Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Ахмед, Осесимметричное пространство-время чистого излучения с геодезическими, нарушающими причинность, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 3, 483–490

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9450>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:23:49

© 2018 г.

Ф. Ахмед*

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ЧИСТОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ, НАРУШАЮЩИМИ ПРИЧИННОСТЬ

Представлено стационарное осесимметричное пространство-время, допускающее круговые замкнутые времениподобные геодезические всюду в конечной области пространства. Такое пространство-время свободно от расхождений кривизны и локально изометрично невакуумному рр-волновому пространству-времени. Материя-энергия представляет собой чистое поле излучения и удовлетворяет условию нулевой энергии, а метрика принадлежит к классу N в классификации Петрова. Наконец, показано, что для данной метрики существуют времениподобные и нулевые геодезические.

Ключевые слова: невакуумное решение, нарушение причинности, поля излучения, рр-волны.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9450>

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известны решения полевых уравнений Эйнштейна, в которых имеются кривые, нарушающие причинность, и которые, следовательно, противоречат принципу причинности в общей теории относительности. Первое из таких решений с замкнутыми времениподобными кривыми (ЗВК) и замкнутыми нулевыми кривыми, но без замкнутых времениподобных геодезических (ЗВГ) было найдено в статье [1] – это Вселенная Гёделя. После этого и вплоть до сегодняшнего дня было найдено несколько решений, допускающих ЗВК (см. работы [2]–[6] и ссылки в них). Кроме того, некоторые решения допускают ЗВГ и замкнутые нулевые геодезические. Малую часть таких решений можно найти в работах [7]–[10]. В цилиндрически-симметричных пространствах-времени ЗВГ образуются всюду вне осей симметрии [11], а также внутри конечной области пространства [12]. Одним из способов классифицировать подобные нарушающие причинность пространства-времени могло бы быть соотнесение метрики с одним из двух типов: либо с вечной машиной времени, в которой ЗВК или другие кривые формируются повсюду или изначально существуют [1],

*Ajmal College of Arts and Science, Dhubri, Assam, India.
E-mail: faizuddinahmed15@gmail.com

либо с машиной времени, в которой ЗВК возникают по прошествии некоторого периода [3]. Геодезические – это мировые линии свободных частиц. Пространство-время машины времени из работ [13], [14] нарушает слабое энергетическое условие и/или в нем присутствует сингулярность кривизны [15].

2. СТАЦИОНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ МЕТРИКА

Наиболее простой интервал в стационарном осесимметричном пространстве-времени (с $x^1 = r$, $x^2 = \phi$, $x^3 = z$, $x^4 = t$) задается как

$$ds^2 = g_{rr} dr^2 + dz^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 + 2 dt d\phi + 2g_{r\phi} dr d\phi, \quad (1)$$

где метрические функции суть

$$g_{rr} = e^{2\alpha r}, \quad g_{\phi\phi} = e^{\alpha r}(r^2 - \alpha r), \quad g_{r\phi} = ze^{\alpha r}, \quad (2)$$

а $\alpha > 0$ есть действительное число. Координаты меняются в следующих пределах:

$$0 \leq r < \infty, \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad z \in (-\infty, +\infty), \quad t \in (-\infty, +\infty). \quad (3)$$

Данная метрика имеет сигнатуру $(+, +, +, -)$, а определитель $\det g = -e^{2\alpha r}$ соответствующего метрического тензора $g_{\mu\nu}$ регулярен даже при $r = 0$. Метрика (1) является невакуумным решением со скаляром Риччи $R = 0$ и единственной ненулевой компонентой $R_{\mu\nu}$ тензора Риччи:

$$R_{\phi\phi} = \frac{1}{2} e^{-\alpha r}(\alpha^2 - 2 - 2\alpha r + e^{\alpha r}). \quad (4)$$

Пространство-время, которое мы изучаем, свободно от расхождений кривизны, поскольку инварианты скалярной кривизны, построенные из тензора Римана, равны нулю, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ и $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\rho\sigma\lambda\tau}R_{\lambda\tau}^{\mu\nu} = 0$.

