Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Киселев, А. А. Расковалов, Солитоны в доменной структуре ферромагнетика, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 1, 89–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:45:34

© 2018 г.

В. В. Киселев^{*†}, А. А. Расковалов^{*†}

СОЛИТОНЫ В ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ФЕРРОМАГНЕТИКА

Методом одевания на торе получены и исследованы решения модели Ландау–Лифшица, описывающие солитоны в полосовой доменной структуре легкоосного ферромагнетика. Особенность таких солитонов состоит в том, что они неразрывно связаны с доменной структурой: вызывают ее трансляции и локальные колебания. Найдены интегралы движения, стабилизирующие солитоны на фоне структуры.

Ключевые слова: доменная структура, уравнение Ландау–Лифшица, задача Римана, солитоны, интегралы движения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9466>

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из базовых моделей теории магнетизма является уравнение Ландау–Лифшица для ферромагнетика с анизотропией типа “легкая ось”. В безразмерных переменных оно имеет вид

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_x^2 \mathbf{S}] + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S})[\mathbf{S} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{n} = (0, 0, 1); \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (1)$$

Для квазиодномерных возбуждений такая модель интегрируема [1], [2]. Благодаря этому подробно изучены нелинейные волны и солитоны на фоне однородного основного состояния легкоосного ферромагнетика (см. [3]–[5] и цитированную там литературу). В то же время анализ солитонов в полосовых доменных структурах сталкивается с большими трудностями из-за значительной нелинейности и неоднородности фонового состояния среды. Некоторые результаты в этом направлении получены с помощью алгебро-геометрических методов конечнозонного интегрирования [6]–[9]. Однако такой подход не дает эффективного решения указанного класса

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России (тема “Квант”, номер г. р. 01201463332 (АААА-А18-118020190095-4)).

^{*}Институт физики металлов им. М. Н. Михеева УрО РАН, Екатеринбург, Россия.
E-mail: kiseliev@imp.uran.ru

[†]Физико-технологический институт Уральского федерального университета им. Первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

задач, так как приводит к малоизученным многомерным тета-функциям и трансцендентным уравнениям на параметры солитоноподобных состояний.

В параметризации

$$\mathbf{S} = (\sin \theta \cos \Phi, \sin \theta \sin \Phi, \cos \theta) \quad (2)$$

полосовой доменной структуре отвечает следующее решение уравнения (1):

$$\begin{aligned} \Phi = \varphi_0 = \text{const}, \quad \theta(\chi) = \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \text{am}(\chi, k), \quad \chi = \frac{x}{k}, \\ \sin \theta_0 = \text{cn}(\chi, k), \quad \cos \theta_0 = \text{sn}(\chi, k), \quad k \partial_x \theta_0 = \partial_\chi \theta_0 = -\text{dn}(\chi, k). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\text{am}(\chi, k)$ – эллиптическая амплитуда Якоби, $\text{sn}(\chi, k)$, $\text{cn}(\chi, k)$, $\text{dn}(\chi, k)$ – эллиптические функции Якоби с модулем $0 \leq k \leq 1$ [10], [11]. Величина k задает период $4Kk$ доменной структуры, $K = K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

В настоящей работе для исследования солитонов в легкоосном ферромагнетике с полосовой доменной структурой используется метод интегрирования нелинейной модели (1) с помощью задачи Римана теории функций комплексной переменной. В математическом отношении рассматриваемая задача близка к более простому исследованию динамики спиральных магнитных структур в рамках модели синус-Гордон [12]–[14].

Наличие полосовой структуры проявляется в том, что задача Римана формулируется не в комплексной плоскости спектрального параметра, как это было в случае однородного основного состояния среды, а на римановой поверхности, топологически эквивалентной тору. Подчеркнем принципиальное отличие модели (1) от тех, которые были проинтегрированы первыми с привлечением задачи Римана на торе [15]–[17]. В работах [15]–[17] изучались солитоны на фоне однородного основного состояния среды в моделях с представлениями Лакса, изначально включающими зависимость от спектрального параметра через двоякопериодические функции. Указанная особенность и приводила к задачам Римана на торе. В данном случае появление задачи Римана на торе имеет другое происхождение: оно связано с наличием периодического основного состояния среды. При сдвигах на периоды по спектральному параметру и/или пространственной координате функции задачи Римана приобретают дополнительные множители. Это осложняет процедуру их построения.

Образование солитонов в доменной структуре неизбежно меняет граничные условия задачи. Решения модели (1) будем искать при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, t) \rightarrow \mathbf{S}_2^{(0)} = (\sin \theta_2 \cos \varphi_0, \sin \theta_2 \sin \varphi_0, \cos \theta_2), \quad \chi \rightarrow +\infty, \\ \mathbf{S}(x, t) \rightarrow \mathbf{S}_1^{(0)} = (\sin \theta_1 \cos \varphi_0, \sin \theta_1 \sin \varphi_0, \cos \theta_1), \quad \chi \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\theta_j = \pi/2 - \text{am}(\chi + \Delta_j, k)$, $j = 1, 2$, $\Delta_1 = \Delta$, $\Delta_2 = 0$. В ходе дальнейшего анализа мы свяжем сдвиг структуры Δ с нулями задачи Римана, определяющими строение и скорость солитонов.

Подход, используемый в настоящей работе, позволяет не только получить точные солитонные решения модели, но и найти интегралы движения, обеспечивающие динамическую стабильность солитонов на фоне полосовой доменной структуры, а также изучить особенности взаимодействия солитонов друг с другом и с доменной

структурой. Отметим, что выделение вещественных решений модели (1) не вызывает затруднений. Явные формулы для солитонов в полосовой доменной структуре выражаются через хорошо изученные эллиптические функции и допускают подробный анализ.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА И ФУНКЦИИ ЙОСТА

Основой метода интегрирования модели (1) служит вспомогательная линейная система [1]

$$\begin{aligned}\partial_x \Psi &= -\frac{i}{2} [w_1(S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2) + w_3 S_3\sigma_3] \Psi \equiv U\Psi, \\ \partial_t \Psi &= -\frac{i}{2} [w_1([\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_1\sigma_1 + [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_2\sigma_2) + w_3[\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_3\sigma_3 - \\ &\quad - w_1^2 S_3\sigma_3 - w_1 w_3 (S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2)] \Psi \equiv V\Psi,\end{aligned}\quad (5)$$

условие совместности которой равносильно уравнению (1). Здесь σ_i – матрицы Паули, коэффициенты $w_{1,3}$ подчинены ограничению $w_1^2 - w_3^2 = 1$. Эта связь согласуется со свойствами периодической структуры (3), если использовать униформизацию $w_1 = \operatorname{cn}(u, k)$, $w_3 = i \operatorname{sn}(u, k)$.

Полосовой доменной структуре $\mathbf{S}^{(0)}$ (3) соответствует решение системы (5):

$$\begin{aligned}\Psi_0(u, \chi, t) &= e^{-i\varphi_0\sigma_3/2} \widetilde{M}(u, \chi) e^{A(u, \chi, t)\sigma_3}, \quad \det \Psi_0 = 1, \\ A(u, \chi, t) &= ip(u)\chi + \frac{it}{2k} \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k), \\ p(u) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)} + \zeta(u + K) + \zeta(u - K) - \frac{\eta_1 u}{K} \right) = \frac{Z(u, k)}{2i}, \\ \widetilde{M}(u, \chi) &= M(u, \chi) \operatorname{diag}([\sigma(-u + K + iK')]^{-1}, [\sigma(u + K + iK')]^{-1}), \\ M(u, \chi) &= \begin{pmatrix} \sigma(\chi - u + K + iK') & \sigma(\chi + u - K + iK') e^{\eta_1(\chi + iK' + u)} \\ \sigma(\chi - u - K + iK') e^{\eta_1(\chi + iK' - u)} & \sigma(\chi + u + K + iK') \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times m(\chi) e^{\eta_1 u \chi \sigma_3 / 2K}, \\ m(\chi) &= \left[\frac{\sigma(iK') \sigma(iK' + 2K)}{2\sigma(\chi + iK') \sigma(\chi + iK' + 2K)} \right]^{1/2}.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ – сигма- и дзета-функции Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$, $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ – дополнительный модуль эллиптических функций Якоби, $Z(u, k)$ – дзета-функция Якоби, трансформационные свойства функций Вейерштрасса определяются вещественным параметром $\eta_1 = \zeta(2K)$ и мнимым параметром $\eta_3 = \zeta(iK')$ [10], [11] [18]. Ветвь квадратного корня в определении $m(\chi)$ выбираем так, чтобы выполнялось условие $m(\chi \pm 4K) = -m(\chi) e^{\mp 2\eta_1(\chi + iK' + K \pm 2K)}$. Символ “diag” означает диагональную матрицу.

