Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Миссаров, Критические явления в фермионной иерархической модели,
ТМФ, 1998, том 117, номер 3, 471–488

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf946>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 18:21:01

КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ФЕРМИОННОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Обсуждаются некоторые результаты о динамике преобразования ренормализационной группы в пространстве констант связи фермионной иерархической модели. Критическое поведение в данной модели интерпретируется в терминах сложного поведения грасмановозначной плотности распределения среднего спина с подходящей нормировкой. Определяются и вычисляются некоторые критические индексы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] мы начали исследование иерархической фермионной модели методами ренормализационной группы (РГ). В частности, было показано, что преобразование РГ Каданова–Вильсона сводится к некоторому рациональному преобразованию в плоскости констант связи, описаны неподвижные точки РГ-преобразования, устойчивые инвариантные кривые, проходящие через эти точки, а также исследована глобальная динамика РГ в некоторых областях плоскости констант связи.

В данной работе мы дополняем результаты о динамике РГ-преобразований и даем описание критических явлений в этой модели.

Напомним основные определения. Иерархическая решетка задана как множество натуральных чисел N с иерархическим расстоянием $d(i, j)$, $i, j \in N$, где $d(i, j) = n^{s(i, j)}$, если $i \neq j$; $s(i, j) = \min\{s: \text{существует } k \text{ такое, что } i \in V_{k, s}, j \in V_{k, s}\}$; $V_{k, s} = \{j: j \in N, (k-1)n^s < j \leq kn^s\}$; n – некоторое фиксированное натуральное число. В узлах этой решетки находятся четырехкомпонентные спины $\psi^*(i) = (\bar{\psi}_1(i), \psi_1(i), \bar{\psi}_2(i), \psi_2(i))$, компоненты которых являются образующими алгебры Грассмана.

Напомним (см. [1]), что мы рассматриваем фермионное поле в объеме $\Lambda_N \equiv V_{1, N}$ с гиббсовским состоянием $\rho_N(r, g)$ (зависящим также от вещественного параметра α) на грасмановой подалгебре A_N , порожденной $4 \cdot n^N$ образующими $(\psi_1(i), \bar{\psi}_1(i), \psi_2(i), \bar{\psi}_2(i))$, $i \in \Lambda_N$.

Если $F(\psi^*) \in A_N$, то

$$\rho_N(r, g)(F(\psi^*)) = Z_N^{-1} \int F(\psi^*) \exp\{-H_N(\psi^*; r, g)\} d\psi^*, \quad (1)$$

*Казанский государственный университет, Казань, Россия

где

$$d\psi^* = \prod_{i \in \Lambda_N} d\psi_1(i) d\bar{\psi}_1(i) d\psi_2(i) d\bar{\psi}_2(i),$$

$$H_N(\psi^*; r, g) = H_{0,N}(\psi^*, \alpha) + \sum_{i \in \Lambda_N} L(\psi^*(i); r, g), \quad (2)$$

$$L(\psi^*(i); r, g) = r(\bar{\psi}_1(i)\psi_1(i) + \bar{\psi}_2(i)\psi_2(i)) + g\bar{\psi}_1(i)\psi_1(i)\bar{\psi}_2(i)\psi_2(i), \quad (3)$$

$$H_{0,N}(\psi^*; \alpha) = \sum_{i,j \in \Lambda_N} d_{0,N}(i, j)(\bar{\psi}_1(i)\psi_1(j) + \bar{\psi}_2(i)\psi_2(j)), \quad (4)$$

$$d_{0,N}(i, j) = \frac{1 - n^{\alpha-1}}{1 - n^{-\alpha}} d^{-\alpha}(i, j) - \frac{(1 - n^{\alpha-1})^2 n^{-\alpha(N+1)}}{(1 - n^{-\alpha})(1 - n^{-1})}, \quad i \neq j,$$

$$d_{0,N}(i, i) = \frac{1 - n^{\alpha-2}}{1 - n^{-1}} - \frac{(1 - n^{\alpha-1})^2}{(1 - n^{-\alpha})(1 - n^{-1})} n^{-\alpha(N+1)}, \quad (5)$$

$$Z_N(r, g) = \int \exp\{-H_N(\psi^*; r, g)\} d\psi^*.$$

Интегрирование ведется по обычным правилам суперанализа [4]. РГ-преобразование определяется по формуле

$$r(\alpha)\psi^*(i) = n^{-\alpha/2} \sum_{j \in V_{i,1}} \psi^*(j).$$

В [2] было показано, что

$$\rho_N(r, g)(F(r(\alpha)\psi^*)) = \rho_{N-1}(r', g')(F(\psi^*)).$$

В пространстве констант связи (r, g) РГ-преобразование действует как рациональное отображение

$$r' = n^{\alpha-1} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - \frac{g}{n}} (r+1) - 1 \right),$$

$$g' = n^{2\alpha-3} \left(\frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - \frac{g}{n}} \right)^2 g, \quad (6)$$

которое имеет нетривиальные ветви неподвижных точек $(r_{\pm}, g_{\pm})$, где

$$r_{\pm} = \frac{\pm\sqrt{n} - n^{\alpha-1}}{1 \mp \sqrt{n}}, \quad g_{\pm} = g_{\pm}(r_{\pm}), \quad (7)$$

$$g_{\pm}(r) = \frac{r(1+r)^2}{1+r \pm \frac{1}{\sqrt{n}}}. \quad (8)$$

В работе [3] было показано, что при $\alpha \geq 3/2$ компонента связности устойчивой РГ-инвариантной кривой, проходящей через плюсовую (минусовую) неподвижную точку (НТ) задается графиком гладкой, монотонно возрастающей (убывающей) функции $g = h_+(r)$, $r > 0$ ($g = h_-(r)$, $r < -1$). При этом $h_+(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и $h_-(r) \rightarrow 0$ при

$r \rightarrow -1$, $h_+(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$ и $h_-(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow -\infty$. При $1 < \alpha \leq 3/2$ кривая $g = h_+(r)$ уже является устойчивой РГ-инвариантной кривой для нулевой НТ ($r = 0$, $g = 0$).