Полевые уравнения Эйнштейна (при $R = 0$ и космологической постоянной, взятой как $\Lambda = 0$) имеют вид $R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, где выбрана система единиц, в которой $c = 1$, $8\pi G = 1$. Тензор энергии-импульса для полей излучения задается как [18]

$$T_{\mu\nu} = \rho k_\mu k_\nu, \quad k_\mu k^\mu = 0, \quad (5)$$

где плотность энергии

$$\rho = \frac{1}{2} e^{-\alpha r}(\alpha^2 - 2 - 2\alpha r + e^{\alpha r}), \quad 0 \leq r < \infty, \quad (6)$$

при нулевом векторе $k^\mu = \delta_t^\mu = (0, 0, 0, 1)$. Таким образом, материю-энергию при $\alpha^2 \geq 2$ можно описать как поля излучения с положительной плотностью энергии.

Метрика (1) является аксиально-симметричной, что ясно из следующих рассуждений. Рассмотрим вектор Киллинга $\eta = \partial_\phi$, нормальная форма которого такова:

$$\eta^\mu = (0, 1, 0, 0). \quad (7)$$

Его ковектор задается как

$$\eta_\mu = (ze^{\alpha r}, e^{\alpha r}(r^2 - \alpha r), 0, 1). \quad (8)$$

Вектор (7) удовлетворяет уравнению Киллинга $\eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu} = 0$, где точкой с запятой обозначено ковариантное дифференцирование. Аксиально-симметричное пространство-время (1) задается условием [17]

$$\mathbf{X} \equiv \|\partial_\phi\|^2 = |g_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu| = |e^{\alpha r}(r^2 - \alpha r)| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +0, \quad (9)$$

где радиальная координата r отсчитывается так, что ось проходит через точку $r = 0$. Помимо этой симметрии, метрика обладает симметрией относительно одновременного отражения (инверсии в терминологии Чандрасекара [19]) $(t, \phi) \rightarrow (-t, -\phi)$. В результате (1) известна как круговая стационарная осесимметричная метрика.

3. КРИВЫЕ, НАРУШАЮЩИЕ ПРИЧИННОСТЬ

В данном разделе сначала мы обсуждаем кривые, нарушающие причинность, а именно ЗВК и ЗВГ в пространстве-времени.

3.1. Рассмотрим азимутальную кривую γ , задающуюся уравнениями $r = \text{const}$, $z = \text{const}$ и $t = \text{const}$. Из выражения для метрики (1) имеем

$$ds^2 = g_{\phi\phi} d\phi^2 = e^{\alpha r}(r^2 - \alpha r) d\phi^2. \quad (10)$$

Такие кривые являются нулевыми при $r = r_0$, где $r_0 = \alpha$, и пространственноподобными при $r > r_0$, но при $r < r_0$ они становятся времениподобными, что показывает присутствие ЗВК. Следовательно, такие кривые образуются в конечной области пространства, при $r < r_0$, и в этой области азимутальная компонента метрики $g_{\phi\phi}$ также времениподобна. Любая точка области $0 < r < r_0$ принадлежит какой-либо ЗВК, но это неверно ни для одной из точек области $r > r_0$, поскольку область $r > r_0$ расслоена пространственноподобными гиперповерхностями $t = \text{const}$, если $g_{\phi\phi} > z^2$. Чтобы показать, что полученные выше ЗВК являются ЗВГ, применим два подхода, обсуждавшихся в работах [9] и [10], [11] соответственно.

МЕТОД 1. Применим технику, принятую в работе [9], чтобы показать существование ЗВГ в пространстве-времени.

Квадрат длины вектора $\hat{e}_\phi = \partial/\partial\phi$, касательного к определенной выше азимутальной кривой γ , равен $(\partial/\partial\phi)^2 = g_{\phi\phi}$, а 4-вектор ускорения A^μ задается как

$$A^\mu = U^\mu_{;\nu} U^\nu. \quad (11)$$

Для времениподобного единичного вектора (скорости пробных частиц, движущихся по круговым траекториям)

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1 \implies g_{\phi\phi} U^\phi U^\phi = -1 \implies U^\mu = \delta^\mu_\phi [-g_{\phi\phi}]^{-1/2}, \quad (12)$$

где круговые орбиты времениподобны, $g_{\phi\phi} < 0$.