Функция $M(u, \chi)$ периодична по χ с периодом $4K$, а функция $\Psi_0(u, \chi)$ квазипериодична, при сдвиге на период она приобретает дополнительный множитель:

$$\Psi_0(u, \chi \pm 4K, t) = \Psi_0(u, \chi, t) e^{\pm 4Kip(u)\sigma_3}.$$

Это означает, что для нее величина $p(u)$ играет роль *блеховского квазиимпульса*.

Граничным условиям (4) соответствуют фундаментальные решения Йоста вспомогательной линейной системы (5) с асимптотическими условиями

$$\begin{aligned}\Psi_1 &\rightarrow \Psi_1^{(0)} = \Psi_\Delta^{(0)} && \text{при } \chi \rightarrow -\infty, \\ \Psi_2 &\rightarrow \Psi_2^{(0)} = \Psi_0 && \text{при } \chi \rightarrow +\infty,\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\Psi_\Delta^{(0)}(u, \chi, t) = e^{-i\varphi_0\sigma_3/2} \widetilde{M}(u, \chi + \Delta) e^{A(u, \chi, t)\sigma_3 - \eta_1 u \Delta \sigma_3 / 2K}. \quad (8)$$

На контуре

$$\Gamma = \{u: \operatorname{Im} p(u) = 0\} = \{\operatorname{Re} u = 0, K; |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, \quad \text{mod } (2K, 4iK')$$

решения $\Psi_{1,2}(u)$ имеют осциллирующее поведение. Множество Γ соответствует непрерывному спектру задачи (5), (7).

3. ЗАДАЧА РИМАНА И СОЛИТОННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

В дальнейшем анализе мы следуем работам [12], [14] и придерживаемся введенных там обозначений. При значениях $u \in \Gamma$ решения Йоста $\Psi_{1,2}$ связаны между собой матрицей перехода:

$$\Psi_1(u) = \Psi_2(u)T(u), \quad u \in \Gamma. \quad (9)$$

Отсюда получаем представление

$$T(u, t) = \lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\Psi_2(u, \chi, t))^{-1} \Psi_1(u, \chi, t). \quad (10)$$

Свойства симметрии вспомогательной линейной системы (5) и асимптотических условий (7) приводят к ограничениям на решения Йоста Ψ_j , $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned}\Psi_j(u \pm 2iK') &= \sigma_3 \Psi_j(u) \sigma_3 e^{\mp 2\Delta_j \eta_3 \sigma_3}, & \Psi_j^*(-u^*) &= \sigma_2 \Psi_j(u) \sigma_2, \\ \Psi_j^*[(u \pm 2K)^*] &= -i\sigma_1 \Psi_j(u) Q(u) e^{\mp \Delta_j \eta_1 \sigma_3}, & Q(u) &= \operatorname{diag}(q(u), q^{-1}(u)),\end{aligned}\quad (11)$$

где $\Delta_1 = \Delta$, $\Delta_2 = 0$, и конкретизируют вид $T(u)$:

$$\begin{aligned}T(u) &= \begin{pmatrix} a(u) & -\bar{b}(u) \\ b(u) & \bar{a}(u) \end{pmatrix}, & \bar{a}(u) &= a^*(-u^*), & \bar{b}(u) &= b^*(-u^*), \\ a(u)\bar{a}(u) + b(u)\bar{b}(u) &= 1, & \bar{a}(u \pm 2iK') &= \bar{a}(u) e^{\pm 2\eta_3 \Delta}, & a(u \pm 2iK') &= a(u) e^{\mp 2\eta_3 \Delta}, \\ \bar{b}(u \pm 2iK') &= -\bar{b}(u) e^{\pm 2\eta_3 \Delta}, & b(u \pm 2iK') &= -b(u) e^{\mp 2\eta_3 \Delta}, \\ a^*[(u \pm 2K)^*] &= a(u) e^{\mp \eta_1 \Delta}, & b^*[(u \pm 2K)^*] &= b(u) e^{\mp \eta_1 \Delta} q^2(u), \\ \bar{a}^*[(u \pm 2K)^*] &= \bar{a}(u) e^{\pm \eta_1 \Delta}, & \bar{b}^*[(u \pm 2K)^*] &= \bar{b}(u) e^{\pm \eta_1 \Delta} q^{-2}(u).\end{aligned}\quad (12)$$

Таким образом, решения Йоста $\Psi_{1,2}$ и коэффициенты матрицы перехода $T(u)$ приобретают дополнительные множители при сдвигах по спектральному параметру u . Входящий в (11), (12) множитель $q(u)$ может быть записан в двух видах: в терминах сигма-функций Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$, либо через эллиптические функции Якоби:

$$q(u) = \frac{1}{i} \frac{\sigma(u - K + iK')}{\sigma(u + K + iK')} e^{\eta_1(u + iK')} = \frac{\operatorname{dn}(u, k)}{1 + k \operatorname{sn}(u, k)} = \frac{1 - k \operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{dn}(u, k)}. \quad (13)$$

Связь различных форм записи (13) устанавливается в [10], [18].

Рис. 1. Области $D_{\pm}$ в фундаментальном прямоугольнике со сторонами $[4K, 4iK']$.

В дальнейшем удобно использовать не сами решения $\Psi_{1,2}$, а матричные функции $\Psi_+(u) \equiv (\Psi_2^{(1)}(u), \Psi_1^{(2)}(u))$, $\Psi_-(u) \equiv (\Psi_1^{(1)}(u), \Psi_2^{(2)}(u))$. Здесь использовано обозначение $\Psi_{1,2}^{(i)}$ для i -го столбца матрицы $\Psi_{1,2}(u)$, $i = 1, 2$. Матричная функция $\Psi_+(u)$ аналитически продолжается с контура Γ в области

$$D_+ = \{u: \operatorname{Im} p(u) > 0\} = \{-K < \operatorname{Re} u < 0, |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, \quad \text{mod } (2K, 4iK')$$

(см. рис. 1), а в областях

$$D_- = \{u: \operatorname{Im} p(u) < 0\} = \{0 < \operatorname{Re} u < K, |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, \quad \text{mod } (2K, 4iK'),$$

функция $\Psi_-(u)$ оказывается аналитической. Задача построения функций $\Psi_{\pm}(u)$ решается методами теории функций комплексной переменной. Из (9), (11) следует, что в областях своей аналитичности они удовлетворяют редукциям

$$\begin{aligned} \Psi_+(u \pm 2iK') &= \sigma_3 \Psi_+(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pm 2\eta_3 \Delta} \end{pmatrix}, \\ \Psi_-(u \pm 2iK') &= \sigma_3 \Psi_-(u) \sigma_3 \begin{pmatrix} e^{\mp 2\eta_3 \Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Psi_+^*[(u \pm 2K)^*] &= -i\sigma_1 \Psi_+(u) Q(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\pm \eta_1 \Delta} \end{pmatrix}, \\ \Psi_-^*[(u \pm 2K)^*] &= -i\sigma_1 \Psi_-(u) Q(u) \begin{pmatrix} e^{\mp \eta_1 \Delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{14}$$

а на контуре Γ могут быть выражены друг через друга:

$$\Psi_+(u) = \sigma_2 \Psi_-^*(-u^*) \sigma_2, \quad u \in \Gamma. \tag{15}$$

Используя (9), (12), получаем цепочку связей на контуре Γ между разными фундаментальными решениями:

$$\begin{aligned}\Psi_+ &= \Psi_1 \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix} = \Psi_2 \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b} \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}, \\ \Psi_- &= \Psi_1 \begin{pmatrix} 1 & \bar{b} \\ 0 & a \end{pmatrix} = \Psi_2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{16}$$

Отсюда находим асимптотические условия для функций $\Psi_{\pm}(u)$:

$$\begin{aligned}\Psi_+ &\rightarrow \Psi_2^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b} \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow +\infty, \\ \Psi_- &\rightarrow \Psi_2^{(0)} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow +\infty, \\ \Psi_+ &\rightarrow \Psi_1^{(0)} \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow -\infty, \\ \Psi_- &\rightarrow \Psi_1^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & \bar{b} \\ 0 & a \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow -\infty.\end{aligned}\tag{17}$$

Из формул (16) также следуют равенства

$$a(u) = \det \Psi_-(u), \quad \bar{a}(u) = \det \Psi_+(u),\tag{18}$$

которые показывают, что элементы $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ матрицы перехода аналитически продолжаются с контура Γ в области D_- и D_+ соответственно.

