_+)], \\ \overline{G}_+(x, k) &= -\frac{\theta(-x)}{2\lambda} [(1 + e^{2i\lambda x})\lambda I - i(e^{2i\lambda x} - 1)(ikJ + Q_+)], \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, т. е. $\theta(x) = 1$ при $x > 0$ и $\theta(x) = 0$ при $x < 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что $f \in L^1(\mathbb{R})$, если $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$, и $f \in L^{1,N}(\mathbb{R})$, если $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \cdot (1 + |x|)^N dx < \infty$, где $N = 1, 2, \dots$ – заданное положительное целое число.

Тогда получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что элементы $Q - Q_{\pm}$ принадлежат $L^1(\mathbb{R})$. Тогда для каждого $x \in \mathbb{R}$ собственные функции $M(x, k)$ и $N(x, k)$ непрерывны при $k \in \mathbb{C}_1 \setminus \{\pm q_0\}$ и аналитичны при $k \in \mathbb{C}_1$, а функции $\overline{M}(x, k)$ и $\overline{N}(x, k)$ непрерывны при $k \in \mathbb{C}_2 \setminus \{\pm q_0\}$ и аналитичны при $k \in \mathbb{C}_2$. Кроме того, если элементы $Q - Q_{\pm}$ принадлежат $L^{1,2}(\mathbb{R})$, тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ собственные функции $M(x, k)$ и $N(x, k)$ непрерывны при $k \in \mathbb{C}_1$ и аналитичны при $k \in \mathbb{C}_1$, а функции $\overline{M}(x, k)$ и $\overline{N}(x, k)$ непрерывны при $k \in \mathbb{C}_2$ и аналитичны при $k \in \mathbb{C}_2$. Здесь $\mathbb{C}_j$, $j = 1, 2$, являются замыканиями листов $\mathbb{C}_j$, $j = 1, 2$.*

Доказательство основано на рядах Неймана с использованием условий $\text{Im } \lambda \geq 0$ или $\text{Im } \lambda > 0$; оно аналогично доказательству, приведенному в работе [26].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как это было сделано в теореме 3.2 в работе [26], можно переписать функции Грина в терминах проекторов, например

$$M(x, k) = \begin{pmatrix} \lambda + k \\ -iq_+^* \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^x [P_{-i\lambda}^- + e^{2i\lambda(x-x')} P_{i\lambda}^-] ((Q - Q_-)M)(x', k) dx', \quad (3.10)$$

где

$$P_{-i\lambda}^\pm(k) = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} \lambda + k & iq_\pm \\ iq_\mp & \lambda - k \end{pmatrix}, \quad P_{i\lambda}^\pm(k) = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} \lambda - k & -iq_\pm \\ -iq_\mp & \lambda + k \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Чтобы распространить свойство непрерывности в точку $k = \pm q_0$, перепишем выражение $P_{-i\lambda}^- + e^{2i\lambda(x-x')} P_{i\lambda}^-$ в виде $I_2 + [e^{2i\lambda(x-x')} - 1] P_{i\lambda}^-$ и используем оценку

$$\begin{aligned} \|I_2 + [e^{2i\lambda(x-x')} - 1] P_{i\lambda}^-\| &\leq 1 + 2|x - x'| \cdot |k| \leq \max\{1, 2|k|\}(1 + |x|)(1 + |x'|) \leq \\ &\leq \max\{1, 2|k|\}(1 + |x|)^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

поэтому нужны элементы $Q - Q_\pm$, принадлежащие $L^{1,2}(\mathbb{R})$.

3.3. Данные рассеяния. Две собственные функции $\phi, \bar{\phi}, \psi, \bar{\psi}$ являются линейно независимыми. Действительно, если $u(x, k) = (u_1(x, k), u_2(x, k))^T$ и $v(x, k) = (v_1(x, k), v_2(x, k))^T$ – любые два решения уравнения (2.1) при $\sigma = 1$, имеем

$$\frac{d}{dx} W(u, v) = 0, \quad (3.13)$$

где вронскиан $W(u, v)$ решений u и v имеет вид $W(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Из асимптотик (3.4) и (3.5) следует, что

$$W(\phi, \bar{\phi}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} W(\phi(x, k), \bar{\phi}(x, k)) = 2\lambda(\lambda + k), \quad (3.14)$$

$$W(\psi, \bar{\psi}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} W(\psi(x, k), \bar{\psi}(x, k)) = -2\lambda(\lambda + k), \quad (3.15)$$

это доказывает, что функции $\phi(x, k)$ и $\bar{\phi}(x, k)$ являются линейно независимыми, так же как и ψ и $\bar{\psi}$, с единственным исключением точек ветвления $\pm q_0$. Следовательно, можно представить $\phi(x, k)$ и $\bar{\phi}(x, k)$ в виде линейных комбинаций $\psi(x, k)$ и $\bar{\psi}(x, k)$, или наоборот. Таким образом, соотношения

$$\phi(x, k) = b(k)\psi(x, k) + a(k)\bar{\psi}(x, k), \quad (3.16)$$

$$\bar{\phi}(x, k) = \bar{a}(k)\psi(x, k) + \bar{b}(k)\bar{\psi}(x, k) \quad (3.17)$$

справедливы для любого k , при котором существуют все четыре собственные функции. Комбинируя (3.14) и (3.15), можно получить, что данные рассеяния удовлетворяют следующему характеристическому уравнению:

$$a(k)\bar{a}(k) - b(k)\bar{b}(k) = 1. \quad (3.18)$$

Данные рассеяния можно выразить через вронскианы собственных функций, т. е.

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{W(\phi(x, k), \psi(x, k))}{W(\bar{\psi}(x, k), \psi(x, k))} = \frac{W(\phi(x, k), \psi(x, k))}{2\lambda(\lambda + k)}, \\ \bar{a}(k) &= -\frac{W(\bar{\phi}(x, k), \bar{\psi}(x, k))}{W(\bar{\psi}(x, k), \psi(x, k))} = -\frac{W(\bar{\phi}(x, k), \bar{\psi}(x, k))}{2\lambda(\lambda + k)}, \\ b(k) &= -\frac{W(\phi(x, k), \bar{\psi}(x, k))}{W(\bar{\psi}(x, k), \psi(x, k))} = -\frac{W(\phi(x, k), \bar{\psi}(x, k))}{2\lambda(\lambda + k)}, \\ \bar{b}(k) &= \frac{W(\bar{\phi}(x, k), \psi(x, k))}{W(\bar{\psi}(x, k), \psi(x, k))} = \frac{W(\bar{\phi}(x, k), \psi(x, k))}{2\lambda(\lambda + k)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Тогда ввиду аналитичности собственных функций получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что элементы $Q - Q_{\pm}$ принадлежат $L^1(\mathbb{R})$, тогда функция $a(k)$ непрерывна при $k \in \overline{\mathbb{C}}_1 \setminus \{\pm q_0\}$ и аналитична при $k \in \mathbb{C}_1$, а функция $\bar{a}(k)$ непрерывна при $k \in \overline{\mathbb{C}}_2 \setminus \{\pm q_0\}$ и аналитична при $k \in \mathbb{C}_2$. Более того, функции $b(k)$ и $\bar{b}(k)$ непрерывны в $k \in (-\infty, -q_0) \cup (q_0, +\infty)$. Кроме того, если элементы $Q - Q_{\pm}$ принадлежат $L^{1,2}(\mathbb{R})$, то функция $a(k)\lambda(k)$ непрерывна при $k \in \overline{\mathbb{C}}_1$ и аналитична при $k \in \mathbb{C}_1$, а $\bar{a}(k)\lambda(k)$ непрерывна при $k \in \overline{\mathbb{C}}_2$ и аналитична при $k \in \mathbb{C}_2$. Более того, $b(k)\lambda(k)$ и $\bar{b}(k)\lambda(k)$ непрерывны при $k \in \mathbb{R}$. Если элементы $Q - Q_{\pm}$ растут не быстрее, чем e^{-ax^2} , где a – положительное вещественное число, то $a(k)\lambda(k)$, $\bar{a}(k)\lambda(k)$, $b(k)\lambda(k)$ и $\bar{b}(k)\lambda(k)$ аналитичны при $k \in \mathbb{K}$.*

Доказательство теоремы 2 следует из вронскианных соотношений (см. также [26]).

Заметим, что соотношения (3.16) и (3.17) можно представить в виде

$$\mu(x, k) = \rho(k)e^{2i\lambda x}N(x, k) + \bar{N}(x, k), \quad \bar{\mu}(x, k) = N(x, k) + \bar{\rho}(k)e^{-2i\lambda x}\bar{N}(x, k), \quad (3.20)$$

где $\mu(x, k) = M(x, k)a^{-1}(k)$, $\bar{\mu}(x, k) = \bar{M}(x, k)\bar{a}^{-1}(k)$, $\rho(k) = b(k)a^{-1}(k)$ и $\bar{\rho}(k) = \bar{b}(k)\bar{a}^{-1}(k)$. Введем (2×2) -матрицы

$$m_+(x, k) = (\mu(x, k), N(x, k)), \quad m_-(x, k) = (\bar{N}(x, k), \bar{\mu}(x, k)), \quad (3.21)$$

которые мероморфны в $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ соответственно. Следовательно, можно представить задачу Римана–Гильберта или условие на “скачок” на плоскости k в виде уравнения

$$m_+(x, k) - m_-(x, k) = m_-(x, k) \begin{pmatrix} -\rho(k)\bar{\rho}(k) & -\bar{\rho}(k)e^{-2i\lambda x} \\ \rho(k)e^{2i\lambda x} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

на контуре $\Sigma: k \in (-\infty, -q_0] \cup [q_0, +\infty)$. Напомним, что на листе $\mathbb{C}_1$ справедливо $\text{Im } \lambda > 0$, на листе $\mathbb{C}_2$ – $\text{Im } \lambda < 0$, а на контуре Σ – $\text{Im } \lambda = 0$.