Из выражения (11) получаем компоненты ускорения:

$$\begin{aligned} A^r &= \Gamma^r_{\phi\phi} (U^\phi)^2 = \frac{e^{-2\alpha r} g'_{\phi\phi}}{2g_{\phi\phi}}, & A^\phi &= 0, \\ A^z &= 0, & A^t &= \Gamma^t_{\phi\phi} (U^\phi)^2 = -\frac{e^{-\alpha r} z g'_{\phi\phi}}{2g_{\phi\phi}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где штрихом обозначена производная по r . Поскольку $U^\mu_{;\nu}U^\nu = 0$ являются геодезическими, решение уравнения $A^\mu = 0$ относительно r дает геодезическую, т. е. $g'_{\phi\phi}(r_*) = 0$ при $r = r_* < r_0$. Ускорение A , задающееся формулой $A^2 = A^\mu A_\mu$, равно

$$A = \frac{1}{2} e^{-\alpha r} \frac{g'_{\phi\phi}(r)}{g_{\phi\phi}(r)}; \quad (14)$$

оно обращается в нуль при $r = r_*$, таким образом, кривая γ – это геодезическая.

МЕТОД 2. Применим другую технику, представленную в работах [10], [11], чтобы показать существование ЗВГ в пространстве-времени. Продифференцируем по r выражение для азимутальной метрической компоненты

$$g_{\phi\phi} = e^{\alpha r}(r^2 - \alpha r), \quad (15)$$

получим

$$g'_{\phi\phi} = e^{\alpha r}[\alpha r^2 - r(\alpha^2 - 2) - \alpha]. \quad (16)$$

Решим уравнение $g'_{\phi\phi} = 0$ относительно r (выбрав положительный корень):

$$r = r_* = \frac{1}{2\alpha}[(\alpha^2 - 2) + \sqrt{4 + \alpha^4}]. \quad (17)$$

Подставив $r = r_* < r_0$ в формулу (15), нетрудно показать, что условия $g_{\phi\phi}(r_*) < 0$ и $(g_{\phi\phi}(r_*))_{,z} = 0$ гарантируют существование ЗВГ в пространстве-времени (1). Таким образом, указанные выше ЗВК являются ЗВГ при $r = r_* < r_0$. Поскольку в пространстве-времени (1) существуют ЗВГ, функция $s(r) = 2\pi|g_{\phi\phi}(r)|^{1/2}$ достигает локального максимума при некотором значении $r = \bar{r}$, $0 < \bar{r} \leq r_*$, и при этом мы имеем неравенство $g_{\phi\phi}(\bar{r}) < 0$.

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Для метрики (1) получаем следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} [e^{2\alpha r} \dot{r}^2 + \dot{z}^2 + g_{\phi\phi} \dot{\phi}^2 + 2t\dot{\phi} + 2ze^{\alpha r} \dot{r}\dot{\phi}], \quad (18)$$

где точкой обозначено дифференцирование по собственному времени τ . Ясно, что t и ϕ являются циклическими координатами, и существуют отвечающие им интегралы движения: один $p_t = -E$ и другой $p_\phi = L$. Радиальная компонента уравнения геодезической в плоскости $z = \text{const} = 0$ записывается как

$$e^{2\alpha r}(\ddot{r} + \alpha \dot{r}^2) - \frac{1}{2} g'_{\phi\phi} \dot{\phi}^2 = 0. \quad (19)$$

Для круговых геодезических с $\ddot{r} = 0$ и $\dot{r} = 0$ мы должны иметь $g'_{\phi\phi} = 0$. Поскольку ϕ есть циклическая координата, имеем $p_\phi = g_{\phi\phi} \dot{\phi} + t = \text{const}$. Для $\dot{t} = 0$, т. е. для замкнутых орбит в пространстве-времени, момент импульса $g_{\phi\phi} \dot{\phi} = \text{const}$, и из (18) в случае круговых ЗВГ мы имеем $g_{\phi\phi} \dot{\phi}^2 = -1$, откуда следует, что вдоль ЗВГ компонента метрики $g_{\phi\phi} < 0$ и $\dot{\phi} = \text{const}$.

Гамильтониан H для метрики (1) задается как

$$H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = \frac{1}{2}[e^{-2\alpha r}p_r^2 + p_z^2 - 2ze^{-\alpha r}p_r p_t + 2p_t p_\phi + (z^2 - g_{\phi\phi})p_t^2], \quad (20)$$

при этом $H = -1/2$ для времениподобных геодезических и $H = 0$ для нулевых (светоподобных).

СЛУЧАЙ 1: угловая скорость наблюдателя с нулевым моментом импульса.