Кривая $g = h_+(r)$ лежит в области

$$G_1 = \left\{ (r, g): 0 \leq r \leq r_+, \max\{0, g_4(r), g_1^+(r)\} \leq g \leq g_+(r) \right\} \cup \\ \cup \left\{ (r, g): \max\{0, r_+\} \leq r, g_+(r) \leq g \leq g_1^+(r) \right\},$$

кривая $g = h_-(r)$ — в области

$$G_2 = \left\{ (r, g): r \leq r_-, g_1^-(r) \leq g \leq g_-(r) \right\} \cup \\ \cup \left\{ (r, g): r_- < r < -1, g_-(r) < g < g_1^-(r) \right\},$$

здесь

$$g_1^\pm(r) = \frac{(r+1)(n \mp \sqrt{n}) - n + n^{2-\alpha}}{(r+1)(n \mp \sqrt{n}) - 1 + n^{1-\alpha}} (r+1)^2, \\ g_4(r) = \frac{r(1 - n^{\alpha-2})}{r(1 - n^{\alpha-2}) + 1 - n^{-1}} (r+1)^2. \quad (9)$$

Обозначим кривые $g = h_+(r)$, $0 \leq r < \infty$, и $g = h_-(r)$, $-\infty < r < -1$, через γ_1 и γ_2 , соответственно. В работе [2] было показано, что области верхней полуплоскости, лежащие справа от γ_1 и слева от γ_2 , являются РГ-инвариантными и найдена асимптотика итераций РГ-преобразования в этих областях. Обозначим эти области через Ω_1 и Ω_2 , соответственно.

В разделе 2 мы исследуем вопрос о динамике РГ в области между кривыми γ_1 и γ_2 при $2 > \alpha > 1$. Будет доказано, что при $r \geq -(n^\alpha - n^{\alpha-1})(n^\alpha - 1)^{-1}$ и достаточно больших g точка (r, g) за конечное число РГ-итераций попадает в область Ω_2 , а при $r < -(n^\alpha - n^{\alpha-1})(n^\alpha - 1)^{-1}$ и достаточно больших g — в область Ω_1 . Компьютерные эксперименты показывают, что в области между γ_1 и γ_2 располагаются все остальные части устойчивых инвариантных кривых для плюсовой и минусовой НТ, а также устойчивая инвариантная кривая для бесконечно удаленной НТ. Все эти кривые расслаивают область между γ_1 и γ_2 на бесконечное число связных областей, точки из которых при РГ-итерациях попадают либо в область Ω_1 , либо в область Ω_2 , причем все эти области чередуются между собой фрактальным образом.

В разделе 3 результаты о глобальной динамике РГ используются для описания критических явлений в данной модели. Нетривиальность критических явлений будет следовать из анализа предельного поведения грассмановозначной плотности распределения суммарного спина с подходящей нормировкой

$$q_N^{(a)}(x^*; r, g) = \rho(r, g) \delta \left(\frac{1}{n^{aN}} \sum_{i \in \Lambda_N} \psi^*(i) - x^* \right), \quad (10)$$

где $\rho(r, g)$ — термодинамический предел состояний $\rho_M(r, g)$ при $M \rightarrow \infty$, δ — грассманова дельта-функция, $x^* = (x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)$, где $x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2$ — грассмановы переменные.

Показано, что если $R^{N_0}(\alpha)(r, g)$ попадает в Ω_1 или Ω_2 при некотором $N_0 \geq 0$, где $R(\alpha)(r, g) = (r', g')$ задается формулами (6), то при нормировке $a = 1/2$ имеем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q_N^{1/2}(x^*; r, g) = \frac{1}{c_1^2(r, g)} \exp\{-c_1(r, g)(\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2)\}.$$

Здесь $c_1(r, g)$ определяется как предел

$$c_1^2(r, g) = \lim_{N \rightarrow \infty} r^{(N)} n^{-N(\alpha-1)},$$

где $r^{(N)}$ определяется соотношением $(r^{(N)}, g^{(N)}) = R^N(\alpha)(r, g)$. Существование константы $c_1(r, g)$ было доказано в работе [2].

Другими словами, предел задается “гауссовским” распределением, причем $c_1(r, g) > 0$ в случае, если (r, g) лежит в зоне притяжения Ω_1 , и $c_1(r, g) < 0$, если (r, g) лежит в зоне притяжения Ω_2 .

Если мы рассмотрим луч (r, g) , $g > 0$, то, например, при фиксированном $r > 0$ и при возрастающем g мы наблюдаем перестройку предельной плотности. При достаточно малых и достаточно больших g предельная плотность является гауссовской (но с разным знаком у константы связи). Существует также область значений g , в которой предельная плотность бесконечно много раз (но на множестве меры 0) становится негауссовской и на множестве полной меры является гауссовской, бесконечно много раз чередуя знак константы связи.

Если же (r, g) лежит на инвариантной кривой γ_1 (γ_2), то нужна нестандартная нормировка $a = \alpha/2$, и в этом случае предельное поведение $q_N^{\alpha/2}(x^*; r, g)$ является негауссовским и задается плотностью, соответствующей плюсовой (или минусовой) НТ.

Поведение $c_1(r, g)$ имеет особенность при $g \rightarrow g_{\text{кр}}(r)$, где $(r, g_{\text{кр}}(r))$ – точка пересечения полупрямой (r, g) , $g > 0$, с инвариантной кривой γ_1 (или γ_2), что позволяет определить еще один критический индекс в этой модели.

2. ДИНАМИКА РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ В ОБЛАСТИ МЕЖДУ КРИВЫМИ γ_1 И γ_2

В дальнейшем нам будет удобно наряду с переменными r и g использовать обозначения

$$\beta = \beta(r, g) = \frac{g}{(r+1)^2}$$

и

$$\sigma = \sigma(r, g) = \frac{1 - \beta(r, g)}{1 - \frac{\beta(r, g)}{n}}.$$

Мы также будем использовать обозначения $\lambda_1 = n^{\alpha-1}$, $\lambda_2 = n^{2\alpha-3}$. Заметим, что λ_1, λ_2 являются собственными числами дифференциала отображения $R(\alpha)$ в нуле.

В работе [3] было доказано следующее утверждение (лемма 3): парабола $g(r) = \beta(r+1)^2$, $\beta = \text{const}$, за одну итерацию РГ переходит в параболу $g'(r') = \beta(r' + \lambda_1)^2/n$, где r' линейно зависит от r , $r' = kr + b$, где $k > 0$ при $\beta < 1$ и $\beta > n$, $k < 0$ при $1 < \beta < n$. Точки пересечения парабол $g(r)$ и $g'(r)$ лежат на прямых $r = r_{\pm}$.

Отсюда следует, что любая точка (r, g) такая, что $r > -1$, $n > \beta(r, g) \geq 1$, за одну итерацию РГ переходит в область $g < (r + \lambda_1)^2$, $r \leq -\lambda_1$. Из теоремы об инвариантных кривых видно, что она попадает в область Ω_2 .

Изучим теперь вопрос о том, куда переходят точки прямой $r = r_0$. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Прямая $r = r_0$ за одну итерацию РГ переходит в кривую*

$$g = \frac{r - \lambda_1 r_0}{r - \lambda_1 n r_0 - \lambda_1(n-1)}(r + \lambda_1)^2. \quad (11)$$

При $r_0 > -1$ ($r_0 < -1$) точки (r_0, g) такие, что $\beta(r_0, g) > n$ отображаются на ту часть кривой (11), для которой $r > \lambda_1 n r_0 + \lambda_1(n-1)$ ($r < \lambda_1 n r_0 + \lambda_1(n-1)$, соответственно). Кроме того, при $g \rightarrow +\infty$

$$r'(r_0, g) \rightarrow \lambda_1 n r_0 + \lambda_1(n-1), \quad g'(r_0, g) \rightarrow \infty.$$

В дополнение к этой лемме заметим, что прямая $r = -1$ переходит в прямую $r = -\lambda_1$ с сохранением всех остальных утверждений леммы 1.