Если функции $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ имеют нули в областях своей аналитичности, то их множество соответствует дискретному спектру задачи (5), (7). Далее для определенности считаем все нули простыми. Тогда в силу редукций (14) нули функции $\bar{a}(u)$ в областях D_+ должны иметь вид

$$u = \mu_s, \mu_s^* - 2K \pmod{4K, 2iK'}, \quad s = 1, 2, \dots, N.\tag{19}$$

Нули коэффициента $a(u)$ редукциями (12) связаны с нулями (19):

$$u = -\mu_s^*, -\mu_s + 2K \pmod{4K, 2iK'}, \quad s = 1, 2, \dots, N.\tag{20}$$

Связь решений Йоста на контуре Γ (9) эквивалентна условию сопряжения аналитических функций $\Psi_{\pm}(u)$ на том же контуре:

$$\Psi_-(u) = \frac{\Psi_+(u)}{\bar{a}(u)} \begin{pmatrix} 1 & \bar{b}(u) \\ b(u) & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in \Gamma.\tag{21}$$

Таким образом, проблема интегрирования вспомогательной линейной системы (5) сводится к решению классической задачи Римана. Необходимо найти аналитические в областях D_- и D_+ функции $\Psi_-(u)$ и $\Psi_+(u)$, удовлетворяющие условию (21) на разделяющем их контуре Γ , ограничениям (14), (15) и асимптотическим условиям (17). В данном случае мы имеем задачу Римана на торе, так как функции $\Psi_{\pm}(u)$ являются квазипериодическими с периодами $[4K, 4iK']$.

В общем случае существуют два типа коллективных возбуждений на фоне доменной структуры. Первый из них соответствует регулярной задаче Римана, когда $b(u), \bar{b}(u) \neq 0$, а функции $a(u)$ и $\bar{a}(u)$ не имеют нулей в областях своей аналитичности. Решение регулярной задачи Римана описывает нелинейные диспергирующие волны в полосовой доменной структуре. Особый интерес представляет второй класс возбуждений – солитоны, которые подобно частицам движутся через доменную структуру, восстанавливая свою форму и скорость после взаимодействия друг с другом, с диспергирующими волновыми пакетами или доменными стенками структуры. Солитонам отвечают решения задачи Римана (21) с нулями коэффициентов $a(u)$ и $\bar{a}(u)$, когда $b(u) = \bar{b}(u) \equiv 0$. В этом случае свойство унимодулярности матрицы перехода (см. (12)) сводится к равенству

$$a(u)\bar{a}(u) = 1. \quad (22)$$

Принимая во внимание, что для любой невырожденной (2×2) -матрицы справедливо тождество

$$A^{-1} = \frac{\sigma_2 A^T \sigma_2}{\det A},$$

где индекс T означает транспонирование, из (15), (18) получаем соотношение

$$\Psi_-^{-1}(u) = \frac{\Psi_+^\dagger(-u^*)}{a(u)}, \quad (23)$$

где символ $\dagger$ означает эрмитово сопряжение. С учетом (23), (22) условие сопряжения солитонных матриц $\Psi_-(u)$ и $\Psi_+(u)$ на контуре Γ выражается в терминах одной из них:

$$\Psi_+^\dagger(-u^*)\Psi_+(u) = \Psi_+(u)\Psi_+^\dagger(-u^*) = I, \quad u \in \Gamma. \quad (24)$$

Для солитонных возбуждений функции $\Psi_+(u)$ и $\bar{a}(u)$ мероморфны в фундаментальном прямоугольнике со сторонами $4K, 4iK'$. В областях D_+ они вырождены в точках (19), а в областях D_- имеют полюсы, совпадающие с нулями (20) коэффициента $a(u) = \det \Psi_+^\dagger(-u^*)$.

Квазипериодическая мероморфная функция $\bar{a}(u)$ восстанавливается по своим нулям, полюсам и редукциям [5], [18]. Для N -солитонного состояния она имеет вид

$$\bar{a}_{\text{sol}}(u) = \prod_{s=1}^N \frac{\sigma(u - \mu_s)\sigma(u - \mu_s^* + 2K)}{\sigma(u + \mu_s^*)\sigma(u + \mu_s + 2K)} e^{\eta_1(\mu_s + \mu_s^*)}. \quad (25)$$

Здесь $\mu_s \in D_+$, периоды сигма-функций Вейерштрасса равны $[4K, 2iK']$. Представление (25) приводит к верным трансформационным свойствам (12) функции $\bar{a}(u)$ только при условии, что положения ее нулей связаны со сдвигом Δ доменной структуры:

$$\sum_{s=1}^N (\mu_s + \mu_s^*) = -\frac{\Delta}{2} \mod (4K). \quad (26)$$

Далее для определенности полагаем $-K < \text{Re } \mu_s < 0, |\text{Im } \mu_s| < K'$.

4. ОДНОСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РИМАНА

Перейдем к построению матричной функции $\Psi_+(u, \chi, t)$ для односолитонного возбуждения в полосовой доменной структуре. Представим $\Psi_+(u, \chi, t)$ в виде

$$\Psi_+(u, \chi, t) = \Psi(u, \chi, t) \Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, \chi, t), \quad (27)$$

где $\Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, \chi, t)$ определена в (8), $\det \Psi_{\Delta/2}^{(0)} = 1$.

Для односолитонного состояния ($N = 1$) матричная функция $\Psi(u)$ будет иметь нули (19) и полюсы (20) (индекс $s = 1$ далее опускаем). Из (14), (24) следуют редукции

$$\begin{aligned} \Psi(u \pm 2iK') &= \sigma_3 \Psi(u) \sigma_3 e^{\pm \Delta \eta_3}, \\ \Psi^*[(u \pm 2K)^*] &= \sigma_1 \Psi(u) \sigma_1 e^{\pm \Delta \eta_1/2}, \\ \Psi^*(-u^*) &= \sigma_2 \Psi(u) \sigma_2 \bar{a}(u)^{-1}, \quad u \in \Gamma. \end{aligned} \quad (28)$$

Последняя из формул (28) приводит к условию

$$\Psi(-u) \Psi^\dagger(u^*) = I, \quad u \in \Gamma. \quad (29)$$

Из-за наличия в (28) множителей $e^{\pm \Delta \eta_3}$, $e^{\pm \Delta \eta_1/2}$ матрица $\Psi(u)$ не является двоякопериодической, что затрудняет ее построение. Обойдем эту трудность. Для этого сначала построим мероморфную функцию $f^\dagger(u^*)$ с периодами $[4K, 4iK']$, удовлетворяющую ограничениям

$$f(u \pm 2iK') = \sigma_3 f(u) \sigma_3, \quad f(-u \pm 2K) = \sigma_3 f(u) \sigma_3, \quad f(-u) f^\dagger(u^*) = I, \quad (30)$$

в которых лишние множители отсутствуют. Второе соотношение в (30) служит аналогом двух последних редукций (28).

Задача построения функции $f^\dagger(u^*)$ близка к рассмотренной в работах [19]–[21] для пульсирующего солитона (бризера) на фоне нелинейной волны намагниченности. Согласно (30) односолитонная функция $f^\dagger(u^*)$ имеет в параллелограмме периодов четыре нуля

$$u = \mu^*, \mu^* - 2iK', -\mu^* + 2K, -\mu^* - 2K + 2iK' \quad (31)$$

и четыре полюса $u = \mu_i$, $i = 1, 2, 3, 4$,

$$\mu_1 = -\mu, \mu_2 = -\mu + 2iK', \mu_3 = \mu + 2K, \mu_4 = \mu - 2K - 2iK'. \quad (32)$$

По модулю периодов $[4K, 4iK']$ сумма нулей (31) соизмерима с суммой полюсов (32). Будем искать $f^\dagger(u^*)$ в виде разложения по квазипериодическим дзета-функциям Вейерштрасса с периодами $[4K, 4iK']$:

$$f^\dagger(u^*) = A_0 + A\zeta_1 + B\zeta_2 + C\zeta_3 + D\zeta_4, \quad \zeta_i \equiv \zeta(u - \mu_i). \quad (33)$$

Здесь A_0, A, B, C, D – не зависящие от u матричные коэффициенты, дзета-функции обладают свойствами [18]

$$\begin{aligned} \zeta(u \pm 4iK') &= \zeta(u) \pm 2\eta_3, & \zeta(u \pm 4K) &= \zeta(u) \pm 2\eta_1, & \zeta(-u) &= -\zeta(u), \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &= 0, & \eta_2 &= -\zeta(2K + 2iK'), & \eta_1 &= \zeta(2K), & \eta_3 &= \zeta(2iK). \end{aligned}$$

Подставляя (33) в первые два соотношения (30), находим

$$f^\dagger(u^*) = \left[I + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11}\varphi(u) & \tilde{B}_{12}\gamma(u) \\ \tilde{B}_{21}\gamma(u) & \tilde{B}_{22}\varphi(u) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\varphi(u) = \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_4, \quad \gamma(u) = \zeta_1 + \zeta_3 - \zeta_2 - \zeta_4 + 2\eta_1,$$

где $\tilde{B}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, и r_1, r_2 – неизвестные скалярные функции. Сумма вычетов функции $f^\dagger(u^*)$ (34) в полюсах, лежащих в параллелограмме периодов $[4K, 4iK']$, оказывается равной нулю, что гарантирует ее двоякопериодичность [18].

