Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Фатхи, М. Мохсени, Схождение конгруэнции в рр-волновом пространстве-времени, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 2, 269–287

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9455>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:00:45

© 2018 г.

М. Фатхи*, М. Мохсени*

СХОЖДЕНИЕ КОНГРУЭНЦИИ В РР-ВОЛНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Утверждается, что можно исключить хорошо известное свойство полноты рр-волн, если выбирать геодезические, вытянутые вдоль координат Бринкмана. Это утверждение изучается в более общем контексте схождения конгруэнции. Показано, что этот анализ приводит к различным вопросам, касающимся негеодезических конгруэнций. Обсуждение в основном базируется на исследовании расширения нулевой конгруэнции; также представлено обобщенное уравнение Рейчоудхури.

Ключевые слова: гравитационные волны, рр-волны, расширение конгруэнции, обобщенное уравнение Рейчоудхури, фокусировка.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9455>

1. ВВЕДЕНИЕ

За два года до того, как Эйнштейн предложил общую теорию относительности, у него была интересная беседа с Максом Борном, посвященная распространению бесконечно малых возмущенных полей в базовом пространстве-времени, которые, как утверждал Эйнштейн, могут распространяться со скоростью света [1]. Впоследствии такое распространение гравитационного действия сквозь пространство-время было названо *гравитационными волнами* в том смысле, что оно напоминает небольшую рябь или волны на поверхности океана [2]. Это явление изначально было введено как теоретическая конструкция в общей теории относительности, и с тех пор велись серьезные споры о существовании или возможности обнаружения гравитационных волн. Так было до тех пор, пока не так давно научная корпорация LIGO не провела наблюдения за гравитационными волнами, которые порождались слиянием черных дыр [3], и эти результаты подтвердили, что Эйнштейн действительно был прав. Хотя сам Эйнштейн настаивал на том, что полевые уравнения сложны и трудно найти точные решения для распространяющихся возмущений (особенно сильных), тем не менее многочисленные усилия ученых были направлены на описание возмущений. Напомним такой знаменитый подход, как линеаризованная теория гравитации, в которой возмущения в пространстве-времени определяются

*Department of Physics, Payame Noor University, Tehran, Iran.
E-mail: m.fathi@shargh.tpmu.ac.ir; mohsen.fathi@gmail.com

с помощью предела слабого поля в общей теории относительности. В рамках этого подхода уравнения распространения поля таковы, что как следствие они обеспечивают поведение волновых пакетов в поперечно-бесследовой (transverse-traceless, TT) калибровке. Этот метод также дает информацию о поляризации волны¹⁾.

Нулевые поля, проходящие сквозь пространство-время со скоростью света, впервые серьезно обсуждались Брикманом [6] и Болдуином, Джеффри [7], которые ввели такие поля как параллельные волны с плоским фронтом (лучи). Эти волны впоследствии в работе [8] были названы *pp-волнами*. Пространство-время *pp*-волн известно как такое точное решение общей теории относительности, которое допускает ковариантное постоянное нулевое векторное поле [9]. Важно отметить, что можно понимать *pp*-волны как электромагнитные аналоги гравитации. Другими словами, такие плоские волны рассматриваются как гравитационные эффекты электромагнитных полей [10]. Тем не менее *pp*-волны, представляющие собой рябь в пространстве-времени, несомненно являются гравитационными плосковолновыми решениями общей теории относительности²⁾.

С момента появления таких точных решений было проведено множество исследований их характеристик, которые мотивировались тем, что гравитационные волны сами по себе представляют интерес с теоретической и экспериментальной точек зрения. Данные решения также проверялись в рамках обобщенных и модифицированных теорий гравитации [13]³⁾. Гравитационные волны в двумерном случае исследовались при обсуждении теоремы Бирхгофа [15]. С точки зрения конформной инвариантности, на которой был основан подход Бринкмана, следует отметить функциональную форму конформного фактора, найденную в работе [16], и классы конформных симметрий *pp*-волн [17]. В массивном пределе Пенроуза *pp*-волны обсуждались даже в теории струн, супергравитации и суперсимметрии. Эти исследования показали, что половина суперсимметрий покрывается решениями типа *pp*-волн [18]. Кроме того, было сформулировано обобщение понятия *pp*-волн на невакуумный случай и получены *pp*-волны, не являющиеся плоскими [19]. В работе [20] плосковолновые решения рассматривались в рамках гравитации с сильным полем и были построены состояния с произвольной поляризацией. В конечном итоге была проведена полная инвариантная классификация вакуумных *pp*-волновых пространств-времен, основанная на инвариантах Картана. Авторы работы [21] обнаружили, что именно чередование классификационных инвариантов может помочь избавиться от проблемы исчезновения скалярной кривизны и предоставляет возможность разумной классификации.

Еще одним интересным применением *pp*-волнового пространства-времени является теория гравитации с материей. Недавно было доказано [22], что такие плоские волны являются решениями для фермионов Вейля с собственной гравитацией в структуре Вейля–Льюиса–Папаетру.

Имея в виду все, что сказано об интересе научного сообщества к *pp*-волновым пространствам-временам, в настоящей статье мы тем не менее рассматриваем только одно из основных геометрических свойств *pp*-волн, а именно геодезическую полноту

¹⁾Обширную информацию о линеаризованной гравитации и TT-калибровке можно найти в большинстве учебников по общей теории относительности (см., например, [2], [4], [5]).

²⁾Подробнее о теории *pp*-волн дополнительно к упомянутым работам см. в книгах [11], [12].

³⁾См. также работу [14] для обзора.

вакуумных рр-волн [2]. Она означает, что при своем распространении эти плоские волны никогда не фокусируются. В настоящей статье мы проводим геометрические построения, являющиеся альтернативой известным из литературы, чтобы показать, что это свойство рр-волн существенно зависит от выбора конгруэнций. Другими словами, мы не можем обобщить это свойство полноты на все типы плоских волн. В основном это делается путем выбора множества взаимосвязанных нулевых конгруэнций в многообразии пространства-времени для задания расслоений этого многообразия. Мы намерены определить упомянутое свойство как дополнительное следствие схождения/расхождения конгруэнций и подробно изучить эти явления, исследуя генераторы нулевой конгруэнции для рр-волн и эволюцию в поперечном направлении (расширение конгруэнции) полей, распространяющихся в базовом многообразии. С помощью данного подхода мы находим, что геодезическая конгруэнция должна удовлетворять некоторым требованиям, чтобы ее можно было рассматривать как физическую нулевую конгруэнцию. Мы показываем, что из-за своего постоянного (положительного или отрицательного) расширения даже эти типы геодезических нельзя рассматривать как полные множества. Мы также определяем множество негеодезических конгруэнций и утверждаем, что они могут обеспечить заметное схождение, позволяя конгруэнции проходить через определенную границу. Доказано, что эти свойства являются следствиями записи генераторов конгруэнции в терминах различных наборов координат Бринкмана.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы вводим важные математические понятия, основную часть которых используем далее. В разделе 3 мы строим различные множества геодезических и обсуждаем их поперечные свойства, а также применение этих свойств к схождению геодезических. В разделе 4 мы обобщаем наш подход на случай негеодезических рр-волн и находим ограничения, при которых расширение может изменить знак. Это ограничение используется в разделе 5 для того, чтобы показать, что трехмерное расслоение пространства-времени само по себе зависит от расслоения. Мы приводим доводы в пользу того, что это ведет к зависимости от расслоения для внешней кривизны. Итоги подведены в разделе 6.

Всюду по статье греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ принимают значения 0, 1, 2, 3, а латинские индексы $a, b, c, \dots$ – значения 1, 2, 3. Жирный шрифт мы используем для (ко)векторов.

2. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В данном разделе мы рассматриваем конгруэнцию гравитационных нулевых кривых в рр-волновом пространстве-времени, которая строится с помощью касательного вектора ℓ^α . Однако, поскольку четырехмерное пространственно-временное многообразие с метрикой $g_{\alpha\beta}$ характеризуется двумерным световым конусом, для определения ориентации касательного подпространства необходим вспомогательный нулевой вектор, который мы обозначим как n^α . Он часто называется входящей конгруэнцией⁴⁾. Следует отметить, что в данном разделе мы рассматриваем случай, когда $n \cdot \ell \equiv n_\alpha \ell^\alpha$ не обязательно является постоянной величиной (ненормированная

⁴⁾Но, как мы увидим ниже, это не всегда так.

