Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Жунь-Лян Линь, Юй-Кунь Ду, Обобщенное преобразование Дарбу для дискретного уравнения Кадомцева–Петвиашвили с самосогласованными источниками, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 3, 434–448

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9465>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:00:53

© 2018 г.

Жунь-Лян Линь*, Юй-Кунь Ду*

ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ С САМОСОГЛАСОВАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Построены некоторые типы преобразования Дарбу для дискретного уравнения Кадомцева–Петвиашвили с самосогласованными источниками, включая элементарное преобразование Дарбу, сопряженное преобразование Дарбу, а также двойное преобразование Дарбу. Данные преобразования Дарбу могут быть использованы для решения дискретного уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Некоторые из решений приведены в явном виде.

Ключевые слова: интегрируемая система с самосогласованными источниками, дискретное уравнение Кадомцева–Петвиашвили, преобразование Дарбу, уравнение Хироты, солитонное решение.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9465>

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитонные уравнения с самосогласованными источниками имеют многочисленные физические применения (см., например, [1]–[5]). Интегрирование некоторых из этих уравнений проводится различными методами, например методом обратного рассеяния [5], [6] (с явной парой Лакса), методом Хироты [7], [8], с помощью преобразования Дарбу [9], [10], а также методом одевания [11], [12].

Ранее был предложен ряд методов для построения солитонных уравнений с самосогласованными источниками. Например, некоторые из них можно получить на основе ограниченных потоков солитонного уравнения (см. [9] и приведенные там ссылки). Еще одним систематическим подходом к построению некоторых таких уравнений является использование симметрии “квадрата собственной функции” [11], [13]–[15]. Тау-функция и билинейные тождества иерархии Кадомцева–

Работа выполнена при поддержке National Natural Science Foundation, China (№ 11471182).

*Department of Mathematical Sciences, School of Sciences, Tsinghua University, Beijing, China.
E-mail: rlin@math.tsinghua.edu.cn, rlin@mail.tsinghua.edu.cn, duyk16@mails.tsinghua.edu.cn

Петвиашвили (КП) (и иерархии КП типа В) с самосогласованным источником были приведены в работах [13], [14]. Также было обнаружено, что самосогласованный источник связан с нелокальной симметрией [16].

Полностью дискретное уравнение КП с самосогласованными источниками было впервые получено так называемым методом обобщенного источника [7]. Основная идея этого подхода включает в себя нахождение дифференциального (или разностного) уравнения, которое имеет решение, полученное заменой константы в решении интегрируемой системы (без источника) произвольной функцией некоторых независимых переменных [7]. В дальнейшем Долива и один из авторов настоящей работы обнаружили [17], что дискретное уравнение КП также можно построить с использованием бинарного преобразования Дарбу для исходного уравнения КП. Данный подход обеспечивает систематический способ для получения (дифференциального и разностного) солитонного уравнения с самосогласованными источниками. Недавно на основе бинарного преобразования Дарбу было построено еще одно солитонное уравнение с самосогласованными источниками [18].

Полностью дискретное уравнение КП, также известное как уравнение Хироты–Мивы, является очень важной дискретной интегрируемой моделью [19]–[21]. Дискретное уравнение КП с самосогласованными источниками можно построить с использованием метода обобщенного источника [7] или путем бинарного преобразования Дарбу [17]. Дискретное уравнение КП имеет вид

$$\begin{aligned} \tau_{,1}\tau_{,jk} - \tau_{,j}\tau_{,1k} + \tau_{,k}\tau_{,1j} &= -(\tau\omega^*)_{,jk}(\tau\pi)_{,1}, \quad 1 < j < k, \\ \pi_{,j} - \pi_{,k} &= \pi \frac{\tau\tau_{,jk}}{\tau_{,j}\tau_{,k}}, \quad \omega_{,k}^* - \omega_{,j}^* = \omega_{,jk}^* \frac{\tau\tau_{,jk}}{\tau_{,j}\tau_{,k}}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где π представляет собой N -размерный вектор-столбец (N – неотрицательное целое число), ω^* – N -размерная вектор-строка, и мы используем здесь определение для сдвига по дискретным переменным: $\tau_{,j}(n_1, \dots, n_j, \dots) = \tau(n_1, \dots, n_j + 1, \dots)$, $\tau_{,-j}(n_1, \dots, n_j, \dots) = \tau(n_1, \dots, n_j - 1, \dots)$ и т. д.

В настоящей работе построено несколько типов преобразования Дарбу для дискретного уравнения КП с самосогласованными источниками (1.1), включая элементарное преобразование Дарбу, сопряженное преобразование Дарбу и бинарное преобразование Дарбу. Такого рода преобразования Дарбу могут быть использованы для решения дискретного уравнения КП. Некоторые решения приведены в явном виде.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 обсуждаются (сопряженные) линейные задачи для дискретного уравнения КП и построено элементарное преобразование Дарбу для этого уравнения. В разделах 3, 4 построено сопряженное преобразование Дарбу и бинарное преобразование Дарбу для дискретного уравнения КП. В разделе 5 приведены явные решения для этого уравнения с использованием элементарного преобразования Дарбу. Раздел 6 содержит выводы и комментарии.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ КП

Дискретное уравнение КП с самосогласованными источниками (1.1) [7] представляет собой условие совместности следующих линейных задач [17]:

$$\psi_{,1} - \psi_{,j} = \psi \frac{\tau\tau_{,1j}}{\tau_{,1}\tau_{,j}} - \Omega[\psi, \omega^*]_{,j} \pi_{,1}, \quad 1 < j < k, \quad (2.1a)$$

$$\psi_{,j} - \psi_{,k} = \psi \frac{\tau\tau_{,jk}}{\tau_{,j}\tau_{,k}}, \quad (2.1b)$$

где $\Omega[\psi, \omega^*]$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta_{,j}\Omega[\psi, \omega^*] \equiv \Omega[\psi, \omega^*]_{,j} - \Omega[\psi, \omega^*] = \psi\omega^*_{,j}, \quad j > 1.$$

Сопряженные линейные задачи для дискретного уравнения КП (1.1) представлены в работе [17]:

$$\begin{aligned} \psi^*_{,j} - \psi^*_{,1} &= \psi^*_{,1j} \frac{\tau\tau_{,1j}}{\tau_{,1}\tau_{,j}} + \omega^*_{,j} \Omega[\pi, \psi^*]_{,1}, \quad 1 < j < k, \\ \psi^*_{,j} - \psi^*_{,k} &= \psi^*_{,jk} \frac{\tau\tau_{,jk}}{\tau_{,j}\tau_{,k}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\Omega[\pi, \psi^*]$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta_{,j}\Omega[\pi, \psi^*] \equiv \Omega[\pi, \psi^*]_{,j} - \Omega[\pi, \psi^*] = \pi\psi^*_{,j}, \quad j > 1.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть ψ и ψ^* удовлетворяют задачам (2.1) и (2.2) соответственно, тогда существует потенциал $\Omega[\psi, \psi^*]$, который удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} \Delta_{,j}\Omega[\psi, \psi^*] &\equiv \Omega[\psi, \psi^*]_{,j} - \Omega[\psi, \psi^*] = \psi\psi^*_{,j}, \quad j > 1, \\ \Delta_{,1}\Omega[\psi, \psi^*] &\equiv \Omega[\psi, \psi^*]_{,1} - \Omega[\psi, \psi^*] = \psi\psi^*_{,1} - \Omega[\psi, \omega^*]\Omega[\pi, \psi^*]_{,1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Действительно, можно доказать, что $(\Omega[\psi, \psi^*]_{,i})_{,j} = (\Omega[\psi, \psi^*]_{,j})_{,i}$ для всех i и j .