Выразим $\varphi(u)$ и $\gamma(u)$ через более популярные и табулированные эллиптические функции Якоби $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ [10], [11], [18]:

$$\gamma(u) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} \mu}{\operatorname{sn} u + \operatorname{sn} \mu}, \quad \varphi(u) - \varphi(\mu^*) = -\frac{\operatorname{cn} \mu \operatorname{dn} \mu}{(\operatorname{sn} \mu + \operatorname{sn} \mu^*)} \frac{\operatorname{sn} u - \operatorname{sn} \mu^*}{\operatorname{sn} u + \operatorname{sn} \mu}. \quad (35)$$

Здесь и далее все функции Якоби имеют модуль k .

Соотношения (35) и им подобные проще всего проверить разложением их левых и правых частей на множители или простые дроби по функциям Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$. Постоянные в разложениях фиксируются значениями функций в какой-либо точке [18].

Требование отсутствия полюсов в произведении $f(-u)f^\dagger(u^*) = I$ эквивалентно одному независимому матричному уравнению $\tilde{B}^\dagger f^\dagger(u^*)|_{u=\mu^*} = 0$. Оно имеет нетривиальное решение, только когда матрица $\tilde{B}$ вырожденная: $\tilde{B}_{ij} = m_i X_j$, $i, j = 1, 2$ [5], [22]. Отсюда получаем

$$X_1 = -\frac{m_1^*}{|m_1|^2 \varphi(\mu^*) + |m_2|^2 \gamma(\mu^*)}, \quad X_2 = -\frac{m_2^*}{|m_2|^2 \varphi(\mu^*) + |m_1|^2 \gamma(\mu^*)}, \quad (36)$$

где $m_{1,2}$ – пока неизвестные функции от x, t . Знаменатели в (36) можно устранить переопределением элементов $r_{1,2}$. Тогда $f^\dagger(u^*)$ принимает вид

$$f^\dagger(u^*) = \begin{pmatrix} |m_2|^2 - |m_1|^2 \beta(u) & -m_1 m_2^* \alpha(u) \\ -m_2 m_1^* \alpha(u) & |m_1|^2 - |m_2|^2 \beta(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Входящие в (37) коэффициенты

$$\alpha(u) \equiv \frac{\gamma(u)}{\gamma(\mu^*)} = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \mu^*} \left(\frac{\operatorname{sn} \mu + \operatorname{sn} \mu^*}{\operatorname{sn} u + \operatorname{sn} \mu} \right),$$

$$\beta(u) \equiv \frac{\varphi(u) - \varphi(\mu^*)}{\gamma(\mu^*)} = -\frac{\operatorname{cn} \mu}{\operatorname{cn} \mu^*} \left(\frac{\operatorname{sn} u - \operatorname{sn} \mu^*}{\operatorname{sn} u + \operatorname{sn} \mu} \right)$$

разлагаются по сигма-функциям Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$:

$$\beta^*(u^*) = -\frac{g_1(u) \kappa(\mu)}{g_2(u) \kappa^*(\mu)}, \quad \alpha^*(u^*) = \frac{g_3(u)}{g_2(u)} \kappa(\mu),$$

$$g_1(u) = \frac{\sigma(u - \mu)}{\sigma(u + \mu^*)}, \quad g_2(u) = \frac{\sigma(u - \mu^* + 2K)}{\sigma(u + \mu + 2K)} e^{\eta_1(\mu + \mu^*)},$$

$$g_3(u) = \frac{\sigma(u + K) \sigma(u - K)}{\sigma(u + \mu^*) \sigma(u + \mu + 2K)} e^{\eta_1(u + (\mu - \mu^*)/2)},$$

$$\kappa(\mu) = \frac{\sigma(\mu + \mu^*) \sigma(\mu - \mu^* + 2K)}{\sigma(\mu + K) \sigma(\mu - K)} e^{\eta_1(3\mu^* - \mu)/2} \quad (38)$$

и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= \beta(u)\alpha^*(-u^*), & \beta(u)\beta^*(-u^*) &= 1, \\ \alpha(u)\alpha^*(-u^*) - \beta(u) - \beta^*(-u^*) &= 2(1 + |\operatorname{sn} \mu|^2) |\operatorname{cn} \mu|^{-2}.\end{aligned}\quad (39)$$

С их помощью из условия $f(-u)f^\dagger(u^*) = I$ находим модули элементов $r_{1,2}$:

$$|r_1|^{-2} = |r_2|^{-2} = |m_1|^4 + |m_2|^4 + 2|m_1 m_2|^2(1 + |\operatorname{sn} \mu|^2) |\operatorname{cn} \mu|^{-2}. \quad (40)$$

Используя (37)–(40), нетрудно заметить, что произведение $f(u)g_2(u)$ имеет полюсы (20), которые должны быть у решения $\Psi(u)$ исходной задачи Римана (28), (29). Покажем, что решение задачи Римана (28), (29) имеет вид

$$\Psi(u) = f(u)g_2(u). \quad (41)$$

Прежде всего заметим, что функции $g_i(u)$, $i = 1, 2, 3$, из (38) удовлетворяют соотношениям

$$g_{1,2}^*(-u^*) = \frac{1}{g_{1,2}(u)}, \quad g_3^*(-u^*) = -\frac{g_3(u)}{g_1(u)g_2(u)},$$

которые обеспечивают переход в задаче (28), (29) от функции $\Psi(u)$ (41) к функции $\Psi^{-1}(u) = \Psi^\dagger(-u^*)$. Кроме того, с точностью до экспоненциальных множителей функции $g_i(u)$ задают представление группы редукций (28)

$$\begin{aligned}g_{1,2}^*[(u \pm 2K)^*] &= g_{2,1}(u)e^{\mp \eta_1(\mu + \mu^*)}, & g_3^*[(u \pm 2K)^*] &= g_3(u)e^{\mp \eta_1(\mu + \mu^*)}, \\ g_{1,2}(u \pm 2iK') &= g_{1,2}(u)e^{\mp 2\eta_3(\mu + \mu^*)}, & g_3(u \pm 2iK') &= -g_3(u)e^{\mp 2\eta_3(\mu + \mu^*)},\end{aligned}$$

причем согласно (26) $\mu + \mu^* = -\Delta/2$. Отсюда следует, что функция (41) действительно удовлетворяет первым двум редукциям (28) при выполнении условия

$$\operatorname{diag}(r_1, r_2) = |r|e^{-i\nu\sigma_3}. \quad (42)$$

Наконец, с учетом (42) проверяем, что определитель $\Psi(u)$, как и положено (см. (18), (27), (25)), равен $\det \Psi(u) = \bar{a}(u) = g_1(u)g_2(u)$. Так мы убеждаемся в согласованности вычислений.

В подробной записи односолитонная матрица $\Psi(u, \chi, t)$ (41) имеет вид

$$\begin{aligned}\Psi(\chi, t, u|\mu, \mathbf{m}) &= \\ &= e^{i\nu\sigma_3} \left| \frac{r}{\kappa} \right| \begin{pmatrix} |m_2|^2 g_2(u) \kappa^* + |m_1|^2 g_1(u) \kappa & -|\kappa|^2 g_3(u) m_1 m_2^* \\ -|\kappa|^2 g_3(u) m_2 m_1^* & |m_1|^2 \kappa^* g_2(u) + |m_2|^2 g_1(u) \kappa \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (43)$$

Комплексные параметры μ ($-K < \operatorname{Re} \mu < 0$, $|\operatorname{Im} \mu| < 2K'$) и зависящие от x, t векторы $\mathbf{m}$ с компонентами $m_{1,2}$ конкретизируют матрицу Ψ , поэтому в левой части (43) они указаны после вертикальной черты. Выражение (43) схоже с решением задачи Римана [12]–[14] для бризера в спиральной магнитной структуре.