конгруэнция), а также случаи, когда ℓ не переносится параллельно вдоль конгруэнции (негеодезическая конгруэнция). Таким образом, мы имеем два случая: геодезическая (нормированная или ненормированная) конгруэнция и негеодезическая ненормированная конгруэнция.

Как упоминалось выше, в нашей работе мы интересуемся поведением конгруэнции в поперечном направлении. Прежде всего введем обозначения для различных типов членов с ускорением:

$$a^\sigma \equiv \dot{\ell}^\sigma = \ell^\sigma_{;\rho} \ell^\rho, \quad a_n^\sigma = \ell^\sigma_{;\rho} n^\rho, \quad b^\sigma \equiv \dot{n}^\sigma = n^\sigma_{;\rho} \ell^\rho, \quad b_n^\sigma = n^\sigma_{;\rho} n^\rho. \quad (1)$$

Заметим, что, рассматривая τ как определяющий конгруэнцию параметр, мы используем следующие обозначения для общеизвестных операторов: точкой обозначена $D/d\tau$, запятая используется для ∂ , штрих – для $\partial/\partial\tau$, а точка с запятой обозначает ∇ . Другой характерной величиной является поперечная скорость изменения конгруэнции, измеренная сопутствующим наблюдателем, т.е. расширение. Прежде всего зададим $B^\sigma_\rho \doteq \ell^\sigma_{;\rho}$, тогда расширение определяется как

$$\Theta = \bar{B}^\rho_\rho = h^\rho_\alpha h^\alpha_\sigma \ell^\sigma_{;\rho} = h^\rho_\sigma \ell^\sigma_{;\rho}, \quad (2)$$

где

$$h^\rho_\sigma = \delta^\rho_\sigma - (\mathbf{n} \cdot \ell)^{-1} (\ell_\sigma n^\rho + n_\sigma \ell^\rho), \quad (3)$$

есть поперечный проектор в касательном пространстве (векторное поле) на поперечное подпространство (двумерное поперечное сечение конгруэнции), который удовлетворяет уравнениям

$$\ell^\sigma h^\rho_\sigma = n^\sigma h^\rho_\sigma = 0, \quad h^\rho_\rho = \delta^\rho_\rho h^\rho_\rho = 2. \quad (4)$$

Используя их, мы получаем расширение конгруэнции, порожденной вектором ℓ , в виде (см. приложение А)

$$\Theta = \ell^\rho_{;\rho} - (\mathbf{n} \cdot \ell)^{-1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) = \ell^\rho_{;\rho} - (\mathbf{n} \cdot \ell)^{-1} ((\mathbf{n} \cdot \dot{\ell}) - \ell \cdot \mathbf{b}). \quad (5)$$

Заметим, что если $\mathbf{n} \cdot \ell = \text{const}$ (нормированная конгруэнция), то $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = -\ell \cdot \mathbf{b}$. Можно также вычислить расширение конгруэнции, порожденной вектором $\mathbf{n}$:

$$\Theta_n = h^\rho_\sigma n^\sigma_{;\rho} = n^\rho_{;\rho} - (\mathbf{n} \cdot \ell)^{-1} (\ell \cdot \mathbf{b}_n). \quad (6)$$

Для нормированной конгруэнции $\ell \cdot \mathbf{b}_n = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_n$.

Важным математическим инструментом, необходимым для проверки теоремы о гравитационной сингулярности, является уравнение Рейчоудхури, которое описывает эволюцию поперечной скорости изменения конгруэнции, порожденной вектором ℓ , т.е. величины $\dot{\Theta}$. В общем случае негеодезической ненормированной конгруэнции эта эволюция задается обобщенным уравнением Рейчоудхури для нулевой конгруэнции, имеющим вид (см. приложение А)

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} = & -\frac{1}{2}\Theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu + a^\mu_{;\mu} - a^\mu_{;\nu}(\delta^\nu_\mu - h^\nu_\mu) - \\ & - (\ell \cdot \mathbf{n})^{-1} [2n_\nu \ell^\nu_{;\mu} a^\mu + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_n) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})] + (\ell \cdot \mathbf{n})^{-2} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})(\ell \cdot \mathbf{n})], \quad (7) \end{aligned}$$

где Θ определена равенством (5).

Чтобы задать тензоры сдвига $\sigma_{\mu\nu}$ и завихренности $\omega_{\mu\nu}$, разложим $\bar{B}_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}\bar{B}^\lambda{}_\nu$ на симметричную и антисимметричную части как [23]

$$\bar{B}_{\mu\nu} = \bar{B}_{(\mu\nu)} + \bar{B}_{[\mu\nu]} = \theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}, \quad (8)$$

а симметричную часть – на следовую и бесследовую составляющие:

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Theta h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}, \quad (9)$$

где $h_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}h^\lambda{}_\nu$; это дает $\theta^\mu{}_\mu = \Theta$, поскольку $\sigma^\mu{}_\mu = 0$. С учетом этих соотношений тензоры сдвига и завихренности задаются как

$$\sigma_{\mu\nu} = h_\mu{}^\sigma h_\nu{}^\lambda \ell_{(\sigma;\lambda)} - \frac{1}{2}\Theta h_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu} = h_\mu{}^\sigma h_\nu{}^\lambda \ell_{[\sigma;\lambda]}. \quad (10)$$

Уравнение Рейчоудхури (7) является достаточно общим. Но его вариант, встречающийся в литературе, касается нормированных геодезических конгруэнций, либо аффинно, либо неаффинно параметризованных. Для неаффинно параметризованных геодезических мы имеем $\mathbf{n} \cdot \ell = \text{const}$ и $\mathbf{a} = \kappa \ell$, что дает альтернативное определение поверхностной гравитации κ [24]. Используя уравнение (5), мы получаем расширение

$$\Theta = \ell^\rho{}_{;\rho} - \kappa, \quad (11)$$

эволюция которого описывается известным уравнением [24], [25]

$$\dot{\Theta} = -\frac{1}{2}\Theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu + \kappa\Theta. \quad (12)$$

Заметим, что обобщенная версия уравнения (7) сводится к (12) в случае неаффинно параметризованной геодезической конгруэнции (см. приложение А). Для аффинно параметризованных геодезических $\kappa = 0$, и мы получаем наиболее распространенную версию уравнения Рейчоудхури для геодезической нулевой конгруэнции с $\Theta = \ell^\rho{}_{;\rho}$. Как можно видеть, единственная причина, которая приводит к изменению Θ и Θ_n по сравнению с их общеизвестным видом, состоит в существовании членов с ускорением, а не возможность того, что $\mathbf{n} \cdot \ell \neq \text{const}$. Следует отметить, что применять вышеуказанные расширения можно не только при определении формы поперечного сечения конгруэнции, но даже для описания областей, в которых поведение конгруэнций изменяется на противоположное.

Чтобы дать более подробную информацию, упомянем ловушечные поверхности, где захватывается нулевая конгруэнция. Действительно, захваченная поверхность относится к самому световому конусу. Точнее, в какой-то определенной точке вдоль опорной конгруэнции расширение исчезает, и, как правило, световой конус закрывается. Теперь рассмотрим все другие конгруэнции и повторим процедуру. Это определит положение точек пространства-времени, в которых световой конус находится в *краевой ловушке* (marginally trapped), тем самым определяется поверхность в пространстве-времени, которая называется *краевая ловушечная поверхность*. Мы можем убрать слово “краевая”, если исходящее расширение отрицательно, а не равно нулю. Более детально, поверхность, на которой выполнено условие $\Theta\Theta_n > 0$, может

Рис. 1. Входящие/исходящие, направленные в будущее расширения конгруэнций в координатах Бринкмана.

находиться в ловушке или антиловушке, в то время как двумерные поверхности, на которых $\Theta\Theta_n < 0$, называются неулавливающими (untrapped) [24]. Являются ли эти поверхности нулевыми, пространственноподобными или времениподобными, зависит от конкретного положения точек (на основании свойства касательной или нормали к двумерной поверхности)⁵⁾.