Тогда мы имеем следующее обобщенное элементарное преобразование Дарбу для дискретного уравнения КП (1.1).

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что функции ψ, ψ^*, τ, π и ω^* (размерности M) удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2) для дискретного уравнения КП (1.1), тогда функции $\psi^D, \psi^{*D}, \tau^D, \pi^D$ и ω^{*D} (размерности $M+1$) также удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2),

$$\begin{aligned} \psi^D &= \psi_{,j} - \frac{\psi s_{,j}}{s}, \quad \psi^{*D} = -\frac{\Omega[s, \psi^*]}{s}, \quad \tau^D = \tau s, \\ \pi^D &= \left(\pi_{,j} - \frac{\pi s_{,j}}{s}, \theta_{,j} - \frac{\theta s_{,j}}{s} \right)^T, \quad \omega^{*D} = \left(-\frac{\Omega[s, \omega^*]}{s}, \frac{c_{,1} - c}{s} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $s = c(n_1)\theta + \rho$, где θ и ρ – два независимых решения линейных задач (2.1) относительно ψ , а $c(n_1)$ представляет собой произвольную функцию от n_1 .

Для доказательства теоремы 1 приведем лемму, которую можно легко проверить.

ЛЕММА 1. Пусть $s = c(n_1)\theta + \rho$ задано, как в теореме 1; обозначим $s' \equiv \theta \cdot c_{-1} + \rho$, $\Omega[s, \psi^*] \equiv \Omega[\theta, \psi^*] \cdot c + \Omega[\rho, \psi^*]$ и $\Omega[s', \psi^*] \equiv \Omega[\theta, \psi^*] \cdot c_{-1} + \Omega[\rho, \psi^*]$, тогда имеем следующие тождества:

$$s'_{,1} - s_{,j} = s \frac{\tau\tau_{,1j}}{\tau_{,1}\tau_{,j}} - \Omega[s, \omega^*]_{,j}\pi_{,1}, \quad (2.5)$$

$$\Omega[s', \psi^*]_{,1} = \Omega[s, \psi^*] + s\psi^*_{,1} - \Omega[s, \omega^*]\Omega[\pi, \psi^*]_{,1}, \quad (2.6)$$

$$\Omega[s, \psi^*]_{,j} = \Omega[s, \psi^*] + s\psi^*_{,j} \quad \forall j > 1, \quad (2.7)$$

$$\Omega[\psi^{\mathcal{D}}, \psi^{*\mathcal{D}}] = \Omega[\psi, \psi^*] - \frac{\psi\Omega[s, \psi^*]}{s}. \quad (2.8)$$

Лемму можно проверить прямыми расчетами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим $\pi^{\mathcal{D}} \equiv (\bar{\pi}^{\mathcal{D}}, \tilde{\pi}^{\mathcal{D}})^T$ и $\omega^{*\mathcal{D}} \equiv (\bar{\omega}^{*\mathcal{D}}, \tilde{\omega}^{*\mathcal{D}})$ в (2.4), т. е. $\bar{\pi}^{\mathcal{D}} = \pi_{,j} - \pi s_{,j}/s$, $\tilde{\pi}^{\mathcal{D}} = \theta_{,j} - \theta s_{,j}/s$, $\bar{\omega}^{*\mathcal{D}} = -\Omega[s, \omega^*]/s$ и $\tilde{\omega}^{*\mathcal{D}} = (c_{,1} - c)/s$.

Используя лемму 1, проведем следующие вычисления:

$$\begin{aligned} & \psi^{\mathcal{D}}_{,1} - \psi^{\mathcal{D}}_{,j} - \psi^{\mathcal{D}} \frac{\tau^{\mathcal{D}}\tau_{,1j}}{\tau_{,1}\tau_{,j}} = \left(\psi_{,1j} - \frac{\psi_{,1}s_{,1j}}{s_{,1}} \right) - \left(\psi_{,jj} - \frac{\psi_{,j}s_{,jj}}{s_{,j}} \right) - \\ & \quad - \left(\psi_{,j} - \frac{\psi s_{,j}}{s} \right) \frac{\tau\tau_{,1j}}{\tau_{,1}\tau_{,j}} \frac{ss_{,1j}}{s_{,1}s_{,j}} = \\ & = (\psi_{,1j} - \psi_{,jj}) + \frac{s_{,jj}}{s_{,j}}\psi_{,j} - \frac{s_{,1j}}{s_{,1}} \left(\psi_{,j} + \frac{\tau\tau_{,1j}}{\tau_{,1}\tau_{,j}}\psi - \Omega[\psi, \omega^*]_{,j}\pi_{,1} \right) - \\ & \quad - \frac{\tau\tau_{,1j}}{\tau_{,1}\tau_{,j}} \frac{ss_{,1j}}{s_{,1}s_{,j}}\psi_{,j} + \frac{\tau\tau_{,1j}}{\tau_{,1}\tau_{,j}} \frac{s_{,1j}}{s_{,1}}\psi = \\ & = \left(\frac{\tau_{,j}\tau_{,1jj}}{\tau_{,1j}\tau_{,jj}} + \frac{s_{,jj}}{s_{,j}} - \frac{s_{,1j}}{s_{,1}} - \frac{\tau\tau_{,1j}}{\tau_{,1}\tau_{,j}} \frac{ss_{,1j}}{s_{,1}s_{,j}} \right) \psi_{,j} - \\ & \quad - \Omega[\psi, \omega^*]_{,jj}\pi_{,1,1j} + \frac{s_{,1j}}{s_{,1}}\Omega[\psi, \omega^*]_{,j}\pi_{,1} = \\ & = \left(\frac{s'_{,1j} - s_{,jj} + \Omega[s, \omega^*]_{,jj}\pi_{,1j}}{s_{,j}} + \frac{s_{,jj}}{s_{,j}} - \frac{s_{,1j}}{s_{,1}} - \frac{s'_{,1} - s_{,j} + \Omega[s, \omega^*]_{,j}\pi_{,1}}{s} \frac{ss_{,1j}}{s_{,1}s_{,j}} \right) \psi_{,j} - \\ & \quad - \Omega[\psi, \omega^*]_{,jj}\pi_{,1,1j} + \frac{s_{,1j}}{s_{,1}}\Omega[\psi, \omega^*]_{,j}\pi_{,1} = \\ & = \left(\frac{s'_{,1j}}{s_{,j}} - \frac{s'_{,1j}s_{,1}}{s_{,1}s_{,j}} \right) \psi_{,j} - \Omega[\psi, \omega^*]_{,jj}\pi_{,1,1j} + \frac{s_{,1j}}{s_{,1}}\Omega[\psi, \omega^*]_{,j}\pi_{,1} + \\ & \quad + \frac{\Omega[s, \omega^*]_{,jj}\pi_{,1j}\psi_{,j}}{s_{,j}} - \frac{\Omega[s, \omega^*]_{,j}\pi_{,1}s_{,1j}\psi_{,j}}{s_{,1}s_{,j}} = \\ & = - \left(\frac{(c_{,1} - c)\psi}{s} \right)_{,j} \left(\frac{\theta_{,j}\rho - \theta\rho_{,j}}{s} \right)_{,1} - \\ & \quad - \left(\Omega[\psi, \omega^*]_{,j} - \frac{\Omega[s, \omega^*]_{,j}\psi_{,j}}{s_{,j}} \right) \left(\pi_{,1j} - \frac{\pi_{,1}s_{,1j}}{s_{,1}} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Delta_{,j} \left(\Omega[\psi, \omega^*] - \frac{\Omega[s, \omega^*]\psi}{s} \right) &= \psi \omega^*_{,j} + \frac{\Omega[s, \omega^*]\psi}{s} - \frac{\Omega[s, \omega^*]_{,j} \psi_{,j}}{s_{,j}} = \\ &= \frac{\Omega[s, \omega^*]\psi + \psi \omega^*_{,j} s}{s} - \frac{\Omega[s, \omega^*]_{,j} \psi_{,j}}{s_{,j}} = \frac{\Omega[s, \omega^*]_{,j} \psi}{s} - \frac{\Omega[s, \omega^*]_{,j} \psi_{,j}}{s_{,j}} = \\ &= \left(\psi_{,j} - \frac{\psi s_{,j}}{s} \right) \left(-\frac{\Omega[s, \omega^*]}{s} \right)_{,j} = \psi^{\mathcal{D}} \bar{\omega}^{*\mathcal{D}}_{,j}, \end{aligned}$$

