Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Оганесян, Иерархия АКС и конечнозонные потенциалы Шредингера, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 1, 50–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9460>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:32:06

© 2018 г.

В. С. Оганесян*

ИЕРАРХИЯ АКНС И КОНЕЧНОЗОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ШРЕДИНГЕРА

Рассмотрена иерархия АКНС. Найдены необходимые и достаточные условия на функции p и q , чтобы они были решениями иерархии АКНС. Построены конечнозонные потенциалы Шредингера с помощью функций p и q .

Ключевые слова: матричные коммутирующие дифференциальные операторы, иерархия АКНС, конечнозонные потенциалы Шредингера.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9460>

1. ВВЕДЕНИЕ

Условие коммутации $L_n L_m = L_m L_n$ двух дифференциальных операторов

$$L_n = \sum_{i=0}^n u_i(x) \partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^m v_i(x) \partial_x^i,$$

где коэффициенты $u_i(x)$ и $v_i(x)$ – скалярные или матричнозначные функции, эквивалентно очень сложной нелинейной системе дифференциальных уравнений. Первые работы по теории коммутирующих дифференциальных операторов были написаны в начале XX века и принадлежали Валленбергу [1], Шуру [2], Бурхналу и Чаунди [3].

Если два дифференциальных оператора со скалярными или матричнозначными коэффициентами коммутируют, то существует ненулевой полином $R(z, w)$ такой, что $R(L_n, L_m) = 0$ (см. статьи [3], [4]). Кривая Γ , определенная как $R(z, w) = 0$, называется *спектральной кривой* данной пары операторов.

Если коэффициенты являются скалярными функциями и

$$L_n \psi = z \psi, \quad L_m \psi = w \psi,$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10260).

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия.
E-mail: vardan8oganesyan@gmail.com

то $(z, w) \in \Gamma$. Для почти всех $(z, w) \in \Gamma$ пространства общих собственных функций ψ имеют одну и ту же размерность. Размерность пространства общих собственных функций двух коммутирующих скалярных дифференциальных операторов называется *рангом* данной пары. Ранг является общим делителем порядков операторов m и n . Род спектральной кривой называется родом коммутирующей пары операторов.

Если ранг скалярных коммутирующих операторов равен единице, то коэффициенты коммутирующих операторов выражаются явным образом через тета-функции Римана (см. работу [5]).

Когда коэффициенты операторов являются матрицами размера $s \times s$, мы имеем *векторный ранг* $(l_1, \dots, l_k)$, где $k \leq s$ (см. статью [4]). Числа l_i являются общими делителями порядков операторов m и n .

Первые примеры коммутирующих дифференциальных скалярных операторов второго ранга и рода $g = 1$ построены Диксмье [6].

Общая классификация коммутирующих операторов ранга, большего чем единица, была получена Кричевером [7]. К сожалению, в случае ранга больше единицы классификация Кричевера не дает эффективного способа построения коммутирующих скалярных дифференциальных операторов. Общая форма коммутирующих операторов второго ранга для произвольной эллиптической кривой была найдена Кричевером и Новиковым [8]. Общую формулу для коммутирующих операторов третьего ранга для произвольной эллиптической кривой нашел Мохов в работах [9], [10]. Миронов в статье [11] нашел новые методы построения коммутирующих дифференциальных операторов второго ранга. С использованием методов Миронова было найдено много явных примеров коммутирующих скалярных дифференциальных операторов (см. работы [12]–[16]). С помощью результатов Миронова Мохов построил первые примеры коммутирующих дифференциальных операторов произвольного ранга и произвольного рода в статьях [17], [18]. Интересные результаты о коммутирующих дифференциальных операторах второго ранга и первого рода были получены Мироновым и Жегловым в работе [19].

Общая классификация коммутирующих матричных дифференциальных операторов была получена Гриневичем [4]. Первые примеры матричных операторов второго ранга с невырожденной спектральной кривой были получены в статье [20].

Множество нелинейных уравнений математической физики эквивалентно условию коммутации скалярных или матричных дифференциальных операторов. Множество точных решений уравнений математической физики было найдено с помощью теории коммутирующих операторов (см. работы [21]–[25]).

Рассмотрим оператор

$$M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & -iq(x) \\ ip(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через L_n любой дифференциальный оператор размера 2×2 порядка n с матричными коэффициентами.

Определим функции f_k, g_k с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= \frac{i}{2} f'_k(x) - iq(x) \left(\int (p(x) f_k(x) + q(x) g_k(x)) dx + C_k \right), \\ g_{k+1} &= -\frac{i}{2} g'_k(x) + ip(x) \left(\int (p(x) f_k(x) + q(x) g_k(x)) dx + C_k \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где C_k являются произвольными константами и $f_1 = -iq(x)$, $g_1 = ip(x)$. Например,

$$f_3 = \frac{i}{4} q_{xx} - \frac{i}{2} p q^2 + \frac{C_1}{2} q_x - i C_2 q, \quad g_3 = -\frac{i}{4} p_{xx} + \frac{i}{2} p^2 q + \frac{C_1}{2} p_x + i C_2 p.$$

Легко проверить, что f_k и g_k являются полиномами по функциям $p, q, p', q', \dots, p^{(k-1)}, q^{(k-1)}$ (см. статью [26]). Функции $p(x), q(x)$ являются решениями уравнений

$$f_{m+1} = 0, \quad g_{m+1} = 0 \quad (2)$$

тогда и только тогда, когда существует матричный дифференциальный оператор L_{m+1} порядка $m+1$ такой, что $ML_{m+1} = L_{m+1}M$ [26] и

$$L_{m+1}^2 = M^{2m+2} + b_{2m} M^{2m} + \dots + b_1 M + b_0,$$

где b_i – некоторые константы. Из соотношений (1) легко увидеть, что если условие (2) выполнено, то

$$f_k = 0, \quad g_k = 0 \quad (3)$$

для всех $k \geq m+1$.

Предположим, что функции $p(x)$ и $q(x)$ имеют изолированный полюс первого порядка в точках a_i , а в окрестности точки a_i ряд Лорана имеет следующий вид:

$$p(x) = \frac{\varphi_{i,-1}}{x - a_i} + \varphi_{i,0} + \varphi_{i,1}(x - a_i) + \dots, \quad q(x) = \frac{\psi_{i,-1}}{x - a_i} + \psi_{i,0} + \psi_{i,1}(x - a_i) + \dots.$$

В настоящей работе доказаны следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1. Если функции $p(x), q(x)$ являются решениями уравнений $f_{2m+2} = 0$ и $g_{2m+2} = 0$ или $f_{2m+3} = 0$ и $g_{2m+3} = 0$, то

$$\varphi_{i,-1} = \frac{n_i^2}{\psi_{i,-1}}, \quad \varphi_{i,k} = (-1)^{k+1} \frac{\psi_{i,k} \varphi_{i,-1}}{\psi_{i,-1}},$$

где $n_i \in \mathbb{N}$, $n_i \leq m$, $k = 0, \dots, 2n_i - 1$.