2.1. Геодезическое уравнение Рейчоудхури в pp-волновом пространстве-времени. pp-Волновое пространство-время представляет собой решение полевых уравнений Эйнштейна типа плоской волны, допускающее метрику, которая в координатах Бринкмана (u, v, x, y) имеет вид [19]

$$ds^2 = 2H(u, x, y)du^2 + 2 du dv + dx^2 + dy^2, \quad (13)$$

где координата v представляет собой векторное нулевое поле, вытянутое вдоль исходящих геодезических. Координату u можно соотнести с нулевыми, времениподобными или пространственноподобными векторными полями. В настоящей работе мы полагаем, что u и v задают образующие конуса на рис. 1, которые в данном случае рассматриваются как координаты в $x^\alpha(\tau) = (u(\tau), v(\tau), x(\tau), y(\tau))$ и задаются формулами $u = t - z$, $v = t + z$.

Пусть $\lambda_\alpha = u_{,\alpha} = (1, 0, 0, 0)$ – ковекторное поле в кокасательном расслоении. Это поле направлено, конечно, вдоль координаты v . Конгруэнция, порожденная вектором ℓ , натянута на $x_{,\alpha}$ и $y_{,\alpha}$. Следовательно, нулевые векторы ℓ и n – это те векторы, которые охватывают нулевой конус. Гравитационный потенциал $H(u, x, y)$ записывается как [19]

$$H = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}v_{,\alpha}v_{,\beta}. \quad (14)$$

Таким образом, он может в некотором смысле рассматриваться как гамильтониан вида $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta$, где $k_\alpha \doteq v_{,\alpha}$ есть ковекторное поле, связанное с конгруэнцией, порожденной вектором ℓ . Это поле действительно является элементом кокасательного расслоенного пучка пространственно-временного многообразия. В pp-волновом пространстве-времени мы также имеем $g^{\alpha\beta}H_{,\alpha}\lambda_{,\beta} = 0$, так что H не зависит от v . Кроме того, мы получаем тензор Риччи в виде

$$R_{\alpha\beta} = -g^{\rho\sigma}H_{;\rho\sigma}\lambda_\alpha\lambda_\beta = -(H_{,xx} + H_{,yy})\lambda_\alpha\lambda_\beta,$$

⁵⁾Трехмерное замыкание всех этих ловушечных поверхностей называется видимым горизонтом.

следовательно, $R_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu = -g^{\rho\sigma}H_{;\rho\sigma}(\lambda \cdot \ell)^2$, причем положительность или отрицательность этого выражения зависит явно от знака величины $H^{\cdot\rho}_{;\rho}$. Заметим, что величина $R_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu$ играет важную роль при обсуждении сильного энергетического условия в общей теории относительности. Если $R_{\mu\nu}\ell^\mu\ell^\nu \geq 0$, то сильное энергетическое условие выполнено и гравитационные силы притягивающие. В настоящей работе и в контексте общей теории относительности мы соблюдаем сильное энергетическое условие и, следовательно, рассматриваем случай $H^{\cdot\rho}_{;\rho} \leq 0$.

Теперь для аффинно параметризованной геодезической конгруэнции уравнение Рейчодухури (12) можно переписать, вычислив $\dot{\Theta} = D\ell^\mu_{;\mu}/d\tau$, как

$$\dot{\Theta} = -\ell^\mu_{;\nu}\ell^\nu_{;\mu} + g^{\rho\sigma}H_{;\rho\sigma}(\lambda \cdot \ell)^2. \quad (15)$$

3. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КОНГРУЭНЦИИ В РР-ВОЛНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Уравнение геодезической $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ эквивалентно $(\ell^\alpha)' + \Gamma^\alpha_{\rho\lambda}\ell^\rho\ell^\lambda = \mathbf{0}$, где $\ell^\alpha = x'^\alpha$. В рр-волновом пространстве-времени уравнения геодезической имеют вид

$$u'' = 0, \quad (16a)$$

$$v'' + u'(u'H_{,u} + 2x'H_{,x} + 2y'H_{,y}) = 0, \quad (16б)$$

$$x'' - u'^2H_{,x} = 0, \quad (16в)$$

$$y'' - u'^2H_{,y} = 0. \quad (16г)$$

Конгруэнция также должна удовлетворять нулевому условию, что дает ограничение

$$2Hu' + 2u'v' + x'^2 + y'^2 = 0. \quad (17)$$

3.1. Геодезические, направленные вдоль оси z . Уравнения геодезической и нулевое условие влекут $u' = E = \text{const}$ и $v' = -E^2H_{,u}$, а из уравнений (16в) и (16г) следует, что $H_{,x} = H_{,y} = 0$. Таким образом, чтобы получить геодезическую конгруэнцию, направленную вдоль оси z , мы должны потребовать $H \equiv H(u)$. Отсюда получаем

$$\ell^\alpha = (E, -EH(u), 0, 0). \quad (18)$$

Этот вектор порождает параллельно переносающуюся исходящую геодезическую конгруэнцию, но он не совпадает с координатным вектором $\mathbf{v}$. Также, если мы потребуем, чтобы ℓ был направлен в будущее, необходимо выполнение неравенств $E < 0$ и $H(u) > 1$ при всех u .

Теперь найдем подходящий вспомогательный нулевой вектор $\mathbf{n}$. Условие $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$ дает

$$n^\alpha = (n^0, -n^0H(u), 0, 0), \quad (19)$$

где компонента n^0 не обязательно является постоянной. Кроме того, поскольку $H(u) > 1$, не существует способа ввести направленный в будущее входящий вектор $\mathbf{n}$. Если предположить, что такая конгруэнция является входящей, то следует положить $n^0 > 0$. Таким образом, мы с необходимостью получаем конгруэнцию, направленную в прошлое, а именно в направлении $-z$ и $-t$. Здесь следует заметить, что когда мы говорим, что вектор направлен вдоль $-z$, это не означает, что его

z -компонента отрицательна; это означает, что он направлен так, что z -компонента убывает от начала вектора к его концу. Также мы можем поместить начало отсчета в настоящий момент времени ($t = 0$).

Два введенных вектора также удовлетворяют равенству $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell} = 0$, которое является нежелательным, поскольку в этом случае они не могут описывать поперечное подпространство. Причина в том, что в силу представлений (18) и (19) мы имеем $\mathbf{n} = (n^0/E)\boldsymbol{\ell}$. Соответственно, при $n^0/E > 0$ конгруэнция, порожденная вектором $\mathbf{n}$, направлена в будущее, но при этом лежит вдоль вектора $\boldsymbol{\ell}$. Аналогично при $n^0/E < 0$ вектор направлен в прошлое. Таким образом эти векторы сонаправлены, а именно параллельны или антипараллельны. Следовательно, исходящая конгруэнция в рр-волновом пространстве-времени, направленная в будущее вдоль оси z , отвечает входящей конгруэнции, направленной в прошлое вдоль оси z , без какой-либо разумной нормировки.

3.2. Геодезические в плоскости (zx). В этом случае уравнение (16r) влечет $H \equiv H(u, x)$. Однако из уравнения (16b), если нам известно $u' = E$, мы получаем

$$x'x'' = E^2 x'H_{,x} \implies x'x'' = E^2 H' \quad (20)$$

и, следовательно, используя $x'' = E^2 H_{,x}$, имеем $x'(E^2 H_{,x}) = E^2(x'H_{,x} + b^2 H_{,u})$. При этом

$$E^2 H_{,u} = 0 \implies H_{,u} = 0. \quad (21)$$

Это означает, что если выполнены геодезические уравнения, то $H \equiv H(x)$. Отсюда с учетом уравнений (16a), (16b) и выражения (17) мы получаем вектор

$$\ell^\alpha = (E, -2EH(x), \pm E\sqrt{2H(x)}, 0), \quad (22)$$

который порождает исходящую геодезическую конгруэнцию в плоскости (zx). Здесь мы налагаем условие $H(x) > 1/2$, чтобы конгруэнция была направлена в будущее (т. е. по направлению $+t$)⁶⁾ и распространялась в направлении $+z$. Однако мы получаем разные случаи, рассматривая знаки плюс и минус в третьей компоненте вектора $\boldsymbol{\ell}$. Знак плюс дает конгруэнцию, движущуюся в направлении $-x$, а знак минус – конгруэнцию, движущуюся в направлении $+x$. Таким образом, вместо направления z мы можем задать $\pm x$ в качестве направлений исходящей/входящей конгруэнции и построить на них генераторы. В данном случае, поскольку нас интересует исходящий вектор $\boldsymbol{\ell}$, выбираем знак минус.