Из гамильтониана (20) получаем гамильтоновы уравнения

$$\dot{t}p_\phi + [z^2 - g_{\phi\phi}]p_t - ze^{-\alpha r}p_r, \quad \dot{\phi} = p_t. \quad (21)$$

Отсюда

$$\Omega(r, z, p_t, p_r, p_\phi) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} = \frac{p_t}{p_\phi + z^2 p_t - g_{\phi\phi} p_t - ze^{-\alpha r} p_r}. \quad (22)$$

Если положить $p_\phi = 0$, то мы получим угловую скорость Ω_0 наблюдателя с нулевым моментом импульса (т.е. частицы с нулевым моментом импульса, измеренным наблюдателем, для которого t – собственное время), которая представляет собой угловую скорость увлечения системы отсчета [20], [21] и имеет вид

$$\Omega_0(r, z, E, p_r) = \frac{p_t}{z^2 p_t - g_{\phi\phi} p_t - ze^{-\alpha r} p_r} = \frac{E}{z^2 E - Ee^{\alpha r}(r^2 - r\alpha) + ze^{-\alpha r} p_r}, \quad (23)$$

при этом $\Omega_0 \rightarrow 0$, когда или r , или z стремится к бесконечности. Мы выбрали плоскость $z = \text{const} = 0$, при этом угловая скорость наблюдателя с нулевым моментом импульса равна $\Omega_0 = -e^{-\alpha r}/(r^2 - \alpha r)$; она стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ и меняет знак: $\Omega_0 > 0$ при $r < r_0 = \alpha$ и $\Omega_0 < 0$ при $r > r_0 = \alpha$.

СЛУЧАЙ 2: времениподобные (нулевые) геодезические с $\dot{t} < 0$ (с $\dot{t} = 0$ соответственно) при ненулевом моменте импульса.

Из гамильтониана (20) получаем гамильтоновы уравнения:

$$\begin{aligned} -\dot{p}_r &= -\alpha e^{-2\alpha r} p_r^2 + \alpha z e^{-\alpha r} p_r p_t - \frac{1}{2} g'_{\phi\phi} p_t^2, \\ -\dot{p}_z &= z p_t^2 - e^{-\alpha r} p_r p_t. \end{aligned} \quad (24)$$

Если положить $p_r = 0$, $p_z = 0$, то мы получаем

$$-\dot{p}_r = -\frac{1}{2} g'_{\phi\phi} p_t^2, \quad -\dot{p}_z = z p_t^2. \quad (25)$$

Приравнивая правые части этих уравнений к нулю, мы выводим следующие решения: $z = 0$ и $g'_{\phi\phi}(r) = 0$, поскольку $p_t \neq 0$, следовательно,

$$r = r_* = \frac{1}{2\alpha}[(\alpha^2 - 2) + \sqrt{\alpha^4 + 4}]. \quad (26)$$

Таким образом, мы получили обсуждавшееся выше условие существования ЗВГ для метрики (1). В случае времениподобных геодезических введем функцию K (так называемую функцию Картера) формулой

$$H + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}[e^{-2\alpha r} p_r^2 + p_z^2 - 2ze^{-\alpha r} p_r p_t] + \frac{1}{2} K = 0, \quad (27)$$

то есть

$$K = 2p_t p_\phi + [z^2 - g_{\phi\phi}]p_t^2 + 1. \quad (28)$$

При $p_r = 0$, $p_z = 0$ и $r = r_* < r_0$ получаем гамильтоновы уравнения

$$\dot{\phi} = p_t = -E, \quad \dot{t} = p_\phi - g_{\phi\phi}(r_*)p_t = L - |g_{\phi\phi}(r_*)|E, \quad (29)$$

поскольку $g_{\phi\phi}(r_*) < 0$, и уравнение $|g_{\phi\phi}(r_*)|E^2 - 2EL + 1 = 0$, следовательно,

$$E_{\pm} = \frac{1}{|g_{\phi\phi}(r_*)|} \left[L \pm \sqrt{L^2 - |g_{\phi\phi}(r_*)|} \right], \quad (30)$$

откуда момент импульса $L = p_\phi \neq 0$.

В плоскости $z = 0$ круговые времениподобные геодезические с $\dot{t} < 0$ существуют при (мы выбираем знак плюс для E) $L > \sqrt{|g_{\phi\phi}(r_*)|}$ и $E > 1/L$.

Для нулевых (светоподобных) геодезических с $\dot{t} = 0$, где теперь точкой обозначено дифференцирование по аффинному параметру, мы имеем $L = \sqrt{|g_{\phi\phi}(r_*)|}$ и $E = 1/L$. Таким образом, метрика (1) допускает существование времениподобных и нулевых круговых геодезических в окрестности оси z на гиперповерхности с $\dot{t} \leq 0$ в плоскости $z = \text{const}$.

5. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ

Построим набор нулевых векторов тетрады $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$ для метрики (1):

$$\begin{aligned} k_\mu &= (0, 1, 0, 0), & l_\mu &= \left(-ze^{\alpha r}, -\frac{e^{\alpha r}}{2}(r^2 - r\alpha), 0, -1 \right), \\ m_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\alpha r}, 0, i, 0), & \bar{m}_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\alpha r}, 0, -i, 0), \end{aligned} \quad (31)$$

где $i = \sqrt{-1}$. В терминах этих векторов метрический тензор интервала (1) можно записать в виде

$$g_{\mu\nu} = -k_\mu l_\nu - l_\mu k_\nu + m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu. \quad (32)$$

Векторы (31) являются нулевыми и ортогональными, за исключением $k_\mu l^\mu = -1$ и $m_\mu \bar{m}^\mu = 1$. Ортонормированный базис $\mathbf{e}_{(a)} = \{\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{e}_{(3)}, \mathbf{e}_{(4)}\}$ выражается через векторы тетрады следующим образом:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{(4)} + \mathbf{e}_{(2)}), \quad \mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{(4)} - \mathbf{e}_{(2)}), \quad \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{(1)} + i\mathbf{e}_{(3)}). \quad (33)$$

Используя векторы (31), находим пять скаляров Вейля, из которых только один отличен от нуля:

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0, \quad \Psi_4 = \frac{1}{4}e^{-\alpha r}(\alpha^2 - 2 - 2r\alpha). \quad (34)$$

Метрика (1) имеет тип N в классификации Петрова.

Мы видим, что наша метрика допускает ковариантно постоянный нулевой вектор k_μ , т. е. $k_{\mu;\nu} = 0$. Такое пространство-время называется пространством гравитационных волн с плоским фронтом и параллельными лучами (pp-волновое пространство-время). Используя тетраду (31), найдем *оптические скаляры* [18]: расширение

(экспансию), вращение (твист) и сдвиг:

$$\Theta = \frac{1}{2}k_{;\mu}^{\mu} = 0, \quad \omega^2 = \frac{1}{2}k_{[\mu;\nu]}k^{\mu;\nu} = 0, \quad \sigma\bar{\sigma} = \frac{1}{2}k_{(\mu;\nu)}k^{\mu;\nu} - \Theta^2 = 0. \quad (35)$$

Можно показать, что пространство-время, задаваемое метрикой (1), приводится к форме Бринкмана [22] для этой категории пространств.

Рассмотрим преобразование $r \rightarrow \ln(\alpha\chi)/\alpha$, $t \rightarrow v - z\chi/2$ и далее преобразование

$$\chi \rightarrow x \cos \frac{\phi}{2} + y \sin \frac{\phi}{2}, \quad z \rightarrow x \sin \frac{\phi}{2} - y \cos \frac{\phi}{2}. \quad (36)$$

В результате из метрики (1) получим метрику

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2dv d\phi + G(x, y, \phi) d\phi^2, \quad (37)$$

где

$$G(x, y, \phi) = \frac{1}{\alpha} \left(x \cos \frac{\phi}{2} + y \sin \frac{\phi}{2} \right) \ln \left(\alpha x \cos \frac{\phi}{2} + \alpha y \sin \frac{\phi}{2} \right) \times \\ \times \left\{ \left(\alpha x \cos \frac{\phi}{2} + \alpha y \sin \frac{\phi}{2} \right) - \alpha^2 \right\} - \frac{1}{4}(x^2 + y^2). \quad (38)$$

Эта метрика приводится к форме Бринкмана [22] для рр-волнового пространства-времени.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной статье мы обсуждали стационарное аксиально-симметричное пространство-время, допускающее круговые ЗВГ. Метрика пространства локально изометрична метрике невакуумного рр-волнового пространства-времени и свободна от расхождений кривизны. Мы показали, что ЗВГ в таком пространстве существуют в конечной области, следовательно, можно было бы совершить путешествие во времени в состоянии свободного падения. Многие из известных пространств с ЗВГ или ЗВГ имеют такие недостатки, как нарушение энергетических условий и/или сингулярности кривизны, являясь тем самым нефизическими. Наша модель свободна от всех этих проблем, и метрика относится к типу N в классификации Петрова. Также мы показали, что данная метрика допускает круговые времениподобные или нулевые геодезические с $\dot{t} \leq 0$ в плоскости $z = \text{const}$ при ненулевом моменте импульса, и, следовательно, вдоль этих геодезических время бежит в обратном направлении.