имеем

$$\Omega[\psi, \omega^*] - \frac{\Omega[s, \omega^*]\psi}{s} = \Omega[\psi^{\mathcal{D}}, \bar{\omega}^{*\mathcal{D}}]. \quad (2.10)$$

Отметим, что

$$\Delta_{,j} \left(\frac{(c_{,1} - c)\psi}{s} \right) = (c_{,1} - c) \left(\frac{\psi_{,j}}{s_{,j}} - \frac{\psi}{s} \right) = \left(\psi_{,j} - \frac{\psi s_{,j}}{s} \right) \frac{c_{,1} - c}{s_{,j}} = \psi^{\mathcal{D}} \tilde{\omega}^{*\mathcal{D}}_{,j},$$

получаем

$$\frac{(c_{,1} - c)\psi}{s} = \Omega[\psi^{\mathcal{D}}, \tilde{\omega}^{*\mathcal{D}}]. \quad (2.11)$$

Следовательно, согласно (2.9)–(2.11) получаем

$$\begin{aligned} \psi^{\mathcal{D}}_{,1} - \psi^{\mathcal{D}}_{,j} - \psi^{\mathcal{D}} \frac{\tau^{\mathcal{D}} \tau^{\mathcal{D}}_{,1j}}{\tau^{\mathcal{D}}_{,1} \tau^{\mathcal{D}}_{,j}} &= - \left(\frac{(c_{,1} - c)\psi}{s} \right)_{,j} \left(\frac{\theta_{,j} \rho - \theta \rho_{,j}}{s} \right)_{,1} - \\ &\quad - \left(\Omega[\psi, \omega^*]_{,j} - \frac{\Omega[s, \omega^*]_{,j} \psi_{,j}}{s_{,j}} \right) \left(\pi_{,1j} - \frac{\pi_{,1} s_{,1j}}{s_{,1}} \right) = \\ &= -\Omega[\psi^{\mathcal{D}}, \tilde{\omega}^{*\mathcal{D}}]_{,j} \tilde{\pi}^{\mathcal{D}}_{,1} - \Omega[\psi^{\mathcal{D}}, \bar{\omega}^{*\mathcal{D}}]_{,j} \bar{\pi}^{\mathcal{D}}_{,1} = -\Omega[\psi^{\mathcal{D}}, \omega^{*\mathcal{D}}]_{,j} \pi^{\mathcal{D}}_{,1}. \end{aligned}$$

Это показывает, что $\psi^{\mathcal{D}}$, $\tau^{\mathcal{D}}$, $\pi^{\mathcal{D}}$ и $\omega^{*\mathcal{D}}$ (2.4) удовлетворяют линейной задаче (2.1a).

Аналогично можно проверить, что $\psi^{\mathcal{D}}$, $\psi^{*\mathcal{D}}$, $\tau^{\mathcal{D}}$, $\pi^{\mathcal{D}}$ и $\omega^{*\mathcal{D}}$ (2.4) удовлетворяют линейной задаче (2.1b) и сопряженным линейным задачам (2.2). ■

В дополнение можно вывести формулу для K -кратной суперпозиции элементарного преобразования Дарбу (2.4) в теореме 1, которое может быть задано как

$$\mathcal{D}_{[K]} := \mathcal{D}_{[K]}^{1, \dots, K} = \mathcal{D}_{[1]}^1 \circ \mathcal{D}_{[1]}^2 \circ \dots \circ \mathcal{D}_{[1]}^K, \quad (2.12)$$

где $\mathcal{D}_{[1]}^k$ обозначает элементарное преобразование Дарбу (2.4) с функцией s_k . Тогда можно представить выражение для обобщенного вектора преобразования Дарбу следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что функции ψ, ψ^*, τ, π и ω^* (размерности M) удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2) для дискретного уравнения КП (1.1), тогда функции $\psi^{\mathcal{D}_{[K]}}, \psi^{*\mathcal{D}_{[K]}}, \tau^{\mathcal{D}_{[K]}}, \pi^{\mathcal{D}_{[K]}}$ и $\omega^{*\mathcal{D}_{[K]}}$ (размерности $M + K$) также удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2),*

$$\psi^{\mathcal{D}_{[K]}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^K} \\ \psi & \psi_{,j} & \dots & \psi_{,j^K} \\ \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}, \quad (2.13a)$$

$$\psi^{*\mathcal{D}_{[K]}} = -\frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-2}} & \Omega[\mathbf{s}, \psi^*] \\ \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}, \quad (2.13b)$$

$$\tau^{\mathcal{D}_{[K]}} = \tau \begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix} \equiv \tau \det(\mathbf{s}, \mathbf{s}_{,j}, \dots, \mathbf{s}_{,j^{K-1}}), \quad (2.13c)$$

$$\pi^{\mathcal{D}_{[K]}} = (\bar{\pi}^{\mathcal{D}_{[K]}}, \tilde{\pi}^{\mathcal{D}_{[K]}})^T = (\bar{\pi}_1^{\mathcal{D}_{[K]}}, \dots, \bar{\pi}_M^{\mathcal{D}_{[K]}}, \tilde{\pi}_1^{\mathcal{D}_{[K]}}, \dots, \tilde{\pi}_K^{\mathcal{D}_{[K]}})^T, \quad (2.13d)$$

$$\omega^{*\mathcal{D}_{[K]}} = (\bar{\omega}^{*\mathcal{D}_{[K]}}, \tilde{\omega}^{*\mathcal{D}_{[K]}}) = (\bar{\omega}_1^{*\mathcal{D}_{[K]}}, \dots, \bar{\omega}_M^{*\mathcal{D}_{[K]}}, \tilde{\omega}_1^{*\mathcal{D}_{[K]}}, \dots, \tilde{\omega}_K^{*\mathcal{D}_{[K]}}), \quad (2.13e)$$