Из этой леммы видно, что при

$$r \geq -\frac{\lambda_1(n-1)}{\lambda_1 n - 1} \quad (12)$$

точки (r, g) , $\beta(r, g) > n$ уходят направо по r : $r'(r, g) > r$.

Также имеет место лемма 2.

ЛЕММА 2. *Если r удовлетворяет условию (12) и $\beta(r, g) > n$, то за конечное число итераций РГ точка (r, g) попадает в область Ω_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся соотношением

$$\beta' = \beta(r', g') = \frac{\beta}{n} \left(1 - \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 \sigma(r+1)} \right)^{-2}. \quad (13)$$

При $\beta > n$ имеем $\sigma = (1 - \beta)(1 - \beta/n)^{-1} > n$, а из (12) следует

$$1 > \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 \sigma(r+1)},$$

так что $\beta' > 1$. Кроме того, из (13) вытекает, что при достаточно больших r

$$\beta' < \frac{3\beta}{2n}. \quad (14)$$

Так как при $\beta > n$ имеем

$$r' = \lambda_1 \left(\frac{1 - \beta}{1 - \frac{\beta}{n}}(r+1) - 1 \right) > \lambda_1(n(r+1) - 1),$$

то при некотором k либо точка $(r^{(k)}, g^{(k)})$ попадает в область

$$(r+1)^2 < g < n(r+1)^2, \quad r > -1, \quad (15)$$

а оттуда в область Ω_2 , либо она попадает в зону действия неравенства (14) и, следовательно, через некоторое дополнительное число итераций попадает в область (15).

Рассмотрим теперь случай, когда $r < -\lambda_1(n-1)(\lambda_1 n - 1)^{-1}$. В дальнейшем нам понадобится семейство кривых $g = f(r; a)$, где

$$f(r; a) = \frac{r}{r-a}(r+1)^2. \quad (16)$$

В частности, при $a = -(1 + n^{-1/2})$ получаем $f(r; a) = g_+(r)$.

Непосредственным вычислением проверяется, что РГ-образ кривой $g = f(r; a)$ есть кривая $g = f'(r; a)$, где

$$f'(r; a) = \frac{r(r + \lambda_1)^2}{r - \lambda_1 n a - \lambda_1(n-1)}. \quad (17)$$

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3. Пусть $r < -(1 + n^{-1/2})$, $g \geq g_+(r)$. За конечное число итераций точка (r, g) попадает в область Ω_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, во-первых, что любая точка, удовлетворяющая условиям леммы, лежит на некоторой кривой $g = f(r; a)$, $a < -(1 + n^{-1/2})$. Обозначим через $r_1(a)$ абсциссу точки пересечения кривой $g = f(r; a)$ с параболой $g = n(r+1)^2$:

$$r_1(a) = \frac{an}{n-1}. \quad (18)$$

Из соотношения

$$r' = -\lambda_1(1 + r_1(a)) \frac{r}{r - r_1(a)} \quad (19)$$

видно, что участок кривой $g = f(r; a)$, $r < r_1(a)$, при РГ-преобразовании отобразится на участок кривой $g = f'(r; a)$, $r > r_2(a)$, где $r_2(a) = -\lambda_1(1 + r_1(a))$.

Заметим, что при $r > 0$ выполнено $f'(r; a_1) > f'(r; a_2) > 0$, если $a_2 < a_1 < 1/n - 1$, и что $r_2(a_2) > r_2(a_1)$ при $a_1 > a_2$. Поэтому, если мы докажем, что участок кривой

$$g = f'(r; -(1 + n^{-1/2})), \quad r > r_2(-(1 + n^{-1/2}))$$

лежит справа от кривой γ_1 , то то же самое будет верно и для участка кривой $g = f'(r; a)$, $r > r_2(a)$, если $a < -(1 + n^{-1/2})$.

Поскольку $f(r; -(1 + n^{-1/2})) = g_+(r)$, то

$$f'(r; -(1 + n^{-1/2})) = g'_+(r) = \frac{r}{r + \lambda_1(1 + n^{1/2})}(r + \lambda_1)^2.$$

Мы имеем следующее разложение:

$$g_+(r) - g'_+(r) = \frac{(n^{1/2} - 1)(\lambda_1 + n^{-1/2})}{(r + 1 + n^{-1/2})(r + \lambda_1(1 + n^{1/2}))} \times \\ \times \left(r + \frac{n^{1/2} - \lambda_1}{n^{1/2} - 1} \right) \left(r + (1 + n^{-1/2}) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + n^{-1/2}} \right). \quad (20)$$

Поскольку

$$r_2(-(1 + n^{-1/2})) = \lambda_1(n^{-1/2} - 1)^{-1} > r_+(\alpha) = (\lambda_1 - n^{1/2})(n^{1/2} - 1)^{-1},$$

то из (20) видно, что при $r > r_2(-(1 + n^{-1/2}))$ имеет место $g_+(r) > g'_+(r)$, а это означает, что $g'_+(r)$ лежит справа от γ_1 .

Таким образом, мы доказали, что любая точка из области

$$A_1 = \{(r, g): r < r_1(-(1 + n^{-1/2})), f(r; -(1 + n^{-1/2})) < g < n(r + 1)^2\}$$

за одну РГ-итерацию попадет в область Ω_1 .

Рассмотрим теперь точки, лежащие в области

$$A_2 = \{(r, g): r < -(1 + n^{-1/2}), g > \max(n(r + 1)^2, f(r; -(1 + n^{-1/2})))\}.$$

Легко проверить, что РГ-итерация отображает участок кривой $g = f(r; a)$, $r_1(a) < r < a$ на участок кривой $g = f'(r; a)$, $r < \lambda_1(na + n - 1)$, причем $f'(r; a) > f(r; a)$ при $r < \lambda_1(na + n - 1)$. Из этого факта и формулы (13) следует, что за конечное число РГ-итераций любая точка из области A_2 попадет в область A_1 .