Перейдем теперь к определению функций $m_{1,2}(x, t)$. Используя представление (27), из линейной системы (5) выразим матрицы $U(u)$ и $V(u)$ через $\Psi(u)$. Поскольку $\Psi^{-1}(u) = \Psi^\dagger(-u^*)$, имеем

$$U(u) = -\Psi(u)[\partial_x - U_{\Delta/2}(u)]\Psi^\dagger(-u^*), \quad V(u) = -\Psi(u)[\partial_t - V_{\Delta/2}(u)]\Psi^\dagger(-u^*), \quad (44)$$

где операторы $U_{\Delta/2}$ и $V_{\Delta/2}$ получаются из U , V формальной заменой $\Phi \rightarrow \varphi_0 = \text{const}$, $\theta \rightarrow \theta_{\Delta/2}^{(0)} = \pi/2 - \text{am}(\chi + \Delta/2, k)$. Левая часть (44) содержит лишние полюсы, происходящие от солитонных матриц $\Psi(u)$ и $\Psi^\dagger(-u^*)$. Требование обращения в нуль вычетов в этих полюсах дает зависимость от x , t вектора $\mathbf{m}$ с компонентами $m_{1,2}$ в виде [5], [22]

$$\mathbf{m} = \Psi_{\Delta/2}^{(0)}(\mu, \chi, t) \mathbf{c} = e^{-i\varphi_0 \sigma_3/2} \widetilde{M} \left(\mu, \chi + \frac{\Delta}{2} \right) e^{A(\mu, \chi, t) \sigma_3 - \eta_1 \mu \Delta \sigma_3/4K} \mathbf{c}, \quad (45)$$

где $\mathbf{c}$ – произвольный постоянный комплексный вектор.

Покажем, что фаза ν в (43) фиксируется требованием совпадения асимптотик решения $\Psi_+(u)$ (27) с формулами (17). Поскольку параметр ν не зависит от u , для упрощения расчетов положим $u = K$, тогда $g_3(u)|_{u=K} = 0$, $A(u, \chi, t)|_{u=K} = 0$. Учтем асимптотические выражения

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_0} \frac{m_1}{m_2} &\rightarrow iq(\chi - \mu^*) && \text{при } \chi \rightarrow +\infty, \\ e^{i\varphi_0} \frac{m_1}{m_2} &\rightarrow iq^{-1}(\tilde{\chi} - \mu) && \text{при } \chi \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (46)$$

где $q(u)$ определено в (13), $\tilde{\chi} = \chi + \Delta/2$, $\Delta/2 = -\mu - \mu^*$, и формулу

$$\frac{\sigma(\chi + iK' + 2K)}{\sigma(\chi + iK')} e^{-\eta_1 \chi} = -\frac{i}{k'} e^{\eta_1(K + iK')} [\text{dn } \chi + k \text{cn } \chi].$$

Тогда проверка условий (17) сводится к использованию тождества

$$\frac{|q(\chi - \mu)|^2 + n}{1 + |q(\chi - \mu)|^2 n} = \frac{\text{dn } \chi + k \text{cn } \chi}{\text{dn } \tilde{\chi} + k \text{cn } \tilde{\chi}}, \quad n \equiv \left| \frac{1 - \text{sn } \mu}{1 + \text{sn } \mu} \right|. \quad (47)$$

С его помощью легко показать, что краевые условия (17) будут выполнены только при $\nu = 0$.

Для доказательства (47) полезно переписать $|q|^2$ в виде произведения qq^* и выполнить аналитическое продолжение функций по переменной χ с вещественной оси в комплексную плоскость. После этого достаточно убедиться в эквивалентности разложений по нулям и полюсам двоякопериодических мероморфных по χ функций в левых и правых частях полученного равенства. В качестве точки нормировки равенства (47) удобно выбрать $\chi = -K - iK'$.

По найденному решению $\Psi_+(u)$ (27) линейной системы (5) восстанавливаем точное решение исходной существенно нелинейной модели. Приравнивая вычеты в точке $u = -iK'$ от левой и правой частей первого из одевающих соотношений (44), получаем явное решение модели Ландау–Лифшица (1), описывающее солитонное возбуждение в полосовой доменной структуре:

$$S_k \sigma_k = \Psi(u) (S_{\Delta/2}^{(0)})_k \sigma_k \Psi^\dagger(-u^*)|_{u=-iK'}, \quad (48)$$

где $S_{\Delta/2}^{(0)} = (\sin \theta_{\Delta/2}^{(0)} \cos \varphi_0, \sin \theta_{\Delta/2}^{(0)} \sin \varphi_0, \cos \theta_{\Delta/2}^{(0)})$, $\theta_{\Delta/2}^{(0)} = \pi/2 - \text{am}(\chi + \Delta/2, k)$.

Отметим, что по построению решение Ψ_+ (27) системы (5) удовлетворяет условиям (17). Поэтому предложенная процедура дает солитонное решение (48) с требуемыми краевыми условиями на бесконечности (4).

Протяженность и динамические свойства солитона (48) определяются зависимостью вектора $\mathbf{m}$ от переменных x, t (45). Поскольку модулирующая матрица $\widetilde{M}(\mu, \chi + \Delta/2)$ в выражении (45) периодична по x , основная зависимость от x, t солитона (48) связана с экспоненциальными множителями $e^{\pm A(\mu, \chi, t)}, e^{\pm A^*(\mu, \chi, t)}$. Функция $A(\mu, \chi, t)$ линейна по x, t :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}[-q^{(1)}(x - V^{(1)}t) + i(\eta^{(1)}x - \omega^{(1)}t)], \\ q^{(1)} &= -k^{-1} \operatorname{Re} Z(\mu) > 0, & \eta^{(1)} &= k^{-1} \operatorname{Im} Z(\mu), \\ V^{(1)} &= -(q^{(1)}k)^{-1} \operatorname{Im}(\operatorname{cn} \mu \operatorname{dn} \mu), & \omega^{(1)} &= -k^{-1} \operatorname{Re}(\operatorname{cn} \mu \operatorname{dn} \mu). \end{aligned}$$

Здесь $\eta^{(1)}$ и $\omega^{(1)}$ – волновое число и частота прецессии намагниченности в ядре солитона, $V^{(1)}$ – скорость движения солитона как целого. Направление скорости задается знаком мнимой части μ : $\operatorname{sgn} V^{(1)} = -\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \mu$. Величина $(q^{(1)})^{-1}$ определяет характерную длину, в пределах которой происходят наиболее значительные изменения намагниченности в солитоне.

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Для дальнейшего анализа нам потребуется информация об асимптотическом поведении функций $\Psi_{1,2}(u)$ и $\bar{a}(u)$ вблизи особых точек $u = iK', \bmod (2K, 2iK')$, вспомогательной линейной системы (5).

Асимптотические разложения “затравочных” решений $\Psi_{1,2}^{(0)}(u)$ при $u = iK' + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) нетрудно получить из (6), (8). При вычислениях используем тождества

$$\begin{aligned} \zeta(u) &= \frac{1}{2}[E(u) - u] + \frac{1 + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{2 \operatorname{sn} u} + \frac{u}{12}(1 + k^2), \\ \eta_1 &= \zeta(2K) = E - K + \frac{K}{6}(1 + k^2) = 2\zeta(K) - 1, \\ \zeta(u + K) + \zeta(u - K) - \frac{\eta_1 u}{K} &= Z(u) - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}, \\ Z(u + K) &= Z(u) - k^2 \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\widetilde{M}(u = iK', \chi + \Delta_j) = e^{i\theta_j \sigma_2/2} e^{i\pi(\chi + \Delta_j)\sigma_3/4K}, \quad \theta_j \equiv \frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(\chi + \Delta_j, k),$$

$$\zeta(\chi + \Delta_j - K) - \zeta(\chi + \Delta_j + K) + \eta_1 = -\frac{\operatorname{dn}(\chi + \Delta_j)}{\operatorname{cn}(\chi + \Delta_j)} = \frac{\partial_\chi \theta_j}{\sin \theta_j}, \quad j = 1, 2.$$

Матрица $\widetilde{M}(u, \chi)$ определена в (6), $E(u)$ и E – соответственно неполный и полный эллиптические интегралы второго рода.