Список литературы

- [1] K. Gödel, “An example of a new type of cosmological solutions of Einstein’s field equations of gravitation”, *Rev. Modern Phys.*, **21**:3 (1949), 447–450.
- [2] F. Ahmed, B. B. Hazarika, D. Sarma, “The anti-de Sitter spacetime as a time machine”, *Eur. Phys. J. Plus*, **131**:7 (2016), 230, 3 pp.
- [3] F. Ahmed, “Type N Einstein space time machine spacetime”, *Ann. Phys.*, **382** (2017), 127–135.

- [4] F. Ahmed, “A stationary cylindrically symmetric spacetime which admits CTCs and its physical interpretation”, *Ann. Phys.*, **386** (2017), 25–33.
- [5] F. Ahmed, “Closed timelike curves in type II non-vacuum spacetime”, *Commun. Theor. Phys.*, **67**:2 (2017), 189–191.
- [6] F. Ahmed, “A type D non-vacuum spacetime with causality violating curves, and its physical interpretation”, *Commun. Theor. Phys.*, **68**:6 (2017), 735–740.
- [7] I. D. Soares, “Inhomogeneous rotating universes with closed timelike geodesics of matter”, *J. Math. Phys.*, **21**:3 (1980), 521–525.
- [8] B. R. Steadman, “Letter: Causality violation on van Stockum geodesics”, *Gen. Rel. Grav.*, **35**:9 (2003), 1721–1726.
- [9] W. B. Bonnor, B. R. Steadman, “Exact solutions of the Einstein–Maxwell equations with closed timelike curves”, *Gen. Rel. Grav.*, **37**:11 (2005), 1833–1844.
- [10] Ø. Grøn, S. Johannesen, “Closed timelike geodesics in a gas of cosmic strings”, *New J. Phys.*, **10** (2008), 103025, 17 pp.
- [11] O. Grøn, S. Johannesen, “A spacetime with closed timelike geodesics everywhere”, *Nuovo Cimento B*, **125**:10 (2010), 1215–1221.
- [12] F. Ahmed, “Cylindrically symmetric pure radiation space-time and closed timelike geodesics”, *Progr. Theor. Exp. Phys.*, **2017**:4 (2017), 043E02, 12 pp.
- [13] M. S. Morris, K. S. Thorne, U. Yurtsever, “Wormholes, time machines, and the weak energy condition”, *Phys. Rev. Lett.*, **61**:13 (1988), 1446–1449.
- [14] M. S. Morris, K. S. Thorne, “Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity”, *Amer. J. Phys.*, **56**:3 (1988), 395–412.
- [15] F. Ahmed, “Gravitational collapse of type N spacetime, the naked singularity, and causality violation”, *Progr. Theor. Exp. Phys.*, **2017**:8 (2017), 083E03, 12 pp.; “Cylindrically symmetric, asymptotically flat, Petrov type D spacetime with a naked curvature singularity and matter collapse”, *Adv. High Energy Phys.*, **2017** (2017), 7943649; “Axially symmetric null dust spacetime, naked singularity, and cosmictime machine”, 3587018.
- [16] J. Carot, J. M. M. Senovilla, R. Vera, “On the definition of cylindrical symmetry”, *Class. Quantum Grav.*, **16**:9 (1999), 3025–3034.
- [17] A. Barnes, “A comment on a paper by Carot et al.”, *Class. Quantum Grav.*, **17**:13 (2000), 2605–2609.
- [18] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions to Einstein’s Field Equation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [19] С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр*, Мир, М., 1986.
- [20] P. Collas, D. Klein, “Letter: Frame dragging anomalies for rotating bodies”, *Gen. Rel. Grav.*, **36**:5 (2004), 1197–1206.
- [21] T.-M. He, Y.-J. Wang, “Frame dragging in the field of Kerr family”, *Chinese Phys.*, **15**:1 (2006), 232–234.
- [22] H. W. Brinkmann, “Einstein spaces which are mapped conformally on each other”, *Math. Ann.*, **94**:1 (1925), 119–145.

Поступила в редакцию 19.08.2017,
после доработки 12.12.2017