Необходимо сделать следующее замечание. Как видно из формул, задающих преобразование РГ, оно не определено для точек параболы $g = n(r + 1)^2$. Это ограничение можно преодолеть, если определить действие РГ в пространстве коэффициентов разложения грассмановозначной плотности распределения единичного спина. Произвольная ненормированная плотность спина в нашей модели задается в виде

$$P(\bar{\psi}_1, \psi_1, \bar{\psi}_2, \psi_2) = c_0 + c_1(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + c_2(\bar{\psi}_1\psi_1\bar{\psi}_2\psi_2),$$

где $\bar{\psi}_1, \psi_1, \bar{\psi}_2, \psi_2$ — образующие алгебры Грассмана, задающие спин в фиксированном узле решетки, и (c_0, c_1, c_2) предполагается 3-мерным вещественным вектором. В частности, плотности

$$\exp\{-r(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) - g\bar{\psi}_1\psi_1\bar{\psi}_2\psi_2\}$$

соответствует набор коэффициентов $(1, -r, r^2 - g)$, а δ -функции $\delta(\psi) = \bar{\psi}_1\psi_1\bar{\psi}_2\psi_2$ — набор $(0, 0, 1)$. Если мы будем описывать плотность как точку 2-мерного проективного пространства (c_0, c_1, c_2) , то можно показать, что действие РГ в пространстве констант (c_0, c_1, c_2) задается следующим образом:

$$c'_0 = (c_1 - c_0)^2 - \frac{1}{n}(c_1^2 - c_0c_2), \\ c'_1 = \lambda_1 \left((c_1 - c_0)(c_2 - c_1) - \frac{1}{n}(c_1^2 - c_0c_2) \right), \\ c'_2 = \lambda_1^2 \left((c_2 - c_1)^2 - \frac{1}{n}(c_1^2 - c_0c_2) \right). \quad (21)$$

Как преобразование P^2 в себя это отображение определено всюду, кроме точки $(1, 1, 1)$. Параболе $g = n(r + 1)^2$ в новых координатах отвечает кривая $(1, -r, r^2 - n(r + 1)^2)$, $r \neq -1$, которая за одну итерацию преобразования (21) переходит в кривую

$$\left(0, 1, \lambda_1(n-1) \left(r + \frac{n+1}{n-1}\right)\right), \quad (22)$$

которая не описывается в координатах (r, g) . Однако еще за одну итерацию преобразования (21) кривая (22) переходит в кривую

$$\left(1, \lambda_1 \frac{t(r) - 1 - n^{-1}}{1 - n^{-1}}, \lambda_1^2 \frac{(t(r) - 1)^2 - n^{-1}}{1 - n^{-1}}\right),$$

где $t(r) = \lambda_1(n-1)(r + (n+1)(n-1)^{-1})$. Таким образом, возвращаясь к координатам (r, g) , мы видим, что две итерации РГ-преобразования переводят параболу $g = n(r+1)^2$ в параболу

$$\begin{aligned} g^{(2)} &= \frac{1}{n}(r^{(2)} + \lambda_1)^2, \\ r^{(2)} &= -\lambda_1^2 nr - \lambda_1(\lambda_1 n - 1) \frac{n+1}{n-1}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при таком определении РГ-преобразования часть параболы $g = n(r+1)^2$, $r < r_1(-(1 + n^{-1/2}))$, за две итерации перейдет в область Ω_1 .

Таким образом, лемму 3 можно считать полностью доказанной.

Что касается области $-(1 + n^{-1/2}) < r < -\lambda_1(n-1)(\lambda_1 n - 1)^{-1}$, то мы ограничимся следующей леммой.

ЛЕММА 4. Если $-(1 + n^{-1/2}) \leq r < -\lambda_1(n-1)(\lambda_1 n - 1)^{-1}$ и g достаточно велико, то за конечное число РГ-итераций точка (r, g) попадет в область Ω_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s(t) = (r(t), g(t))$ — непрерывная кривая, параметризованная параметром t , $0 < t < b$, асимптотически стремящаяся к некоторой вертикальной прямой $r = r_0$: $r(t) \rightarrow r_0$, $g(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. Предположим также, что кривая $s(t)$ лежит в области $g > n(r+1)^2$. Тогда РГ-образ этой кривой $f'(t) = (r'(t), g'(t))$ также является непрерывной кривой от t , асимптотически стремящейся к прямой $r = r_1(0)$: $r'(t) \rightarrow r_1$, $g'(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$. Здесь $r_1 = \lambda_1(n(r_0 + 1) - 1)$. Можно выбрать $b_1 < b$ так, чтобы при $0 < t < b_1$ кривая $f'(t)$ лежала в области $g > n(r+1)^2$. Пусть $r_k = \lambda_1(n(r_{k-1} + 1) - 1)$. Если $r_0 < -\lambda_1(n-1)(\lambda_1 n - 1)^{-1}$, то легко видеть, что за конечное число шагов k величина r_k окажется меньше $-(1 + n^{-1/2})$. Взяв в качестве начальной кривой вертикальную прямую $r = r_0$ и применяя вышеприведенное рассуждение несколько раз, мы получим утверждение леммы.

Мы использовали компьютер для исследования динамики РГ в тех областях верхней полуплоскости, на которые не распространяются утверждения вышеприведенных лемм. Приведем некоторые результаты.

Рис. 1

Из точки $(-1, 0)$ выходит кривая, асимптотически стремящаяся к прямой $r_0 = -\lambda_1(n-1)(\lambda_1 n - 1)^{-1}$, которую, по-видимому, также можно считать графиком гладкой монотонно возрастающей функции $g = h(r)$, $r_0 < -\lambda_1(n-1)(\lambda_1 n - 1)^{-1}$. Эта кривая является частью устойчивой инвариантной кривой для бесконечно удаленной НТ (в проективных координатах она задается набором $(0, 0, 1)$). Обозначим эту кривую γ_∞ . Пусть

$$\tilde{\gamma}_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^{-n} \gamma_i, \quad i = 1, 2, \infty,$$

т.е. $\tilde{\gamma}_1$ — вся устойчивая инвариантная кривая для плюсовой НТ, $\tilde{\gamma}_2$ — для минусовой НТ, $\tilde{\gamma}_\infty$ — для бесконечно удаленной НТ.

В проективных координатах каждая кривая γ_i является гладкой связной кривой, бесконечно много раз проходящей через точки $(-1, 0)$ и ее РГ-прообразы $(-\lambda_1^{-k}, 0)$, $k = 1, 2, \dots$.

В координатах (r, g) эти кривые несвязны и являются объединением своих связных частей, каждая из которых проходит только через одну из точек вида $(-\lambda_1^{-k}, 0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Отметим, что вся группа РГ-преобразований не определена в точке $(-1, 0)$ и ее прообразах и поэтому их надо, вообще говоря, выколоть из кривых $\tilde{\gamma}_i$, $i = 1, 2, \infty$.