В результате находим

$$\begin{aligned} \Psi_j^{(0)}(iK' + \varepsilon) &= e^{-i\varphi_0 \sigma_3/2} e^{i\theta_j \sigma_2/2} \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} \partial_\chi \theta_j \sigma_1 + O(\varepsilon^2) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\Delta_j \eta_3 \sigma_3 + \frac{\chi}{2} \sigma_3 \left(Z(\varepsilon) + \frac{\operatorname{cn} \varepsilon \operatorname{dn} \varepsilon}{\operatorname{sn} \varepsilon} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \sigma_3 [1 - Z(\chi + \Delta_j)] + O(\varepsilon^2) \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2k^2} \frac{\operatorname{cn} \varepsilon \operatorname{dn} \varepsilon}{\operatorname{sn}^2 \varepsilon} t \sigma_3 - \frac{\eta_1 \Delta_j \sigma_3 \varepsilon}{2K} \right]. \end{aligned} \tag{50}$$

Асимптотический ряд для решения Йоста $\Psi_1(u, x, t)$ при $u = iK' + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) будем искать в виде

$$\Psi_1 = e^{-i\Phi\sigma_3/2} e^{i\theta\sigma_2/2} g e^{-i\theta_1\sigma_2/2} e^{i\varphi_0\sigma_3/2} \Psi_1^{(0)}, \quad (51)$$

где углы Φ и θ задают параметризацию (2) поля намагниченности, а θ_1 , φ_0 – его асимптотику (4) при $\chi \rightarrow -\infty$. Тогда первое из равенств системы (5) дает уравнение для расчета g :

$$\partial_x g = Rg - gR_0, \quad (52)$$

где

$$R = -\frac{i}{2} \left(\sigma_1 \sin \theta [(w_1 + w_3) \cos \theta - \partial_x \Phi] + \partial_x \theta \sigma_2 + \right. \\ \left. + \sigma_3 \left[\frac{w_3 - w_1}{2} + \frac{w_3 + w_1}{2} \cos(2\theta) - \cos \theta \partial_x \Phi \right] \right),$$

а матрица R_0 получается из R заменой $\Phi \rightarrow \varphi_0 = \text{const}$, $\theta \rightarrow \theta_1(x)$. Вблизи $u = iK' + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$, коэффициенты $w_{1,3}$ допускают степенные разложения: $w_1(iK' + \varepsilon) = -ik^{-1}\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon)$, $w_3(iK' + \varepsilon) = ik^{-1}\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon)$.

В соответствии с (7) матричная функция g должна удовлетворять асимптотическому условию

$$g \rightarrow I \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty.$$

Решение $g(u, x, t)$ уравнения (52) будем искать в виде

$$g = (I + X)e^{h\sigma_3 + Y}, \quad (53)$$

где недиагональная матрица X и диагональная матрица Y разлагаются в ряды по степеням ε :

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n X_n, \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Y_n.$$

После простых вычислений получаем

$$h = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^x dx' \partial_{x'} \Phi \cos \theta, \\ Y_1 = -\frac{k}{4} \sigma_3 \int_{-\infty}^x dx' [(\partial_{x'} \theta)^2 - (\partial_{x'} \theta_1)^2 + (\partial_{x'} \Phi)^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - \sin^2 \theta_1], \quad (54) \\ X_1 = \frac{k}{2} [\partial_x \theta \sigma_1 + \sin \theta \partial_x \Phi \sigma_2 - e^{h\sigma_3} \sigma_1 e^{-h\sigma_3} \partial_x \theta_1].$$

Используя формулы (10), (50), (51), (53), (54), находим асимптотическое разложение функции $\bar{a}(u)$ вблизи особой точки $u = iK'$:

$$\ln \bar{a}(u) \Big|_{u=iK'+\varepsilon} = \Delta\eta_3 + \frac{i}{2} P + \frac{\varepsilon k}{2} H + O(\varepsilon^2). \quad (55)$$

Коэффициенты P и H играют роль импульса и энергии локализованного возбуждения на фоне полосовой доменной структуры:

$$P = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x \Phi \cos \theta,$$

$$H = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dx' [(\partial_{x'} \theta)^2 - (\partial_{x'} \theta_1)^2 + (\partial_{x'} \Phi)^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - \sin^2 \theta_1] + \frac{Z(\chi + \Delta) - Z(\chi)}{k} + \frac{\eta_1 \Delta}{Kk} \right).$$

Предел выражения для H существует, так как при $x \rightarrow +\infty$ имеем

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x dx' [(\partial_{x'} \theta_2)^2 - (\partial_{x'} \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1] \approx \frac{Z(\chi) - Z(\chi + \Delta)}{k} + \text{const.}$$

6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Динамическая стабильность солитона в полосовой доменной структуре поддерживается серией интегралов движения. Для их построения следует отделить вклад периодической фоновой структуры. В безграничной среде он бесконечен. Предложенная процедура содержит путь преодоления этой трудности. Элемент $\bar{a}(u)$ матрицы перехода не зависит от времени, и потому является производящей функцией интегралов движения [5], [23]. Для односолитонного состояния явный вид $\bar{a}(u)$ найден ранее (см. (25)):

$$\bar{a}_{\text{sol}}(u) = \frac{\sigma(u - \mu)\sigma(u - \mu^* + 2K)}{\sigma(u + \mu^*)\sigma(u + \mu + 2K)} e^{\eta_1(\mu + \mu^*)}.$$

Периоды сигма-функций Вейерштрасса равны $[4K, 2iK']$. Первые члены асимптотического разложения функции $\ln \bar{a}_{\text{sol}}(u)$ около особой точки $u = iK'$ (55) сразу дают импульс P_{sol} и энергию H_{sol} солитона:

$$P_{\text{sol}} = -2i[\ln \bar{a}_{\text{sol}}(iK') - \eta_3 \Delta],$$

$$H_{\text{sol}} = \frac{2}{k} \frac{\partial}{\partial u} \ln \bar{a}_{\text{sol}}(u)|_{u=iK'} = -\frac{4}{k} \text{Re} \left(Z(\mu, k) - \frac{\eta_1 \mu}{K} \right),$$

где $\Delta = -2(\mu + \mu^*)$ – сдвиг доменной структуры из-за образования в ней солитона. При вычислении H_{sol} учтены третья и четвертая формулы (49).

Заметим, что в модели (1) уравнение для проекции намагниченности на ось анизотропии Ox_3 имеет вид дифференциального закона сохранения:

$$\partial_t S_3 = \partial_x [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_3.$$

На больших расстояниях от солитона в полосовой доменной структуре (3) имеем $[\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_3 = 0$. Отсюда следует, что

$$\int_{-L_1}^{L_2} dx S_3(x, t) = \text{const}, \quad (56)$$

где $L_{1,2} \gg 1$ (мы используем безразмерные переменные).

Интеграл движения (56) не содержится в серии (55). Однако его также легко вычислить. Для этого воспользуемся солитонным решением $\Psi_+(u, x, t)$ вспомогательной линейной системы (5). В его представлении (27) матрица $\Psi(u, x, t)$ диагональна при $u = -K$. Поэтому из первого уравнения (5) находим

$$\int_{-L_1}^{L_2} dx [(S_{\Delta/2}^{(0)})_3 - S_3] = 2 \ln \left[\frac{\Psi_{11}(u, x, t)|_{u=-K, x=L_2}}{\Psi_{11}(u, x, t)|_{u=-K, x=-L_1}} \right].$$

Используя формулы (46), (47) и соотношение [11]

$$\int_{-L_1}^{L_2} dx (S_{\Delta/2}^{(0)})_3 = \int_{-L_1}^{L_2} dx \operatorname{sn} \left(\chi + \frac{\Delta}{2}, k \right) = - \ln \left[\frac{\operatorname{dn}(\tilde{L}_2 + \Delta/2) + k \operatorname{cn}(\tilde{L}_2 + \Delta/2)}{\operatorname{dn}(-\tilde{L}_1 + \Delta/2) + k \operatorname{cn}(-\tilde{L}_1 + \Delta/2)} \right],$$

после простых вычислений получаем

$$\int_{-L_1}^{L_2} dx S_3(x, t) = \ln \left[\frac{\operatorname{dn}(-\tilde{L}_1 + \Delta) + k \operatorname{cn}(-\tilde{L}_1 + \Delta)}{\operatorname{dn} \tilde{L}_2 + k \operatorname{cn} \tilde{L}_2} \right], \quad (57)$$

где $\tilde{L}_{1,2} = L_{1,2}/k$.