где

$$\bar{\pi}_m^{\mathcal{D}_{[K]}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^K} \\ \pi_m & \pi_{m,j} & \dots & \pi_{m,j^K} \\ \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}, \quad m = 1, \dots, M,$$

$$\bar{\omega}_m^{*\mathcal{D}_{[K]}} = -\frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-2}} & \Omega[\mathbf{s}, \omega_m^*] \\ \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}},$$

$$\tilde{\pi}_k^{\mathcal{D}_{[K]}} = \frac{\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{s}}_k & \hat{\mathbf{s}}_{k,j} & \dots & \hat{\mathbf{s}}_{k,j^K} \\ \theta_k & \theta_{k,j} & \dots & \theta_{k,j^K} \\ \rho_k & \rho_{k,j} & \dots & \rho_{k,j^K} \\ \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}, \quad k = 1, \dots, K,$$

$$\tilde{\omega}_k^{*\mathcal{D}_{[K]}} = (c_{k,1} - c_k) \frac{\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{s}}_k & \hat{\mathbf{s}}_{k,j} & \dots & \hat{\mathbf{s}}_{k,j^{K-2}} \\ \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}.$$

Здесь $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_K)^T$, $s_k = c_k(n_1)\theta_k + \rho_k$, где θ_k и ρ_k – два независимых решения задачи (2.1) относительно ψ , а $c_k(n_1)$ является произвольной функцией от n_1 , $\hat{\mathbf{s}}_k = (s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_K)^T$, $\mathbf{s}_{,j^k} \equiv \mathbf{s}_{,j,j,\dots,j}$ (существуют k копий “ j ” в индексе в правой части).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем для доказательства метод математической индукции.

При $K = 1$ равенства (2.13) справедливы в силу теоремы 1.

Если равенства (2.13) справедливы для случая K , проверим случай $K + 1$.

Докажем формулу для $\tau^{\mathcal{D}_{[K+1]}}$ (2.13c):

$$\begin{aligned}\tau^{\mathcal{D}_{[K+1]}} &= \tau^{\mathcal{D}_{[K]}} s_{K+1}^{\mathcal{D}_{[K]}} = \tau \begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix} \cdot \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^K} \\ s_{K+1} & s_{K+1,j} & \dots & s_{K+1,j^K} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}} = \\ &= \tau \begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^K} \\ s_{K+1} & s_{K+1,j} & \dots & s_{K+1,j^K} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Чтобы доказать формулу для $\psi^{\mathcal{D}_{[K+1]}}$ (2.13a), положим, что $D = \begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K+1}} \\ \psi & \psi_{,j} & \dots & \psi_{,j^{K+1}} \end{vmatrix}$ и D_j^i обозначают детерминанты минора D , полученного устранением i -й строки и j -го столбца. Воспользуемся тождеством Якоби [22] и в результате получим формулу для $\psi^{\mathcal{D}_{[K+1]}}$ (2.13a):

$$\begin{aligned}\psi^{\mathcal{D}_{[K+1]}} &= (\psi^{\mathcal{D}_{[K]}})^{\mathcal{D}_{[1]}^{K+1}} = \psi_{,j}^{\mathcal{D}_{[K]}} - \frac{\psi^{\mathcal{D}_{[K]}} s_{K+1,j}^{\mathcal{D}_{[K]}}}{s_{K+1}^{\mathcal{D}_{[K]}}} = \\ &= \frac{D_1^{K+1}}{D_{1,K+2}^{K+1,K+2}} - \frac{D_{K+2}^{K+1} D_1^{K+2}}{D_{K+2}^{K+2} D_{1,K+2}^{K+1,K+2}} = \frac{D_1^{K+1} D_{K+2}^{K+2} - D_{K+2}^{K+1} D_1^{K+2}}{D_{K+2}^{K+2} D_{1,K+2}^{K+1,K+2}} = \\ &= \frac{D D_{1,K+2}^{K+1,K+2}}{D_{K+2}^{K+2} D_{1,K+2}^{K+1,K+2}} = \frac{D}{D_{K+2}^{K+2}}.\end{aligned}$$

Для доказательства формулы для $\psi^{*\mathcal{D}_{[K+1]}}$ (2.13b) сначала докажем следующее тождество:

$$\Omega[\psi^{\mathcal{D}_{[K+1]}}, \psi^{*\mathcal{D}_{[K+1]}}] = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^K} & \Omega[\mathbf{s}, \psi^*] \\ \psi & \psi_{,j} & \dots & \psi_{,j^K} & \Omega[\psi, \psi^*] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^K} \end{vmatrix}}. \quad (2.14)$$

Чтобы доказать (2.14), положим $\tilde{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^K} & \Omega[\mathbf{s}, \psi^*] \\ \psi & \psi_{,j} & \dots & \psi_{,j^K} & \Omega[\psi, \psi^*] \end{vmatrix}$, тогда

$$\begin{aligned}\Omega[\psi^{\mathcal{D}_{[K+1]}}, \psi^{*\mathcal{D}_{[K+1]}}] &= \Omega[\psi^{\mathcal{D}_{[K]}}, \psi^{*\mathcal{D}_{[K]}}] - \frac{\Omega[s_{K+1}^{\mathcal{D}_{[K]}}, \psi^{*\mathcal{D}_{[K]}}] \psi^{\mathcal{D}_{[K]}}}{s_{K+1}^{\mathcal{D}_{[K]}}} = \\ &= \frac{\tilde{D}_{K+1}^{K+1}}{\tilde{D}_{K+1}^{K+1,K+2}} - \frac{\tilde{D}_{K+1}^{K+2} \tilde{D}_{K+2}^{K+1}}{\tilde{D}_{K+1}^{K+1,K+2} \tilde{D}_{K+2}^{K+2}} = \frac{\tilde{D}_{K+1}^{K+1} \tilde{D}_{K+2}^{K+2} - \tilde{D}_{K+1}^{K+2} \tilde{D}_{K+2}^{K+1}}{\tilde{D}_{K+1}^{K+1,K+2} \tilde{D}_{K+2}^{K+2}} = \\ &= \frac{\tilde{D} \tilde{D}_{K+1,K+2}^{K+1,K+2}}{\tilde{D}_{K+1,K+2}^{K+1,K+2} \tilde{D}_{K+2}^{K+2}} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{D}_{K+2}^{K+2}},\end{aligned}$$

что равно правой части (2.14). Согласно тождеству (2.14) получаем формулу для $\psi^{*\mathcal{D}_{[K+1]}}$ (2.13b):

$$\begin{aligned} \psi^{*\mathcal{D}_{[K+1]}} &= -\frac{\Omega[s_{K+1}^{\mathcal{D}_{[K]}}, \psi^{*\mathcal{D}_{[K]}}]}{s_{K+1}^{\mathcal{D}_{[K]}}} = \\ &= -\frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} & \Omega[\mathbf{s}, \psi^*] \\ s_{K+1} & s_{K+1,j} & \dots & s_{K+1,j^{K-1}} & \Omega[s_{K+1}, \psi^*] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}} \times \\ &\quad \times \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^K} \\ s_{K+1} & s_{K+1,j} & \dots & s_{K+1,j^K} \end{vmatrix}} = \\ &= -\frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^{K-1}} & \Omega[\mathbf{s}, \psi^*] \\ s_{K+1} & s_{K+1,j} & \dots & s_{K+1,j^{K-1}} & \Omega[s_{K+1}, \psi^*] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{s}_{,j} & \dots & \mathbf{s}_{,j^K} \\ s_{K+1} & s_{K+1,j} & \dots & s_{K+1,j^K} \end{vmatrix}}. \end{aligned}$$