Теперь, применяя условия $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$ и $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell} = -1$, получаем подходящую вспомогательную конгруэнцию для $\boldsymbol{\ell}$. Данные условия приводят к следующим двум копиям вектора $\mathbf{n}$:

$$n_1^\alpha = \left(n^0, \frac{1}{E}[-2En^0H(x) + 2\sqrt{En^0H(x)} - 1], \sqrt{2}\left[\sqrt{\frac{n^0}{E}} - n^0\sqrt{H(x)}\right], 0 \right), \quad (23a)$$

$$n_2^\alpha = \left(n^0, -\frac{1}{E}[2En^0H(x) + 2\sqrt{En^0H(x)} + 1], -\sqrt{2}\left[\sqrt{\frac{n^0}{E}} + n^0\sqrt{H(x)}\right], 0 \right). \quad (23b)$$

⁶⁾Мы можем быть уверены, что, поскольку H стоит под радикалом, должно быть выполнено неравенство $H > 0$. Также, если $\boldsymbol{\ell}$ указывает в направлении $+\mathbf{v}$, то величины H и E должны иметь противоположные знаки, поэтому $E < 0$.

В обоих случаях мы видим, что E и n^0 должны иметь одинаковый знак. Отсюда заключаем, что $n^0 < 0$ (n^0 постоянно или нет). Однако наложенные выше условия требуют, чтобы вектор $\mathbf{n}_1$ был направлен вдоль $+z$, $+t$ и $+x$. Следовательно, он не может быть входящим. Это также относится к $\mathbf{n}_2$ (см. приложение Б). Ограничения приводят к тому, что этот вектор направлен вдоль $+z$, $+t$ и $-x$.

В этом отношении имеет смысл привести некоторые рассуждения о данной частной конгруэнции и ее поведении в поперечном направлении. Заметим, что упомянутая выше конгруэнция удовлетворяет условию $n^0 E < 2$. Можно удостовериться в том, что геодезические уравнения Рейчоудхури (15) выполнены для ℓ , заданного формулой (22).

Теперь найдем расширение. Используя уравнение (11) с $\kappa = 0$, а также уравнение (6), вместе с выражениями (22) и (23б) мы получаем

$$\Theta = -\frac{EH_{,x}}{\sqrt{2H(x)}}, \quad (24a)$$

$$\Theta_{n_2} = \frac{n^0 H_{,x}}{\sqrt{2H(x)}}, \quad (24б)$$

$$\dot{\Theta} = -\frac{E^2(H_{,x})^2}{2H(x)} + E^2 H_{,xx}. \quad (24в)$$

При $H_{,x} > 0$ имеем $\Theta > 0$ и $\Theta_n < 0$, а если $H_{,x} < 0$, то $\Theta < 0$ и $\Theta_n > 0$. Оба случая отвечают неуправляющей области, где гравитационные волны распространяются. Таким образом, конгруэнтность может проходить свободно внутрь и наружу. Условие $\Theta\Theta_n < 0$, однако, указывает на то, что расхождение одной конгруэнции приводит к схождению ее партнера. Это может контрастировать с хорошо известным в настоящее время соглашением, что геодезическим рр-волнам не присуща любая геодезическая неполнота. Фактически такая неполнота может иметь место, только если исходящая нулевая конгруэнция целиком совпадает с координатой v . С другой стороны, используя $\dot{\Theta}$, следует иметь в виду один важный момент. В изучаемом нами случае сильное энергетическое условие дает неравенство $H_{,xx} < 0$. Это приводит к тому, что производная $\dot{\Theta}$ в уравнении (24в) отрицательна. В контексте общей теории относительности это позволяет сделать вывод о притягивающем характере гравитации. Поэтому, хотя в области, заполненной конгруэнциями геодезических гравитационных волн, мы не встречаемся ни с какой неполнотой, тем не менее исходящая конгруэнция всегда подвергается действию силы (растягивающей или сжимающей). Следовательно, фокусировка изучающейся нами исходящей геодезической конгруэнции неизбежна в направлении x за конечное время.

4. НЕГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ НОРМИРОВАННАЯ КОНГРУЭНЦИЯ

Пару нормированных негеодезических конгруэнций в z -, x -направлениях можно отождествить с конгруэнциями (22) и (23), взяв $H \equiv H(u, x)$. Все наложенные ранее условия для направленных в будущее исходящих/входящих конгруэнций вдоль $\pm x$ в данном случае выполнены. Таким образом, мы можем положить

$$\begin{aligned} \ell^\alpha &= (E, -2EH(u, x), -E\sqrt{2H(u, x)}, 0), \\ n^\alpha &= \left(n^0, -\frac{2En^0 H(u, x) + 2\sqrt{En^0 H(u, x)} + 1}{E}, -\sqrt{2} \left[\sqrt{\frac{n^0}{E}} + n^0 \sqrt{H(u, x)} \right], 0 \right), \end{aligned} \quad (25)$$

при этом $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell} = -1$ и соответствующие члены с ускорением таковы:

$$\begin{aligned}
 a^\alpha &= \left(0, -E^2 H_{,u}, -\frac{E^2 H_{,u}}{\sqrt{2H(u, x)}}, 0 \right), \\
 a_n^\alpha &= \left(0, E \left[\sqrt{\frac{2n^0}{E}} H_{,x} - n^0 H_{,u} \right], \frac{E[2\sqrt{n^0/E} H_{,x} - \sqrt{2n^0} H_{,u}]}{2\sqrt{H(u, x)}}, 0 \right), \\
 b^\alpha &= \left(0, -\frac{E[n^0 H_{,u}(\sqrt{En^0 H(u, x)} + 1)]}{\sqrt{En^0 H(u, x)}}, -\frac{En^0 H_{,u}}{\sqrt{2H(u, x)}}, 0 \right), \\
 b_n^\alpha &= \left(0, \frac{n^0[\sqrt{2} H_{,x}(n^0 \sqrt{H(u, x)} + \sqrt{n^0/E}) - n^0 H_{,u}(\sqrt{En^0 H(u, x)} + 1)]}{\sqrt{En^0 H(u, x)}}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{n^0[\sqrt{2} n^0 H_{,u} - 2\sqrt{n^0/E} H_{,x}]}{2\sqrt{H(u, x)}}, 0 \right).
 \end{aligned} \tag{26}$$

Можно проверить, что данные величины вместе с конгруэнциями (25) удовлетворяют обобщенным уравнениям Рейчоудхури (7) и $(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}) = 0$. Теперь все эти члены с ускорением ненулевые, и мы можем применить обобщенные уравнения (5) и (6) для расширения, чтобы получить поперечную скорость изменения сечения. В соответствии с выражениями (25) мы получаем

$$\Theta = -\frac{E(\sqrt{2} H_{,x} - 2\sqrt{En^0} H_{,u})}{2\sqrt{H(u, x)}}, \quad \Theta_n = -\frac{n^0(2En^0 H_{,u} - \sqrt{2En^0} H_{,x})}{2\sqrt{En^0 H(u, x)}}. \tag{27}$$

Найдем условия, при которых Θ и/или Θ_n равны нулю: оказывается, что обе эти величины обращаются в нуль одновременно, если

$$H_{,u} = \frac{H_{,x}}{\sqrt{2En^0}}. \tag{28}$$

Поскольку в нуль обращаются обе величины, отсюда нельзя получить уравнения для ловушечных/неулавливающих поверхностей, потому что при этом никакая конгруэнция не может возникнуть или прийти в данную область. Другими словами, в специальном случае (28) существует область, полностью изолированная от остального многообразия⁷⁾.

Еще одно следствие условия (28) состоит в том, что в результате любого слабого отклонения от равенства можно ожидать схождения или расхождения исходящих/входящих рр-волн. Мы можем выделить следующие случаи:

если $H_{,u} < H_{,x}/\sqrt{2En^0}$, то $\Theta > 0$ и $\Theta_n < 0$;

если $H_{,u} > H_{,x}/\sqrt{2En^0}$, то $\Theta < 0$ и $\Theta_n > 0$.

⁷⁾Можно также заметить, что в данном специальном случае производные Ли $\mathcal{L}_n \Theta$ и $\mathcal{L}_\ell \Theta_n$ равны нулю. Это указывает на серьезное отличие от определения видимого горизонта, поскольку ненулевые производные Ли приводят к точке, где находится пойманный или не пойманный в ловушку наблюдатель (входящий или исходящий) [24], который не может существовать для обоих случаев одновременно.