3.4. Симметричные редукции. Симметрия потенциала порождает симметрию между собственными функциями. Действительно, если функция $v(x, k) = (v_1(x, k), v_2(x, k))^T$ – решение уравнения (2.1) при $\sigma = 1$, то $(v_2(-x, k), -v_1(-x, k))^T$ также является решением уравнения (2.1) при $\sigma = 1$. Принимая во внимание граничные условия (3.6), получим

$$\psi(x, k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi(-x, k), \quad \bar{\psi}(x, k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\phi}(-x, k). \quad (3.23)$$

Используя формулы (3.7), можно получить симметричные связи для собственных функций:

$$N(x, k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M(-x, k), \quad \bar{N}(x, k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{M}(-x, k). \quad (3.24)$$

Из вронскианного представления данных рассеяния и указанной выше симметричной редукции имеем

$$\bar{b}(k) = b(k). \quad (3.25)$$

3.5. Униформизирующие координаты. Прежде чем обсуждать нули данных рассеяния и решать обратную задачу, введем униформизирующую переменную z , определенную конформным отображением:

$$z = z(k) = k + \lambda(k), \quad (3.26)$$

где $\lambda = \sqrt{k^2 - q_0^2}$, а обратное отображение имеет вид $k = k(z) = (z + q_0^2/z)/2$. Тогда $\lambda(z) = (z - q_0^2/z)/2$. Заметим, что справедливы следующие утверждения:

1) верхний лист $\mathbb{C}_1$ и нижний лист $\mathbb{C}_2$ римановой поверхности $\mathbb{K}$ отображаются соответственно в верхнюю $\mathbb{C}^+$ и нижнюю $\mathbb{C}^-$ полуплоскости комплексной плоскости z ;

2) разрез $(-\infty, -q_0] \cup [q_0, +\infty)$ на римановой поверхности отображается в вещественную ось z ;

3) сегменты $[-q_0, q_0]$ на $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ отображаются соответственно на верхнюю и нижнюю полуокружности радиуса q_0 с центром в начале координат на комплексной плоскости z .

Из теоремы 1 следует, что собственные функции $M(x, z)$ и $N(x, z)$ аналитичны в верхней полуплоскости z , т. е. $z \in \mathbb{C}^+$, а функции $\bar{M}(x, z)$ и $\bar{N}(x, z)$ аналитичны в нижней полуплоскости z , т. е. $z \in \mathbb{C}^-$. Более того, согласно теореме 2 функция $a(z)$ аналитична в верхней полуплоскости z : $z \in \mathbb{C}^+$, а $\bar{a}(z)$ аналитична в нижней полуплоскости z : $z \in \mathbb{C}^-$.

3.6. Симметрии в униформизирующих координатах. Из указанных выше симметрий собственных функций имеем

$$\psi(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi(-x, z), \quad \bar{\psi}(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\phi}(-x, z). \quad (3.27)$$

Далее, если $z \rightarrow q_0^2/z$, то $(k, \lambda) \rightarrow (k, -\lambda)$. Следовательно,

$$\phi\left(x, \frac{q_0^2}{z}\right) = \frac{q_0^2/z}{-iq_-} \bar{\phi}(x, z), \quad \psi\left(x, \frac{q_0^2}{z}\right) = \frac{-iq_+}{z} \bar{\psi}(x, z), \quad \text{Im } z < 0. \quad (3.28)$$

Аналогично получим

$$N(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M(-x, z), \quad \bar{N}(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{M}(-x, z), \quad (3.29)$$

$$\bar{b}(z) = b(z); \quad a\left(\frac{q_0^2}{z}\right) = e^{2i\theta_+} \bar{a}(z), \quad \text{Im } z < 0; \quad b\left(\frac{q_0^2}{z}\right) = -\bar{b}(z).$$

3.7. Асимптотическое поведение собственных функций и данных рассеяния. Чтобы решить обратную задачу, нужно определить асимптотическое поведение собственных функций и данных рассеяния как при $z \rightarrow \infty$, так и при $z \rightarrow 0$. Из интегральных уравнений (в терминах функций Грина) имеем

$$\overline{N}(x, z) \sim \begin{pmatrix} z \frac{q(x)}{q_+} \\ iq_- \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow 0,$$

$$a(z) = \begin{cases} 1, & z \rightarrow \infty, \\ e^{2i\theta_+}, & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad \bar{a}(z) = \begin{cases} 1, & z \rightarrow \infty, \\ e^{-2i\theta_+}, & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zb(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{b(z)}{z^2} = 0. \quad (3.31)$$

3.8. Проблема Римана–Гильберта в униформизирующих координатах.

3.8.1. Левосторонняя задача рассеяния. Чтобы учесть поведение собственных функций, представим условия на “скачок” на вещественной оси z в виде

$$\begin{aligned} \frac{M(x, z)}{za(z)} - \frac{\overline{N}(x, z)}{z} &= \rho(z)e^{i(z-q_0^2/z)x} \frac{N(x, z)}{z}, \\ \frac{\overline{M}(x, z)}{z\bar{a}(z)} - \frac{N(x, z)}{z} &= \bar{\rho}(z)e^{-i(z-q_0^2/z)x} \frac{\overline{N}(x, z)}{z}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Таким образом, функции будут ограничены на бесконечности, хотя и имеют дополнительный полюс при $z = 0$. Заметим, что $M(x, z)/a(z)$, как функция от z , определена в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, где у нее по предположению имеются простые полюсы z_j , т.е. $a(z_j) = 0$, а $\overline{M}(x, z)/\bar{a}(z)$ определена в нижней полуплоскости $\mathbb{C}^-$, где у нее имеются простые полюсы $\bar{z}_j$, т.е. $\bar{a}(\bar{z}_j) = 0$. Действительно, это аналогично случаю НУШ, где функции $a(z)$, $\bar{a}(z)$ могут иметь кратные нули и/или нули на вещественной оси [8]. Понятие “собственного нуля” исключает эти частные возможности. В нулях a , $\bar{a}$ имеем

$$M(x, z_j) = b(z_j)e^{i(z_j-q_0^2/z_j)x} N(x, z_j), \quad \overline{M}(x, \bar{z}_j) = \bar{b}(\bar{z}_j)e^{-i(\bar{z}_j-q_0^2/\bar{z}_j)x} \overline{N}(x, \bar{z}_j). \quad (3.33)$$

Тогда, вычитая значение на бесконечности, индуцированный полюс в начале координат и полюсы (предположительно простые) в верхней и нижней полуплоскостях соответственно при $a(z_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, J$, и $\bar{a}(\bar{z}_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, \bar{J}$ (ниже мы увидим, что $J = \bar{J}$), получим

$$\begin{aligned} &\left[\frac{M(x, z)}{za(z)} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ iq_- \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^J \frac{M(x, z_j)}{(z - z_j)z_j a'(z_j)} \right] - \\ &\quad - \left[\frac{\overline{N}(x, z)}{z} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ iq_- \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^J \frac{b(z_j)e^{i(z_j-q_0^2/z_j)x} N(x, z_j)}{(z - z_j)z_j a'(z_j)} \right] = \\ &= \rho(z)e^{i(z-q_0^2/z)x} \frac{N(x, z)}{z}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\overline{M}(x, z)}{z\overline{a}(z)} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -iq_+ \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^J \frac{\overline{M}(x, \bar{z}_j)}{(z - \bar{z}_j)\bar{z}_j a'(\bar{z}_j)} \right] - \\
& - \left[\frac{N(x, z)}{z} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -iq_+ \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^J \frac{\bar{b}(\bar{z}_j) e^{-i(\bar{z}_j - q_0^2/\bar{z}_j)x} \overline{N}(x, \bar{z}_j)}{(z - \bar{z}_j)\bar{z}_j \bar{a}'(\bar{z}_j)} \right] = \\
& = \bar{\rho}(z) e^{-i(z - q_0^2/z)x} \frac{\overline{N}(x, z)}{z}. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Введем теперь проекторы

$$P_{\pm}(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - (z \pm i0)} d\xi, \tag{3.36}$$

которые хорошо определены для любой функции $f(\xi)$, интегрируемой на вещественной оси. Если функции $f_{\pm}(\xi)$ аналитичны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях z и убывают при больших ξ , то

$$P_{\pm}(f_{\pm})(z) = \pm f_{\pm}(z), \quad P_{\mp}(f_{\pm})(z) = 0. \tag{3.37}$$

Применяя оператор P_- к (3.34), а P_+ к (3.35), получим

$$\begin{aligned}
\overline{N}(x, z) &= \begin{pmatrix} z \\ iq_- \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^J \frac{zb(z_j) e^{i(z_j - q_0^2/z_j)x} N(x, z_j)}{(z - z_j)z_j a'(z_j)} + \\
&+ \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi)}{\xi(\xi - z)} e^{i(\xi - q_0^2/\xi)x} N(x, \xi) d\xi, \tag{3.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N(x, z) &= \begin{pmatrix} -iq_+ \\ z \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^J \frac{z\bar{b}(\bar{z}_j) e^{-i(\bar{z}_j - q_0^2/\bar{z}_j)x} \overline{N}(x, \bar{z}_j)}{(z - \bar{z}_j)\bar{z}_j \bar{a}'(\bar{z}_j)} - \\
&- \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\rho}(\xi)}{\xi(\xi - z)} e^{-i(\xi - q_0^2/\xi)x} \overline{N}(x, \xi) d\xi. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Поскольку существуют симметрии между собственными функциями, определенными на обеих бесконечностях $\pm\infty$, приступим к выводу интегральных уравнений для обратного рассеяния, определенных на правом конце.

3.8.2. Правосторонняя задача рассеяния. Правостороннюю задачу рассеяния можно представить в виде

$$\psi(x, z) = \alpha(z)\bar{\phi}(x, z) + \beta(z)\phi(x, z), \quad \bar{\psi}(x, z) = \bar{\alpha}(z)\phi(x, z) + \bar{\beta}(z)\bar{\phi}(x, z), \tag{3.40}$$

где $\alpha(z)$, $\bar{\alpha}(z)$, $\beta(z)$ и $\bar{\beta}(z)$ являются правосторонними данными рассеяния. Более того, можно получить правосторонние и левосторонние данные рассеяния, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\bar{\alpha}(z) = \bar{a}(z), \quad \alpha(z) = a(z), \quad \bar{\beta}(z) = -b(z), \quad \beta(z) = -\bar{b}(z). \tag{3.41}$$

Таким образом, ввиду симметричных связей между данными рассеяния имеем

$$\begin{aligned}\frac{N(x, z)}{za(z)} - \frac{\overline{M}(x, z)}{z} &= \rho^*(-z^*)e^{-i(z-q_0^2/z)x} \frac{M(x, z)}{z}, \\ \frac{\overline{N}(x, z)}{z\bar{a}(z)} - \frac{M(x, z)}{z} &= \bar{\rho}^*(-z^*)e^{i(z-q_0^2/z)x} \frac{\overline{M}(x, z)}{z},\end{aligned}\quad (3.42)$$