ТЕОРЕМА 2. Если

$$\varphi_{i,-1} = \frac{n_i^2}{\psi_{i,-1}}, \quad \varphi_{i,k} = (-1)^{k+1} \frac{\psi_{i,k} \varphi_{i,-1}}{\psi_{i,-1}}$$

для некоторого n_i , то решения уравнений

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \partial_x y + \begin{pmatrix} 0 & -iq(x) \\ ip(x) & 0 \end{pmatrix} y = zy$$

являются мероморфными функциями в окрестности точки a_i для всех $z \in \mathbb{C}$; здесь $y = (y_1(x), y_2(x))^T$.

Нам известна еще одна теорема (см. статью [27]).

ТЕОРЕМА 3. *Допустим, что функции $p(x), q(x)$ являются рациональными функциями, ограниченными на бесконечности, или функции $p(x), q(x)$ являются мероморфными периодическими функциями с конечным числом полюсов в фундаментальной ленте. Тогда $p(x), q(x)$ являются решениями некоторого уравнения из иерархии АКНС тогда и только тогда, когда все решения уравнений*

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \partial_x y + \begin{pmatrix} 0 & -iq(x) \\ ip(x) & 0 \end{pmatrix} y = zy$$

являются мероморфными функциями для любого $z \in \mathbb{C}$, где $y = (y_1(x), y_2(x))^T$.

Итак, мы получили следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Допустим, что функции $p(x), q(x)$ являются рациональными функциями, ограниченными на бесконечности, или функции $p(x), q(x)$ являются мероморфными периодическими функциями с конечным числом полюсов в фундаментальной ленте. Допустим, что все полюсы функций $p(x)$ и $q(x)$ являются полюсами первого порядка. Тогда функции $p(x)$ и $q(x)$ являются решениями уравнений $f_m = 0$ и $g_m = 0$ для некоторого m тогда и только тогда, когда*

$$\varphi_{i,-1} = \frac{n_i^2}{\psi_{i,-1}}, \quad \varphi_{i,k} = (-1)^{k+1} \frac{\psi_{i,k} \varphi_{i,-1}}{\psi_{i,-1}}, \quad k = 0, \dots, 2n_i - 1,$$

для некоторого $n_i \in \mathbb{N}$.

Предположим, что $p(x), q(x)$ удовлетворяют условию теоремы 1. Рассмотрим функцию pq . Ряд Лорана функции pq в окрестности точки a_i имеет вид

$$pq = \frac{h_{i,-2}}{(x - a_i)^2} + \frac{h_{i,-1}}{x - a_i} + h_{i,0} + h_{i,1}(x - a_i) + O((x - a_i)^2),$$

где

$$\begin{aligned} h_{i,-2} &= n_i^2, \\ h_{i,2k-1} &= (\varphi_{i,-1} \psi_{i,2k} + \psi_{i,-1} \varphi_{i,2k}) + (\varphi_{i,0} \psi_{i,2k-1} + \psi_{i,0} \varphi_{i,2k-1}) + \dots + \\ &\quad + (\varphi_{i,l} \psi_{i,2k-l-1} + \psi_{i,l} \varphi_{i,2k-l-1}) + \dots + (\varphi_{i,2k} \psi_{i,-1} + \psi_{i,2k} \varphi_{i,-1}). \end{aligned}$$

Но мы знаем, что p и q удовлетворяют условиям теоремы 1 и

$$\begin{aligned} \varphi_{i,l} \psi_{i,2k-l-1} + \psi_{i,l} \varphi_{i,2k-l-1} &= \varphi_{i,-1} \psi_{i,-1} \left(\frac{\varphi_{i,l} \psi_{i,2k-l-1}}{\varphi_{i,-1} \psi_{i,-1}} + \frac{\psi_{i,l} \varphi_{i,2k-l-1}}{\varphi_{i,-1} \psi_{i,-1}} \right) = \\ &= \psi_{i,-1} \left(\frac{\psi_{i,2k-l-1}}{\psi_{i,-1}} + (-1)^{l+1} \frac{\varphi_{i,2k-l-1}}{\varphi_{i,-1}} \right) = \left(\frac{\psi_{i,2k-l-1}}{\psi_{i,-1}} + (-1)^{2k-l-1} \frac{\varphi_{i,2k-l-1}}{\varphi_{i,-1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что коэффициенты $h_{i,-1} = h_{i,1} = \dots = h_{i,2n_i-1} = 0$. Мы получаем, что в окрестности a_i ряд Лорана функции pq имеет вид

$$pq = \frac{n_i^2}{(x - a_i)^2} + \sum_{t=0}^{t=n_i} h_{i,2t}(x - a_i)^T + h_{i,2n_i+1}(x - a_i)^{2n_i+1} + O((x - a_i)^{2n_i+2}).$$

Будем говорить, что функция $u(x)$ является конечнозонным потенциалом Шредингера, если оператор $\partial_x^2 + u(x)$ коммутирует с дифференциальным оператором порядка $2g + 1$.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что функции $p(x)$ и $q(x)$ являются рациональными функциями или функциями с одним общим периодом. Предположим, что функции $p(x)$ и $q(x)$ не имеют изолированного полюса на бесконечности. Допустим, что $p(x), q(x)$ имеют конечное число полюсов в ленте периодов. Также допустим, что все полюсы p, q являются полюсами первого порядка и $\varphi_{i,-1}\psi_{i,-1} = n^2$ для любого i . Если $p(x), q(x)$ являются решениями уравнений $f_m = 0$ и $g_m = 0$ для некоторого $m > 2$, то функция $u(x) = (n+1)pq/n$ является конечнозонным потенциалом Шредингера.*

Рассмотрим несколько примеров (см. статью [26]).

ПРИМЕР 1. Функции $p(x) = \alpha/\sin x$ и $q(x) = \beta/\sin x$, где $\alpha\beta = n^2$ и $n \in \mathbb{N}$, являются решениями уравнений $f_{2n+2} = 0$ и $g_{2n+2} = 0$. Произведение $pq = n^2/\sin^2 x$ и $(n+1)pq/n = n(n+1)/\sin^2 x$ является конечнозонным потенциалом Шредингера.

