Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Мартынов, Анггармонические состояния одномерной анизотропной модели Гейзенберга со свободными граничными условиями, *ТМФ*, 1998, том 117, номер 3, 489–497

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf947>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:37:24

АНГАРМОНИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ ОДНОМЕРНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Для одномерной анизотропной модели Гейзенберга с конечным числом спинов $1/2$ и свободными граничными условиями показано существование состояний, описываемых негармоническими функциями. Определено число таких состояний.

1. ВВЕДЕНИЕ

Решения одномерной модели Гейзенберга имеют принципиальное значение в теории магнетизма. Это обусловлено большим числом задач, на которые возможно обобщение этой модели. Кроме того, ее точные решения являются критериями адекватности большого числа приближенных подходов и численных методов, применяемых в случаях, если нахождение точных решений невозможно. Собственные функции и собственные значения энергии модели Гейзенберга, как и любой другой модели, существенно зависят не только от параметров гамильтониана, но и от граничных условий (ГУ), накладываемых на решения. Стандартные циклические ГУ [1, 2], позволяющие использовать анзац Бете [3], ограничивают класс решений периодическими функциями координаты. Однако на практике, как правило, реализуется случай свободных ГУ, когда крайние спины магнитной цепочки взаимодействуют только с одним ближайшим магнитным соседом. Рассмотрение открытой анизотропной цепочки впервые было проведено Годеном [2]. Были получены общие соотношения на импульсы и фазы для произвольного числа M перевернутых спинов и сделано предположение о существовании вещественных решений для импульсов. Однако вопрос об анализе условий появления мнимых решений k_i и их числа остался открытым. Для решения этого вопроса найдем полный набор собственных функций и собственных значений энергии для $M = 1, 2$ и для случая анизотропии обмена типа “легкая ось”.

2. ОДНОМАГНОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Анизотропная модель Гейзенберга с конечным числом N спинов $S = 1/2$ задается гамильтонианом

$$H = J \sum_n (S_n^z S_{n+1}^z + \Delta (S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y)). \quad (1)$$

*Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН, Красноярск, Россия

В классе одномагнитных состояний $M = 1$ с собственными функциями

$$\psi(k) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} a_k(n) \psi(n), \quad (2)$$

где n – координата перевернутого спина, отсчитываемая от середины магнитной цепочки, k – импульс, параметризующий решения, может быть найдено точное решение соответствующего уравнения Шредингера, которое для амплитуд $a_k(n)$ сводится к системе конечно-разностных уравнений

$$2(\varepsilon + 1)a(n) = \Delta(a(n-1) + a(n+1)), \quad -\frac{N-1}{2} < n < \frac{N-1}{2}. \quad (3)$$

Координата n принимает целые значения для нечетного N и полупелые – для четного N . Здесь и далее индекс k у амплитуд $a(n)$ опущен для упрощения записи формул. Все выражения для амплитуд относятся к собственным состояниям (1) с фиксированным k . Энергия $\varepsilon = E/J$ отсчитывается от ферромагнитного “вакуума” в единицах J . В случае свободных ГУ для крайних амплитуд конечно-разностное уравнение имеет вид

$$2\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)a\left(\pm\frac{N-1}{2}\right) = \Delta a\left(\pm\frac{N-3}{2}\right). \quad (4)$$

Эта исходная неоднородная система конечно-разностных уравнений (3) и (4) эквивалентна однородной системе, если дополнить набор из N физических амплитуд $a(n)$, $n \in (-(N-1)/2, \dots, (N-1)/2)$, двумя нефизическими амплитудами, связанными с физическим набором, двумя дополнительными условиями

$$a\left(\pm\frac{N-1}{2}\right) = \Delta a\left(\pm\frac{N+1}{2}\right). \quad (5)$$

Почленное добавление условий (5) к граничным уравнениям (4) сводит задачу к решению однородной системы конечно-разностных уравнений, на которую наложены ГУ (5). Эти условия для $\Delta \neq 1$ уже не являются условиями зеркального типа, обеспечивавшими периодичность решений для изотропной модели Гейзенберга [4]. Нециклические ГУ любой конечной системы требуют обращения в нуль физической амплитуды волновой функции за границами области определения. Это позволяет искать решения (с точностью до несущественного фазового множителя) в виде реальных функций координат с симметрией, отражающей симметрию рассматриваемой задачи. Гармонические симметричные (s) и антисимметричные (a) относительно середины цепочки спинов $n = 0$ решения однородной системы (3), (4), (5) с учетом нормировки имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} a_k^s(n) &= \sqrt{\frac{2}{N + \frac{\sin(kN)}{\sin k}}} \cos(kn), \\ a_k^a(n) &= \sqrt{\frac{2}{N - \frac{\sin(kN)}{\sin k}}} \sin(kn). \end{aligned} \quad (6)$$