Результат (57) зависит от выбора пределов интегрирования. Пусть в отсутствие солитона образец имеет большую длину и в каждой из своих половинок содержит четное число доменов: $\tilde{L}_{1,2} \equiv L/k = 4Km$, где $m \gg 1$. Тогда после возбуждения в нем солитона имеем

$$\int_{-L}^L dx S_3(x, t) = \ln \left[\frac{\operatorname{dn} \Delta + k \operatorname{cn} \Delta}{1 + k} \right].$$

7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ В ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЕ

На примере двухсолитонного состояния обсудим динамику солитонов в полосовой доменной структуре ферромагнетика. Для построения двухсолитонного возбуждения заметим, что решение линейной системы (5) останется таковым после его умножения справа на не зависящую от x, t матрицу, а преобразование $\chi \rightarrow \chi + \delta$, где $\delta = \text{const}$, только сдвинет его вдоль оси Ox . После перечисленных преобразований односолитонного решения (27), (43) и переопределения постоянных получим следующее частное решение вспомогательной системы (5):

$$\Psi_+^{(1)}(u, \chi, t | \mu_1, \mathbf{n}^{(1)}) = \Psi(u, \chi, t | \mu_1, \mathbf{n}^{(1)}) \Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, \chi, t). \quad (58)$$

Матрицы Ψ и $\Psi_{\Delta/2}^{(0)}$ определены формулами (43) и (8), $\mu_s, s = 1, 2$, – нули двухсолитонной функции $\Psi_+^{(2)}(u)$, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, где $\Delta_s = -2(\mu_s + \mu_s^*)$, $\mathbf{n}^{(1)} = \Psi_{\Delta/2}^{(0)}(\mu_1, \chi, t) \mathbf{d}^{(1)}$, $\mathbf{d}^{(1)}$ – произвольный постоянный комплексный вектор.

Будем трактовать (58) как затравочное решение системы (5). Тогда, в соответствии с изложенной схемой одевания, ее новым решением будет

$$\Psi_+^{(2)}(u, \chi, t | \mu_1, \mu_2, \mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}) = \Psi(u, \chi, t | \mu_2, \mathbf{n}^{(2)}) \Psi_+^{(1)}(u, \chi, t | \mu_1, \mathbf{n}^{(1)}), \quad (59)$$

где $\mathbf{n}^{(2)} = \Psi_+^{(1)}(\mu_2, \chi, t) \mathbf{d}^{(2)}$, $\mathbf{d}^{(2)}$ – произвольный постоянный комплексный вектор.

Прямой проверкой можно убедиться, что решение (59) удовлетворяет дифференциальным ограничениям и трансформационным свойствам, которые требуются от двухсолитонного решения системы (5) с граничными условиями (17):

$$\begin{aligned}\Psi_+^{(2)} &\rightarrow \Psi_2^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{a}(u) \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow +\infty, \\ \Psi_+^{(2)} &\rightarrow \Psi_1^{(0)} \begin{pmatrix} \bar{a}(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{при } \chi \rightarrow -\infty.\end{aligned}\tag{60}$$

В частности, получаем верное значение коэффициента $\bar{a}(u)$:

$$\bar{a}(u) = \det \Psi_+^{(2)}(u) = \prod_{s=1}^2 g_1(u|\mu_s)g_2(u|\mu_s).$$

Сформулированная схема размножения решений системы (5), а значит, и модели Ландау–Лифшица (1) носит рекуррентный характер. На ее $(N-1)$ -м шаге получаем описание N солитонов в полосовой доменной структуре. Так же, как в случае солитонов на фоне спиральной структуры [5], [13], факторизация (59) чрезвычайно облегчает анализ мультисолитонов в доменной структуре ферромагнетика.

Двухсолитонное решение модели Ландау–Лифшица имеет вид

$$\begin{aligned}S_k^{(2)}\sigma_k &= \Psi(u|\mu_2, \mathbf{n}^{(2)})\Psi(u|\mu_1, \mathbf{n}^{(1)})(S_{\Delta/2}^{(0)})_k\sigma_k \times \\ &\times \Psi^\dagger(-u^*|\mu_1, \mathbf{n}^{(1)})\Psi^\dagger(-u^*|\mu_2, \mathbf{n}^{(2)})|_{u=-iK'}.\end{aligned}$$

Пространственная локализация солитонов описывается экспоненциальными множителями $e^{\pm A(\mu_s, \chi, t)}$, $e^{\pm A^*(\mu_s, \chi, t)}$, $s = 1, 2$, где

$$A(\mu_s, \chi, t) = \frac{-q^{(s)}(x - V^{(s)}t) + i(\eta^{(s)}x - \omega^{(s)}t)}{2},$$

$$\begin{aligned}q^{(s)} &= -k^{-1} \operatorname{Re} Z(\mu_s) > 0, & \eta^{(s)} &= k^{-1} \operatorname{Im} Z(\mu_s), \\ V^{(s)} &= -[q^{(s)}k]^{-1} \operatorname{Im}(\operatorname{cn} \mu_s \operatorname{dn} \mu_s), & \omega^{(s)} &= -k^{-1} \operatorname{Re}(\operatorname{cn} \mu_s \operatorname{dn} \mu_s).\end{aligned}$$

Перейдем в систему отсчета, связанную со вторым солитоном, и проследим за его изменениями до и после столкновения с первым солитоном. С математической точки зрения эта задача сводится к вычислению пределов решения (59) при $t \rightarrow \mp\infty$ с ограничением $\xi_2 = x - V^{(2)}t = \text{const}$, которое означает, что

$$\begin{aligned}2A(\mu_2, \chi, t) &= -q^{(2)}\xi_2 + i[\eta^{(2)}\xi_2 - \omega^{(2)}t + \eta^{(2)}V^{(2)}t], \\ 2A(\mu_1, \chi, t) &= -q^{(2)}[\xi_2 + (V^{(2)} - V^{(1)})t] + i[\eta^{(1)}\xi_2 - \omega^{(1)}t + \eta^{(1)}V^{(2)}t].\end{aligned}\tag{61}$$

Пусть для определенности скорость второго солитона больше скорости первого: $V^{(2)} - V^{(1)} > 0$. Учитывая второе соотношение (61) и формулы (17), находим

$$\begin{aligned}\Psi(u, \chi, t|\mu_1, \mathbf{n}^{(1)})\Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, \chi, t)\Big|_{\substack{\xi_2=\text{const}, \\ t\rightarrow+\infty}} &\rightarrow \Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(1)}(u) \end{pmatrix}, \\ \Psi(u, \chi, t|\mu_1, \mathbf{n}^{(1)})\Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, \chi, t)\Big|_{\substack{\xi_2=\text{const}, \\ t\rightarrow-\infty}} &\rightarrow \Psi_{\Delta_1+\Delta_2/2}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}^{(1)}(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{62}$$

где $\bar{a}^{(1)}(u) = g_1(u|\mu_1)g_2(u|\mu_1)$.

Соотношения (62) сразу дают предельные значения вектора $\mathbf{n}^{(2)}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}^{(2)} \rightarrow \mathbf{p} &= \Psi_{\Delta_2/2}^{(0)}(\mu_2, \chi, t) \begin{pmatrix} d_1^{(2)} \\ \bar{a}^{(1)}(\mu_2) d_2^{(2)} \end{pmatrix} && \text{при } t \rightarrow +\infty, \\ \mathbf{n}^{(2)} \rightarrow \mathbf{q} &= \Psi_{\Delta_1+\Delta_2/2}^{(0)}(\mu_2, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}^{(1)}(\mu_2) d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \end{pmatrix} && \text{при } t \rightarrow -\infty.\end{aligned}\quad (63)$$

Отсюда следует, что предельные значения $\Psi_+^{(2)}$ имеют вид

$$\Psi_+^{(2)} \Big|_{\substack{\xi_2=\text{const}, \\ t \rightarrow +\infty}} \rightarrow \Psi(u, \chi, t | \mu_2, \mathbf{p}) \Psi_{\Delta_2/2}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(1)}(u) \end{pmatrix}, \quad (64)$$

$$\Psi_+^{(2)} \Big|_{\substack{\xi_2=\text{const}, \\ t \rightarrow -\infty}} \rightarrow \Psi(u, \chi, t | \mu_2, \mathbf{q}) \Psi_{\Delta_1+\Delta_2/2}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}^{(1)}(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Второй солитон при удалении от первого имеет такое же строение, что и одиночный солитон (48), так как описывается функциями (64), (65) того же вида, что и (27). Второй солитон движется быстрее, поэтому при $t \rightarrow +\infty$ он оказывается справа от первого. Асимптотические значения функции (64) при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ и $\xi_2 \rightarrow -\infty$ дают представление об изменении доменной структуры справа и слева от центра второго солитона при $t \rightarrow +\infty$. Соответствующие пределы легко вычисляются с помощью (17):

$$\begin{aligned}\Psi_+^{(2)} \Big|_{\substack{\xi_2 \rightarrow +\infty, \\ t \rightarrow +\infty}} &\rightarrow \Psi_0(u, \chi, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{a}(u) \end{pmatrix}, \\ \Psi_+^{(2)} \Big|_{\substack{\xi_2 \rightarrow -\infty, \\ t \rightarrow +\infty}} &\rightarrow \Psi_{\Delta_2}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}^{(2)}(u) & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(1)}(u) \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (66)$$

где $\bar{a}^{(2)}(u) = g_1(u|\mu_2)g_2(u|\mu_2)$, $\bar{a}(u) = \bar{a}^{(1)}(u)\bar{a}^{(2)}(u)$. Отсюда следует, что движение второго солитона происходит на фоне полосовой доменной структуры и сопровождается ее локальным сдвигом вдоль оси Ox на величину $k\Delta_2$. Первое из соотношений (66), как и положено, воспроизводит краевое условие (60) при $\chi \rightarrow +\infty$.