Укажем еще раз, что мы называем функцию $u(x)$ конечнозонным потенциалом Шредингера, если оператор $\partial_x^2 + u(x)$ коммутирует с дифференциальным оператором порядка $2g + 1$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим

$$p(x) = \alpha(\zeta(x) - \zeta(x - \omega_2) - \zeta(\omega_2)) \quad \text{и} \quad q(x) = \beta(\zeta(x) - \zeta(x - \omega_2) - \zeta(\omega_2)),$$

где $\zeta(x; \omega_1, \omega_2)$ является функцией Вейерштрасса, $\alpha\beta = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Функции p, q являются решениями $f_{m+1} = 0$ и $g_{m+1} = 0$ для некоторого m . Функция $(n+1)pq/n = n(n+1)\wp(x) + n(n+1)\wp(x - \omega_2)$ является конечнозонным потенциалом Шредингера.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Мы знаем, что в окрестности a_i

$$f_1 = -\frac{i\psi_{i,-1}}{x - a_i} + O(1) = \frac{A_{i,-1}^1}{x - a_i} + O(1), \quad g_1 = \frac{i\varphi_{i,-1}}{x - a_i} + O(1) = \frac{B_{i,-1}^1}{x - a_i} + O(1).$$

Обозначим через $A_{i,m}^k$ коэффициент при члене $(x - a_i)^m$ в ряде Лорана функции f_k в окрестности a_i . Аналогичным образом обозначим через $B_{i,m}^k$ коэффициент при члене $(x - a_i)^m$ в ряде Лорана функции g_k в окрестности a_i .

ЛЕММА 1. *Существует $n_i \in \mathbb{N}$ такой, что*

$$\varphi_{i,-1} = \frac{n_i^2}{\psi_{i,-1}} \quad \text{и} \quad B_{i,-k}^k = (-1)^k \frac{\varphi_{i,-1} A_{i,-k}^k}{\psi_{i,-1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $B_{i,-1}^1 = -\varphi_{i,-1}A_{i,-1}^1/\psi_{i,-1}$. Вычислим f_2 и g_2 :

$$f_2 = -\frac{\psi_{i,-1}}{2(x-a_i)^2} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)}\right) = \frac{A_{i,-2}^2}{(x-a_i)^2} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)}\right),$$

$$g_2 = -\frac{\varphi_{i,-1}}{2(x-a_i)^2} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)}\right) = \frac{B_{i,-2}^2}{(x-a_i)^2} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)}\right).$$

Получаем, что $B_{i,-2}^2 = \varphi_{i,-1}A_{i,-2}^2/\psi_{i,-1}$. Рассмотрим f_3 и g_3 :

$$f_3 = -\frac{i\psi_{i,-1}(\varphi_{i,-1}\psi_{i,-1}-1)}{2(x-a_i)^3} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)^2}\right) = \frac{A_{i,-3}^3}{(x-a_i)^3} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)^2}\right),$$

$$g_3 = \frac{i\varphi_{i,-1}(\varphi_{i,-1}\psi_{i,-1}-1)}{2(x-a_i)^3} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)^2}\right) = \frac{B_{i,-3}^3}{(x-a_i)^3} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)^2}\right).$$

Справедливо равенство $B_{i,-3}^3 = -\varphi_{i,-1}A_{i,-3}^3/\psi_{i,-1}$. Докажем, что

$$B_{i,-2k-1}^{2k+1} = -\frac{\varphi_{i,-1}A_{i,-2k-1}^{2k+1}}{\psi_{i,-1}}, \quad B_{i,-2k-2}^{2k+2} = \frac{\varphi_{i,-1}A_{i,-2k-2}^{2k+2}}{\psi_{i,-1}}. \quad (4)$$

Докажем соотношения (4) индукцией по k . Мы уже проверили формулу при $k=0$ и $k=1$. По предположению индукции

$$B_{i,-2k-1}^{2k+1} = -\frac{\varphi_{i,-1}A_{i,-2k-1}^{2k+1}}{\psi_{i,-1}}, \quad B_{i,-2k}^{2k} = \frac{\varphi_{i,-1}A_{i,-2k}^{2k}}{\psi_{i,-1}}.$$

Мы получаем, что

$$f_{2k+2} = \frac{2i\psi_{i,-1}(A_{i,-2k-1}^{2k+1}\varphi_{i,-1} + B_{i,-2k-1}^{2k+1}\psi_{i,-1}) - iA_{i,-2k-1}^{2k+1}(2k+1)^2}{2(2k+1)(x-a_i)^{2k+2}} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{(x-a_i)^{2k+1}}\right) = -\frac{iA_{i,-2k-1}^{2k+1}(2k+1)}{2(x-a_i)^{2k+2}} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)^{2k+1}}\right), \quad (5)$$

$$g_{2k+2} = \frac{iB_{i,-2k-1}^{2k+1}(2k+1)^2 - 2i\varphi_{i,-1}(A_{i,-2k-1}^{2k+1}\varphi_{i,-1} + B_{i,-2k-1}^{2k+1}\psi_{i,-1})}{2(2k+1)(x-a_i)^{2k+2}} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{(x-a_i)^{2k+1}}\right) = -\frac{iA_{i,-2k-1}^{2k+1}\varphi_{i,-1}(2k+1)}{2\psi_{i,-1}(x-a_i)^{2k+2}} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)^{2k+1}}\right). \quad (6)$$

Мы видим, что $B_{i,-2k-2}^{2k+2} = \varphi_{i,-1}A_{i,-2k-2}^{2k+2}/\psi_{i,-1}$. Следовательно,

$$f_{2k+3} = -i\frac{2(k+1)^2A_{i,-2k-2}^{2k+2} - \psi_{i,-1}(B_{i,-2k-2}^{2k+2}\psi_{i,-1} + A_{i,-2k-2}^{2k+2}\varphi_{i,-1})}{2(k+1)(x-a_i)^{2k+3}} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{(x-a_i)^{2k+2}}\right) = \frac{iA_{i,-2k-2}^{2k+2}(\varphi_{i,-1}\psi_{i,-1} - (k+1)^2)}{(k+1)(x-a_i)^{2k+3}} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)^{2k+2}}\right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
g_{2k+3} &= i \frac{2(k+1)^2 B_{i,-2k-2}^{2k+2} - \varphi_{i,-1}(B_{i,-2k-2}^{2k+2} \psi_{i,-1} + A_{i,-2k-2}^{2k+2} \varphi_{i,-1})}{2(k+1)(x-a_i)^{2k+3}} + \\
&+ O\left(\frac{1}{(x-a_i)^{2k+2}}\right) = \\
&= -\frac{i A_{i,-2k-2}^{2k+2} \varphi_{i,-1}(\varphi_{i,-1} \psi_{i,-1} - (k+1)^2)}{(k+1) \psi_{i,-1}(x-a_i)^{2k+3}} + O\left(\frac{1}{(x-a_i)^{2k+2}}\right). \tag{8}
\end{aligned}$$

Итак, соотношения (4) доказаны.