Волновые векторы решений (6) определяются ГУ (5)

$$\operatorname{ctg} \frac{kN}{2} = -\frac{1+\Delta}{1-\Delta} \operatorname{tg} \frac{k}{2}, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \frac{kN}{2} = \frac{1+\Delta}{1-\Delta} \operatorname{tg} \frac{k}{2} \quad (8)$$

соответственно для симметричных и антисимметричных решений. Решения k_j уравнений для состояний разной симметрии дают функции (2), ортогональные по определению. Решения одинаковой симметрии удовлетворяют условиям ортогональности

$$\frac{\sin \frac{N(k+k')}{2}}{\sin \frac{k+k'}{2}} \pm \frac{\sin \frac{N(k-k')}{2}}{\sin \frac{k-k'}{2}} = 0$$

для симметричных и антисимметричных пар k и k' , соответственно. В области определения физически различных решений $0 \leq k < \pi$ число решений уравнения (7) для четного N есть

$$N_{1m}^s = \frac{N}{2} - 1.$$

Число антисимметричных гармонических решений (8) зависит от числа спинов N и величины Δ :

$$N_{1m}^a = \begin{cases} \frac{N}{2}, & N < \frac{1+\Delta}{1-\Delta}, \\ \frac{N}{2} - 1, & N > \frac{1+\Delta}{1-\Delta}. \end{cases}$$

Для нечетного N получаем соответственно

$$N_{1m}^s = \frac{N-1}{2},$$

$$N_{1m}^a = \begin{cases} \frac{N-1}{2}, & N < \frac{1+\Delta}{1-\Delta}, \\ \frac{N-1}{2} - 1, & N > \frac{1+\Delta}{1-\Delta}. \end{cases}$$

Случай

$$N = \frac{1+\Delta}{1-\Delta}$$

является особым. Здесь мы имеем линейное антисимметричное решение

$$a_l^a(n) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{N(N^2-1)}} n \quad (9)$$

с энергией дна одномагнитной ветви $\varepsilon_l = \Delta - 1$. Таким образом, гармонические одномагнитные решения (6) дают число k -состояний, меньшее чем исходное число N координатных функций. Полный набор ортонормированных одномагнитных функций можно получить расширением класса экспоненциальных функций (6) ангармоническими гиперболическими функциями соответствующей симметрии, что отвечает решениям с мнимыми импульсами $k = iq$:

$$a_q^s(n) = \sqrt{\frac{2}{N + \frac{\operatorname{sh}(qN)}{\operatorname{sh} q}}} \operatorname{ch}(qn),$$

$$a_q^a(n) = \sqrt{\frac{2}{\frac{\operatorname{sh}(qN)}{\operatorname{sh} q} - N}} \operatorname{sh}(qn). \quad (10)$$

Рис. 1

Соответствующие уравнения для q опять получаются подстановкой соотношений (10) в ГУ (5) и имеют вид

$$\operatorname{cth} \frac{qN}{2} = \frac{1 + \Delta}{1 - \Delta} \operatorname{th} \frac{q}{2}, \quad (11)$$

$$\operatorname{th} \frac{qN}{2} = \frac{1 + \Delta}{1 - \Delta} \operatorname{th} \frac{q}{2} \quad (12)$$

соответственно для симметричного и антисимметричного случаев. Видно, что симметричное ангармоническое решение существует при любых N и $\Delta < 1$, в то время как равенство для антисимметричных решений (12) имеет место только при выполнении порогового условия

$$N > \frac{1 + \Delta}{1 - \Delta}. \quad (13)$$

Таким образом, сумма гармонических и ангармонических одномагнанных решений всегда обеспечивает полноту системы собственных функций оператора (1).

Вид различных одномагнанных решений с минимальными значениями k и q для $N = 10$ и $\Delta = 0.9$ показан на рис. 1. Для пояснения порогового условия (13) функции взяты ненормированными, но проходящими через одни и те же граничные точки (5). Видно, что при заданных N и Δ антисимметричное негармоническое решение не может проходить через эти точки и центр инверсии, т.е. такое решение отсутствует. Для реализации такого решения необходимо либо увеличить N , либо уменьшить Δ . При этом исчезнет первое антисимметричное гармоническое решение $a \sim \sin(kn)$.

3. ДВУХМАГНОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Для $M = 2$ требования симметрии, накладываемые на амплитуды собственных функций

$$\psi(k_1, k_2) = \sum_{n_1 < n_2} a(n_1, n_2) \psi(n_1, n_2), \quad (14)$$

сводятся к условиям соответствующей четности амплитуд относительно инверсии координат перевернутых спинов

$$a(n_1, n_2) = \pm a(-n_2, -n_1).$$

Здесь и далее индексы k_1, k_2 у амплитуд опущены для упрощения выражений. Все амплитуды $a(n_1, n_2)$ относятся к фиксированной паре k_1, k_2 , параметризующей каждое двухмагнотное решение. Знак плюс имеет место для функций с симметричным относительно центра распределением амплитуд, а минус – для антисимметричного распределения. Неоднородная система конечно-разностных уравнений на амплитуды сводится к однородной системе

$$2(\varepsilon + 2)a(n_1, n_2) = \Delta(a(n_1 + 1, n_2) + a(n_1 - 1, n_2) + a(n_1, n_2 + 1) + a(n_1, n_2 - 1)), \quad n_1 < n_2, \quad (15)$$

путем дополнения физических амплитуд $a(n_1 < n_2)$,

$$n_1, n_2 \in \left(-\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2}\right)$$

$3N - 2$ нефизическими амплитудами $a(n, n)$, $a(-(N+1)/2, n_2)$, $a(n_1, (N+1)/2)$, на которые накладываются граничные условия

$$\begin{aligned} a\left(-\frac{N-1}{2}, n_2\right) &= \Delta a\left(-\frac{N+1}{2}, n_2\right), \\ a\left(n_1, \frac{N-1}{2}\right) &= \Delta a\left(n_1, \frac{N+1}{2}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$2a_{k_1 k_2}(n_1, n_1 + 1) = \Delta(a_{k_1 k_2}(n_1, n_1) + a_{k_1 k_2}(n_1 + 1, n_1 + 1)). \quad (17)$$

Процедура полностью аналогична изотропному случаю [4] и обеспечивает равенство полного числа амплитуд и уравнений, необходимое для выполнения условия однозначности решения. С учетом вещественности амплитуд получаем для гармонических решений соотношение

$$\begin{aligned} a^{s,a}(n_1, n_2) &= C(k_1, k_2) \left(\cos(k_1(n_1 + \delta_1)) \cos(k_2(n_2 - \delta_2)) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \cos(k_2(n_1 + \delta_2)) \cos(k_1(n_2 - \delta_1)) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Фазовые сдвиги $\delta_1 = \delta(k_1)$, $\delta_2 = \delta(k_2)$ задают положения максимумов волновой функции, и для зеркальных ГУ (изотропная модель Гейзенберга) они равны $N/2$ [4]. Для анизотропного случая они определяются из ГУ (16) с помощью уравнений

$$\delta_i = \delta'_i + \frac{N}{2}, \quad \text{ctg}(k_i \delta'_i) = \frac{1 + \Delta}{1 - \Delta} \text{tg} \frac{k_i}{2}, \quad i = 1, 2. \quad (19)$$

Связь между импульсами k_1 и k_2 каждого решения задается соотношением (17), которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между k_1 и k_2 , т.е. двухмагнотные решения анизотропной одномерной модели Гейзенберга являются однопараметрическими. Для симметричных и антисимметричных решений получаем соответственно две системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2k_1 \delta_1}{\sin k_1} (1 - \Delta \cos k_1) \pm \frac{\sin 2k_2 \delta_2}{\sin k_2} (1 - \Delta \cos k_2) &= 0, \\ \frac{\sin k_1 (2\delta_1 - 1)}{\sin k_1} \pm \frac{\sin k_2 (2\delta_2 - 1)}{\sin k_2} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\delta_{1,2}$ заданы соотношениями (19).