Оба этих случая действительно соответствуют неулавливающим областям, следовательно, нулевое расширение означает переключение поведения конгруэнции. В связи с этим условие уменьшения расширения само по себе скрывает сходящееся поведение обеих конгруэнций. Условие (28) порождает простое решение

$$H(u, x) = \frac{u}{\sqrt{2En^0}} + x, \quad (29)$$

которое отвечает паре взаимосвязанных конгруэнций (n, ℓ) с уменьшающимся расширением. Найдем характеристики многообразия (волнового пакета) для этого специального метрического потенциала. Для этого рассмотрим характеристики гиперповерхности, на которой лежат конгруэнции, и с их помощью также проведем анализ поверхностей, на которых расширение уменьшается.

5. ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ УМЕНЬШЕНИЯ РАСШИРЕНИЯ

Область, где $\Theta = \Theta_n = 0$, в точности соответствует определенному условию для производной потенциала $H(u, x)$, как это указано в (28). Обозначим эту область через Σ . Другими словами, рассмотрим гиперповерхность, на которой выполнено указанное условие на $H(u, x)$. В данном разделе мы в основном имеем дело с трехмерным расслоением пространства-времени в соответствии с негеодезическими исходящими/входящими конгруэнциями из предыдущего раздела. С точки зрения математики Σ в самом деле является гиперповерхностью со специальной метрикой и внешней кривизной, которые мы находим далее. Кроме того, мы изучаем характеристики этой поверхности в соответствии с упомянутым выше условием уменьшения расширения.

5.1. Общее обсуждение. Прежде всего заметим, что гиперповерхность определяется следующими касательными векторами, задающими смещения вдоль Σ :

$$\epsilon^\alpha_a = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}, \quad (30)$$

где $y^a = (\tau, y, z)$ – внутренние координаты на Σ . Заметим, что переменная τ задает локальную параметризацию поверхности Σ , которая также является параметризацией исходящих/входящих конгруэнций. Координата y^a выбирается так, чтобы исходящие/входящие конгруэнции определялись по отношению к $\pm x$ -направлению. Касательные векторы (30) представляют собой проекторы, которые переводят ко-2-формы из четырехмерного пространственно-временного многообразия в 2-формы на Σ . Следовательно, эти касательные векторы позволяют построить индуцированную метрику

$$\gamma_{ab} = g_{\alpha\beta} \epsilon^\alpha_a \epsilon^\beta_b, \quad (31)$$

которая определяет элемент длины на поверхности Σ как $ds_\Sigma^2 = \gamma_{ab} dy^a dy^b$. Теперь, используя выражение (30), получаем

$$\epsilon^\alpha_1 = x'^\alpha = \ell^\alpha, \quad (32a)$$

$$\epsilon^\alpha_2 = (0, 0, 0, 1), \quad (32б)$$

$$\epsilon^\alpha_3 = (-1, 1, 0, 0). \quad (32в)$$

Тогда метрика (31) записывается как

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & 1 & 0 \\ E & 0 & 2(H(u, x) - 1) \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где с учетом $\gamma^{ab} = (\gamma_{ab})^{-1}$ мы получаем $\gamma^a_a = 3$, и это подтверждает, что поверхность Σ трехмерна. Фактически, несмотря на нулевые генераторы, Σ есть трехмерная поверхность. Кроме того, условие $\ell \cdot \epsilon_A \neq 0$ (здесь и далее A, B принимают значения y, z) приводит к заключению, что мы имеем перекрестные члены в метрике пространства-времени и x -компоненту вектора ℓ , которая существенно влияет на размерность пространства.

Найдем также вектор нормали к поверхности, чтобы определить ее кривизну. Однако, поскольку ℓ – вектор, касательный к кривым на этой поверхности (поверхность Σ нулевая), очевидно, ортогональность вектора нормали вектору $\epsilon_1 \equiv \ell$ не имеет значения, вектор ℓ и так ортогонален самому себе. Поэтому мы используем условие ортогональности на пространственноподобной части Σ , т.е. таких двумерных поверхностях $\mathcal{S}$, которые определяются времениподобным нормальным ковектором N_α . Эти двумерные поверхности представляют собой расслоения трехмерной поверхности Σ . Ковектор N_α получается из условий $N \cdot \epsilon_A = 0$ и $N \cdot N = -1$:

$$N_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2(H(u, x) - 1)}} (1, 1, 0, 0), \quad (34a)$$

$$N^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2(H(u, x) - 1)}} (1, 1 - 2H(u, x), 0, 0), \quad (34b)$$

отсюда следует, что $H(u, x) > 1$. Таким образом, мы получили трехмерную нулевую поверхность Σ , расслоенную на двумерные пространственноподобные поверхности $\mathcal{S}$. Однако в некотором смысле мы все-таки можем рассматривать N как ковектор нормали к Σ в том смысле, что на специальной части (расслоении) поверхности внешняя кривизна поверхности Σ задается вектором N .

Это показывает, что имеется зависимость от расслоения для гиперповерхности, на которой выполнены некоторые специфические условия для рр-волн, в нашем случае – условие нулевого расширения. Эта зависимость также получается из внешней кривизны гиперповерхности. Традиционно внешняя кривизна – это 3-тензор, который показывает, насколько гиперповерхность выпукла/вогнута. В рамках нашего подхода 3-тензор внешней кривизны рассчитывается по формуле $K_{ab} = N_{\alpha;\beta} \epsilon^\alpha_a \epsilon^\beta_b$. Но, поскольку мы ограничились двумерными расслоениями, внешняя кривизна на самом деле есть 2-тензор, который рассчитывается как

$$K_{AB} = N_{A|B} = N_{\alpha;\beta} \epsilon^\alpha_A \epsilon^\beta_B, \quad (35)$$

где $N_{A|B}$ – двумерная ковариантная производная на поверхности $\mathcal{S}$ и $N_A = N_\alpha \epsilon^\alpha_A$. Данный 2-тензор внешней кривизны имеет только одну ненулевую компоненту

$$K_{zz} = -\frac{H_{,u}}{\sqrt{2(H(u, x) - 1)}}. \quad (36)$$

Это показывает, что в соответствии со специальным расслоением, заданным векторами (326) и (32в), всюду на Σ следует ожидать отличия поверхности от плоской: это задается соотношением (36). Различные расслоения тем самым приводят к разным кривизнам.

Чтобы получить обратный тензор K^{AB} , зададим индуцированный пространственноподобный метрический 2-тензор

$$m_{AB} = g_{\alpha\beta} \epsilon^\alpha_A \epsilon^\beta_B \quad (37)$$

и метрику $ds^2 = m_{AB} dy^A dy^B$ на $\mathcal{S}$. Применяя эти формулы вместе с (326) и (32в), имеем

$$m_{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2(H(u, x) - 1) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

следовательно, $K^{zz} = -H_{,u}[2(H(u, x) - 1)]^{-5/2}$. Кроме того, мы получаем след

$$K = m^{AB} K_{AB} = N^A|_A = -\frac{H_{,u}}{2\sqrt{2}(H(u, x) - 1)^{3/2}}, \quad (39)$$

где

$$N^A|_A = 2\Theta_N \quad (40)$$

есть двумерное расширение конгруэнции, связанной с N . Заметим, что, хотя вектор N не дает геодезическую конгруэнцию, расширение определяется его (двумерной) дивергенцией. Более детальное рассмотрение расширений негеодезических и ненормированных времениподобных конгруэнций можно найти в [26].

Вообще говоря, величина K определяет скалярную внешнюю кривизну гиперповерхности, на которой соответствующая времениподобная конгруэнция является входящей. Значения $K = 0$, $K > 0$ или $K < 0$ говорят о том, что гиперповерхность является соответственно плоской, выпуклой или вогнутой [23]. С учетом равенства (40) можно заключить, что такие свойства отвечают конгруэнции без расширения, расходящейся или сходящейся набегающей конгруэнции (см. рис. 2). В специальном случае нулевой набегающей конгруэнции с уменьшающимся расширением, которая обсуждалась в предыдущем разделе, скаляр K задается формулой (39). Однако для определения сходящейся/расходящейся времениподобной конгруэнции на двумерных поверхностях расслоений мы используем соответствующее решение для гравитационного потенциала.