Мы знаем, что существует такое значение l , что $f_l = 0$ и $g_l = 0$. Следовательно $A_{i,-l}^l = B_{i,-l}^l = 0$ для некоторого l . Но из формул (5), (6) и (7), (8) мы видим, что $A_{i,-k}^k = B_{i,-k}^k = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi_{i,-1} \psi_{i,-1} = n_i^2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Справедливо равенство $\varphi_{i,0} = -\psi_{i,0} \varphi_{i,-1}^2 / n_i^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущей лемме, рассмотрим соотношения

$$f_1 = -\frac{i\psi_{i,-1}}{x-a_i} - i\psi_{i,0} + O(x-a_i), \quad g_1 = \frac{i\varphi_{i,-1}}{x-a_i} + i\varphi_{i,0} + O(x-a_i).$$

Мы видим, что

$$\frac{A_{i,0}^1}{\psi_{i,-1}} - \frac{B_{i,0}^1}{\varphi_{i,-1}} = -\frac{i}{n_i^2}(\psi_{i,-1}\varphi_{i,0} + \varphi_{i,-1}\psi_{i,0}).$$

Докажем, что

$$\frac{A_{i,-s+1}^s}{\psi_{i,-1}} + (-1)^s \frac{B_{i,-s+1}^s}{\varphi_{i,-1}} = \alpha_s(\psi_{i,-1}\varphi_{i,0} + \varphi_{i,-1}\psi_{i,0}), \tag{9}$$

где $\alpha_s \neq 0$ и не зависит от C_i , $s \in \mathbb{N}$ – произвольное число. Докажем это индукцией по s . Предположим, что утверждение верно для $A_{i,-s+1}^s$ и $B_{i,-s+1}^s$. Легко показать, что

$$\begin{aligned}
A_{i,-s}^{s+1} &= \frac{i\psi_{i,0}(B_{i,-s}^s \psi_{i,-1} + A_{i,-s}^s \varphi_{i,-1})}{s} + \\
&+ \frac{i\psi_{i,-1}(A_{i,-s}^s \varphi_{i,0} + B_{i,-s}^s \psi_{i,0} + A_{i,-s+1}^s \varphi_{i,-1} + B_{i,-s+1}^s \psi_{i,-1})}{s-1} - \frac{iA_{i,-s+1}^s(s-1)}{2}, \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{i,-s}^{s+1} &= -\frac{i\varphi_{i,0}(B_{i,-s}^s \psi_{i,-1} + A_{i,-s}^s \varphi_{i,-1})}{s} - \\
&- \frac{i\varphi_{i,-1}(A_{i,-s}^s \varphi_{i,0} + B_{i,-s}^s \psi_{i,0} + A_{i,-s+1}^s \varphi_{i,-1} + B_{i,-s+1}^s \psi_{i,-1})}{s-1} + \frac{iB_{i,-s+1}^s(s-1)}{2}. \tag{11}
\end{aligned}$$

Предположим, что s является нечетным числом и $s = 2k+1$. Из равенств (4), леммы 1 и предположения индукции следует, что

$$\frac{A_{i,-2k-1}^{2k+2}}{\psi_{i,-1}} + \frac{B_{i,-2k-1}^{2k+2}}{\varphi_{i,-1}} = -ik\alpha_{2k+1}(\varphi_{i,0}\psi_{i,-1} + \psi_{i,0}\varphi_{i,-1}). \tag{12}$$

Если s является четным и $s = 2k$, то

$$\begin{aligned} \frac{A_{i,-2k}^{2k+1}}{\psi_{i,-1}} - \frac{B_{i,-2k}^{2k+1}}{\varphi_{i,-1}} &= \\ &= (\varphi_{i,0}\psi_{i,-1} + \psi_{i,0}\varphi_{i,-1}) \frac{i(8k-2)A_{i,-2k}^{2k} + \alpha_{2k}k\psi_{i,-1}(4\varphi_{i,-1}\psi_{i,-1} - (2k-1)^2)}{2(2k-1)k\psi_{i,-1}} = \\ &= (\varphi_{i,0}\psi_{i,-1} + \psi_{i,0}\varphi_{i,-1}) \frac{i(8k-2)\frac{A_{i,-2k}^{2k}}{\psi_{i,-1}} + \alpha_{2k}k(4n_i^2 - (2k-1)^2)}{2(2k-1)k} = \\ &= (\varphi_{i,0}\psi_{i,-1} + \psi_{i,0}\varphi_{i,-1}) \frac{i(8k-2)\beta \prod_{l=1}^{l=k-1}(n_i^2 - l^2) + \alpha_{2k}k(4n_i^2 - (2k-1)^2)}{2(2k-1)k}, \end{aligned}$$

где β не зависит от $\varphi_{i,-1}$, $\psi_{i,-1}$ и n_i . Легко увидеть, что $\alpha_l \neq 0$ для любого $n_i \in \mathbb{N}$ и l . Мы знаем, что существует такое l , что $f_l = 0$ и $g_l = 0$. Итак,

$$A_{i,-l+1}^l = B_{i,-l+1}^l = 0 \Rightarrow \frac{A_{i,-l+1}^l}{\varphi_{i,-1}} + (-1)^l \frac{B_{i,-l+1}^l}{\psi_{i,-1}} = 0.$$

Но $\alpha_l \neq 0$ и, следовательно,

$$\frac{A_{i,-l+1}^l}{\varphi_{i,-1}} + (-1)^l \frac{B_{i,-l+1}^l}{\psi_{i,-1}} = 0$$

тогда и только тогда, когда $\varphi_{i,0}\psi_{i,-1} + \psi_{i,0}\varphi_{i,-1} = 0$. Лемма доказана.