Докажем формулу для $\pi^{\mathcal{D}_{[K+1]}}$ (2.13d):

$$\begin{aligned} \pi^{\mathcal{D}_{[K+1]}} &= (\bar{\pi}^{\mathcal{D}_{[K]}}, \tilde{\pi}^{\mathcal{D}_{[K]}})^{\mathcal{D}_{[1]}^{K+1}} = (\bar{\pi}^{\mathcal{D}_{[K]}}, \theta^{\mathcal{D}_{[K]}})^{\mathcal{D}_{[1]}^{K+1}} = \\ &= (\bar{\pi}^{\mathcal{D}_{[K+1]}}, \theta^{\mathcal{D}_{[K+1]}})^{\mathcal{D}_{[1]}^{K+1}} = \\ &= (\bar{\pi}^{\mathcal{D}_{[K+1]}}, \theta^{\mathcal{D}_{[K+1]}}, \theta_{K+1}^{\mathcal{D}_{[K+1]}})^{\mathcal{D}_{[1]}^{K+1}} = (\bar{\pi}^{\mathcal{D}_{[K+1]}}, \tilde{\pi}^{\mathcal{D}_{[K+1]}}), \end{aligned}$$

где через θ обозначается набор $(\theta_1, \dots, \theta_K)$. Компоненты $\bar{\pi}^{\mathcal{D}_{[K+1]}}$ и $\theta^{\mathcal{D}_{[K+1]}}$ получены путем аналогичного преобразования для ψ (2.13a), компонента $\theta_{K+1}^{\mathcal{D}_{[K+1]}}$ появляется в силу теоремы 1. Аналогично можно проверить формулу для $\omega^{*\mathcal{D}_{[K+1]}}$ (2.13e). ■

3. СОПРЯЖЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ КП

Построим сопряженное (скалярное) преобразование Дарбу для дискретного уравнения КП (1.1).

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что функции ψ, ψ^*, τ, π и ω^* (размерности M) удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2) для дискретного уравнения КП (1.1), тогда функции $\psi^{\mathcal{D}^*}, \psi^{*\mathcal{D}^*}, \tau^{\mathcal{D}^*}, \pi^{\mathcal{D}^*}$ и $\omega^{*\mathcal{D}^*}$ (размерности $M+1$) также удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2),*

$$\begin{aligned} \psi^{\mathcal{D}^*} &= \frac{\Omega[\psi, s^*]}{s^*}, \quad \psi^{*\mathcal{D}^*} = \psi_{,-j}^* - \frac{\psi_{,-j}^* s_{,-j}^*}{s^*}, \quad \tau^{\mathcal{D}^*} = \tau s^*, \\ \pi^{\mathcal{D}^*} &= (\bar{\pi}^{\mathcal{D}^*}, \tilde{\pi}^{\mathcal{D}^*})^T = \left(\frac{\Omega[\pi, s^*]}{s^*}, \frac{c_{-1}^* - c^*}{s^*} \right)^T, \\ \omega^{*\mathcal{D}^*} &= (\bar{\omega}^{*\mathcal{D}^*}, \tilde{\omega}^{*\mathcal{D}^*}) = \left(\omega_{,-j}^* - \frac{\omega_{,-j}^* s_{,-j}^*}{s^*}, \theta_{,-j}^* - \frac{\theta_{,-j}^* s_{,-j}^*}{s^*} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $s^* = \theta^* \cdot c^*(n_1) + \rho^*$, где θ_k^* и ρ_k^* – два независимых решения задачи (2.2) относительно ψ^* , а $c^*(n_1)$ представляет собой произвольную функцию от n_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 1.

Рассмотрим формулу для K суперпозиций обобщенного сопряженного преобразования Дарбу (3.1). Пусть

$$s_k^* = \theta_k^* \cdot c_k^*(n_1) + \rho_k^*,$$

где θ_k^* и ρ_k^* представляют собой два независимых решения сопряженных линейных задач (2.2). Обобщенное сопряженное векторное преобразование Дарбу получено K -кратной суперпозицией обобщенных сопряженных (скалярных) преобразований Дарбу (3.1)

$$\mathcal{D}_{[K]}^* := \mathcal{D}_{[K]}^{*1, \dots, K} = \mathcal{D}_{[1]}^{*1} \circ \mathcal{D}_{[1]}^{*2} \circ \dots \circ \mathcal{D}_{[1]}^{*K}, \quad (3.2)$$

где $\mathcal{D}_{[1]}^{*k}$ обозначает элементарное сопряженное преобразование Дарбу (3.1) с функцией s_k^* .

Следовательно, мы имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что ψ , ψ^* , τ , π и ω^* (размерности M) удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2) для дискретного уравнения КП (1.1), тогда $\psi^{\mathcal{D}^*[K]}$, $\psi^{*\mathcal{D}^*[K]}$, $\tau^{\mathcal{D}^*[K]}$, $\pi^{\mathcal{D}^*[K]}$ и $\omega^{*\mathcal{D}^*[K]}$ (размерности $M + K$) также удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2),*