так что функции ограничены на бесконечности, имея при этом дополнительный полюс при $z = 0$. Заметим, что $N(x, z)/a(z)$, как функция от z , определена в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, где (по предположению) она имеет простые полюсы z_j , т. е. $a(z_j) = 0$, а функция $\overline{N}(x, z)/\bar{a}(z)$ определена в нижней полуплоскости $\mathbb{C}^-$, где она имеет простые полюсы $\bar{z}_j$, т. е. $\bar{a}(\bar{z}_j) = 0$. В нулях функций a , $\bar{a}$ имеем

$$\begin{aligned}N(x, z_j) &= -\bar{b}(z_j)M(x, z_j)e^{-i(z_j-q_0^2/z_j)x}, \\ \overline{N}(x, \bar{z}_j) &= -b(\bar{z}_j)\overline{M}(x, \bar{z}_j)e^{i(\bar{z}_j-q_0^2/\bar{z}_j)x}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Тогда, как и ранее, вычитая значение на бесконечности, индуцированный полюс в начале координат и полюсы (предположительно простые) в верхней и нижней полуплоскостях соответственно при $a(z_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, J$, и $\bar{a}(\bar{z}_j)$, $j = 1, 2, \dots, \bar{J}$, получим

$$\begin{aligned}\left[\frac{N(x, z)}{za(z)} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -iq_- \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^J \frac{N(x, z_j)}{(z - z_j)z_j a'(z_j)} \right] - \\ - \left[\frac{\overline{M}(x, z)}{z} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -iq_- \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^J \frac{-\bar{b}(z_j)M(x, z_j)e^{-i(z_j-q_0^2/z_j)x}}{(z - z_j)z_j a'(z_j)} \right] = \\ = \rho^*(-z^*)e^{-i(z-q_0^2/z)x} \frac{M(x, z)}{z},\end{aligned}\quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\overline{N}(x, z)}{z\bar{a}(z)} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ iq_+ \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{\bar{J}} \frac{\overline{N}(x, \bar{z}_j)}{(z - \bar{z}_j)\bar{z}_j \bar{a}'(\bar{z}_j)} \right] - \\ - \left[\frac{M(x, z)}{z} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ iq_+ \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^{\bar{J}} \frac{-b(\bar{z}_j)\overline{M}(x, \bar{z}_j)e^{i(\bar{z}_j-q_0^2/\bar{z}_j)x}}{(z - \bar{z}_j)\bar{z}_j \bar{a}'(\bar{z}_j)} \right] = \\ = \bar{\rho}^*(-z^*)e^{i(z-q_0^2/z)x} \frac{\overline{M}(x, z)}{z}.\end{aligned}\quad (3.45)$$

Применяя операторы P_- к (3.44) и P_+ к (3.45), получим

$$\begin{aligned}\overline{M}(x, z) &= \begin{pmatrix} -iq_- \\ z \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^J \frac{-z\bar{b}(z_j)M(x, z_j)e^{-i(z_j-q_0^2/z_j)x}}{(z - z_j)z_j a'(z_j)} + \\ &\quad + \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho^*(-\xi)}{\xi(\xi - z)} e^{-i(\xi-q_0^2/\xi)x} M(x, \xi) d\xi, \\ M(x, z) &= \begin{pmatrix} z \\ iq_+ \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\bar{J}} \frac{-zb(\bar{z}_j)\overline{M}(x, \bar{z}_j)e^{i(\bar{z}_j-q_0^2/\bar{z}_j)x}}{(z - \bar{z}_j)\bar{z}_j \bar{a}'(\bar{z}_j)} - \\ &\quad - \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\rho}^*(-\xi)}{\xi(\xi - z)} e^{i(\xi-q_0^2/\xi)x} \overline{M}(x, \xi) d\xi.\end{aligned}\quad (3.46)$$

3.9. Восстановление потенциалов. Для восстановления потенциала используем асимптотики. Например, из уравнения (3.30) получаем $\bar{N}_1(x, z)/z \sim q(x)/q_+$ при $z \rightarrow 0$. В силу (3.38) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\bar{N}_1(x, z)}{z} &\sim 1 + \sum_{j=1}^J \frac{b(z_j) e^{i(z_j - q_0^2/z_j)x}}{-z_j^2 a'(z_j)} N_1(x, z_j) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi)}{\xi^2} e^{i(\xi - q_0^2/\xi)x} N_1(x, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.47)$$

при $z \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} q(x) = q_+ &\left[1 + \sum_{j=1}^J \frac{b(z_j) e^{i(z_j - q_0^2/z_j)x}}{-z_j^2 a'(z_j)} N_1(x, z_j) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi)}{\xi^2} e^{i(\xi - q_0^2/\xi)x} N_1(x, \xi) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.10. Замыкание системы. Из $a(q_0^2/z) = e^{2i\theta_+} \bar{a}(z)$ имеем $J = \bar{J}$. Комбинируя полученные ранее интегральные уравнения (3.38) и (3.39), получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_1(x, z) \\ N_2(x, z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -iq_+ \\ z \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^J \frac{z \bar{b}(\bar{z}_j) e^{-i(\bar{z}_j - q_0^2/\bar{z}_j)x}}{(z - \bar{z}_j) \bar{z}_j \bar{a}'(\bar{z}_j)} \times \\ &\times \left(\bar{z}_j + \sum_{l=1}^J \frac{\bar{z}_j b(z_l) e^{i(z_l - q_0^2/z_l)x}}{(\bar{z}_j - z_l) z_l a'(z_l)} N_1(x, z_l) + \frac{\bar{z}_j}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi)}{\xi(\xi - \bar{z}_j)} e^{i(\xi - q_0^2/\xi)x} N_1(x, \xi) d\xi \right) - \\ &- \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\rho}(\xi) d\xi}{\xi(\xi - z)} e^{-i(\xi - q_0^2/\xi)x} \times \\ &\times \left(\xi + \sum_{l=1}^J \frac{\xi b(z_l) e^{i(z_l - q_0^2/z_l)x}}{(\xi - z_l) z_l a'(z_l)} N_1(x, z_l) + \frac{\xi}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\eta)}{\eta(\eta - \xi)} e^{i(\eta - q_0^2/\eta)x} N_1(x, \eta) d\eta \right) - \\ &- \left(iq_- + \sum_{l=1}^J \frac{\bar{z}_j b(z_l) e^{i(z_l - q_0^2/z_l)x}}{(\bar{z}_j - z_l) z_l a'(z_l)} N_2(x, z_l) + \frac{\bar{z}_j}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\xi)}{\xi(\xi - \bar{z}_j)} e^{i(\xi - q_0^2/\xi)x} N_2(x, \xi) d\xi \right) - \\ &- \left(iq_- + \sum_{l=1}^J \frac{\xi b(z_l) e^{i(z_l - q_0^2/z_l)x}}{(\xi - z_l) z_l a'(z_l)} N_2(x, z_l) + \frac{\xi}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\eta)}{\eta(\eta - \xi)} e^{i(\eta - q_0^2/\eta)x} N_2(x, \eta) d\eta \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Потенциал (3.48) можно восстановить из решения интегрального уравнения (3.49).

Можно получить аналогичное уравнение для $\bar{M}(x, z)$ [27].

3.11. Формула следа. Мы показали, что функции $a(z)$ и $\bar{a}(z)$ аналитичны в верхней и нижней полуплоскостях z соответственно. Как упомянуто выше, мы считаем, что $a(z)$ имеет простые нули, которые мы обозначили z_j . Из условия симметрии $a(q_0^2/z) = e^{2i\theta_+} \bar{a}(z)$ получим, что $\bar{a}(z)$ имеет простые нули q_0^2/z_j . Введем функции

$$\gamma(z) = a(z) \prod_{j=1}^J \frac{z - q_0^2/z_j}{z - z_j}, \quad \bar{\gamma}(z) = \bar{a}(z) \prod_{j=1}^J \frac{z - z_j}{z - q_0^2/z_j}. \quad (3.50)$$

Функции $\gamma(z)$ и $\bar{\gamma}(z)$ аналитичны в верхней и нижней полуплоскостях z соответственно и не имеют нулей в соответствующих им полуплоскостях. Имеем

$$\begin{aligned} \ln \gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - z} d\xi, & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \bar{\gamma}(\xi)}{\xi - z} d\xi &= 0, & \operatorname{Im} z > 0, \\ \ln \bar{\gamma}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \bar{\gamma}(\xi)}{\xi - z} d\xi, & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \gamma(\xi)}{\xi - z} d\xi &= 0, & \operatorname{Im} z < 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Складывая или вычитая эти уравнения в каждой полуплоскости соответственно, получим

$$\begin{aligned} \ln \gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \gamma(\xi) \bar{\gamma}(\xi)}{\xi - z} d\xi, & \operatorname{Im} z > 0, \\ \ln \bar{\gamma}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \gamma(\xi) \bar{\gamma}(\xi)}{\xi - z} d\xi, & \operatorname{Im} z < 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Заметим, что $\gamma(z)\bar{\gamma}(z) = a(z)\bar{a}(z)$, из условия унитарности $a(z)\bar{a}(z) - b(z)\bar{b}(z) = 1$ и симметрии $b(z) = \bar{b}(z)$ имеем

$$\begin{aligned} \ln a(z) &= \ln \left(\prod_{j=1}^J \frac{z - z_j}{z - q_0^2/z_j} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 + b^2(\xi))}{\xi - z} d\xi, & \operatorname{Im} z > 0, \\ \ln \bar{a}(z) &= \ln \left(\prod_{j=1}^J \frac{z - q_0^2/z_j}{z - z_j} \right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1 + b^2(\xi))}{\xi - z} d\xi, & \operatorname{Im} z < 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Таким образом, мы можем восстановить $a(k)$, $\bar{a}(k)$ через собственные значения (нули) и только одну функцию $b(k)$. Поскольку $a(z) \sim e^{2i\theta+}$ при $z \rightarrow 0$, из формулы следа при $b(\xi) = 0$ на вещественной оси получим следующее ограничение для безотражательных потенциалов:

$$\prod_{j=1}^J z_j^2 = q_0^2 e^{2i\theta+}. \quad (3.54)$$

3.12. Дискретные данные рассеяния и их симметрии. Чтобы найти безотражательные потенциалы (солитоны), нужно вычислить соответствующие данные рассеяния: $b(z_j)$ и $\bar{b}(\bar{z}_j)$, $a'(z_j)$ и $\bar{a}'(\bar{z}_j)$, $j = 1, 2, \dots, J$. Последние функции можно вычислить с помощью формулы следа. Поэтому сосредоточимся на вычислении первых. Поскольку

$$\begin{aligned} N_1(x, z) &= -M_2(-x, z), & N_2(x, z) &= M_1(-x, z), \\ M_1(x, z_j) &= b(z_j) e^{i(z_j - q_0^2/z_j)x} N_1(x, z_j), \\ M_2(x, z_j) &= b(z_j) e^{i(z_j - q_0^2/z_j)x} N_2(x, z_j), \end{aligned} \quad (3.55)$$

имеем

$$N_1(x, z_j) = -b(z_j) e^{-i(z_j - q_0^2/z_j)x} N_2(-x, z_j), \quad (3.56)$$

$$N_2(x, z_j) = b(z_j) e^{-(z_j - q_0^2/z_j)x} N_1(-x, z_j). \quad (3.57)$$

Перепишем соотношение (3.57) в виде

$$N_2(-x, z_j) = b(z_j) e^{(z_j - q_0^2/z_j)x} N_1(x, z_j). \quad (3.58)$$

Комбинируя (3.58) с (3.56), можно получить следующее условие симметрии для дискретных данных $b(z_j)$:

$$-b^2(z_j) = 1. \quad (3.59)$$

Подобный анализ показывает, что $\bar{b}(\bar{z}_j)$ удовлетворяет аналогичному уравнению $-\bar{b}^2(\bar{z}_j) = 1$, т. е.

$$b(z_j) = \pm i, \quad \bar{b}(\bar{z}_j) = \pm i. \quad (3.60)$$

Из условия симметрии $\bar{b}(z) = b(z)$ имеем $\bar{b}(z_j) = b(z_j)$, $b(\bar{z}_j) = \bar{b}(\bar{z}_j)$.