Допустим, что

$$\psi_{i,-1}\varphi_{i,s} + (-1)^s\varphi_{i,-1}\psi_{i,s} = 0, \quad \frac{A_{i,s-t+1}^t}{\psi_{i,-1}} + (-1)^{s-t}\frac{B_{i,s-t+1}^t}{\varphi_{i,-1}} = 0, \quad (13)$$

где $s = 0, \dots, k-1$ и $t \in \mathbb{N}$ – произвольное натуральное число. Очевидно, что

$$\frac{A_{i,k}^1}{\psi_{i,-1}} + (-1)^{k+1}\frac{B_{i,k}^1}{\varphi_{i,-1}} = -i\left(\frac{\psi_{i,k}}{\psi_{i,-1}} + (-1)^k\frac{\varphi_{i,k}}{\varphi_{i,-1}}\right) = -\frac{i}{n^2}(\varphi_{i,-1}\psi_{i,k} + (-1)^k\psi_{i,k}\varphi_{i,-1}).$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{A_{i,-r}^r}{(x-a_i)^r} + \dots + A_{i,0}^r + A_{i,1}^r(x-a_i) + \dots + A_{i,k-r}^r(x-a_i)^{k-r} + O((x-a_i)^{k-r+1}), \\ g_r &= \frac{B_{i,-r}^r}{(x-a_i)^r} + \dots + B_{i,0}^r + B_{i,1}^r(x-a_i) + \dots + B_{i,k-r}^r(x-a_i)^{k-r} + O((x-a_i)^{k-r+1}) \end{aligned}$$

и предположим, что

$$\frac{A_{i,-r+2}^{r-1}}{\psi_{i,-1}} + (-1)^{k-r+1}\frac{B_{i,k-r+2}^{r-1}}{\varphi_{i,-1}} = \alpha_{r-1,k-r+2}(\varphi_{i,-1}\psi_{i,k} + (-1)^k\psi_{i,k}\varphi_{i,-1}), \quad (14)$$

где $\alpha_{r-1,k-r+2}$ не зависит от C_i . Но $\alpha_{r-1,k-r+2}$ зависит от $n_i^2 = \varphi_{i,-1}\psi_{i,-1}$.

Докажем, что

$$\frac{A_{i,k-r+1}^r}{\psi_{i,-1}} + (-1)^{k-r} \frac{B_{i,k-r+1}^r}{\varphi_{i,-1}} = \alpha_{r,k-r+1}(\varphi_{i,-1}\psi_{i,k} + (-1)^k \psi_{i,k}\varphi_{i,-1}). \quad (15)$$

Рассмотрим

$$p(x)f_{r-1} + q(x)g_{r-1} = \frac{h_{i,-r}}{(x-a_i)^r} + \dots + h_{i,k-r+1}(x-a_i)^{k-r+1} + O((x-a_i)^{k-r+1}).$$

Имеют место два случая.

1. Разность $k-r$ является четным числом. Из формул (13) получаем, что

$$\begin{aligned} h_{i,k-r} &= \varphi_{i,-1}A_{i,k-r+1}^{r-1} + \psi_{i,-1}B_{i,k-r+1}^{r-1} + \dots + \varphi_{i,k-1}A_{i,-r+1}^{r-1} + \psi_{i,k-1}B_{i,-r+1}^{r-1} = \\ &= \varphi_{i,-1}\psi_{i,-1} \left(\left(\frac{A_{i,k-r+1}^{r-1}}{\psi_{i,-1}} + \frac{B_{i,k-r+1}^{r-1}}{\varphi_{i,-1}} \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\varphi_{i,k-1}A_{i,-r+1}^{r-1}}{\varphi_{i,-1}\psi_{i,-1}} + \frac{\psi_{i,k-1}B_{i,-r+1}^{r-1}}{\psi_{i,-1}\varphi_{i,-1}} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично из формул (13) имеем, что $h_{i,2t} = 0$, где $2t \leq k-r$. Из соотношений (1) следует выражение

$$\frac{f_r}{\psi_{i,-1}} + \frac{g_r}{\varphi_{i,-1}} = \frac{i}{2} \left(\frac{f'_{r-1}}{\psi_{i,-1}} - \frac{g'_{r-1}}{\varphi_{i,-1}} \right) + i \left(\frac{p(x)}{\varphi_{i,-1}} - \frac{q(x)}{\psi_{i,-1}} \right) \left(\int (pf_{r-1} + qg_{r-1}) dx + C_{r-1} \right).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &\int (p(x)f_{r-1} + q(x)g_{r-1}) dx = \\ &= \sum_{t=-r}^{t=k-r} \frac{h_{i,t}(x-a_i)^{t+1}}{t+1} + \frac{h_{i,k-r+1}(x-a_i)^{k-r+1}}{k-r} + O((x-a_i)^{k-r+1}), \end{aligned} \quad (16)$$

где $h_{i,s} = 0$, s – четное число и $s \leq k-r$. Мы ранее уже указывали, что f_k и g_k являются полиномами по $p(x), q(x), p'(x), q'(x), \dots, p^{(k-1)}(x), q^{(k-1)}(x)$ для всех k . Следовательно, $h_{i,-1} = 0$.

Более того, из соотношений (13) вытекает, что

$$\frac{p(x)}{\varphi_{i,-1}} - \frac{q(x)}{\psi_{i,-1}} = \sum_{t=0}^{2t \leq k} \left(\frac{\varphi_{i,2t}}{\varphi_{i,-1}} - \frac{\psi_{i,2t}}{\psi_{i,-1}} \right) (x-a_i)^{2t} + \left(\frac{\varphi_{i,k}}{\varphi_{i,-1}} - \frac{\psi_{i,k}}{\psi_{i,-1}} \right) (x-a_i)^k + \dots \quad (17)$$

Комбинируя выражения (16) и (17) и используя тот факт, что $k-r+1$ – нечетное число, получаем формулу

$$\begin{aligned} \frac{A_{i,k-r+1}^r}{\psi_{i,-1}} + \frac{B_{i,k-r+1}^r}{\varphi_{i,-1}} &= \frac{i(k-r+2)}{2} \left(\frac{A_{i,k-r+2}^{r-1}}{\psi_{i,-1}} - \frac{B_{i,k-r+2}^{r-1}}{\varphi_{i,-1}} \right) = \\ &= \alpha_{r-1,k-r+2} \frac{i(k-r+2)}{2} (\varphi_{i,-1}\psi_{i,k} + (-1)^k \psi_{i,-1}\varphi_{i,-1}). \end{aligned} \quad (18)$$

Итак, если $k-r$ четно, то предположение (15) верно.