5.2. Подробности о решении $H(u, x)$ с уменьшающимся расширением.

Выше мы получили условие (29) для гравитационного потенциала $H(u, x)$, которое отвечает входящей/исходящей конгруэнции с уменьшающимся расширением. Как было отмечено, в концепции рр-волн выпуклость/вогнутость гиперповерхности, порожденной нулевыми генераторами, обязательно зависит от двумерных расслоений. Данные свойства также несут информацию о том, возможна ли расходящаяся/сходящаяся конгруэнция. Для рр-волн с уменьшающимся расширением, используя формулы (29), (39) и (40), мы получаем

$$2\Theta_N = -\frac{1}{4}(En^0)^{-1/2} \left(x + \frac{u}{\sqrt{2En^0}} - 1 \right)^{-3/2}. \quad (41)$$

Рис. 2. Влияние различных значений K на поведение набегающей конгруэнции.

Это дает нам базовую конструкцию, поскольку теперь всё зависит от знака выражения в больших круглых скобках. Понятно, мы рассчитываем, что оно положительно, тогда ${}^2\Theta_N < 0$, двумерная поверхность расслоения является вогнутой и ожидается схождение рр-волн. Конгруэнция (346) пересекает поверхность $\mathcal{S}$ под прямым углом. Таким образом, следует понимать, что это двумерное расширение действительно связано со скоростью изменения площади, охваченной контуром на $\mathcal{S}$, который порожден пересечением набегающей конгруэнции с поверхностью. Отрицательность вышеупомянутого выражения гарантирует, что мы вновь имеем сходящуюся конгруэнцию (хотя и ненулевую) в рр-волновом пространстве-времени.

6. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Важность явления фокусировки конгруэнции стала более отчетливой после того, как Пенроуз и Хокинг сформулировали теоремы о сингулярности [27]–[29]. Эти теоремы неукоснительно использовались в теории гравитационного коллапса, черных дыр и, самое главное, в сценарии космической цензуры. Используя эти понятия, можно также применить некоторые фундаментальные математические средства для описания кинематической эволюции набегающих в гравитационных полях конгруэнций (нулевых или времениподобных). Одним из таких замечательных инструментов является уравнение Рейчоудхури. На его связь с энергетическими условиями и теоремами о фокусировке также обращал внимание сам Пенроуз [30].

В представленной статье мы обсудили один важный аспект упомянутых выше математических проблем, а именно схождение конгруэнций. Наш анализ был посвящен тем нулевым конгруэнциям, которые определяют область, затронутую гравитационными волнами, т. е. рр-волновое пространство-время. Важность этого исследования заключается в том, что любое схождение может привести к возникновению области, в которую не проходит волна. Как мы уже упоминали в начале статьи, геодезическая полнота рр-волн является вполне общепринятым фактом. Однако мы показали, что если нулевые конгруэнции в основном построены из некоторых комбинаций координат Бринкмана, то мы можем ожидать их неизбежного схождения и/или фокусировки в течение конечного времени.

Сначала мы представили некоторые математические инструменты, в том числе обобщенные уравнения для расширения и обобщенное уравнение Рейчоудхури для

негеодезических ненормированных конгруэнций. В рамках нашего формализма мы показали, что только при определенных условиях имеет место разумная физическая причинность. Кроме того, мы показали, что даже в этих случаях можно ожидать фокусировку геодезических. Мы распространили наше обсуждение на случай негеодезических рр-волн и нашли, что можно построить область (или гиперповерхность), где исходящие/входящие конгруэнции меняют характер своего распространения. Эта гиперповерхность была проанализирована с точки зрения своей внешней кривизны, и мы продемонстрировали, что в рр-волновом пространстве-времени эти поверхности зависят от расслоения и даже времениподобные набегающие конгруэнции замечательным образом сходятся.

В заключение отметим, что если рассматривать гравитационные волны как нулевые возмущенные поля, то в пространстве-времени могут возникнуть области, где эти поля ведут себя совершенно определенным образом. В нашей работе мы столкнулись с областями, где рр-волны обладают уменьшающимся расширением. Эти результаты, возможно, помогут более глубоко осознать понятие гравитационных волн, представляющих собой рябь на поверхности океана пространства-времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вывод обобщенных уравнений Рейчоудхури для нулевой конгруэнции

Уравнения Рейчоудхури определяют эволюцию скорости изменения поперечного подпространства, т. е. расширение конгруэнции. На языке, который мы использовали в разделе 2 с учетом уравнения (2) мы можем записать эту эволюцию в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{\Theta} = \dot{\bar{B}}^\mu_{\mu} &= \frac{D}{d\tau}(h^\mu_\rho \ell^\rho_{;\beta} h^\beta_\mu) = \\
 &= h^\mu_\rho \frac{D}{d\tau}(\ell^\rho_{;\beta}) h^\beta_\mu + \frac{D}{d\tau}(h^\mu_\rho h^\beta_\mu) \ell^\rho_{;\beta} = h^\mu_\rho (\ell^\tau \ell^\rho_{;\beta\tau}) h^\beta_\mu + \ell^\tau (h^\beta_\rho h^\rho_\mu)_{;\tau} \ell^\rho_{;\beta} = \\
 &= h^\mu_\rho (\ell^\tau \ell^\rho_{;\tau\beta} - R^\rho_{\lambda\beta\tau} \ell^\lambda \ell^\tau) h^\beta_\mu + \ell^\tau (h^\beta_\rho h^\rho_\mu)_{;\tau} \ell^\rho_{;\beta} = \\
 &= h^\mu_\rho (a^\rho_{;\beta} - \ell^\rho_{;\tau} \ell^\tau_{;\beta} - R^\rho_{\lambda\beta\tau} \ell^\lambda \ell^\tau) h^\beta_\mu + \ell^\tau (h^\beta_\rho)_{;\tau} \ell^\rho_{;\beta} = \\
 &= h^\beta_\rho a^\rho_{;\beta} - h^\mu_\rho \ell^\rho_{;\tau} \ell^\tau_{;\beta} h^\beta_\mu - h^\beta_\rho R^\rho_{\lambda\beta\tau} \ell^\lambda \ell^\tau + \dot{h}^\beta_\rho \ell^\rho_{;\beta}. \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части разложим как

$$\begin{aligned}
 h^\mu_\rho \ell^\rho_{;\tau} \ell^\tau_{;\beta} h^\beta_\mu &= (h^\mu_\rho \ell^\rho_{;\tau} h^\tau_\nu) (h^\sigma_\nu \ell^\sigma_{;\beta} h^\beta_\mu) + h^\mu_\rho \ell^\rho_{;\tau} (\delta^\tau_\nu - h^\tau_\nu) (\delta^\sigma_\nu - h^\sigma_\nu) \ell^\sigma_{;\beta} h^\beta_\mu = \\
 &= \bar{B}^\mu_\nu \bar{B}^\nu_\mu + h^\mu_\rho \ell^\rho_{;\tau} (\delta^\tau_\nu - h^\tau_\nu) (\delta^\sigma_\nu - h^\sigma_\nu) \ell^\sigma_{;\beta} h^\beta_\mu, \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

где $\bar{B}^\mu_\nu$ – поперечная проекция величины B^μ_ν . Используя определение (3), для третьего слагаемого в правой части (A.1) имеем

$$h^\beta_\rho R^\rho_{\lambda\beta\tau} \ell^\lambda \ell^\tau = R_{\lambda\tau} \ell^\lambda \ell^\tau - (\mathbf{n} \cdot \ell)^{-1} [n_\rho \ell^\beta R^\rho_{\lambda\beta\tau} \ell^\lambda \ell^\tau + \ell_\rho n^\beta R^\rho_{\lambda\beta\tau} \ell^\lambda \ell^\tau] = R_{\lambda\tau} \ell^\lambda \ell^\tau;$$