$$\begin{aligned} \psi^{\mathcal{D}^*[K]} &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s}^{*\text{T}} & \mathbf{s}_{,-j}^{*\text{T}} & \dots & \mathbf{s}_{,-j^{K-2}}^{*\text{T}} & \Omega[\psi, \mathbf{s}^{*\text{T}}] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s}^{*\text{T}} & \mathbf{s}_{,-j}^{*\text{T}} & \dots & \mathbf{s}_{,-j^{K-1}}^{*\text{T}} \end{vmatrix}}, \\ \psi^{*\mathcal{D}^*[K]} &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s}^{*\text{T}} & \mathbf{s}_{,-j}^{*\text{T}} & \dots & \mathbf{s}_{,-j^K}^{*\text{T}} \\ \psi^* & \psi_{,-j}^* & \dots & \psi_{,-j^K}^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s}^{*\text{T}} & \mathbf{s}_{,-j}^{*\text{T}} & \dots & \mathbf{s}_{,-j^{K-1}}^{*\text{T}} \end{vmatrix}}, \quad \tau^{\mathcal{D}^*[K]} = \tau \begin{vmatrix} \mathbf{s}^{*\text{T}} & \mathbf{s}_{,-j}^{*\text{T}} & \dots & \mathbf{s}_{,-j^{K-1}}^{*\text{T}} \end{vmatrix}, \\ \pi^{\mathcal{D}^*[K]} &= (\bar{\pi}^{\mathcal{D}^*[K]}, \tilde{\pi}^{\mathcal{D}^*[K]})^{\text{T}} = (\bar{\pi}_1^{\mathcal{D}^*[K]}, \dots, \bar{\pi}_M^{\mathcal{D}^*[K]}, \tilde{\pi}_1^{\mathcal{D}^*[K]}, \dots, \tilde{\pi}_K^{\mathcal{D}^*[K]})^{\text{T}}, \\ \omega^{*\mathcal{D}^*[K]} &= (\bar{\omega}^{*\mathcal{D}^*[K]}, \tilde{\omega}^{*\mathcal{D}^*[K]}) = (\bar{\omega}_1^{*\mathcal{D}^*[K]}, \dots, \bar{\omega}_M^{*\mathcal{D}^*[K]}, \tilde{\omega}_1^{*\mathcal{D}^*[K]}, \dots, \tilde{\omega}_K^{*\mathcal{D}^*[K]}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_m^{\mathcal{D}^*[K]} &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s}^{*\text{T}} & \mathbf{s}_{,-j}^{*\text{T}} & \dots & \mathbf{s}_{,-j^{K-2}}^{*\text{T}} & \Omega[\pi_m, \mathbf{s}^{*\text{T}}] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s}^{*\text{T}} & \mathbf{s}_{,-j}^{*\text{T}} & \dots & \mathbf{s}_{,-j^{K-1}}^{*\text{T}} \end{vmatrix}}, \quad 1 \leq m \leq M, \\ \bar{\omega}_m^{*\mathcal{D}^*[K]} &= \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{s}^{*\text{T}} & \mathbf{s}_{,-j}^{*\text{T}} & \dots & \mathbf{s}_{,-j^K}^{*\text{T}} \\ \omega_m^* & \omega_{m,-j}^* & \dots & \omega_{m,-j^K}^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{s}^{*\text{T}} & \mathbf{s}_{,-j}^{*\text{T}} & \dots & \mathbf{s}_{,-j^{K-1}}^{*\text{T}} \end{vmatrix}}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\pi}_k^{\mathcal{D}^*[K]} = (c_{k,-1}^* - c_k^*) \frac{\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{s}}_k^{*\text{T}} & \hat{\mathbf{s}}_{k,-j}^{*\text{T}} & \cdots & \hat{\mathbf{s}}_{k,-j^{K-2}}^{*\text{T}} \\ \mathbf{s}^{*\text{T}} & \mathbf{s}_{,-j}^{*\text{T}} & \cdots & \mathbf{s}_{,-j^{K-1}}^{*\text{T}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{s}}_k^{*\text{T}} & \hat{\mathbf{s}}_{k,-j}^{*\text{T}} & \cdots & \hat{\mathbf{s}}_{k,-j^K}^{*\text{T}} \\ \theta^* & \theta_{,-j}^* & \cdots & \theta_{,-j^K}^* \\ \rho^* & \rho_{,-j}^* & \cdots & \rho_{,-j^K}^* \\ \mathbf{s}^{*\text{T}} & \mathbf{s}_{,-j}^{*\text{T}} & \cdots & \mathbf{s}_{,-j^{K-1}}^{*\text{T}} \end{vmatrix}}.$$

Здесь $\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_K^*)$, $s_k^* = \theta_k^* \cdot c_k^*(n_1) + \rho_k^*$, где θ_k^* и ρ_k^* – два независимых решения задачи (2.2) относительно ψ^* , а $c_k^*(n_1)$ является произвольной функцией от n_1 , $\hat{\mathbf{s}}_k^* = (s_1^*, \dots, s_{k-1}^*, s_{k+1}^*, \dots, s_K^*)$, и $\mathbf{s}_{,-j}^* \equiv \mathbf{s}_{,-j,-j,\dots,-j}^*$ (существуют k копий “ $,-j$ ” в нижнем индексе в правой части).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО может быть проведено с использованием математической индукции аналогично доказательству теоремы 2.

4. БИНАРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ КП

В данном разделе построим обобщенное бинарное преобразование Дарбу. Оно представляет собой суперпозицию (2.13) и (3.3):

$$\mathcal{F}_{[K]} = \mathcal{F}_{[K]}^{1,\dots,K} := \mathcal{D}_{[K]}^{1,\dots,K} \circ \mathcal{D}_{[K]}^{*1,\dots,K}, \quad (4.1)$$

при этом мы используем $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_K)^T$ как вектор-столбец в теореме 2 и $\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_K^*)$ как вектор-строку в теореме 4. Имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что ψ , ψ^* , τ , π (с размерностью M) и ω^* (с размерностью M) удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2) для дискретного уравнения КП (1.1), тогда $\psi^{\mathcal{F}_{[K]}}$, $\psi^{*\mathcal{F}_{[K]}}$, $\tau^{\mathcal{F}_{[K]}}$, $\pi^{\mathcal{F}_{[K]}}$ (с размерностью $M + 2K$) и $\omega^{*\mathcal{F}_{[K]}}$ (с размерностью $M + 2K$) также удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2),*

$$\begin{aligned} \psi^{\mathcal{F}_{[K]}} &= \psi - \Omega[\psi, \mathbf{s}^*] \Omega[\mathbf{s}, \mathbf{s}^*]^{-1} \mathbf{s}, & \psi^{*\mathcal{F}_{[K]}} &= \psi^* - \mathbf{s}^* \Omega[\mathbf{s}, \mathbf{s}^*]^{-1} \Omega[\mathbf{s}, \psi^*], \\ \tau^{\mathcal{F}_{[K]}} &= \tau \det(\Omega[\mathbf{s}, \mathbf{s}^*]), \\ \pi^{\mathcal{F}_{[K]}} &= (\bar{\pi}^{\mathcal{F}_{[K]}}, \tilde{\pi}_1^{\mathcal{F}_{[K]}}, \dots, \tilde{\pi}_{2K}^{\mathcal{F}_{[K]}})^T, & \omega^{*\mathcal{F}_{[K]}} &= (\bar{\omega}^{\mathcal{F}_{[K]}}, \tilde{\omega}_1^{\mathcal{F}_{[K]}}, \dots, \tilde{\omega}_{2K}^{\mathcal{F}_{[K]}}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\pi}^{\mathcal{F}_{[K]}} &= \pi - \Omega[\pi, \mathbf{s}^*] \Omega[\mathbf{s}, \mathbf{s}^*]^{-1} \mathbf{s}, \\ \bar{\omega}^{*\mathcal{F}_{[K]}} &= \omega^* - \mathbf{s}^* \Omega[\mathbf{s}, \mathbf{s}^*]^{-1} \Omega[\mathbf{s}, \omega^*], \\ \tilde{\pi}_{2k-1}^{\mathcal{F}_{[K]}} &= \theta_k - \Omega[\theta_k, \mathbf{s}^*] \Omega[\mathbf{s}, \mathbf{s}^*]^{-1} \mathbf{s}, & 1 \leq k \leq K, \\ \tilde{\omega}_{2k-1}^{*\mathcal{F}_{[K]}} &= (c_{k,1}^* - c_k^*) \mathbf{s}^* \Omega[\mathbf{s}, \mathbf{s}^*]^{-1} \mathbf{e}_k^T, \\ \tilde{\pi}_{2k}^{\mathcal{F}_{[K]}} &= (c_k^* - c_{k,-1}^*) \mathbf{e}_k \Omega[\mathbf{s}, \mathbf{s}^*]^{-1} \mathbf{s}, \\ \tilde{\omega}_{2k}^{*\mathcal{F}_{[K]}} &= \theta_k^* - \mathbf{s}^* \Omega[\mathbf{s}, \mathbf{s}^*]^{-1} \Omega[\mathbf{s}, \theta_k^*]. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{e}_k$ является k -й строкой в единичной $(K \times K)$ -матрице, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_K)^T$, $\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_K^*)$, $s_k = \theta_k \cdot c_k(n_1) + \rho_k$ с θ_k и ρ_k – два независимых решения задачи (2.1) относительно ψ , $s_k^* = \theta_k^* \cdot c_k^*(n_1) + \rho_k^*$, где θ_k^* и ρ_k^* – два независимых решения задачи (2.2) относительно ψ^* , а $c_k(n_1)$ и $c_k^*(n_1)$ представляют собой некие произвольные функции от n_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В первую очередь разложим векторное преобразование Дарбу и сопряженное преобразование Дарбу в несколько элементарных преобразований Дарбу. Поскольку композиция элементарного и сопряженного элементарного преобразования Дарбу может изменить порядок, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{[K]}^{1, \dots, K} &= \mathcal{D}_{[K]}^{1, \dots, K} \circ \mathcal{D}_{[K]}^{*1, \dots, K} = \mathcal{D}_{[1]}^1 \circ \dots \circ \mathcal{D}_{[1]}^K \circ \mathcal{D}_{[1]}^{*1} \circ \dots \circ \mathcal{D}_{[1]}^{*K} = \\ &= \mathcal{D}_{[1]}^1 \circ \mathcal{D}_{[1]}^{*1} \circ \dots \circ \mathcal{D}_{[1]}^K \circ \mathcal{D}_{[1]}^{*K} = \mathcal{F}_{[1]}^1 \circ \dots \circ \mathcal{F}_{[1]}^K.\end{aligned}$$