2. Предположим, что $k - r$ – нечетное число. Рассуждая, как и прежде, получаем соотношение

$$\begin{aligned} h_{i,k-r+1} &= \varphi_{i,-1} A_{i,k-r+2}^{r-1} + \psi_{i,-1} B_{i,k-r+2}^{r-1} + \cdots + \varphi_{i,k-1} A_{i,-r+1}^{r-1} + \psi_{i,k-1} B_{i,-r+1}^{r-1} = \\ &= \varphi_{i,-1} \psi_{i,-1} \left(\left(\frac{A_{i,k-r+2}^{r-1}}{\psi_{i,-1}} + \frac{B_{i,k-r+2}^{r-1}}{\varphi_{i,-1}} \right) + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\varphi_{i,k-1} A_{i,-r+2}^{r-1}}{\varphi_{i,-1} \psi_{i,-1}} + \frac{\psi_{i,k-1} B_{i,-r+2}^{r-1}}{\psi_{i,-1} \varphi_{i,-1}} \right) + \left(\frac{\varphi_{i,k} A_{i,-r+1}^{r-1}}{\varphi_{i,-1} \psi_{i,-1}} + \frac{\psi_{i,k} B_{i,-r+1}^{r-1}}{\psi_{i,-1} \varphi_{i,-1}} \right) \right) = \\ &= \psi_{i,-1} B_{i,-r+1}^{r-1} \left(\frac{\varphi_{i,k}}{\varphi_{i,-1}} + (-1)^{r-1} \frac{\psi_{i,k}}{\psi_{i,-1}} \right) = \beta \prod_{l=1}^{l=[(r-1)/2]} (n^2 - l^2) \left(\frac{\varphi_{i,k}}{\varphi_{i,-1}} + (-1)^k \frac{\psi_{i,k}}{\psi_{i,-1}} \right), \end{aligned}$$

где β является константой и не зависит от коэффициентов ряда.

Легко видеть согласно формулам (13), что $h_{i,2t+1} = 0$, где $2t + 1 < k - r + 1$. Из соотношений (1) следует равенство

$$\frac{f_r}{\psi_{i,-1}} - \frac{g_r}{\varphi_{i,-1}} = \frac{i}{2} \left(\frac{f'_{r-1}}{\psi_{i,-1}} + \frac{g'_{r-1}}{\varphi_{i,-1}} \right) - i \left(\frac{p(x)}{\varphi_{i,-1}} + \frac{q(x)}{\psi_{i,-1}} \right) \left(\int (p f_{r-1} + q g_{r-1}) dx + C_{r-1} \right).$$

Из формул (13) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{\varphi_{i,-1}} + \frac{q(x)}{\psi_{i,-1}} &= \sum_{t=-1}^{t=k-1} \left(\frac{\varphi_{i,t}}{\varphi_{i,-1}} + \frac{\psi_{i,t}}{\psi_{i,-1}} \right) (x - a_i)^T + \left(\frac{\varphi_{i,k}}{\varphi_{i,-1}} + \frac{\psi_{i,k}}{\psi_{i,-1}} \right) (x - a_i)^k + \cdots = \\ &= \frac{2}{x - a_i} + 2 \sum_{t=0}^{2t \leq k-2} \frac{\varphi_{i,2t+1}}{\varphi_{i,-1}} (x - a_i)^{2t+1} + \left(\frac{\varphi_{i,k}}{\varphi_{i,-1}} + \frac{\psi_{i,k}}{\psi_{i,-1}} \right) (x - a_i)^k + \cdots. \end{aligned}$$

Из факта, что $k - r + 1$ является четным числом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{A_{i,k-r+1}^r}{\psi_{i,-1}} - \frac{B_{i,k-r+1}^r}{\varphi_{i,-1}} &= \frac{i(k-r+2)}{2} \left(\frac{A_{i,k-r+2}^{r-1}}{\psi_{i,-1}} + \frac{B_{i,k-r+2}^{r-1}}{\varphi_{i,-1}} \right) - 2 \frac{h_{i,k-r+1}}{k-r+1} = \\ &= \left(\frac{i(k-r+2) \alpha_{r-1,k-r+2}}{2} - 2\beta \prod_{l=1}^{l=[(r-1)/2]} (n^2 - l^2) \right) \left(\frac{\varphi_{i,k}}{\psi_{i,-1}} + (-1)^k \frac{\psi_{i,k}}{\varphi_{i,-1}} \right). \end{aligned}$$

Получаем, что если $k - r$ – нечетное число, то предположение (15) верно.

Итак, мы доказали, что предположение (15) верно для любого k и r .

Допустим неравенство $k < 2n_i + 1$. Из леммы 1 известно, что $f_k \neq 0$ и $g_k \neq 0$, поскольку $A_{i,-k}^k \neq 0$. Но если существует такое m , что $f_{2m+1} = 0$ и $g_{2m+1} = 0$, то

$$A_{i,s}^{2m+1} = B_{i,s}^{2m+1} = 0 \Rightarrow A_{i,s}^{2m+1} + (-1)^{s+1} B_{i,s}^{2m+1} = 0,$$

где $s \leq 0$, $m \geq n_i$. Отметим, что $A_{i,-2n_i-1}^{2n_i+1} = B_{i,2n_i+1}^{2n_i+1} = 0$.

Из формулы (18) видно, что $A_{i,-1}^{2n_i+2}/\psi_{i,-1} + B_{i,-1}^{2n_i+2}/\varphi_{i,-1} = 0$. Из равенства (15) получаем, что

$$\frac{A_{i,k-2m}^{2m+1}}{\psi_{i,-1}} + (-1)^{k-2m+1} \frac{B_{i,k-2m}^{2m+1}}{\varphi_{i,-1}} = \alpha_{2m+1,k-2m} \left(\frac{\varphi_{i,k}}{\psi_{i,-1}} + (-1)^k \frac{\psi_{i,k}}{\varphi_{i,-1}} \right) = 0.$$

Легко увидеть, что $\alpha_{2m+1,k-2m} \neq 0$, где $k - 2m < -1$. Это означает, что

$$\frac{\varphi_{i,k}}{\psi_{i,-1}} + (-1)^k \frac{\psi_{i,k}}{\varphi_{i,-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{i,k} = (-1)^{k+1} \frac{\psi_{i,k} \varphi_{i,-1}^2}{n^2}$$

для любого $k \leq 2n_i - 1$. Теорема доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Рассмотрим уравнение

$$M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \partial_x y + \begin{pmatrix} 0 & -iq(x) \\ ip(x) & 0 \end{pmatrix} y = zy, \quad (19)$$

где $y = (y_1(x), y_2(x))^T$. Решения (19) имеют полюсы только в точках, где имеют полюсы функции p и q (см. работу [28]).