здесь слагаемые в квадратных скобках исчезают в силу асимметричности тензора Римана. Подставляем полученные результаты в (A.1), получаем

$$\begin{aligned}
 \dot{\Theta} &= -\bar{B}^\mu_\nu \bar{B}^\nu_\mu - R_{\lambda\tau} \ell^\lambda \ell^\tau + a^\rho_{;\rho} - (\mathbf{n} \cdot \ell)^{-1} [n_\rho a^\rho_{;\beta} \ell^\beta + \ell_\rho a^\rho_{;\beta} n^\beta] - \\
 &\quad - h^\mu_\rho \ell^\rho_{;\tau} (\delta^\tau_\nu - h^\tau_\nu) (\delta^\sigma_\nu - h^\sigma_\nu) \ell^\sigma_{;\beta} h^\beta_\mu + \dot{h}^\beta_\rho \ell^\rho_{;\beta}. \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим слагаемое $h_\rho^\mu \ell_{;\tau}^\rho (\delta_\nu^\tau - h_\nu^\tau) (\delta_\sigma^\nu - h_\sigma^\nu) \ell_{;\beta}^\sigma h_\mu^\beta$. Его можно переписать как

$$\begin{aligned} & [\delta_\rho^\mu - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (n_\rho \ell^\mu + \ell_\rho n^\mu)] [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (n_\nu \ell^\tau + \ell_\nu n^\tau)] \ell_{;\mu}^\nu \ell_{;\tau}^\rho = \\ & = \{ (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} \delta_\rho^\mu n_\nu \ell^\tau + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} \delta_\rho^\mu \ell_\nu n^\tau - \\ & - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-2} [n_\rho \ell^\mu n_\nu \ell^\tau + n_\rho \ell^\mu \ell_\nu n^\tau + \ell_\rho n^\mu n_\nu \ell^\tau + \ell_\rho n^\mu \ell_\nu n^\tau] \} \ell_{;\mu}^\nu \ell_{;\tau}^\rho = \\ & = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} \ell_{;\rho}^\nu \ell_{;\tau}^\rho n_\nu \ell^\tau + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} \ell_{;\rho}^\nu \ell_{;\tau}^\rho \ell_\nu n^\tau - \\ & - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-2} \ell_{;\mu}^\nu \ell_{;\tau}^\rho n_\rho \ell^\mu n_\nu \ell^\tau - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-2} \ell_{;\mu}^\nu \ell_{;\tau}^\rho n_\rho \ell^\mu \ell_\nu n^\tau - \\ & - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-2} \ell_{;\mu}^\nu \ell_{;\tau}^\rho \ell_\rho n^\mu n_\nu \ell^\tau - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-2} \ell_{;\mu}^\nu \ell_{;\tau}^\rho \ell_\rho n^\mu \ell_\nu n^\tau = \\ & = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} n_\nu \ell_{;\rho}^\nu a^\rho - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-2} n_\nu a^\nu n_\rho a^\rho; \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\ell_\rho \ell_{;\mu}^\rho = \frac{1}{2} (\ell^\rho \ell_\rho)_{;\mu} = 0$. С другой стороны, подставляя в последнее слагаемое в правой части (A.1) равенство

$$\dot{h}_\rho^\beta = - \left(\frac{D}{d\tau} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} \right) (\ell_\rho n^\beta + n_\rho \ell^\beta) - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (a_\rho n^\beta + \ell_\rho b^\beta + b_\rho \ell^\beta + n_\rho a^\beta), \quad (\text{A.5})$$

имеем

$$\begin{aligned} \dot{h}_\rho^\beta \ell_{;\beta}^\rho & = [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-2} (\ell_\rho n^\beta + n_\rho \ell^\beta) - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (a_\rho n^\beta + \ell_\rho b^\beta + b_\rho \ell^\beta + n_\rho a^\beta)] \ell_{;\beta}^\rho = \\ & = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-2} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}) n_\rho a^\rho - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (a_\rho a_n^\rho + b_\rho a^\rho + n_\rho \ell_{;\beta}^\rho a^\beta). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Подставим (A.4) и (A.6) в (A.3) и, наконец, получим обобщенное уравнение Рейчудхури:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} & = -\bar{B}_\nu^\mu \bar{B}_\mu^\nu - R_{\lambda\tau} \ell^\lambda \ell^\tau + a_{;\rho}^\rho - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} [n_\rho a_{;\beta}^\rho \ell^\beta + \ell_\rho a_{;\beta}^\rho n^\beta] - \\ & - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} n_\nu \ell_{;\rho}^\nu a^\rho + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-2} n_\nu a^\nu n_\rho a^\rho + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-2} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}) n_\rho a^\rho - \\ & - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (a_\rho a_n^\rho + b_\rho a^\rho + n_\rho \ell_{;\beta}^\rho a^\beta) = \\ & = -\bar{B}_\nu^\mu \bar{B}_\mu^\nu - R_{\lambda\tau} \ell^\lambda \ell^\tau + a_{;\rho}^\rho - a_{;\beta}^\rho (\delta_\rho^\beta - h_\rho^\beta) - \\ & - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} [2n_\nu \ell_{;\rho}^\nu a^\rho - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_n) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})] + \\ & + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-2} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})^2 + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Заметим, что, используя соотношения (8) и (9), мы получаем

$$\bar{B}_\nu^\mu \bar{B}_\mu^\nu = \frac{1}{2} \Theta^2 + \sigma_{\nu}^\mu \sigma_{\mu}^\nu + \omega_{\nu}^\mu \omega_{\mu}^\nu = \frac{1}{2} \Theta^2 + \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Подстановка этого равенства в (A.7) приводит к уравнению (7). Чтобы получить уравнение расширения (5), запишем разложение

$$\begin{aligned} \Theta & = h_\sigma^\rho \ell_{;\rho}^\sigma = [\delta_\sigma^\rho - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (\ell_\sigma n^\rho + n_\sigma \ell^\rho)] \ell_{;\rho}^\sigma = \\ & = \ell_{;\rho}^\rho - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} n_\sigma \ell_{;\rho}^\sigma \ell^\rho = \ell_{;\rho}^\rho - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

в котором $n_\sigma \ell_{;\rho}^\sigma \ell^\rho$ можно преобразовать как

$$n_\sigma \ell_{;\rho}^\sigma \ell^\rho = [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})_{;\rho} - \ell^\sigma n_{\sigma;\rho}] \ell^\rho = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}) - (\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{b}). \quad (\text{A.10})$$

Следовательно, при $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell} = \text{const}$ получаем $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = -\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{b}$. Кроме того, входящее расширение можно вывести с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned}\Theta_n &= h_{\sigma}^{\rho} n^{\sigma}_{;\rho} = [\delta_{\sigma}^{\rho} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (\ell_{\sigma} n^{\rho} + n_{\sigma} \ell^{\rho})] n^{\sigma}_{;\rho} = \\ &= n^{\rho}_{;\rho} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} \ell_{\sigma} n^{\sigma}_{;\rho} n^{\rho} = n^{\rho}_{;\rho} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{b}_n),\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

где $\ell_{\sigma} n^{\sigma}_{;\rho} n^{\rho}$ переписывается в виде

$$\ell_{\sigma} n^{\sigma}_{;\rho} n^{\rho} = [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})_{;\rho} - \ell_{\sigma;\rho} n^{\sigma}] n^{\rho} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})_{;\rho} n^{\rho} - (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{n}). \quad (\text{A.12})$$

Отсюда следует, что для нормированной конгруэнции мы имеем $\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{b}_n = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_n$.