Используя теоремы 1 и 3, получаем, что скалярное бинарное преобразование Дарбу $\mathcal{F}_{[1]}^k$ с функциями s_k и s_k^* имеет вид

$$\begin{aligned}\psi^{\mathcal{F}_{[1]}^k} &= \psi - \Omega[\psi, s_k^*] \Omega[s_k, s_k^*]^{-1} s_k, \\ \psi^{*\mathcal{F}_{[1]}^k} &= \psi^* - s_k^* \Omega[s_k, s_k^*]^{-1} \Omega[s_k, \psi^*], \\ \tau^{\mathcal{F}_{[1]}^k} &= \tau \Omega[s_k, s_k^*],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi^{\mathcal{F}_{[1]}^k} &= (\pi - \Omega[\pi, s_k^*] \Omega[s_k, s_k^*]^{-1} s_k, \theta - \Omega[\theta, s_k^*] \Omega[s_k, s_k^*]^{-1} s_k, (c^* - c_{,-1}^*) \Omega[s_k, s_k^*]^{-1} s_k)^T, \\ \omega^{*\mathcal{F}_{[1]}^k} &= (\omega^* - s_k^* \Omega[s_k, s_k^*]^{-1} \Omega[s_k, \omega^*], (c_{,1} - c) s_k^* \Omega[s_k, s_k^*]^{-1}, \theta^* - s_k^* \Omega[s_k, s_k^*]^{-1} \Omega[s_k, \theta^*]).\end{aligned}$$

Также, используя математическую индукцию, можно доказать, что формулы (4.2) справедливы для K -кратной суперпозиции вышеупомянутого скалярного бинарного преобразования Дарбу. ■

5. ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ КП

Некий вид явного решения τ дискретного уравнения КП без источника (т. е. (1.1) с $\pi = \omega^* = 0$) и соответствующие решения ψ и ψ^* линейных задач (2.1) и (2.2) были введены в работе [23] в виде

$$\psi = \psi(q) = \psi(q; n_1, n_2, \dots, n_N) := \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v}{a_v q - 1} \right)^{-n_v}, \quad (5.1a)$$

$$\psi^* = \psi^*(p) = \psi^*(p; n_1, n_2, \dots, n_N) := \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v}{a_v p - 1} \right)^{n_v}, \quad (5.1b)$$

$$\tau = \tau(n_1, n_2, \dots, n_N) := \prod_{v < w} \left(\frac{a_v - a_w}{a_v a_w} \right)^{n_v n_w}, \quad (5.1c)$$

где q , p и a_v – константы. Функция потенциала, связанная с $\psi(q)$ и $\psi^*(p)$ в (5.1), задана как

$$\Omega[\psi, \psi^*] = \frac{1}{q-p} \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v q - 1}{a_v p - 1} \right)^{n_v} + \text{const.} \quad (5.2)$$

Прежде всего построим решение дискретного уравнения КП (1.1) посредством теоремы 2 при $K = 1$. Зададим $\theta = \psi(q_1)$ и $\rho = \psi(q'_1)$ аналогично (5.1) и $s = c(n_1)\theta + \rho$, затем получим явное решение для дискретного уравнения КП (1.1), как задано в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 6. *Функции*

$$\begin{aligned} \psi &= (q - q'_1) \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v}{a_v q - 1} \right)^{-n_v} \times \\ &\quad \times \left(1 + c \frac{q - q'_1}{q - q'_1} \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v q_1 - 1}{a_v q'_1 - 1} \right)^{n_v} \right) / \left(1 + c \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v q_1 - 1}{a_v q'_1 - 1} \right)^{n_v} \right), \\ \psi^* &= \frac{1}{p - q'_1} \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v}{a_v p - 1} \right)^{n_v} \times \\ &\quad \times \left(1 + c \frac{p - q'_1}{p - q_1} \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v q_1 - 1}{a_v q'_1 - 1} \right)^{n_v} \right) / \left(1 + c \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v q_1 - 1}{a_v q'_1 - 1} \right)^{n_v} \right), \\ \tau &= \prod_{v < w} \left(\frac{a_v - a_w}{a_v a_w} \right)^{n_v n_w} \left(\prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v}{a_v q'_1 - 1} \right)^{-n_v} + c \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v}{a_v q_1 - 1} \right)^{-n_v} \right), \\ \pi &= (q_1 - q'_1) \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v}{a_v q_1 - 1} \right)^{-n_v} / \left(1 + c \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v q_1 - 1}{a_v q'_1 - 1} \right)^{n_v} \right), \\ \omega^* &= (c_{,1} - c) \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v}{a_v q'_1 - 1} \right)^{n_v} / \left(1 + c \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v q_1 - 1}{a_v q'_1 - 1} \right)^{n_v} \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $c = c(n_1)$, удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2); при этом функции τ , π и ω^* представляют собой решение дискретного уравнения КП (1.1).