Связность кривых $\tilde{\gamma}_i$ можно увидеть в проективных координатах: соединение связных частей между собой происходит на множестве точек вида $(0, c_1, c_2)$, которое не изображается в координатах (r, g) . По-видимому, почти все точки верхней полуплоскости в области между кривыми γ_1 и γ_2 , не лежащие на кривых $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_\infty$, за конечное число итераций РГ попадают в области Ω_1 или Ω_2 . Рассмотрим вертикальную прямую

Рис. 2

$r = r_0, g > 0$. Если $-\lambda_1(n-1)(\lambda_1 n - 1)^{-1} < r_0 < c_1$, $c_1 < -\lambda_1^{-1}$, то вертикальная прямая пересечет кривую γ_∞ в некоторой точке (r_0, g_0) и разобьется на два интервала:

$$I_1 = \{r = r_0, 0 < g < g_0\} \quad \text{и} \quad I_2 = \{r = r_0, g_0 < g < \infty\}.$$

Все точки из I_1 за конечное число итераций РГ попадают в область Ω_2 , а все точки из I_2 — в область Ω_1 . Для всех остальных значений r_0 луч $r = r_0, g > 0$ бесконечно много раз пересекает кривые $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_\infty$. Если $r_0 > 0$, то луч $(r = r_0, g > 0)$ разбивается на интервалы $I_1 = \{r = r_0, 0 < g < g_0(r_0)\}$, $I_2 = \{r = r_0, g_1(r_0) < g < \infty\}$ и бесконечное множество интервалов, фрактальным образом разбивающих отрезок $(r = r_0, g_0(r_0) < g < g_1(r_0))$. Точки из I_1 лежат в Ω_1 , точки из I_2 за конечное число РГ-итераций попадают в Ω_2 , а поведение РГ в остальных интервалах чередуется. При $r_0 < -1$ картина аналогичная с той лишь разницей, что точки из I_1 лежат в Ω_2 , а точки из I_2 за конечное число РГ-итераций попадают в Ω_1 . Такая же картина имеет место и при $c_1 < r_0 < 0$, но при этом как точки из I_1 , так и точки из I_2 попадают в область Ω_2 за конечное число РГ-итераций.

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим рис. 1 и 2. На рис. 1 изображена верхняя полуплоскость $g > 0$. Часть полуплоскости окрашена черным цветом, часть — белым в соответствии со следующим правилом: черные точки при итерациях РГ уходят налево в область Ω_2 , белые точки при итерациях РГ уходят направо в область Ω_1 . Кругами на рис. 1 обведены плюсовая и минусовая НТ. Можно предположить, что почти все точки, лежащие на границе черной и белой областей, лежат на инвариантных кривых $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_\infty$. Достаточно малая окрестность точки, лежащей на инвариантной кривой, де-

лится этой кривой на две части. При этом различные инвариантные кривые характеризуются следующим образом. Для кривой $\tilde{\gamma}_1$ одна часть окрестности белая (состоит из белых точек), другая смешанная (состоит из белых и черных точек). Для кривой $\tilde{\gamma}_\infty$ одна часть окрестности белая, другая черная. Для кривой $\tilde{\gamma}_2$ одна часть окрестности черная, другая смешанная.

Участки кривых $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_\infty$ видны на рисунке. Примеры участков кривой $\tilde{\gamma}_2$ не видны, но их существование проявляется при многократном увеличении изображения. На рис. 2 дано увеличенное изображение квадрата, выделенного на рис. 1. Центр кружка на рис. 2 изображает минусовую НТ, которая как раз лежит на кривой $\tilde{\gamma}_2$. В изображенном примере параметр РГ $\alpha = 1.7$, $n = 2$.

3. КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Картину критических явлений в нашей модели проще всего описать, исследуя предельное поведение грассмановозначной “плотности” распределения нормированного подходящим образом суммарного спина в объеме Λ_N , усредненного по состоянию ρ_N .

Обозначим через $\tilde{q}_N^{(a)}(x^*; r, g)$ “плотность” распределения нормированного суммарного спина

$$\psi_{N,a}^* = \frac{1}{n^{aN}} \sum_{i \in \Lambda_N} \psi^*(i)$$

для поля ψ^* , заданного состоянием $\rho_N(r, g)$:

$$\tilde{q}_N^{(a)}(x^*; r, g) = \rho_N(r, g) (\delta(\psi_{N,a}^* - x^*)),$$

$x^* = (x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2)$ (напомним, что δ -функция в анализе с антикоммутирующими переменными имеет представление $\delta(\psi^*) = \psi_1 \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_2$).

Из результатов, приведенных в работы [1], получаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{q}_N^a(x^*; r, g) &= \rho_N(r, g) \left(\delta \left(n^{\left(\frac{\alpha}{2}-a\right)N} n^{-\frac{\alpha}{2}N} \sum_{i \in \Lambda_N} \psi^*(i) - x^* \right) \right) = \\ &= n^{4\left(\frac{\alpha}{2}-a\right)N} \tilde{q}_0^{(a)} \left(n^{\left(a-\frac{\alpha}{2}\right)N} x^*; r^{(N)}, g^{(N)} \right), \end{aligned}$$

где $(r^{(N)}, g^{(N)}) = R^N(\alpha)(r, g)$ — N -я итерация преобразования РГ $R(\alpha)$: $R(\alpha)(r, g) = (r', g')$, заданного соотношением (6).

Таким образом, мы можем вычислить $\tilde{q}_N^{(a)}(x^*; r, g)$ явно:

$$\tilde{q}_N^{(a)}(x^*; r, g) = \frac{n^{(2\alpha-4a)N}}{(r^N + c_0)^2 - g^N} \exp \left\{ -L(x^*; n^{(2a-\alpha)N} r^{(N)}, n^{(4a-2\alpha)N} g^{(N)}) \right\},$$

где (см. формулу (5))

$$c_0 = c_0(\alpha) \equiv d_{0,0}(i, i) = (1 - n^{\alpha-2})(1 - n^{-1})^{-1}.$$

Прежде чем сформулировать теорему, напомним, что из результатов теоремы 2 работы [2] следует существование констант $c_1(r, g)$, $c_2(r, g)$, $(r, g) \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ таких, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} r^{(N)} n^{-N(\alpha-1)} = c_1(r, g), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} g^{(N)} n^{-N(2\alpha-3)} = c_2(r, g). \quad (23)$$

При этом $c_1(r, g) > 0$ для $(r, g) \in \Omega_1$, $c_1(r, g) < 0$ для $(r, g) \in \Omega_2$, $c_2(r, g) = 0$ только при $g = 0$. Эти результаты справедливы для всех $\alpha > 1$. Аналогичные результаты справедливы и для нижней полуплоскости.