Еще один важный момент, упомянутый в разделе 2, заключается в упрощении уравнения Рейчоудхури для неаффинно параметризованных конгруэнций. Для таких конгруэнций, которые на самом деле являются нормированными, требуется выполнение равенства $a^{\alpha} = \kappa \ell^{\alpha}$. Поставляя его в (A.7) и учитывая (A.8), получаем

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} &= -\frac{1}{2} \Theta^2 - \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu} + \kappa \ell^{\rho}_{;\rho} - \kappa \ell^{\rho}_{;\beta} (\delta_{\rho}^{\beta} - h_{\rho}^{\beta}) - \\ &\quad - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} \kappa [2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) + n_{\mu;\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu}] + \kappa^2.\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

Используя равенство (11), мы имеем $\kappa \ell^{\rho}_{;\rho} = \kappa \Theta + \kappa^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} &= -\frac{1}{2} \Theta^2 - \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} - \\ &\quad - R_{\mu\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu} + \kappa \Theta + \kappa^2 - \kappa \{ \Theta + \kappa - [\delta_{\rho}^{\beta} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (\ell_{\rho} n^{\beta} + n_{\rho} \ell^{\beta})] \ell^{\rho}_{;\beta} \} - \\ &\quad - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} \{ 2\kappa^2 (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}) - \kappa n_{\rho;\beta} \ell^{\rho} \ell^{\beta} \} + \kappa^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \Theta^2 - \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu} + \kappa \Theta + \kappa^2 - \\ &\quad - \kappa \{ \Theta + \kappa - \ell^{\rho}_{;\rho} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (\ell_{\rho} n^{\beta} + n_{\rho} \ell^{\beta}) \ell^{\rho}_{;\beta} \} - \\ &\quad - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} [2\kappa^2 (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell}) - \kappa (\underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}}_{=\kappa(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})})] + \kappa^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \Theta^2 - \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu} + \kappa \Theta + \kappa^2 - \\ &\quad - \kappa [(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})] - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})^{-1} [\kappa^2 (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\ell})] + \kappa^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \Theta^2 - \sigma_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu} \ell^{\mu} \ell^{\nu} + \kappa \Theta.\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Технические замечания о положительности и отрицательности компонент векторов

Желательно различать характеристики векторов $\boldsymbol{\ell}$ и $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$. Как было указано выше, чтобы вектор $\boldsymbol{\ell}$ был направлен в будущее (точнее говоря, вдоль $+z$ и $+t$), согласно формулам (22) необходимо выполнение неравенств $-2EH > 0$ и $|2EH| > |E|$. Эти условия означают, что H и E должны иметь разный знак и при этом $|H| > 1/2$. Однако третья компонента вектора $\boldsymbol{\ell}$ показывает, что H должно быть положительно, следовательно, $E < 0$. Таким образом, чтобы вектор $\boldsymbol{\ell}$ был направлен вдоль $+x$,

третья компонента должна быть положительной. Следовательно, для нее в (22) мы выбираем перед корнем знак минус.

Формулами (23) мы ввели два вспомогательных вектора, исследуем их более детально.

- Для вектора $\mathbf{n}_1$ из (23a) рассмотрим два условия: $n_1^1 > 0$ (тогда n_1^1 лежит вдоль $+\mathbf{v}$) и $|n_1^1| > |n_1^0|$ (тогда $\mathbf{n}_1$ направлен в будущее). Первое неравенство выполняется тривиально. Но при уже заданных условиях $E < 0$ и $H > 1/2$ второе неравенство для $\mathbf{n}_1$ невыполнимо. Поэтому вектор $\mathbf{n}_1$ нельзя связать с направленной в будущее конгруэнцией, заданной вектором ℓ , и мы должны отбросить вектор $\mathbf{n}_1$.

- Если рассмотреть аналогичные условия для вектора $\mathbf{n}_2$ из (23б), то они в самом деле приведут к неравенству $2\sqrt{EH}n^0 + 1 > E(1 - 2H)n^0$, которое, в силу неравенства $H > 1/2$, эквивалентно $\sqrt{2E}n^0 + 1 > n^0 E \cdot (\times)$, где значком $(\times)$ обозначена некоторая отрицательная величина. Следовательно, последнее неравенство также тривиально, и вектор $\mathbf{n}_2$ направлен в будущее. Как только это условие причинности выполнено, обратимся к требованию, чтобы вектор $\mathbf{n}_2$ был входящим и был направлен вдоль $-\mathbf{x}$. Для этого необходимо выполнение неравенства $n_2^2 < 0$ для вектора (23б), что дает $\sqrt{H}n^0 + \sqrt{n^0/E} > 0$. Как уже упоминалось, величины n^0 и E должны иметь одинаковый знак (т.е. $n^0 < 0$, и мы для удобства считаем эту компоненту постоянной). Учитывая нижний предел для H , сводим последнюю оценку к $En^0 < 2$. При этом условии мы можем рассматривать вектор $\mathbf{n}_2$ как направленную в будущее конгруэнцию, входящую по направлению $-\mathbf{x}$.

Список литературы

- [1] A. Einstein, “Zum gegenwärtigen Stande des Gravitationsproblems”, *Phys. Z.*, **14** (1913), 1249–1262.
- [2] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, Мир, М., 1977.
- [3] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott et. al [LIGO Scientific Collab. and Virgo Collab.], “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger”, *Phys. Rev. Lett.*, **116**:6 (2016), 06110, 16 pp.
- [4] L. Ryder, *Introduction to General Relativity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
- [5] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
- [6] H. W. Brinkmann, “Einstein spaces which are mapped conformally on each other”, *Math. Ann.*, **94**:1 (1925), 119–145.
- [7] O. R. Baldwin, G. B. Jeffery, “The relativity theory of plane waves”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **111**:757 (1926), 95–104.
- [8] J. Ehlers, W. Kundt, “Exact solutions of the gravitational field equations”, *The Theory of Gravitation*, ed. L. Witten, John Wiley and Sons, New York, London, 1962, 49–101.
- [9] H. Stephani, D. Krame, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [10] J. W. van Holten, “Gravitational waves and black holes”, *Fortschr. Phys.*, **45**:6 (1997), 439–516.
- [11] G. S. Hall, *Symmetries and Curvature Structure in General Relativity*, World Scientific Lecture Notes in Physics, **46**, World Sci., Singapore, 2004.
- [12] J. L. Flores, M. Sánchez, “On the geometry of pp-wave type spacetimes”, *Analytical and Numerical Approaches to Mathematical Relativity* (Bad Honnef, Germany, March 1–5, 2004), Lecture Notes in Physics, **692**, eds. J. Frauendiener, D. J. W. Giulini, V. Perlick, Springer, Berlin, 2006, 79–98.

- [13] M. Gürses, M. Halil, “pp-waves in the generalized Einstein theories”, *Phys. Lett. A*, **68**:2 (1978), 182–184.
- [14] A. Bayka, “pp-waves in modified gravity”, *Turk. J. Phys.*, **40** (2016), 77–111, arXiv: 1510.00522.
- [15] H.-J. Schmidt, “A two-dimensional representation of four-dimensional gravitational waves”, *Internat. J. Modern Phys. D*, **7**:2 (1998), 215–223.
- [16] V. Daftardar-Gejji, “On conformally related pp-waves”, *Pramana*, **56**:5 (2001), 591–596.
- [17] A. J. Keane, B. O. J. Tuppe, “Conformal symmetry classes for pp-wave spacetimes”, *Class. Quantum Grav.*, **21**:8 (2004), 2037–2064.
- [18] H. Singh, “Generalised Penrose limits and pp-waves”, *Phys. Lett. B*, **583**:3–4 (2004), 315–323.
- [19] J. D. Steele, *On generalised p.p. waves*, 2010, <https://www.scribd.com/document/78988658/J-D-Steele-On-Generalised-p-p-waves>
- [20] B. Cropp, M. Visser, “Polarization modes for strong-field gravitational waves”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **314**:1 (2011), 012073, 4 pp.
- [21] R. Milson, D. McNutt, A. Coley, “Invariant classification of vacuum pp-waves”, *J. Math. Phys.*, **54**:2 (2013), 022502, 29 pp.
- [22] R. Cianci, L. Fabbri, S. Vignolo, “Exact solutions for Weyl fermions with gravity”, *Eur. Phys. J. C*, **75**:10 (2015), 478, 10 pp.
- [23] E. Poisson, *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
- [24] V. Faraoni, *Cosmological and Black Hole Apparent Horizons*, Springer, Cham, 2015.
- [25] S. Kar, S. Sengupta, “The Raychaudhuri equations: A brief review”, *Pramana*, **69**:1 (2007), 49–76.
- [26] M. Fathi, M. Mohseni, “Gravitational collapse in repulsive $R+\mu^4/R$ gravity”, *Eur. Phys. J. Plus*, **131**:10 (2016), 360, 20 pp.
- [27] R. Penrose, “Gravitational collapse and space-time singularities”, *Phys. Rev. Lett.*, **14**:3 (1965), 57–59.
- [28] S. W. Hawking, “Occurrence of singularities in open Universes”, *Phys. Rev. Lett.*, **15**:17 (1965), 689–690.
- [29] S. W. Hawking, “Singularities in the Universe”, *Phys. Rev. Lett.*, **17**:8 (1966), 444–445.
- [30] R. Penrose, “Gravitational collapse: the role of general relativity”, *Gen. Relat. Grav.*, **34**:7 (2002), 1141–1165.

Поступила в редакцию 31.08.2017