Рассмотрим общий случай теоремы 2. Пусть $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_K)$, $s_k = c_k(n_1)\theta_k + \rho_k$, а θ_k и ρ_k представляют собой два независимых решения линейной задачи (2.1), например $\theta_k = \psi(q_k)$ и $\rho_k = \psi(q'_k)$, как в (5.1). Получаем решение для дискретного уравнения КП (1.1) в силу следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7. *Функции*

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{1}{\det(h_{ij})_{1 \leq i, j \leq K}} \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1K} & \Psi(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{K+1,1} & \dots & h_{K+1,K} & \Psi(q)q^K \end{vmatrix}, \\
 \psi^* &= \frac{1}{\det(h_{ij})_{1 \leq i, j \leq K}} \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{K-1,1} & \dots & h_{K-1,K} \\ g_1 & \dots & g_K \end{vmatrix}, \\
 \tau &= \prod_{v < w} \left(\frac{a_v - a_w}{a_v a_w} \right)^{n_v n_w} \cdot \det(h_{ij})_{1 \leq i, j \leq K}, \\
 \pi_k &= \frac{1}{\det(h_{ij})_{1 \leq i, j \leq K}} \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1K} & \Psi(q_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{K+1,1} & \dots & h_{K+1,K} & \Psi(q_k)q_k^K \end{vmatrix}, \quad 1 \leq k \leq K, \\
 \omega_k^* &= (-1)^{K-k} (c_{k,1} - c_k) \frac{1}{\det(h_{ij})_{1 \leq i, j \leq K}} \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & \widehat{h_{1k}} & \dots & h_{1K} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ h_{K-1,1} & \dots & \widehat{h_{K-1,k}} & \dots & h_{K-1,K} \end{vmatrix},
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Psi(q) &:= \prod_{v=1}^N \left(\frac{a_v}{a_v q - 1} \right)^{-n_v}, \quad c_k = c_k(n_1), \quad h_{ij} = \Psi(q_j) c_j q_j^{i-1} + \Psi(q'_j) q_j'^{i-1}, \\
 g_j &= \Omega[\Psi(q_j), \Psi^*] c_j + \Omega[\Psi(q'_j), \Psi^*],
 \end{aligned}$$

удовлетворяют линейным задачам (2.1) и (2.2); при этом функции τ , π_k и ω_k^* , $k = 1, \dots, K$, представляют собой решение дискретного уравнения КП (1.1).

6. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе проведено построение нескольких типов обобщенного преобразования Дарбу для полностью дискретного уравнения КП с самосогласованными источниками (1.1), включая элементарное преобразование Дарбу, сопряженное преобразование Дарбу и бинарное преобразование Дарбу. Некоторые решения дискретного уравнения КП могут быть получены с использованием обобщенного преобразования Дарбу, и записаны некоторые явные решения.

Построение дискретных интегрируемых систем с самосогласованными источниками (например, в случаях неабелева дискретного уравнения КП [24], дискретного уравнения КП типа В [25], дискретного уравнения КП типа С [26]) и нахождение их решений представляет собой очень интересные задачи. Эти задачи будут исследованы в дальнейшем.

Список литературы

- [1] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, М., 1987.
- [2] E. V. Doktorov, V. S. Shchesnovich, “Nonlinear evolutions with singular dispersion laws associated with a quadratic bundle”, *Phys. Lett. A*, **207**:3–4 (1995), 153–158.
- [3] P. G. Grinevich, I. A. Taimanov, “Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type”, *Geometry, Topology, and Mathematical Physics. S. P. Novikov’s Seminar: 2006–2007*, American Mathematical Society Translations. Ser. 2, **224**, eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever, AMS, Providence, RI, 2008, 125–138, arXiv: 0801.4143.
- [4] А. М. Камчатнов, М. В. Павлов, “О периодических волнах в теории самоиндуцированной прозрачности”, *ЖЭТФ*, **107**:1 (1995), 44–54.
- [5] V. K. Mel’nikov, “On equations for wave interactions”, *Lett. Math. Phys.*, **7**:2 (1983), 129–136.
- [6] R. L. Lin, Y. B. Zeng, W.-X. Ma, “Solving the KdV hierarchy with self-consistent sources by inverse scattering method”, *Phys. A*, **291**:1–4 (2001), 287–298.
- [7] X.-B. Hu, H.-Y. Wang, “Construction of dKP and BKP equations with self-consistent sources”, *Inverse Probl.*, **22**:5 (2006), 1903–1920.
- [8] D.-J. Zhang, D.-Y. Chen, “The N -soliton solutions of the sine-Gordon equation with self-consistent sources”, *Phys. A*, **321**:3–4 (2003), 467–481.
- [9] R. L. Lin, H. S. Yao, Y. B. Zeng, “Restricted flows and the soliton equation with self-consistent sources”, *SIGMA*, **2** (2006), 096, 8 pp., arXiv: nlin.SI/0701003.
- [10] Y. Zeng, Y. Shao, W. Xue, “Negaton and positon solutions of the soliton equation with self-consistent sources”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **36**:18 (2003), 5035–5043.
- [11] R. L. Lin, H. Peng, M. Mañas, “The q -deformed mKP hierarchy with self-consistent sources, Wronskian solutions and solitons”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:43 (2010), 434022, 15 pp.
- [12] X. J. Liu, R. L. Lin, B. Jin, Y. B. Zeng, “A generalized dressing approach for solving the extended KP and the extended mKP hierarchy”, *J. Math. Phys.*, **50**:5 (2009), 053506, 14 pp.
- [13] Жунь-Лян Линь, Тянь-Чэн Цао, Сяо-Цзюн Лю, Юнь-Бо Цзэн, “Билинейные тождества для расширенной иерархии Кадомцева–Петвиашвили типа В”, *ТМФ*, **186**:3 (2016), 357–370.
- [14] R. L. Lin, X. J. Liu, Y. B. Zeng, “Bilinear identities and Hirota’s bilinear forms for an extended Kadomtsev–Petviashvili hierarchy”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **20**:2 (2013), 214–228.
- [15] X. G. Liu, Y. B. Zeng, R. L. Lin, “A new extended KP hierarchy”, *Phys. Lett. A*, **372**:21 (2008), 3819–3823.
- [16] X.-P. Cheng, C.-L. Chen, S. Y. Lou, “Interactions among different types of nonlinear waves described by the Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Wave Motion*, **51**:8 (2014), 1298–1308.
- [17] A. Doliwa, R. L. Lin, “Discrete KP equation with self-consistent sources”, *Phys. Lett. A*, **378**:28–29 (2014), 1925–1931.
- [18] O. Chvartatskyi, A. Dimakis, F. Müller-Hoissen, “Self-consistent sources for integrable equations via deformations of binary Darboux transformations”, *Lett. Math. Phys.*, **106**:8 (2016), 1139–1179.
- [19] A. N. W. Hone, T. E. Kouloukas, C. Ward, “On reductions of the Hirota–Miwa equation”, *SIGMA*, **13** (2017), 057, 17 pp.
- [20] A. K. Pogrebkov, “Symmetries of the Hirota difference equation”, *SIGMA*, **13** (2017), 053, 14 pp.
- [21] А. В. Забродин, “Разностные уравнения Хироты”, *ТМФ*, **113**:2 (1997), 179–230.

- [22] R. Hirota, *The Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, **155**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [23] J. J. C. Nimmo, “Darboux transformations and the discrete KP equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:24 (1997), 8693–8704.
- [24] J. J. C. Nimmo, “On a non-Abelian Hirota–Miwa equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:18 (2006), 5053–5065.
- [25] T. Miwa, “On Hirota’s difference equations”, *Proc. Japan Acad., Ser. A, Math. Sci.*, **58**:1 (1982), 9–12.
- [26] R. M. Kashaev, “On discrete three-dimensional equations associated with the local Yang–Baxter relation”, *Lett. Math. Phys.*, **38**:4 (1996), 389–397.