Если плотность распределения спина может быть записана в экспоненциальной форме как

$$p(x^*; r, g) = \frac{1}{r^2 - g} \exp\{-L(x^*; r, g)\},$$

то мы будем говорить, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p(x^*; r_m, g_m) = p(x^*; r, g),$$

если $\lim_{m \rightarrow \infty} (r_m, g_m) = (r, g)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $2 > \alpha > 1$. Если $(r^{(N_0)}, g^{(N_0)}) \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ для некоторого $N_0 \geq 0$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{q}_N^{(1/2)}(x^*; r, g) = p(x^*; c_1(r, g), 0).$$

Если $(r, g) \in \tilde{\gamma}_2$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{q}_N^{(\alpha/2)}(x^*; r, g) = p(x^*; c_0(\alpha) + r_-(\alpha), g_-(\alpha)).$$

Если $(r, g) \in \tilde{\gamma}_1$, то при $\alpha > 3/2$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{q}_N^{(\alpha/2)}(x^*; r, g) = p(x^*; c_0(\alpha) + r_+(\alpha), g_+(\alpha)),$$

а при $3/2 \geq \alpha > 1$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{q}_N^{(\alpha/2)}(x^*; r, g) = p(x^*; c_0(\alpha)).$$

Здесь $r_{\pm}(\alpha)$, $g_{\pm}(\alpha)$ задаются формулами (7), (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство первого утверждения теоремы 1 следует из асимптотик (23). Остальные утверждения – из того факта, что $\tilde{\gamma}_2$ является устойчивой инвариантной кривой для минусовой НТ, а кривая $\tilde{\gamma}_1$ – устойчивой инвариантной кривой для плюсовой НТ при $\alpha > 3/2$ и для тривиальной НТ при $1 < \alpha \leq 3/2$.

Покажем, что похожие результаты можно получить для плотности распределения суммарного спина в объеме Λ_N , вычисленной по состоянию, отвечающему термодинамическому пределу и заданному на бесконечномерной алгебре Грассмана, порожденной спинами всех вершин иерархической решетки.

Пусть, например, $(r^{(N_0)}, g^{(N_0)}) \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ для некоторого $N_0 \geq 0$. Из результатов работы [2] следует, что при $\alpha > 1$ существует термодинамический предел в нашей модели, что означает существование предела всех корреляционных функций $\rho_N(F(\psi^*))$ при

$N \rightarrow \infty$. Доказательство сводится к доказательству существования пределов одноточечных корреляционных функций

$$\begin{aligned} u_N^1(r, g) &= \rho_N(r, g) (\psi_1(i) \bar{\psi}_1(i) + \psi_2(i) \bar{\psi}_2(i)), \\ u_N^2(r, g) &= \rho_N(r, g) (-\psi_1(i) \bar{\psi}_1(i) \psi_2(i) \bar{\psi}_2(i)), \quad i \in \Lambda_N. \end{aligned}$$

Пусть

$$u_N(r, g) = \begin{pmatrix} u_N^1(r, g) \\ u_N^2(r, g) \end{pmatrix}.$$

В [2] доказано существование предела

$$u(r, g) = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(r, g).$$

Кроме того, в случае, если (r, g) при некоторой итерации попадает в Ω_1 , из результатов работы [2] следует представление

$$u(r, g) = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{i-1} A(r^{(k)}, g^{(k)}) s(r^{(i)}, g^{(i)}), \quad (24)$$

где

$$A(r, g) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{\partial r'}{\partial r} & \frac{\partial g'}{\partial r} \\ \frac{\partial r'}{\partial g} & \frac{\partial g'}{\partial g} \end{pmatrix}, \quad s(r, g) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln c(r, g)}{\partial r} \\ \frac{\partial \ln c(r, g)}{\partial g} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$c(r, g) = ((r+1)^2 - g)^{n-2} \left((r+1)^2 - \frac{g}{n} \right). \quad (26)$$

Пусть $\rho = \lim_{M \rightarrow \infty} \rho_M$. Обозначим через $q_N^{(a)}(x^*)$ плотность распределения суммарного спина $\psi_{N,a}^*$, вычисленную по состоянию ρ :

$$q_N^{(a)} = \rho(\delta(\psi_{N,a}^* - x^*)).$$

Легко получить представление

$$\begin{aligned} q_N^{(1/2)}(x^*) &= -n^{2(\alpha-1)N} u_2(r^{(N)}, g^{(N)}) - \\ &\quad - \frac{1}{2} n^{(\alpha-1)N} u_1(r^{(N)}, g^{(N)}) (\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2) + \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2. \end{aligned}$$

Таким образом, вопрос о предельном поведении плотности $q_N^{(1/2)}(x^*)$ сводится к такому же вопросу для вектора $D_N u(r^{(N)}, g^{(N)})$, где

$$D_N = \begin{pmatrix} \lambda_1^N & 0 \\ 0 & \lambda_1^{2N} \end{pmatrix}.$$

Из (24) получаем представление

$$D_N u(r^{(N)}, g^{(N)}) = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{i-1} T_N(r^{(N+k)}, g^{(N+k)}) D_N s(r^{(N+i)}, g^{(N+i)}),$$

где

$$T_N(r^{(N+k)}, g^{(N+k)}) = D_N A(r^{(N+k)}, g^{(N+k)}) D_N^{-1}.$$

Для матрицы A можно получить удобное представление

$$A(r, g) = \begin{pmatrix} \frac{2n^{\alpha-2}}{n-1} (\sigma^2 - \sigma \frac{n+3}{2} + n) & 4 \frac{n^{2\alpha-3}}{n-1} (r+1) \sigma (1-\sigma)^2 \\ -\frac{n^{\alpha-1}}{n-1} \cdot \frac{1}{r+1} \cdot (1 - \frac{\sigma}{n})^2 & -\frac{2n^{2\alpha-4}}{n-1} \sigma (\sigma^2 - \sigma^3 \frac{n+1}{2} + n) \end{pmatrix},$$

напомним, что

$$\sigma = \sigma(r, g) = \frac{(r+1)^2 - g}{(r+1)^2 - \frac{g}{n}}.$$

Как уже отмечалось, в работе [2] были найдены асимптотики (23), а также то, что $1 - \sigma(r^{(N)}, g^{(N)}) = o(n^{-N/2})$. Отсюда мы получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_N(r^{(N+k)}, g^{(N+k)}) = \begin{pmatrix} n^{\alpha-2} & 0 \\ - (1 - \frac{1}{n}) \frac{n^{\alpha-2}}{c_1(r, g)} n^{-k(\alpha-1)} & n^{2(\alpha-2)} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N s(r^{(N+i)}, g^{(N+i)}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{c_1(r, g)} (1 - \frac{1}{n}) n^{-i(\alpha-1)} \\ - \left((1 - \frac{1}{n}) \frac{1}{c_1(r, g)} n^{-i(\alpha-1)} \right)^2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Используя (27) и (28), находим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N u(r^{(N)}, g^{(N)}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{c_1(r, g)} \\ -\frac{1}{c_1^2(r, g)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} q_N^{(1/2)}(x^*) &= \frac{1}{c_1^2(r, g)} - \frac{1}{c_1(r, g)} (\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2) = \\ &= \frac{1}{c_1^2(r, g)} \exp\{-c_1(r, g)(\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2)\}, \end{aligned}$$

т.е. предел плотностей $q_N^{(1/2)}(x^*)$ является гауссовской плотностью с “дисперсией” $2c_1(r, g)$.