Второе выражение (65) соответствует ситуации, когда второй солитон оказывается левее первого и на большом расстоянии от него. Изменения доменной структуры справа и слева от второго солитона в этом случае характеризуются выражениями

$$\begin{aligned}\Psi_+^{(2)} \Big|_{\substack{\xi_2 \rightarrow +\infty, \\ t \rightarrow -\infty}} &\rightarrow \Psi_{\Delta_1}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}^{(1)}(u) & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(2)}(u) \end{pmatrix}, \\ \Psi_+^{(2)} \Big|_{\substack{\xi_2 \rightarrow -\infty, \\ t \rightarrow -\infty}} &\rightarrow \Psi_{\Delta}^{(0)}(u, \chi, t) \begin{pmatrix} \bar{a}(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (67)$$

Характер деформирования полосовой структуры вторым солитоном остается прежним: солитон является элементарным переносчиком макроскопического сдвига $k\Delta_2$ доменной структуры. Второе из соотношений (67) приводит к верному краевому условию (60) при $\chi \rightarrow -\infty$ для двухсолитонного решения.

В то же время из-за наличия первого солитона доменные структуры, в которых движется второй солитон при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$, сдвинуты относительно друг друга на величину $-k\Delta_1$ вдоль оси Ox (ср. формулы (66) и (67)).

Другое отличие (64), (65) от функции изолированного солитона в полосовой структуре (27) состоит в перенормировке постоянного вектора $\mathbf{d}^{(2)}$. Например, в пределе $t \rightarrow +\infty$ компоненты вектора $\mathbf{d}^{(2)} = (d_1^{(2)}, d_2^{(2)})$ приобретают дополнительные множители (см. (63)): $d_1^{(2)} \rightarrow d_1^{(2)}, d_2^{(2)} \rightarrow \bar{a}^{(1)}(\mu_2)d_2^{(2)}$.

Ядро уединенного второго солитона описывается аналогом выражения (48) и зависит от отношения $n_1^{(2)}/n_2^{(2)}$. С учетом явного вида векторов $\mathbf{n}^{(2)}$ и $\mathbf{p}$ это означает, что в пределе $t \rightarrow +\infty$ координата центра второго солитона

$$x = V^{(2)}t + \frac{1}{q^{(2)}} \ln \left| \frac{d_1^{(2)}}{d_2^{(2)}} \right|$$

сдвигается на величину

$$\delta x|_{t \rightarrow +\infty} = -\frac{1}{q^{(2)}} \ln |\bar{a}^{(1)}(\mu_2)|, \quad (68)$$

а начальная фаза прецессии намагниченности ядра солитона приобретает приращение

$$\delta \varphi|_{t \rightarrow +\infty} = -\arg \bar{a}^{(1)}(\mu_2). \quad (69)$$

До столкновения с первым солитоном (при $t \rightarrow -\infty$) перечисленные параметры у второго солитона отличаются знаком от значений (68), (69).

Для того чтобы проследить за первым солитоном при его рассеянии на втором, следует осуществить факторизацию (59) в обратном порядке. Новая форма записи того же решения удобна для исследования его асимптотик в другом предельном случае: $x - V^{(1)}t = \text{const}$, $t \rightarrow \pm\infty$. Вычисления дают близкие результаты.

Таким образом, солитоны в полосовой доменной структуре, как и дислокации в кристаллах, служат элементарными переносчиками макроскопических трансляций структуры. При $\omega \rightarrow 0$ солитоны служат зародышами перемагничивания материала. Сильное взаимодействие солитонов с доменной структурой задает сценарии процессов перемагничивания. Они могут сопровождаться значительными колебаниями доменных границ структуры, прилегающих к ядру солитона. Детальный анализ таких явлений выходит за рамки данной статьи и будет приведен в другой работе.

Список литературы

- [1] Е. К. Складчин, *О полной интегрируемости уравнения Ландау–Лифшица*, Препринт ЛОМИ Е-3-79, ЛОМИ, 1979.
- [2] А. Е. Боровик, В. Н. Робук, “Линейные псевдопотенциалы и законы сохранения для уравнения Ландау–Лифшица, описывающего нелинейную динамику ферромагнетика”, *ТМФ*, **46**:3 (1981), 371–381.
- [3] А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев, 1983.
- [4] А. Е. Borovik, S. Klama, S. I. Kulinich, “Integration of the Landau–Lifshitz equation with preferred-axis anisotropy by the method of the inverse scattering problem”, *Phys. D*, **32**:1 (1988), 107–134.
- [5] А. Б. Борисов, В. В. Киселев, *Квазиодномерные магнитные солитоны*, Физматлит, М., 2014.

- [6] Р. Ф. Бикбаев, А. И. Бобенко, А. Р. Итс, *Уравнение Ландау–Лифшица. Теория точных решений II*, Препринт ДонФТИ-84-7(82), Донецкий физ.-техн. ин-т АН УССР, Донецк, 1984.
- [7] Р. Ф. Бикбаев, А. И. Бобенко, А. Р. Итс, “О конечнозонном интегрировании уравнения Ландау–Лифшица”, *Докл. АН СССР*, **272**:6 (1983), 1293–1298.
- [8] Ю. Ф. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко, *Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты*, Наукова думка, Киев, 1987.
- [9] А. И. Бобенко, “Вещественные алгебро-геометрические решения уравнения Ландау–Лифшица в тета-функциях Прима”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:1 (1985), 6–19.
- [10] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Маттье*, Наука, М., 1967.
- [11] P. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists*, Springer, Berlin, 1971.
- [12] В. В. Киселев, А. А. Расковалов, “Нелинейная динамика квазиодномерной спиральной структуры”, *ТМФ*, **173**:2 (2012), 268–292.
- [13] В. В. Киселев, А. А. Расковалов, “Нелинейные коллективные возбуждения в геликоидальных магнитных структурах”, *ФММ*, **113**:12 (2012), 1180–1192.
- [14] V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov, “Solitons and nonlinear waves in the spiral magnetic structures”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **84** (2016), 88–103.
- [15] A. V. Mikhailov, “The Landau–Lifschitz equation and the Riemann boundary problem on a torus”, *Phys. Lett.*, **92**:2 (1982), 51–55.
- [16] А. Б. Борисов, В. В. Киселев, “Многосолитонные решения асимметричных киральных $SU(2)$, $SL(2, R)$ -теорий ($d = 1$)”, *ТМФ*, **54**:2 (1983), 246–257.
- [17] A. B. Borisov, “The hilbert problem for matrices and a new class of integrable equations”, *Lett. Math. Phys.*, **7**:3 (1983), 195–199.
- [18] А. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.
- [19] В. В. Киселев, А. А. Расковалов, “Взаимодействие бризера с волной намагниченности в ферромагнетике с анизотропией типа «легкая ось»”, *ТМФ*, **163**:1 (2010), 94–113.
- [20] В. В. Киселев, А. А. Расковалов, “Вынужденное движение уединенных доменов и доменных границ в поле нелинейной волны намагниченности”, *ФММ*, **109**:6 (2010), 625–638.
- [21] V. V. Kiselev, A. A. Raskovalov, “Forced motion of breathers and domain boundaries against the background of nonlinear magnetization wave”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **45**:12 (2012), 1551–1565.
- [22] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [23] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.