При $J = 1$, предполагая, что $0 < \theta_+ < \pi$, получим $z_1 = q_0 e^{i\theta_+}$. Из формулы следа при $b(\xi) = 0$ на вещественной оси вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a'(z_1) &= a'(q_0 e^{i\theta_+}) = \frac{1}{q_0(e^{i\theta_+} - e^{-i\theta_+})}, \\ \bar{a}'(\bar{z}_1) &= a'(q_0 e^{-i\theta_+}) = \frac{1}{q_0(e^{-i\theta_+} - e^{i\theta_+})}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Более того, из симметричной связи $b(q_0^2/z) = -\bar{b}(z)$ имеем

$$\bar{b}(q_0 e^{-i\theta_+}) = -b(q_0 e^{i\theta_+}). \quad (3.62)$$

Для удобства запишем $b(q_0 e^{i\theta_+}) = \delta i$, тогда $\bar{b}(q_0 e^{-i\theta_+}) = -\delta i$, где $\delta = \pm 1$.

3.13. Эволюция во времени. Поскольку

$$v_t = Tv = \begin{pmatrix} 2ik^2 + i\sigma q_0^2 & -2kq_0 e^{i(2\sigma q_0^2 t + \theta_{\pm})} \\ -2\sigma kq_0 e^{i(2\sigma q_0^2 t + \theta_{\pm})} & -2ik^2 + i\sigma q_0^2 \end{pmatrix} v := \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} v, \quad (3.63)$$

где $\sigma = 1$, получаем, что как $a(z, t)$, так и $\bar{a}(z, t)$ не зависят от времени, и

$$\begin{aligned} b(z; t) &= b(z; 0) \exp \left\{ -2i \left[q_0^2 + \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{q_0^4}{z^2} \right) \right] t \right\}, \\ \bar{b}(z; t) &= \bar{b}(z; 0) \exp \left\{ 2i \left[q_0^2 + \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{q_0^4}{z^2} \right) \right] t \right\}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} b(q_0 e^{i\theta_+}; t) &= \delta i \exp \{ -2iq_0^2 [1 + i \sin(2\theta_+)] t \}, \\ \bar{b}(q_0 e^{-i\theta_+}; t) &= -\delta i \exp \{ 2iq_0^2 [1 - i \sin(2\theta_+)] t \}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

3.14. Чистое односолитонное решение. При $J = 1$ и $b(\xi, t) = 0$ (безотражательный потенциал), решая соответствующую систему уравнений (3.49) (которая является линейной), получим из (3.48)

$$q(x, t) = q_0 e^{i(2q_0^2 t + \theta_+)} \left[1 - \frac{2i \sin \theta_+ b(q_0 e^{i\theta_+}; t) e^{-2q_0 x \sin \theta_+}}{q_0 e^{2i\theta_+}} N_1(x, q_0 e^{i\theta_+}; t) \right], \quad (3.66)$$

где

$$N_1(x, q_0 e^{i\theta_+}) = \frac{-iq_0 e^{i(2q_0^2 t + \theta_+)} - q_0 e^{i\theta_+} e^{-2q_0 x \sin \theta_+} \bar{b}(q_0 e^{-i\theta_+}; t)}{1 - e^{-4q_0 x \sin \theta_+} b(q_0 e^{i\theta_+}; t) \bar{b}(q_0 e^{-i\theta_+}; t)}. \quad (3.67)$$

Рис. 1. Амплитуда односолитонного решения $q(x, t)$ как функция x и t при значениях параметров $\sigma = 1$, $\delta = 1$, $\theta_+ = \pi/3$ и $q_0 = 2$.

Решая соответствующую дискретную систему (3.49) при $J = 1$, получим, что несингулярное чистое односолитонное решение существует только при $\delta = 1$, и оно имеет вид

$$q(x, t) = \frac{1}{2} q_0 e^{i(2q_0^2 t + \theta_+)} [(1 + e^{-2i\theta_+}) + (1 - e^{-2i\theta_+}) \operatorname{th}(q_0 x \sin \theta_+ - q_0^2 t \sin(2\theta_+))]. \quad (3.68)$$

На рис. 1 показано типичное несингулярное односолитонное решение.

4. НЕЛОКАЛЬНОЕ НУШ С ОБРАЩЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ: $\sigma = 1$, $\theta_+ + \theta_- = \pi$

4.1. Прямое рассеяние. Рассмотрим ненулевые граничные условия вида (1.6) при $\sigma = 1$ и $\theta_+ + \theta_- = \pi$. При таких условиях уравнение (2.3) удобно свести к виду

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} = -(k^2 + q_0^2) v_j, \quad j = 1, 2. \quad (4.1)$$

Каждое из двух уравнений имеет два линейно независимых решения $e^{i\lambda x}$ и $e^{-i\lambda x}$ при $|x| \rightarrow \infty$, где введены локальные полярные координаты

$$k - iq_0 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 < \frac{3\pi}{2}, \quad k + iq_0 = r_2 e^{i\theta_2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 < \frac{3\pi}{2}, \quad (4.2)$$

где $r_1 = |k - iq_0|$ и $r_2 = |k + iq_0|$. Можно написать $\lambda(k) = (r_1 r_2)^{1/2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2 + im\pi}$, при этом $m = 0, 1$ соответственно на слоях I ($\mathbb{K}_1$) и II ($\mathbb{K}_2$). Тогда переменную k можно считать принадлежащей поверхности Римана $\mathbb{K}$, состоящей из листов I и II, оба из которых сходятся в разрезе комплексной плоскости вдоль $\Sigma := [-iq_0, iq_0]$, при этом края склеиваются таким образом, что функция $\lambda(k)$ непрерывна на разрезе. Вдоль вещественной оси k имеем $\lambda(k) = \pm \operatorname{sign}(k) \sqrt{k^2 + q_0^2}$, где знаки плюс и минус относятся соответственно к листам I и II поверхности Римана, а знак квадратного корня означает главную ветвь вещественнозначной функции квадратного

корня. Обозначим через $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$ открытые верхнюю и нижнюю соответственно комплексные полуплоскости, а через $\mathbb{K}^+$ и $\mathbb{K}^-$ – открытые верхнюю и нижнюю соответственно комплексные полуплоскости с разрезом вдоль Σ . Тогда λ обеспечивает взаимно однозначное соответствие между следующими множествами:

- 1) $k \in \mathbb{K}^+ = \mathbb{C}^+ \setminus (0, iq_0]$ и $\lambda \in \mathbb{C}^+$;
- 2) $k \in \partial\mathbb{K}^+ = \mathbb{R} \cup \{is - 0^+ : 0 < s < q_0\} \cup \{iq_0\} \cup \{is + 0^+ : 0 < s < q_0\}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 3) $k \in \mathbb{K}^- = \mathbb{C}^- \setminus [-iq_0, 0)$ и $\lambda \in \mathbb{C}^-$;
- 4) $k \in \partial\mathbb{K}^- = \mathbb{R} \cup \{is - 0^+ : -q_0 < s < 0\} \cup \{-iq_0\} \cup \{is + 0^+ : -q_0 < s < 0\}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Кроме того, $\lambda^+(k)$ и $\lambda^-(k)$ означают граничные значения, принимаемые функцией $\lambda(k)$ при $k \in \Sigma$ на соответственно правом и левом краях разреза, при этом $\lambda^\pm(k) = \pm\sqrt{q_0^2 - |k|^2}$, $k = is \pm 0^+$, $|s| < q_0$ на левом и правом краях разреза (см. [26], стр. 30, рис. 5, 6).

4.2. Собственные функции. Как и в разделе 3, введем собственные функции $\phi(x, k)$, $\bar{\phi}(x, k)$, $\psi(x, k)$, $\bar{\psi}(x, k)$, задаваемые их граничными условиями. Подставим их в уравнение (2.3) с $\sigma = 1$ и получим по формулам (3.5), (3.6)

$$w = \begin{pmatrix} \lambda + k \\ iq_+ \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} -iq_- \\ \lambda + k \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -iq_+ \\ \lambda + k \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} \lambda + k \\ iq_- \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где $\lambda = \sqrt{k^2 + q_0^2}$. Рассмотрим также функции с постоянными граничными условиями и определим те же ограниченные собственные функции $M(x, k)$, $N(x, k)$, $\bar{M}(x, k)$, $\bar{N}(x, k)$, задаваемые формулами (3.7), с новым определением λ .

Кроме того, ограниченные собственные функции можно представить с помощью интегральных уравнений, формулы совпадают с формулами (3.8), но данное выше определение λ другое.

Используя тот же метод, что и в предыдущем случае ($\theta_+ + \theta_- = 0$), получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть элементы $Q - Q_\pm$ принадлежат $L^{1,1}(\mathbb{R})$, тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ собственные функции $M(x, k)$ и $N(x, k)$ непрерывны при $k \in \mathbb{K}^+ \cup \partial\mathbb{K}^-$ и аналитичны при $k \in \mathbb{K}^+$, $\bar{M}(x, k)$ и $\bar{N}(x, k)$ непрерывны при $k \in \mathbb{K}^- \cup \partial\mathbb{K}^+$ и аналитичны при $k \in \mathbb{K}^-$.

В доказательстве используются ряды Неймана; оно похоже на доказательство, приведенное в работе [26].

4.2.1. Данные рассеяния. Имеем соотношения

$$\phi(x, k) = b(k)\psi(x, k) + a(k)\bar{\psi}(x, k), \quad \bar{\phi}(x, k) = \bar{a}(k)\psi(x, k) + \bar{b}(k)\bar{\psi}(x, k), \quad (4.4)$$

справедливые при любом k таком, что все четыре собственные функции существуют. Кроме того,

$$a(k)\bar{a}(k) - b(k)\bar{b}(k) = 1, \quad (4.5)$$

где $a(k)$, $\bar{a}(k)$, $b(k)$ и $\bar{b}(k)$ заданы формулами (3.19), но данное в этом разделе определение λ отличается от определения, данного в разделе 3.