Предположим теперь, что точка (r, g) принадлежит инвариантной кривой $\tilde{\gamma}_1$. В работе [1] были найдены ограничения на α и n , при которых существует термодинамический предел нашей модели в НТ преобразования РГ. Было показано, что если спектр матрицы $A(r_+, g_+)$ (соответственно $A(r_-, g_-)$) лежит внутри единичного круга, то термодинамический предел в плюсовой (минусовой) НТ существует.

Нетрудно видеть, что при тех же самых условиях на α и n термодинамический предел существует и для точек инвариантных кривых $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$. В [2] было получено следующее представление для $u_N(r, g)$:

$$u_N(r, g) = \sum_{i=0}^{N-1} \prod_{k=0}^{i-1} A(r^{(k)}, g^{(k)}) s(r^{(i)}, g^{(i)}) + \prod_{k=0}^{N-1} A(r^{(k)}, g^{(k)}) u_0(r^{(N)}, g^{(N)}),$$

где $A(r, g)$, $s(r, g)$ заданы соотношениями (25), (26),

$$u_0(r, g) = \left(\frac{\frac{\partial \ln Z_0(r, g)}{\partial r}}{\frac{\partial \ln Z_0(r, g)}{\partial g}} \right), \quad Z_0(r, g) = \left(\left(r + \frac{1 - n^{\alpha-2}}{1 + n^{-1}} \right)^2 - g \right).$$

Остановимся для определенности на плюсовой НТ. Если собственные числа матрицы $A(r_+, g_+)$ лежат внутри единичного круга, то то же самое верно и для матрицы $A(r, g)$, если (r, g) находится достаточно близко к (r_+, g_+) . Если точка (r, g) находится на кривой $\tilde{\gamma}_1$, то начиная с некоторого k спектр матрицы $A(r^{(k)}, g^{(k)})$ также будет лежать внутри круга некоторого радиуса $\delta < 1$.

Поскольку векторы $s(r^{(i)}, g^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots$, и $u_0(r^{(N)}, g^{(N)})$, $N = 1, 2, \dots$, являются ограниченными по норме некоторой константой, то легко увидеть, что существует $\lim_{N \rightarrow \infty} u_N(r, g) = u(r, g)$ и для $u(r, g)$ также справедливо представление (24).

Теперь, если мы рассмотрим плотность суммарного спина с нормировкой $\alpha/2$, то увидим, что

$$q_N^{(\alpha/2)}(x^*) = -u_2(r^{(N)}, g^{(N)}) - \frac{1}{2} u_1(r^{(N)}, g^{(N)}) (\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2) + \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2.$$

Из разложения

$$u(r^{(N)}, g^{(N)}) = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{i-1} A(r^{(N+k)}, g^{(N+k)}) s(r^{(N+i)}, g^{(N+i)})$$

и того, что

$$A(r^{(N+k)}, g^{(N+k)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} A(r_+, g_+), \quad s(r^{(N+i)}, g^{(N+i)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} s(r_+, g_+),$$

мы получаем

$$u(r^{(N)}, g^{(N)}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u(r_+, g_+).$$

Тем самым мы доказали, что $\lim_{N \rightarrow \infty} q_N^{(\alpha/2)}(x^*)$ существует и является негауссовской плотностью, определяемой константами связи r_+ , g_+ :

$$p_+(x^*; \alpha) = -u_2(r_+, g_+) - \frac{1}{2} u_1(r_+, g_+) (\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2) + \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2,$$

где

$$u(r_+, g_+) = \sum_{i=0}^{\infty} (A(r_+, g_+))^i S(r_+, g_+) = (I - A(r_+, g_+))^{-1} S(r_+, g_+),$$

I – тождественная матрица. Аналогичное рассуждение проходит и для того случая, когда (r, g) принадлежит устойчивой инвариантной кривой $\tilde{\gamma}_2$. При этом предельная плотность $p_-(x^*, \alpha)$ определяется вектором $u(r_-, g_-)$, который находится из соотношения

$$u(r_-, g_-) = (I - A(r_-, g_-))^{-1} S(r_-, g_-).$$

Векторы $S(r_{\pm}, g_{\pm})$ и матрицы $A(r_{\pm}, g_{\pm})$ вычисляются явно:

$$\begin{aligned} S(r_{\pm}, g_{\pm}) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{n} \pm 1} \frac{(n-2 \pm \theta)(1 \pm \frac{\theta}{n})}{\sqrt{n} - \theta} \\ \mp \frac{\sqrt{n} \mp 1}{\sqrt{n} \pm 1} \frac{\theta(n-2 \pm \frac{\theta}{n})(1 \pm \frac{\theta}{n})}{(\theta - \sqrt{n})^2} \end{pmatrix}, \\ A(r_{\pm}, g_{\pm}) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{(n-1)\sqrt{n}\theta} (\theta^2 \mp \theta \frac{n+3}{2} + n) & \pm \frac{4(\sqrt{n} - \theta)(1 \mp \theta)^2}{\theta^2(n-1)(\pm\sqrt{n} - 1)} \\ \mp \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n} \mp 1)}{(n-1)(\sqrt{n} - \theta)} (1 \mp \frac{\theta}{n})^2 & \mp \frac{2}{\theta n(n-1)} (\theta^2 \mp \theta \frac{3n+1}{2} + n) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

Выполнена следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $2 > \alpha > 1$. Если $(r^{(N_0)}, g^{(N_0)}) \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ для некоторого $N_0 \geq 0$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q_N^{(1/2)}(x^*; r, g) = p(x^*; c_1(r, g), 0).$$

Если $(r, g) \in \tilde{\gamma}_2$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q_N^{(\alpha/2)}(x^*; r, g) = p_-(x^*; \alpha).$$

Если $(r, g) \in \tilde{\gamma}_1$, то при $\alpha > 3/2$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q_N^{(\alpha/2)}(x^*; r, g) = p_+(x^*; \alpha),$$

а при $1 < \alpha \leq 3/2$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q_N^{(\alpha/2)}(x^*; r, g) = p(x^*; c_0(\alpha), 0),$$

здесь плотности $p_{\pm}(x^*; \alpha)$ определяются формулами

$$p_{\pm}(x^*; \alpha) = -u_2(r_{\pm}, g_{\pm}) - \frac{1}{2} u_1(r_{\pm}, g_{\pm})(\bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2) + \bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2,$$

где

$$\begin{aligned} u_1(r_{\pm}, g_{\pm}) &= \frac{1}{\Delta} \frac{2(n-1)(1 \mp \frac{\theta}{n})^2}{(\sqrt{n} \pm 1)(\sqrt{n} - \theta)}, \\ u_2(r_{\pm}, g_{\pm}) &= \mp \frac{1}{\Delta} \frac{(\sqrt{n} \mp 1)^2 (1 \mp \frac{\theta}{n}) \theta}{\sqrt{n}(\sqrt{n} \pm 1)(\sqrt{n} - \theta)^2} \left(n \pm 2\sqrt{n} - \theta \frac{2\sqrt{n} \pm 1}{n} \right), \quad \theta = n^{3/2-\alpha}, \\ \Delta &= 1 \pm n^{-3/2} - \frac{2n^{-3/2}}{1 \pm n^{-1/2}\theta} \left(\theta^2 \mp \theta \frac{n}{2} (1 \mp n^{-1/2})^2 + n \right). \end{aligned}$$

Таким образом, в случае, если (r, g) принадлежит инвариантным кривым $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$, предельное поведение суммарного нормированного спина $\psi_{N, \alpha/2}^*$ будет, как и в теореме 1, негауссовским, хотя и несколько другим.