Допустим, что

$$y_1 = \alpha_0(x - a_i)^\sigma + \alpha_1(x - a_i)^{\sigma+1} + \dots, \quad y_2 = \beta_0(x - a_i)^\sigma + \beta_1(x - a_i)^{\sigma+1} + \dots,$$

где a_i – полюс функций $p(x)$ и $q(x)$. Подставляя y в (19) и рассматривая коэффициент при члене ряда $(x - a_i)^{\sigma-1}$, получаем соотношения

$$\sigma \alpha_0 - \psi_{i,-1} \beta_0 = 0, \quad \varphi_{i,-1} \alpha_0 - \sigma \beta_0 = 0.$$

Решение $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$ существует тогда и только тогда, когда $\sigma = \pm n_i$, где $n_i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим коэффициент при члене $(x - a_i)^{k+\sigma}$, где k – целое число и $k \geq 0$. Получаем равенства

$$(k + \sigma) \alpha_{k-n_i+1} - \psi_{i,-1} \beta_{k-n_i+1} = F_1, \quad \varphi_{i,-1} \alpha_{k-n_i+1} - (k + \sigma) \beta_0 = F_2,$$

где F_1 и F_2 не зависят от α_{k-n_i+1} и β_{k-n_i+1} . Определитель этой системы равен нулю тогда и только тогда, когда $k = -2\sigma$ и $k = 0$. Итак, у нас имеются трудности в вычислении коэффициентов только при $\sigma = -n_i$ и $k = 2n_i$, поскольку $k \geq 0$.

Докажем, что если $k \leq 2n_i - 1$, то

$$n_i \beta_k + (-1)^k \varphi_{i,-1} \alpha_k = 0 \quad (20)$$

или, что эквивалентно,

$$n_i \alpha_k + (-1)^k \psi_{i,-1} \beta_k = 0.$$

Мы видим, что $n_i \alpha_0 + \psi_{i,-1} \beta_0 = 0$ или, что эквивалентно, $\varphi_{i,-1} \alpha_0 + n \beta_0 = 0$. Следовательно,

$$(1 - n_i) \alpha_1 - \psi_{i,-1} \beta_1 - \psi_{i,0} \beta_0 = z \alpha_0, \quad (n_i - 1) \beta_1 + \varphi_{i,-1} \alpha_1 + \varphi_{i,0} \alpha_0 = z \beta_0. \quad (21)$$

Умножая первое уравнение системы (21) на n_i , второе на $\psi_{i,-1}$ и суммируя, получаем равенство

$$n_i\alpha_1 - \psi_{i,-1}\beta_1 + \psi_{i,-1}\varphi_{i,0}\alpha_0 - n\psi_{i,0}\beta_0 = 0.$$

Из условий теоремы следует, что $n_i\alpha_1 - \psi_{i,-1}\beta_1 = 0$. Итак, если $k = 1$, то предположение (20) верно. Аналогично докажем, что условие (20) верно для $k + 1$ при предположении, что условие (20) верно для k , где $k < 2n_i - 1$. Из прямых вычислений видно, что

$$\begin{aligned} (n_i - k)\alpha_k - \psi_{i,-1}\beta_k - \psi_{i,0}\beta_{k-1} - \dots - \psi_{i,k-1}\beta_0 &= z\alpha_{k-1}, \\ -(n_i - k)\beta_k + \varphi_{i,-1}\alpha_k + \varphi_{i,0}\alpha_{k-1} + \dots + \varphi_{i,k-1}\alpha_0 &= z\beta_{k-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Умножим первое уравнение системы (22) на n_i , второе на $(-1)^{k+1}\psi_{i,-1}$ и сложим их. Прямым подсчетом легко увидеть, что из условий теоремы следует формула (20).

Теперь рассмотрим коэффициент при члене $(x - a_i)^{n_i-1}$:

$$\begin{aligned} n_i\alpha_{2n_i} - \psi_{i,-1}\beta_{2n_i} - \psi_{i,0}\beta_{2n_i-1} - \dots - \psi_{2n_i-1}\beta_0 &= z\alpha_{2n_i-1}, \\ \varphi_{i,-1}\alpha_{2n_i} + \varphi_{i,0}\alpha_{2n_i-1} + \dots + \varphi_{2n_i-1}\alpha_0 - n\beta_{2n_i} &= z\beta_{2n_i-1}, \\ n_i\alpha_{2n_i} &= z\alpha_{2n_i-1} + \psi_{i,-1}\beta_{2n_i} + \psi_{i,0}\beta_{2n_i-1} + \dots + \psi_{2n_i-1}\beta_0, \\ \varphi_{i,-1}\alpha_{2n_i} &= n_i\beta_{2n_i} - \varphi_{i,0}\alpha_{2n_i-1} - \dots - \varphi_{2n_i-1}\alpha_0 + z\beta_{2n_i-1}. \end{aligned}$$

Эта система имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} z\frac{\alpha_{2n_i-1}}{n_i} + \frac{\psi_{i,-1}\beta_{2n_i}}{n_i} + \frac{\psi_{i,0}\beta_{2n_i-1}}{n_i} + \dots + \frac{\psi_{2n_i-1}\beta_0}{n_i} - \\ - n_i\frac{\beta_{2n_i}}{\varphi_{i,-1}} - \frac{\varphi_{i,0}\alpha_{2n_i-1}}{\varphi_{i,-1}} - \dots - \frac{\varphi_{2n_i-1}\alpha_0}{\varphi_{i,-1}} - z\frac{\beta_{2n_i-1}}{\varphi_{i,-1}} = 0. \end{aligned}$$