При $k \in (-iq_0, iq_0)$ приведенные выше данные рассеяния и собственные функции определены с помощью соответствующих значений на правом и левом краях разреза и помечены верхними индексами $\pm$, что поясняется ниже. В явном виде имеем для $k \in (-iq_0, iq_0)$

$$\begin{aligned} a^\pm(k) &= \frac{W(\phi^\pm(x, k), \psi^\pm(x, k))}{2\lambda^\pm(\lambda^\pm + k)}, & \bar{a}^\pm(k) &= -\frac{W(\bar{\phi}^\pm(x, k), \bar{\psi}^\pm(x, k))}{2\lambda^\pm(\lambda^\pm + k)}, \\ b^\pm(k) &= -\frac{W(\phi^\pm(x, k), \bar{\psi}^\pm(x, k))}{2\lambda^\pm(\lambda^\pm + k)}, & \bar{b}^\pm(k) &= \frac{W(\bar{\phi}^\pm(x, k), \psi^\pm(x, k))}{2\lambda^\pm(\lambda^\pm + k)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Тогда из аналитического поведения собственных функций получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что элементы $Q - Q_\pm$ принадлежат $L^{1,1}(\mathbb{R})$, тогда функция $a(k)$ непрерывна при $k \in \overline{\mathbb{K}^+} \cup \partial\overline{\mathbb{K}^-} \setminus \{\pm iq_0\}$ и аналитична при $k \in \mathbb{K}^+$, функция $\bar{a}(k)$ непрерывна при $k \in \overline{\mathbb{K}^-} \cup \partial\overline{\mathbb{K}^+} \setminus \{\pm iq_0\}$ и аналитична при $k \in \mathbb{K}^-$. Кроме того, функции $b(k)$ и $\bar{b}(k)$ непрерывны при $k \in \mathbb{R} \cup (-iq_0, iq_0)$. Если, кроме того, элементы $Q - Q_\pm$ растут не быстрее, чем e^{-ax^2} , где a – вещественное положительное число, то $a(k)\lambda(k)$, $\bar{a}(k)\lambda(k)$, $b(k)\lambda(k)$ и $\bar{b}(k)\lambda(k)$ аналитичны при $k \in \mathbb{K}$.*

В доказательстве используются ряды Неймана, оно аналогично доказательству, приведенному в работе [26].

4.3. Симметричные редукции. Симметрия потенциала порождает симметрию между собственными функциями. Действительно, если функция $v(x, k) = (v_1(x, k), v_2(x, k))^T$ – решение уравнения (2.1) при $\sigma = 1$, то $(v_2(-x, k), -v_1(-x, k))^T$ также является решением уравнения (2.1) при $\sigma = 1$. Учитывая граничные условия, получим

$$\psi(x, k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi(-x, k), \quad \bar{\psi}(x, k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\phi}(-x, k). \quad (4.7)$$

Аналогично можно получить симметричные соотношения между собственными функциями, т. е.

$$N(x, k) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M(-x, k), \quad \bar{N}(x, k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{M}(-x, k). \quad (4.8)$$

Из вронскианного представления данных рассеяния и приведенных выше симметричных соотношений имеем $\bar{b}(k) = b(k)$.

4.4. Униформизирующие координаты. Введем аналогичным образом униформизирующую переменную z , определенную с помощью конформного отображения:

$$z = z(k) = k + \lambda(k), \quad (4.9)$$

где $\lambda = \sqrt{k^2 + q_0^2}$, обратное отображение задается формулой $k = k(z) = (z - q_0^2/z)/2$. Тогда $\lambda(z) = (z + q_0^2/z)/2$. Пусть C_0 – окружность радиуса q_0 с центром в начале координат на плоскости z . Мы видим, что справедливы следующие утверждения.

1. Точка ветвления на обоих листах отображается в окружность C_0 . В частности, $z(\pm iq_0) = \pm iq_0$ от каждого листа, $z(0_I^\pm) = \pm q_0$ и $z(0_{II}^\pm) = \mp q_0$.

2. Плоскость $\mathbb{K}_1$ отображается во внешность C_0 , $\mathbb{K}_2$ отображается во внутренность C_0 . В частности, $z(\infty_I) = \infty$ и $z(\infty_{II}) = 0$; первый и второй квадранты плоскости $\mathbb{K}_1$ отображаются соответственно в первый и второй квадранты снаружи C_0 ; первый и второй квадранты плоскости $\mathbb{K}_2$ отображаются соответственно во второй и первой квадранты внутри C_0 ; $z_I z_{II} = q_0^2$.

3. Области на плоскости k такие, что $\text{Im } \lambda > 0$ и $\text{Im } \lambda < 0$, отображаются в $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : (|z|^2 - q_0^2) \cdot \text{Im } z > 0\}$ и $D^- = \{z \in \mathbb{C} : (|z|^2 - q_0^2) \cdot \text{Im } z < 0\}$ соответственно (см. [26, стр. 36, рис. 11]).

Тогда получим, что собственные функции M, N аналитичны при $z \in D^+$, а собственные функции $\bar{M}, \bar{N}$ аналитичны при $z \in D^-$.

4.5. Симметрии в униформизирующих координатах. Из приведенных выше симметричных соотношений между собственными функциями имеем

$$\psi(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi(-x, z), \quad \bar{\psi}(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\phi}(-x, z). \quad (4.10)$$

Далее, если $z \rightarrow -q_0^2/z$, то $(k, \lambda) \rightarrow (k, -\lambda)$. Следовательно,

$$\phi\left(x, -\frac{q_0^2}{z}\right) = \frac{q_0^2/z}{iq_-} \bar{\phi}(x, z), \quad \psi\left(x, -\frac{q_0^2}{z}\right) = \frac{-iq_+}{z} \bar{\psi}(x, z), \quad z \in D^-. \quad (4.11)$$

Аналогично получим

$$N(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M(-x, z), \quad \bar{N}(x, z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bar{M}(-x, z), \quad (4.12)$$

$$\bar{b}(z) = b(z); \quad a\left(-\frac{q_0^2}{z}\right) = -e^{2i\theta_+} \bar{a}(z), \quad z \in D^-; \quad b\left(-\frac{q_0^2}{z}\right) = -\bar{b}(z). \quad (4.13)$$

4.6. Асимптотическое поведение собственных функций и данных рассеяния. Чтобы решить обратную задачу, нужно определить асимптотическое поведение собственных функций и данных рассеяния как при $z \rightarrow \infty$ на плоскости $\mathbb{K}_1$, так и при $z \rightarrow 0$ на плоскости $\mathbb{K}_2$. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{N}(x, z) &\sim \begin{pmatrix} z \frac{q(x)}{q_+} \\ iq_- \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow 0, \\ a(z) &= \begin{cases} 1, & z \rightarrow \infty, \\ -e^{2i\theta_+}, & z \rightarrow 0, \end{cases} \quad \bar{a}(z) = \begin{cases} 1, & z \rightarrow \infty, \\ -e^{-2i\theta_+}, & z \rightarrow 0, \end{cases} \\ \lim_{z \rightarrow \infty} zb(z) &= 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{b(z)}{z^2} = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.7. Проблема Римана–Гильберта в униформизирующих координатах.

4.7.1. *Левосторонняя задача рассеяния.* Чтобы учесть поведение собственных функций, условие “скачка” на Σ , где

$$\Sigma := (-\infty, -q_0) \cup (q_0, +\infty) \cup \overrightarrow{(q_0, -q_0)} \cup \{q_0 e^{i\theta}, \pi \leq \theta \leq 2\pi\}_{\text{clockwise, upper circle}} \cup \{q_0 e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq 0\}_{\text{anticlockwise, lower circle}},$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{M(x, z)}{za(z)} - \frac{\overline{N}(x, z)}{z} &= \rho(z) e^{i(z+q_0^2/z)x} \frac{N(x, z)}{z}, \\ \frac{\overline{M}(x, z)}{z\bar{a}(z)} - \frac{N(x, z)}{z} &= \bar{\rho}(z) e^{-i(z+q_0^2/z)x} \frac{\overline{N}(x, z)}{z}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

так что функции будут ограничены на бесконечности, имея при этом дополнительный полюс при $z = 0$. Заметим, что $M(x, z)/a(z)$, как функция от z , определена на D^+ , где (по предположению) она имеет простые полюсы z_j , т.е. $a(z_j) = 0$, а функция $\overline{M}(x, z)/\bar{a}(z)$ определена на D^- , где она имеет простые полюсы $\bar{z}_j$, т.е. $\bar{a}(\bar{z}_j) = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} M(x, z_j) &= b(z_j) e^{i(z_j+q_0^2/z_j)x} N(x, z_j), \\ \overline{M}(x, \bar{z}_j) &= \bar{b}(\bar{z}_j) e^{-i(\bar{z}_j+q_0^2/\bar{z}_j)x} \overline{N}(x, \bar{z}_j). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Теперь, вычитая значения на бесконечности, индуцированный полюс в начале координат и полюсы (предположительно простые) в D^+ и D^- соответственно при $a(z_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, J$, и $\bar{a}(\bar{z}_j)$, $j = 1, 2, \dots, \bar{J}$, получим

$$\begin{aligned} &\left[\frac{M(x, z)}{za(z)} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ iq_- \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^J \frac{M(x, z_j)}{(z - z_j) z_j a'(z_j)} \right] - \\ &\quad - \left[\frac{\overline{N}(x, z)}{z} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 \\ iq_- \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^J \frac{b(z_j) e^{i(z_j+q_0^2/z_j)x} N(x, z_j)}{(z - z_j) z_j a'(z_j)} \right] = \\ &= \rho(z) e^{i(z+q_0^2/z)x} \frac{N(x, z)}{z}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\overline{M}(x, z)}{z\bar{a}(z)} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -iq_+ \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^J \frac{\overline{M}(x, \bar{z}_j)}{(z - \bar{z}_j) \bar{z}_j \bar{a}'(\bar{z}_j)} \right] - \\ &\quad - \left[\frac{N(x, z)}{z} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{z} \begin{pmatrix} -iq_+ \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{j=1}^J \frac{\bar{b}(\bar{z}_j) e^{-i(\bar{z}_j+q_0^2/\bar{z}_j)x} \overline{N}(x, \bar{z}_j)}{(z - \bar{z}_j) \bar{z}_j \bar{a}'(\bar{z}_j)} \right] = \\ &= \bar{\rho}(z) e^{-i(z+q_0^2/z)x} \frac{\overline{N}(x, z)}{z}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Введем теперь проекторы

$$P_{\pm}(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(\xi)}{\xi - (z \pm i0)} d\xi, \quad (4.19)$$