Эту теорему можно проинтерпретировать как следующую картину критического поведения. Зафиксируем значение r_0 . Пусть для определенности $r_0 > 0$, $\alpha > 3/2$. Рассмотрим полупрямую (r_0, g) , $g > 0$. Обозначим через $(r_0, g_{\text{кр}})$ точку пересечения этой полупрямой с кривой γ_1 . Тогда при $0 < g < g_{\text{кр}}$ суммарный спин в объеме Λ_N с показателем нормировки в пределе $N \rightarrow \infty$ имеет “гауссовское” распределение с “дисперсией”:

$$\chi(r_0, g) = \int (x_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_2 x_2) p(x^*; c_1(r_0, g), 0) dx^* = \frac{2}{c_1(r, g)}.$$

Заметим, что $\chi(r, g)$ можно также записать как

$$\chi(r, g) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho(r, g) \frac{1}{n^N} \left[\sum_{i \in \Lambda_N} \psi_1(i) \sum_{j \in \Lambda_N} \bar{\psi}_1(j) + \sum_{i \in \Lambda_N} \psi_2(i) \sum_{j \in \Lambda_N} \bar{\psi}_2(j) \right],$$

и поэтому эту величину можно назвать антикоммутативным аналогом восприимчивости.

При $g = g_{\text{кр}}$ плотность суммарного спина будет иметь нетривиальный предел при показателе нормировки $a = \alpha/2$, и этот предел определяется плюсовой “негауссовской” НТ преобразования РГ $p_+(x^*; \alpha)$. При достаточно больших g , например при $g > (r_0 + 1)^2$ (как следует из результатов раздела 2), суммарный спин с показателем нормировки $a = 1/2$ тоже будет иметь в пределе “гауссовское” распределение с “дисперсией” $\chi(r_0, g) = 2c_1(r_0, g)^{-1}$, но в отличие от случая $g < g_c$ эта “дисперсия” имеет отрицательный знак.

На отрезке от g_c до $(r_0 + 1)^2$, как следует из результатов компьютерных экспериментов, мы бесконечно много раз попадаем как в область притяжения инвариантного множества Ω_1 , так и в область притяжения множества Ω_2 , а также бесконечно много раз пересекаем устойчивые инвариантные кривые для нетривиальных НТ.

В этом картина критического поведения отличается от картины в “бозонных” моделях, в которых существует единственное значение критической температуры (аналогом обратной температуры в нашей модели можно считать g).

Компьютерные эксперименты показывают, что, когда g подходит (снизу) к $\tilde{\gamma}_1$, дисперсия $\chi(r_0, g)$ стремится к $+\infty$, когда же g подходит (сверху) к $\tilde{\gamma}_2$, дисперсия $\chi(r_0, g)$ стремится к $-\infty$; в случае если g пересекает $\tilde{\gamma}_\infty$, то $\chi(r_0, g) = 0$. График функции $\chi(r_0, g)$ имеет сложный вид с бесконечным числом полюсов.

Рассмотрим вопрос о поведении $\chi(r_0, g)$, когда $g \uparrow g_{\text{кр}}$, где $g_{\text{кр}}$ — ордината пересечения луча (r_0, g) с γ_1 . Запишем g в виде $g = g_{\text{кр}} - b(g)\mu_+^{k(g)}$, где μ_+ — старшее собственное число дифференциала РГ в плюсовой НТ, $k(g)$ — натуральное число, $1 \leq b(g) < \mu_+$. Когда $g \rightarrow g_{\text{кр}}$, то $k(g) \rightarrow \infty$. Напомним, что для дифференциала РГ в плюсовой (минусовой) НТ существует явная формула $D(r_\pm, g_\pm) = nA(r_\pm, g_\pm)^{\text{tr}}$, где $A(r_\pm, g_\pm)$ задается формулой (29). Если $\alpha > 1$, то $\mu_+ > 1$.

Так как $\chi(r, g) = 2c_1(r, g)^{-1}$, то из того, что $c_1(r, g) = \lim_{N \rightarrow \infty} r^{(N)} \lambda_1^{-N}$, следуют рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} c_1(r^{(k)}, g^{(k)}) &= \lambda_1^k c_1(r, g), \\ \chi(r, g) &= \lambda_1^k \chi(r^{(k)}, g^{(k)}). \end{aligned}$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{g \rightarrow g_{\text{кр}}} \frac{\ln \chi(r_0, g)}{\ln |g - g_{\text{кр}}|} = \lim_{k(g) \rightarrow \infty} \frac{k(g) \ln \lambda_1 + \ln \chi(r_0^{(k(g))}, g^{(k(g))})}{-k(g) \ln \mu_+ + \ln b(g)}.$$

Используя методы работы [5], можно показать, что $c_1(r_0^{(k(g))}, g^{(k(g))}) < \text{const}$. Отсюда получаем

$$\lim_{g \rightarrow g_{\text{кр}}} \frac{\ln \chi(r_0, g)}{\ln |g - g_{\text{кр}}|} = -\frac{\ln \lambda_1}{\ln \mu_+},$$

что определяет критический индекс в нашей модели (в бозонных моделях он обозначается как γ). Если $r_0 < -1$, луч (r_0, g) сначала пересекается с кривой γ_2 в некоторой точке $(r_0, g_{\text{кр}})$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, можно показать, что

$$\lim_{g \rightarrow g_{\text{кр}}} \frac{\ln |\chi(r_0, g)|}{\ln |g - g_{\text{кр}}|} = -\frac{\ln \lambda_1}{\ln \mu_-},$$

где μ_- — старшее собственное число дифференциала РГ в минусовой НТ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00375).

Список литературы

- [1] *E. Yu. Lerner, M. D. Missarov.* J. Stat. Phys. 1994. V. 76. № 3/4. P. 805.
- [2] *Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1996. Т. 107. № 2. С. 201.
- [3] *М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1998. Т. 114. № 3. С. 323.
- [4] *Ф. А. Березин.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
- [5] *K. Gawedski, A. Kupiainen.* Nucl. Phys. B. 1985. V. 262. P. 33.

Поступила в редакцию 13.IV.1998 г.