Но известно, что $\varphi_{i,-1}\psi_{i,-1} = n^2$, и из условий теоремы и равенства (20) следует, что

$$\begin{aligned} \beta_{2n_i} \left(\frac{\varphi_{i,-1}\psi_{i,-1} - n_i^2}{n_i\varphi_{i,-1}} \right) + \frac{\varphi_{i,-1}\psi_{i,0}\beta_{2n_i-1} - n_i\varphi_{i,0}\alpha_{2n_i-1}}{n_i\varphi_{i,-1}} + \dots + \\ + \frac{\varphi_{i,-1}\psi_{i,2n_i-1}\beta_0 - n_i\varphi_{i,2n_i-1}\alpha_0}{n_i\varphi_{i,-1}} + z \left(\frac{\varphi_{i,-1}\alpha_{2n_i-1} - n_i\beta_{2n_i-1}}{n_i\varphi_{i,-1}} \right) = \\ = \varphi_{i,0} \left(\frac{\psi_{i,-1}\beta_{2n_i-1} - n_i\alpha_{2n_i-1}}{n_i\varphi_{i,-1}} \right) + \dots + \varphi_{i,2n_i-1} \frac{-\psi_{i,-1}\beta_0 - n_i\alpha_0}{n_i\varphi_{i,-1}} + \\ + z \left(\frac{\varphi_{i,-1}\alpha_{2n_i-1} - n_i\beta_{2n_i-1}}{n_i\varphi_{i,-1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Итак, $y = (y_1(x), y_2(x))^T$, где $\sigma = \pm n_i$, являются двумя линейно независимыми формальными решениями. Следовательно, y есть настоящее решение, а не формальное, в окрестности a_i (см. работу [29]). В итоге мы получаем, что решения (21) локально мероморфны для любого $z \in \mathbb{C}$. Теорема доказана.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5

Предположим, что $u(x)$ является рациональной функцией, функцией с одним периодом или эллиптической функцией. Допустим, что $u(x)$ не имеет изолированного полюса в бесконечности. Допустим, $u(x)$ имеет конечное число полюсов в фундаментальной ленте или фундаментальном параллелограмме. Пусть функция $u(x)$ имеет полюсы в точках $a_1, a_2, \dots, a_N$. В окрестности точки a_i

$$u(x) = \frac{a_{i,-2}}{(x - a_i)^2} + \frac{a_{i,-1}}{x - a_i} + a_{i,0} + a_{i,1}(x - a_i) + O((x - a_i)^2).$$

Теорема 4 следует из следующей теоремы [30].

ТЕОРЕМА 6. *Функция $u(x)$ является конечнозонным потенциалом Шредингера тогда и только тогда, когда $a_{i,-2} = n_i(n_i + 1)$, $a_{i,-1} = 0$, $a_{i,1} = 0, \dots, a_{2n_i-1} = 0$.*

Но мы уже доказали, что в окрестности полюса a_i ряд Лорана функции $(n+1)pq/n$ имеет вид

$$\frac{n(n+1)}{(x - a_i)^2} + \sum_{t=0}^{t=n_i} h_{i,2t}(x - a_i)^{2t} + h_{2n_i+1}(x - a_i)^{2n_i+1} + O((x - a_i)^{2n_i+2}).$$

Теорема доказана.

Благодарности. Автор благодарен профессорам О. И. Мохову и А. О. Смирнову за полезные советы и обсуждения.

Список литературы

- [1] G. Wallenberg, “Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differentialausdrücke”, *Arch. Math. Phys.* (3), **4** (1903), 252–268.
- [2] J. Schur, “Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke”, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, **4** (1905), 2–8.
- [3] J. L. Burchall, T. W. Chaundy, “Commutative ordinary differential operators”, *Proc. London Math. Soc.*, **21** (1923), 420–440.
- [4] П. Г. Гриневич, “Векторный ранг коммутирующих матричных дифференциальных операторов. Доказательство критерия С. П. Новикова”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:3 (1986), 458–478.
- [5] J. Dixmier, “Sur les algèbres de Weyl”, *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 209–242.
- [6] И. М. Кричевер, “Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии”, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:1 (1977), 15–31.
- [7] И. М. Кричевер, “Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 20–31.
- [8] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения”, *УМН*, **35**:6(216) (1980), 47–68.
- [9] О. И. Мохов, “Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 3, отвечающие эллиптической кривой”, *УМН*, **37**:4(226) (1982), 169–170.
- [10] О. И. Мохов, “Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:6 (1989), 1291–1315.
- [11] A. E. Mironov, “Self-adjoint commuting ordinary differential operators”, *Invent. Math.*, **197**:2 (2014), 417–431.

- [12] A. E. Mironov, “Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators”, *Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics. Novikov’s Seminar 2012–2014*, American Mathematical Society Translations: Series 2, **234**, eds. V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI, 2014, 309–322.
- [13] В. С. Оганесян, “Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2 с полиномиальными коэффициентами”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:1 (2016), 67–75.
- [14] V. Oganessian, “Explicit characterization of some commuting differential operators of rank 2”, *Int. Math. Res. Not.*, **2017**:6 (2017), 1623–1640.
- [15] В. С. Оганесян, “Общие собственные функции коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2”, *Матем. заметки*, **99**:2 (2016), 283–287.
- [16] В. Н. Давлетшина, “Коммутирующие дифференциальные операторы ранга два с тригонометрическими коэффициентами”, *Сиб. матем. журн.*, **56**:3 (2015), 513–519.
- [17] О. И. Мохов, “О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода”, *Матем. заметки*, **94**:2 (2013), 314–316.
- [18] O. I. Mokhov, “Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients”, *Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics. Novikov’s Seminar 2012–2014*, American Mathematical Society Translations: Series 2, **234**, eds. V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI, 2014, 323–336.
- [19] A. E. Mironov, A. B. Zheglov, “Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra”, *Int. Math. Res. Not.*, **2016**:10 (2016), 2974–2993.
- [20] V. Oganessian, “Matrix commuting differential operators of rank 2”, *Int. Math. Res. Not.*, **2017**:6 (2017), 1623–1640.
- [21] A. O. Smirnov, “Finite-gap elliptic solutions of the KdV equation”, *Acta Appl. Math.*, **36**:1–2 (1994), 125–166.
- [22] А. О. Смирнов, “Вещественные конечнозонные регулярные решения уравнения Каупа–Буссинеска”, *ТМФ*, **66**:1 (1986), 30–46.
- [23] А. О. Смирнов, “Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза”, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 103–114.
- [24] Б. А. Дубровин, “Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия”, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:4 (1977), 28–41.
- [25] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, *УМН*, **31**:1(187) (1976), 55–136.
- [26] F. Gesztesy, R. Weikard, “A characterization of all elliptic algebro-geometric solutions of the AKNS hierarchy”, *Acta Math.*, **181**:1 (1998), 63–108.
- [27] R. Weikard, “On commuting matrix differential operators”, *New York J. Math.*, **8** (2002), 9–30.
- [28] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1956.
- [29] E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Krieger, Malabar, FL, 1984.
- [30] F. Gesztesy, K. Unterkofler, R. Weikard, “An explicit characterization of Calogero–Moser systems”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358**:2 (2006), 603–656.