где z принадлежит верхней и нижней полуплоскостям и

$$\Sigma := (-\infty, -q_0) \cup (q_0, +\infty) \cup \overrightarrow{(q_0, -q_0)} \cup \{q_0 e^{i\theta}, \pi \leq \theta \leq 2\pi\}_{\text{clockwise, upper circle}} \cup \{q_0 e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq 0\}_{\text{anticlockwise, lower circle}}.$$

Если функции $f_{\pm}(\xi)$ аналитичны в $D^{\pm}$ и убывают при больших ξ , то

$$P_{\pm}(f_{\pm})(z) = \pm f_{\pm}(z), \quad P_{\mp}(f_{\pm})(z) = 0. \quad (4.20)$$

Применяя операторы P_- к (4.17) и P_+ к (4.18), получаем

$$\begin{aligned} \bar{N}(x, z) &= \begin{pmatrix} z \\ iq_- \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^J \frac{zb(z_j)e^{i(z_j+q_0^2/z_j)x}N(x, z_j)}{(z-z_j)z_ja'(z_j)} + \\ &\quad + \frac{z}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\rho(\xi)}{\xi(\xi-z)} e^{i(\xi+q_0^2/\xi)x} N(x, \xi) d\xi, \\ N(x, z) &= \begin{pmatrix} -iq_+ \\ z \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^J \frac{z\bar{b}(\bar{z}_j)e^{-i(\bar{z}_j+q_0^2/\bar{z}_j)x}\bar{N}(x, \bar{z}_j)}{(z-\bar{z}_j)\bar{z}_j\bar{a}'(\bar{z}_j)} - \\ &\quad - \frac{z}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\bar{\rho}(\xi)}{\xi(\xi-z)} e^{-i(\xi+q_0^2/\xi)x}\bar{N}(x, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Аналогично можно решить правостороннюю задачу рассеяния, которая имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{M}(x, z) &= \begin{pmatrix} -iq_- \\ z \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^J \frac{-z\bar{b}(z_j)M(x, z_j)e^{-i(z_j+q_0^2/z_j)x}}{(z-z_j)z_ja'(z_j)} + \\ &\quad + \frac{z}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\rho^*(-\xi^*)}{\xi(\xi-z)} e^{-i(\xi+q_0^2/\xi)x} M(x, \xi) d\xi, \\ M(x, z) &= \begin{pmatrix} z \\ iq_+ \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^J \frac{-zb(\bar{z}_j)\bar{M}(x, \bar{z}_j)e^{i(\bar{z}_j+q_0^2/\bar{z}_j)x}}{(z-\bar{z}_j)\bar{z}_j\bar{a}'(\bar{z}_j)} - \\ &\quad - \frac{z}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\bar{\rho}^*(-\xi^*)}{\xi(\xi-z)} e^{i(\xi+q_0^2/\xi)x}\bar{M}(x, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.8. Восстановление потенциалов. Заметим, что $\bar{N}_1(x, z)/z \sim q(x)/q_+$ при $z \rightarrow 0$, и в этом пределе

$$\frac{\bar{N}_1(x, z)}{z} \sim 1 + \sum_{j=1}^J \frac{b(z_j)e^{i(z_j+q_0^2/z_j)x}}{-z_j^2a'(z_j)} N_1(x, z_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\rho(\xi)}{\xi^2} e^{i(\xi+q_0^2/\xi)x} N_1(x, \xi) d\xi, \quad (4.23)$$

имеем

$$\begin{aligned} q(x) &= q_+ \left[1 + \sum_{j=1}^J \frac{b(z_j)e^{i(z_j+q_0^2/z_j)x}}{-z_j^2a'(z_j)} N_1(x, z_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\rho(\xi)}{\xi^2} e^{i(\xi+q_0^2/\xi)x} N_1(x, \xi) d\xi \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.9. Замыкание системы. Из равенства $a(-q_0^2/z) = -e^{2i\theta} \bar{a}(z)$ найдем $J = \bar{J}$. Комбинируя интегральные уравнения для собственных функций, получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_1(x, z) \\ N_2(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iq_+ \\ z \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^J \frac{z \bar{b}(\bar{z}_j) e^{-i(\bar{z}_j + q_0^2/\bar{z}_j)x}}{(z - \bar{z}_j) \bar{z}_j \bar{a}'(\bar{z}_j)} \times \\ \times \left(\bar{z}_j + \sum_{l=1}^J \frac{\bar{z}_j b(z_l) e^{i(z_l + q_0^2/z_l)x}}{(\bar{z}_j - z_l) z_l a'(z_l)} N_1(x, z_l) + \frac{\bar{z}_j}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\rho(\xi)}{\xi(\xi - \bar{z}_j)} e^{i(\xi + q_0^2/\xi)x} N_1(x, \xi) d\xi \right) - \\ - \frac{z}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\bar{\rho}(\xi)}{\xi(\xi - z)} e^{-i(\xi + q_0^2/\xi)x} \times \\ \times \left(\xi + \sum_{l=1}^J \frac{\xi b(z_l) e^{i(z_l - q_0^2/z_l)x}}{(\xi - z_l) z_l a'(z_l)} N_1(x, z_l) + \frac{\xi}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\rho(\eta)}{\eta(\eta - \xi)} e^{i(\eta + q_0^2/\eta)x} N_1(x, \eta) d\eta \right) d\xi. \\ \times \left(iq_- + \sum_{l=1}^J \frac{\bar{z}_j b(z_l) e^{i(z_l + q_0^2/z_l)x}}{(\bar{z}_j - z_l) z_l a'(z_l)} N_2(x, z_l) + \frac{\bar{z}_j}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\rho(\xi)}{\xi(\xi - \bar{z}_j)} e^{i(\xi + q_0^2/\xi)x} N_2(x, \xi) d\xi \right) - \\ - \frac{z}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\bar{\rho}(\xi)}{\xi(\xi - z)} e^{-i(\xi + q_0^2/\xi)x} \times \\ \times \left(\xi + \sum_{l=1}^J \frac{\xi b(z_l) e^{i(z_l - q_0^2/z_l)x}}{(\xi - z_l) z_l a'(z_l)} N_2(x, z_l) + \frac{\xi}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\rho(\eta)}{\eta(\eta - \xi)} e^{i(\eta + q_0^2/\eta)x} N_2(x, \eta) d\eta \right) d\xi. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Из соотношения (4.24) можно восстановить потенциал.

4.10. Формула следа. Как и в разделе 3, получим формулу следа в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ln a(z) = \ln \left(\prod_{j=1}^J \frac{z - z_j}{z + q_0^2/z_j} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\ln(1 + b^2(\xi))}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D^+, \\ \ln \bar{a}(z) = \ln \left(\prod_{j=1}^J \frac{z + q_0^2/z_j}{z - z_j} \right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{\ln(1 + b^2(\xi))}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D^-. \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.11. Дискретные данные рассеяния и их симметрии. Чтобы найти безотражательные потенциалы и солитоны, нужно уметь вычислять соответствующие дискретные данные рассеяния. Коэффициенты $b(z_j)$ и $\bar{b}(\bar{z}_j)$, $j = 1, 2, \dots, J$, можно вычислить так же, как и в разделе 3, имеем

$$\bar{b}(z_j) = b(z_j) = \pm i, \quad b(\bar{z}_j) = \bar{b}(\bar{z}_j) = \pm i. \quad (4.27)$$

Поскольку $a(z) \sim -e^{2i\theta_+}$ при $z \rightarrow 0$, из формулы следа при $b(\xi) = 0$ на разрезе Σ имеем следующее ограничение для безотражательных потенциалов:

$$\prod_{j=1}^J z_j = \pm (-1)^{(J+1)/2} q_0^J e^{i\theta_+}. \quad (4.28)$$

Мы утверждаем, что $J \geq 2$. Иначе, если $J = 1$, получаем $z_1 = \pm q_0 e^{i\theta_+}$. Это значит, что собственное значение z_1 лежит на окружности, которая в данном случае является непрерывным спектром. Такие собственные числа нам не подходят, они здесь не рассматриваются.

4.12. Безотражательные данные рассеяния для двух собственных значений. Рассмотрим данные рассеяния, связанные с двумя собственными значениями, т.е. $J = 2$ и отражение отсутствует. Заметим, что $|z_1| \cdot |z_2| = q_0^2$. Пусть теперь $\pi < \theta_+ < 3\pi/2$ и $z_1 = q_1 e^{i\theta_1}$, где $q_1 > q_0$ и $0 < \theta_1 < \pi/2$, тогда $z_2 = (q_0^2/q_1) e^{i(\theta_+ - \theta_1 + \pi/2)}$, где $\pi < \arg z_2 < 2\pi$. В частности, можно выбрать $z_1 = iq_1$, $z_2 = -i(q_0^2/q_1)$ и $\theta_+ = \pi/2$, тогда $\bar{z}_1 = i(q_0^2/q_1)$, $\bar{z}_2 = -iq_1$ и $z_1 z_2 = q_0^2$. По формуле следа при $b(\xi) = 0$ на разрезе Σ получим

$$a(z) = \frac{z - iq_1}{z - i(q_0^2/q_1)} \cdot \frac{z + i(q_0^2/q_1)}{z + iq_1}, \quad \bar{a}(z) = \frac{z - i(q_0^2/q_1)}{z - iq_1} \cdot \frac{z + iq_1}{z + i(q_0^2/q_1)}. \quad (4.29)$$

Имеем

$$\begin{aligned} a'(iq_1) &= \frac{-i(q_1^2 + q_0^2)}{2q_1(q_1^2 - q_0^2)}, & a'\left(-i\frac{q_0^2}{q_1}\right) &= \frac{iq_1(q_0^2 + q_1^2)}{2q_0^2(q_0^2 - q_1^2)}, \\ \bar{a}'\left(i\frac{q_0^2}{q_1}\right) &= -\frac{iq_1(q_0^2 + q_1^2)}{2q_0^2(q_0^2 - q_1^2)}, & \bar{a}'(-iq_1) &= \frac{i(q_1^2 + q_0^2)}{2q_1(q_1^2 - q_0^2)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Более того, из симметричного соотношения $b(-q_0^2/z) = -\bar{b}(z)$, получим

$$b(iq_1) = \delta_1 i, \quad b\left(-i\frac{q_0^2}{q_1}\right) = \delta_2 i, \quad \bar{b}\left(i\frac{q_0^2}{q_1}\right) = -\delta_1 i, \quad \bar{b}(-iq_1) = -\delta_2 i. \quad (4.31)$$

4.13. Эволюция во времени. Так же, как и в разделе 3, найдем, что $a(z, t)$ и $\bar{a}(z, t)$ не зависят от времени и

$$\begin{aligned} b(z; t) &= b(z; 0) \exp\left\{-2i\left[-q_0^2 + \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{q_0^4}{z^2}\right)\right]t\right\}, \\ \bar{b}(z; t) &= \bar{b}(z; 0) \exp\left\{2i\left[-q_0^2 + \frac{1}{2}\left(z^2 - \frac{q_0^4}{z^2}\right)\right]t\right\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} b(iq_1; t) &= \delta_1 i \exp\left\{-2i\left[-q_0^2 + \frac{1}{2}\left(-q_1^2 + \frac{q_0^4}{q_1^2}\right)\right]t\right\}, \\ b\left(-i\frac{q_0^2}{q_1}; t\right) &= \delta_2 i \exp\left\{-2i\left[-q_0^2 + \frac{1}{2}\left(q_1^2 - \frac{q_0^4}{q_1^2}\right)\right]t\right\}, \\ \bar{b}\left(i\frac{q_0^2}{q_1}; t\right) &= -\delta_1 i \exp\left\{2i\left[-q_0^2 + \frac{1}{2}\left(q_1^2 - \frac{q_0^4}{q_1^2}\right)\right]t\right\}, \\ \bar{b}(-iq_1; t) &= -\delta_2 i \exp\left\{2i\left[-q_0^2 + \frac{1}{2}\left(-q_1^2 + \frac{q_0^4}{q_1^2}\right)\right]t\right\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

4.14. Чистое двухсолитонное решение. При $J = 2$ и $b(\xi, t) = 0$ (безотражательный потенциал), решая соответствующую дискретную систему (4.25), а также из (4.24) получим несингулярное двухсолитонное решение при $\delta_1 \delta_2 = -1$.

Рис. 2. Амплитуда потенциала $q(x, t)$ при $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$, $q_1 = 4$ и $q_0 = 2$.

В этом случае нормировочные постоянные имеют вид

$$\begin{aligned}
 C_1(t) &:= \frac{b(iq_1; t)}{a'(iq_1; t)} = -\frac{2\delta_1 q_1 (q_1^2 - q_0^2)}{q_1^2 + q_0^2} \exp \left\{ -2i \left[-q_0^2 + \frac{1}{2} \left(-q_1^2 + \frac{q_0^4}{q_1^2} \right) \right] t \right\}, \\
 C_2(t) &:= \frac{b(-i(q_0^2/q_1); t)}{a'(-i(q_0^2/q_1); t)} = \frac{2\delta_2 q_0^2 (q_0^2 - q_1^2)}{q_1 (q_0^2 + q_1^2)} \exp \left\{ -2i \left[-q_0^2 + \frac{1}{2} \left(q_1^2 - \frac{q_0^4}{q_1^2} \right) \right] t \right\}, \\
 \bar{C}_1(t) &:= \frac{\bar{b}(i(q_0^2/q_1); t)}{\bar{a}'(i(q_0^2/q_1); t)} = \frac{2\delta_1 q_0^2 (q_0^2 - q_1^2)}{q_1 (q_0^2 + q_1^2)} \exp \left\{ 2i \left[-q_0^2 + \frac{1}{2} \left(q_1^2 - \frac{q_0^4}{q_1^2} \right) \right] t \right\}, \\
 \bar{C}_2(t) &:= \frac{\bar{b}(-iq_1; t)}{\bar{a}'(-iq_1; t)} = -\frac{2\delta_2 q_1 (q_1^2 - q_0^2)}{q_1^2 + q_0^2} \exp \left\{ 2i \left[-q_0^2 + \frac{1}{2} \left(-q_1^2 + \frac{q_0^4}{q_1^2} \right) \right] t \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

При $\delta_1 = 1$ и $\delta_2 = -1$ получим

$$\begin{aligned}
 q(x, t) &= e^{-2iq_0^2 t} \times \\
 &\times \frac{\left[i(q_0^4 + q_1^4) \cos \left(\frac{q_0^4 - q_1^4}{q_1^2} t \right) + iq_0 q_1 (q_0^2 + q_1^2) \operatorname{ch} \left(\frac{q_0^2 - q_1^2}{q_1} x \right) + (q_0^4 - q_1^4) \sin \left(\frac{q_0^4 - q_1^4}{q_1^2} t \right) \right]}{q_1 \left[2q_0 q_1 \cos \left(\frac{(q_0^4 - q_1^4)t}{q_1^2} \right) + (q_0^2 + q_1^2) \operatorname{ch} \left(\frac{(q_0^2 - q_1^2)x}{q_1} \right) \right]}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

При $\delta_1 = -1$ и $\delta_2 = 1$ найдем

$$\begin{aligned}
 q(x, t) &= e^{-2iq_0^2 t} \times \\
 &\times \frac{\left[-i(q_0^4 + q_1^4) \cos \left(\frac{q_0^4 - q_1^4}{q_1^2} t \right) + iq_0 q_1 (q_0^2 + q_1^2) \operatorname{ch} \left(\frac{q_0^2 - q_1^2}{q_1} x \right) + (-q_0^4 + q_1^4) \sin \left(\frac{q_0^4 - q_1^4}{q_1^2} t \right) \right]}{q_1 \left[-2q_0 q_1 \cos \left(\frac{(q_0^4 - q_1^4)t}{q_1^2} \right) + (q_0^2 + q_1^2) \operatorname{ch} \left(\frac{(q_0^2 - q_1^2)x}{q_1} \right) \right]}.
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

На рис. 2 изображено типичное двухсолитонное решение типа бризера при $\delta_1 = -\delta_1 = 1$.

5. ПРОСТРАНСТВЕННО-ЗАВИСИМЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

5.1. НУШ с обращением пространства-времени: пространственные граничные условия. Рассмотрим НУШ с обращением пространства-времени

$$iq_t(x, t) = q_{xx}(x, t) - 2\sigma q^2(x, t)q(-x, -t) \quad (5.1)$$

с граничным условием

$$q(x, t) \rightarrow q_0 e^{i(\alpha t + \beta x + \theta_{\pm})} \quad (5.2)$$

при $x \rightarrow \pm\infty$, где $q_0 > 0$, $0 \leq \theta_{\pm} < 2\pi$, а α и β – вещественные параметры. Мы видим, что $\alpha = \beta^2 + 2\sigma\rho q_0^2$, тогда граничные условия принимают вид

$$q(x, t) \rightarrow q_0 e^{i[(\beta^2 + 2\sigma\rho q_0^2)t + \beta x + \theta_{\pm}]} \quad (5.3)$$

при $x \rightarrow \pm\infty$, где β – вещественный параметр, а $\rho = \pm 1$. В частности, $\rho = 1$ при $\theta_+ + \theta_- = 0$, $\rho = -1$ при $\theta_+ + \theta_- = \pi$. Положив $q(x, t) = \tilde{q}(x, t)e^{i\beta x}$, имеем

$$i\tilde{q}_t(x, t) = \tilde{q}_{xx}(x, t) + 2i\beta\tilde{q}_x(x, t) - [\beta^2 + 2\sigma\tilde{q}(x, t)\tilde{q}(-x, -t)]\tilde{q}(x, t), \quad (5.4)$$

что связано со следующей совместной (2×2) -системой:

$$\begin{aligned} v_x &= Xv = \begin{pmatrix} -ik & \tilde{q}(x, t) \\ \sigma\tilde{q}(-x, -t) & ik \end{pmatrix} v, \\ v_t &= Tv = \\ &= \begin{pmatrix} 2ik^2 - 2\beta ik + i\sigma\tilde{q}(x, t)\tilde{q}(-x, -t) + \frac{\beta^2}{2}i & -2k\tilde{q}(x, t) + 2\beta\tilde{q}(x, t) - i\tilde{q}_x(x, t) \\ -2\sigma k\tilde{q}(-x, -t) + i\sigma\tilde{q}_x(-x, -t) + 2\beta\sigma\tilde{q}(-x, -t) & -2ik^2 + 2\beta ik - i\sigma\tilde{q}(x, t)\tilde{q}(-x, -t) - \frac{\beta^2}{2}i \end{pmatrix} v. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Тогда получим, что $a(k, t)$ и $\bar{a}(k, t)$ не зависят от времени, а $b(k, t)$ и $\bar{b}(k, t)$ зависят от времени следующим образом:

$$\begin{aligned} b(k, t) &= b(0) \exp\left\{-2i\left[\sigma\rho q_0^2 + \frac{\beta^2}{2} - 2\lambda(\beta - k)\right]t\right\}, \\ \bar{b}(k, t) &= \bar{b}(0) \exp\left\{2i\left[\sigma\rho q_0^2 + \frac{\beta^2}{2} - 2\lambda(\beta - k)\right]t\right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Как обсуждалось в разделе 1, положим $\sigma = 1$, а из раздела 3 возьмем $J = 1$ и $\delta = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} b(q_0 e^{i\theta_+}; t) &= i \exp\left\{-2i\left[q_0^2 + \frac{\beta^2}{2} - 2iq_0 \sin \theta_+(\beta - q_0 \cos \theta_+)\right]t\right\}, \\ \bar{b}(q_0 e^{-i\theta_+}; t) &= -i \exp\left\{2i\left[q_0^2 + \frac{\beta^2}{2} + 2iq_0 \sin \theta_+(\beta - q_0 \cos \theta_+)\right]t\right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Таким образом, мы нашли чистое односолитонное решение

$$\begin{aligned} q(x, t) &= e^{i\beta x} q_0 e^{2iq_0^2 t} \times \\ &\times \frac{(-e^{-i\theta_+} + e^{i\theta_+ + 4q_0 \sin \theta_+(x + 2\beta t - 2q_0 t \cos \theta_+)}) - 2i \sin \theta_+ e^{-i\beta^2 t + 2q_0 \sin \theta_+(x + 2\beta t - 2q_0 t \cos \theta_+)}}{e^{4q_0 \sin \theta_+(x + 2\beta t - 2q_0 t \cos \theta_+)} - 1}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $\beta \neq 0$ приведенное выше решение сингулярно вдоль выколотой линии $x = Ct$, где $C, t \neq 0$.

5.2. Стандартное НУШ: пространственные граничные условия. НУШ имеет вид

$$iq_t(x, t) = q_{xx}(x, t) - 2\sigma|q(x, t)|^2q(x, t), \quad (5.9)$$

где q^* означает комплексное сопряжение потенциала q , а $\sigma = \mp 1$. Рассмотрим граничное условие

$$q(x, t) \rightarrow q_0 e^{i(\alpha t + \beta x + \theta_{\pm})}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (5.10)$$

где $q_0 > 0$, $0 \leq \theta_{\pm} < 2\pi$, оба параметра α и β вещественные. Легко видеть, что $\alpha = \beta^2 + 2\sigma q_0^2$, тогда граничное условие принимает вид

$$q(x, t) \rightarrow q_0 e^{i[(\beta^2 + 2\sigma q_0^2)t + \beta x + \theta_{\pm}]} \quad (5.11)$$

при $x \rightarrow \pm\infty$, где β – вещественный параметр. Положив $q(x, t) = \tilde{q}(x, t)e^{i\beta x}$, получим уравнение

$$i\tilde{q}_t = \tilde{q}_{xx} + 2i\beta\tilde{q}_x - (\beta^2 + 2\sigma|\tilde{q}|^2)\tilde{q}, \quad (5.12)$$

которое связано с совместной (2×2) -системой

$$v_x = Xv = \begin{pmatrix} -ik & \tilde{q}(x, t) \\ \sigma\tilde{q}^*(x, t) & ik \end{pmatrix} v, \quad (5.13)$$

$$v_t = Tv = \begin{pmatrix} 2ik^2 - 2\beta ik + i\sigma|\tilde{q}|^2 + \frac{\beta^2}{2}i & -2\tilde{q}k + 2\beta\tilde{q} - i\tilde{q}_x \\ -2\sigma\tilde{q}^*k + i\sigma\tilde{q}_x^* + 2\beta\sigma\tilde{q}^* & -2ik^2 + 2\beta ik - i\sigma|\tilde{q}|^2 - \frac{\beta^2}{2}i \end{pmatrix} v. \quad (5.14)$$

Тогда получим, что как $a(k, t)$, так и $\bar{a}(k, t)$ не зависят от времени,

$$\begin{aligned} b(k, t) &= b(0) \exp\left\{-2i\left[\sigma q_0^2 + \frac{\beta^2}{2} - 2\lambda(\beta - k)\right]t\right\}, \\ \bar{b}(k, t) &= \bar{b}(0) \exp\left\{2i\left[\sigma q_0^2 + \frac{\beta^2}{2} - 2\lambda(\beta - k)\right]t\right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Задача рассеяния (5.13) та же самая, что и для НУШ с ненулевым граничным условием

$$\tilde{q}(x, t) \rightarrow q_0 e^{i(2\sigma q_0^2 t + \theta_{\pm})}, \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (5.16)$$

Единственное отличие в формулировках МОЗР для стандартного НУШ и уравнения (5.12) заключается в эволюции во времени. На основе задачи рассеяния и односолитонного решения дефокусирующего НУШ [15], получим при $\sigma = 1$

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \tilde{q}e^{i\beta x} = e^{i\beta x} \left[q_0 e^{i[(\beta^2 + 2q_0^2)t + \theta_+]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{iC_1^*(0)\alpha_1^* \exp[2i(q_0^2 + \beta^2/2)t - 4v_1(\beta - k_1)t - 2v_1x]}{1 + (q_0|C_1(0)|/2v_1)e^{-2v_1x - 4v_1(\beta - k_1)t}} \right], \end{aligned} \quad (5.17)$$

где $\alpha_1 = k_1 + iv_1$, $v_1 = \sqrt{q_0^2 - k_1^2}$, $-q_0 < k_1 < q_0$, $e^{2v_1x_0} = q_0|C_1(0)|/2v_1$ и $C_1^*(0) = -|C_1(0)|e^{i\theta_+}$. Это выражение можно переписать в виде

$$q(x, t) = q_0 e^{2iq_0^2 t} e^{i(\beta x + \beta^2 t)} \left[e^{i\theta_+} + \frac{iC_1^*(0)(\alpha_1^*/q_0)e^{-2v_1(x+2\beta t-2k_1 t)}}{1 + (q_0|C_1(0)|/2v_1)e^{-2v_1(x+2\beta t-2k_1 t)}} \right]. \quad (5.18)$$

Одним из свойств НУШ является галилеева инвариантность, т. е. если $q_1(x, t)$ является решением НУШ и удовлетворяет граничному условию $q_1(x, t) \rightarrow q_0 e^{i(2\sigma q_0^2 t + \theta_\pm)}$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то $q_2(x, t) := q_1(x + 2\beta t, t) e^{i(\beta x + \beta^2 t)}$ также является решением НУШ и удовлетворяет граничному условию $q_2(x, t) \rightarrow q_0 e^{i[(\beta^2 + 2\sigma q_0^2)t + \beta x + \theta_\pm]}$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Если $\sigma = 1$, односолитонное решение принимает вид

$$q_1(x, t) = q_0 e^{2iq_0^2 t} \left[e^{i\theta_+} + \frac{iC_1^*(0)(\alpha_1^*/q_0)e^{-2v_1(x-2k_1 t)}}{1 + (q_0|C_1(0)|/2v_1)e^{-2v_1(x-2k_1 t)}} \right]. \quad (5.19)$$

Имеем $q(x, t) = q_1(x + 2\beta t, t) e^{i(\beta x + \beta^2 t)}$, а это означает, что решение ОЗР согласуется с решением, основанным на галилеевой инвариантности НУШ. Полагая $\alpha = k_1/q_0$ и $\gamma = -v_1/q_0$, можно упростить (возможно, с точностью до фазы) $q_1(x, t)$ и $q(x, t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1(x, t) &= q_0 e^{2iq_0^2 t} [\gamma \operatorname{th}(q_0 \gamma (x - 2q_0 \alpha t - x_0)) - i\alpha], \\ q(x, t) &= q_0 e^{2iq_0^2 t} e^{i(\beta x + \beta^2 t)} [\gamma \operatorname{th}(q_0 \gamma (x + 2\beta t - 2q_0 \alpha t - x_0)) - i\alpha], \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$.

Если игнорировать нелинейный член, то линейное уравнение в частных производных

$$iq_t(x, t) - q_{xx}(x, t) = 0 \quad (5.21)$$

также удовлетворяет условию галилеевой инвариантности. Действительно, согласно преобразованию Фурье, функция

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b^{(1)}(\xi) e^{i(\xi x + \xi^2 t)} d\xi \quad (5.22)$$

является решением уравнения (5.21). Положим $u_2(x, t) = u_1(x + 2\beta t, t) e^{i(\beta x + \beta^2 t)}$, тогда

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b^{(1)}(\xi) e^{i(\xi + \beta)x} e^{i(\xi + \beta)^2 t} d\xi. \quad (5.23)$$

Переопределив переменные ($\xi' = \xi + \beta$), мы видим, что $u_2(x, t)$ также является решением уравнения (5.21), а это означает, что галилеева инвариантность справедлива и для линейной задачи.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Дж. Т. Коул за помощь в подготовке рисунков для данной работы и в работе с пакетом **Mathematica**.

Список литературы

- [1] D. J. Korteweg, G. de Vries, “XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves”, *Philos. Mag. Ser. 5*, **39** (1895), 422–443.
- [2] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, “Method for solving the Korteweg–deVries equation”, *Phys. Rev. Lett.*, **19**:19 (1967), 1095–1097.
- [3] P. D. Lax, “Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **21**:5 (1968), 467–490.
- [4] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах”, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.
- [5] D. J. Benney, A. C. Newell, “The propagation of nonlinear wave envelopes”, *J. Math. Phys.*, **46** (1967), 133–139.
- [6] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, “Nonlinear-evolution equations of physical significance”, *Phys. Rev. Lett.*, **31**:2 (1973), 125–127.
- [7] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, “Method for solving the sine-Gordon equation”, *Phys. Rev. Lett.*, **30**:25 (1973), 1262–1264.
- [8] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, “The inverse scattering transform-fourier analysis for nonlinear problems”, *Stud. Appl. Math.*, **53**:4 (1974), 249–315.
- [9] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987.
- [10] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [11] F. Calogero, A. Degasperis, *Spectral Transform and Solitons*, v.I: *Tools to Solve and Investigate Nonlinear Evolution Equations*, Lecture Notes in Computer Science, **144**, North-Holland, Amsterdam, New York, 1982.
- [12] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “О взаимодействии солитонов в устойчивой среде”, *ЖЭТФ*, **64**:5 (1973), 1627–1639.
- [13] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [14] B. Prinari, M. J. Ablowitz, G. Biondini, “Inverse scattering transform for the vector nonlinear Schrödinger equation with nonvanishing boundary conditions”, *J. Math. Phys.*, **47**:6 (2006), 063508, 33 pp.
- [15] F. Demontis, B. Prinari, C. van der Mee, F. Vitale, “The inverse scattering transform for the defocusing nonlinear Schrödinger equations with nonzero boundary conditions”, *Stud. Appl. Math.*, **131**:1 (2012), 1–40.
- [16] F. Demontis, B. Prinari, C. van der Mee, F. Vitale, “The inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrödinger equations with asymmetric boundary conditions”, *J. Math. Phys.*, **55**:10 (2014), 101505, 40 pp.
- [17] G. Biondini, G. Kovačič, “Inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions”, *J. Math. Phys.*, **55**:3 (2014), 031506, 22 pp.
- [18] G. Biondini, D. Kraus, “Inverse scattering transform for the defocusing Manakov system with nonzero boundary conditions”, *SIAM J. Math. Anal.*, **47**:1 (2015), 706–757.
- [19] G. Biondini, G. Kovačič, D. K. Kraus, “The focusing Manakov system with nonzero boundary conditions”, *Nonlinearity*, **28**:9 (2015), 3101–3151.
- [20] G. Biondini, D. K. Kraus, B. Prinari, “The three component focusing non-linear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions”, *Commun. Math. Phys.*, **348**:2 (2016), 475–533.
- [21] M. Pichler, G. Biondini, “On the focusing non-linear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions and double poles”, *IMA J. Appl. Math.*, **82**:1 (2017), 131–151.
- [22] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, “Integrable nonlocal nonlinear equations”, *Stud. Appl. Math.*, **139**:1 (2016), 7–59, arXiv: 1610.02594.

- [23] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, “Integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. Rev. Lett.*, **110**:6 (2013), 064105, 5 pp.
- [24] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, “Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation”, *Nonlinearity*, **29**:3 (2016), 915–946.
- [25] A. S. Fokas, “Integrable multidimensional versions of the nonlocal nonlinear Schrödinger equation”, *Nonlinearity*, **29**:2 (2016), 319–324.
- [26] M. J. Ablowitz, X. D. Luo, Z. H. Musslimani, “The inverse scattering transform for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions”, *J. Math. Phys.*, **59**:1 (2018), 011501, 42 pp., arXiv: 1612.02726.
- [27] M. J. Ablowitz, B.-F. Feng, X.-D. Luo, Z. H. Musslimani, “Reverse space–time nonlocal sine-Gordon/sinh-Gordon equations with nonzero boundary conditions”, *Stud. Appl. Math.*, 2018, Online first DOI: 10.1111/sapm.12222; “Inverse scattering transform for the nonlocal reverse space–time sine-Gordon, sinh-Gordon and nonlinear Schrödinger equations with nonzero boundary conditions”, arXiv: 1703.02226.