При рассмотрении вещественных решений k_i удобнее исключить фазы (19) и использовать уравнения для полного $K = k_1 + k_2$ и относительного $q = (k_1 - k_2)/2$ импульсов. Имеем

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg}\left(\frac{KN}{2}\right) \sin\left(\frac{K}{2}\right) \left(2 \cos \frac{K}{2} - \Delta(3 - \Delta^2) \cos q\right) + \Delta^2 - 1 + \\ & + 2 \cos^2 \frac{K}{2} + 2\Delta^2 \cos^2 q - \Delta(3 + \Delta^2) \cos\left(\frac{K}{2}\right) \cos q = 0, \\ & \operatorname{tg}(qN) \sin(q) \left(2 \cos q - \Delta(3 - \Delta^2) \cos \frac{K}{2}\right) + \Delta^2 - 1 + \\ & + 2 \cos^2 q + 2\Delta^2 \cos^2 \frac{K}{2} - \Delta(3 + \Delta^2) \cos\left(\frac{K}{2}\right) \cos q = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

для симметричных решений и

$$\begin{aligned} & \operatorname{ctg}\left(\frac{KN}{2}\right) \sin\left(\frac{K}{2}\right) \left(\Delta(3 - \Delta^2) \cos q - 2 \cos \frac{K}{2}\right) + \Delta^2 - 1 + \\ & + 2 \cos^2 \frac{K}{2} + 2\Delta^2 \cos^2 q - \Delta(3 + \Delta^2) \cos\left(\frac{K}{2}\right) \cos q = 0, \\ & \operatorname{ctg}(qN) \sin(q) \left(\Delta(3 - \Delta^2) \cos \frac{K}{2} - 2 \cos q\right) + \Delta^2 - 1 + \\ & + 2 \cos^2 q + 2\Delta^2 \cos^2 \frac{K}{2} - \Delta(3 + \Delta^2) \cos\left(\frac{K}{2}\right) \cos q = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

для антисимметричных решений.

Уравнения (20) инвариантны относительно инверсии знаков k_i и их перестановок (знаков и перестановок K и q в (20), (21)). Для определения всех физически различных решений (20) и (21) достаточно ограничиться интервалом $0 \leq K, q < \pi$. Кроме вещественных решений K и q , уравнения имеют решения, когда один из этих импульсов мнимый. Симметрия уравнений при перестановках K и q позволяет получить полный набор таких физически различных состояний, фиксируя K вещественным, а q мнимым. Эти решения соответствуют связанным комплексам Бете $k_1 = k_2^*$, и для них уравнения (20), (21) для K и $q' = -iq$ по-прежнему остаются вещественными. Амплитуды комплексов Бете в координатах $R = (n_1 + n_2)/2$ и $r = n_1 - n_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_B^s(R, r) &= C(K, q') \left(\cos(KR) \operatorname{ch}(q'(r + N + 2 \operatorname{Re}(\delta'))) + K \operatorname{Im}(\delta') + \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{ch}(2q'N) \cos\left(\frac{K}{2}(r + N + 2 \operatorname{Re}(\delta')) + 2q' \operatorname{Im}(\delta')\right) \right), \\ a_B^a(R, r) &= C(K, q') \left(\sin(KR) \operatorname{sh}(q'(r + N + 2 \operatorname{Re}(\delta'))) + K \operatorname{Im}(\delta') + \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{sh}(2q'N) \sin\left(\frac{K}{2}(r + N + 2 \operatorname{Re}(\delta')) + 2q' \operatorname{Im}(\delta')\right) \right) \end{aligned}$$

для симметричных и антисимметричных комплексов, соответственно, где $\delta' = \delta'_1 = (\delta'_2)^*$.

Вещественные и комплексно-сопряженные решения k_i для анизотропной открытой цепочки $\Delta < 1$ не исчерпывают все возможные решения уравнений (20) и не дают полного набора собственных функций (1). Уравнения (20) имеют решения и в случае, если один из импульсов k_i или оба сразу являются чисто мнимыми. В первом случае реализуются смешанные состояния (m-состояния), когда амплитуды волновых функций выражаются через суперпозицию гармонических (тригонометрических) и гиперболических функций:

$$a_{\text{m}}^{\text{s,a}}(n_1, n_2) = C(k_1, k_2) \left(\cos(k_1(n_1 + \delta_1)) \operatorname{ch}(|k_2|(n_2 - \delta_1)) \pm \right. \\ \left. \pm \operatorname{ch}(|k_2|(n_1 + \delta_2)) \cos(k_1(n_2 - \delta_1)) \right).$$

Во втором случае получаем чисто ангармонические состояния (a-состояния), у которых амплитуды выражаются через гиперболические функции:

$$a_{\text{a}}^{\text{s}}(n_1, n_2) = C(k_1, k_2) \left(\operatorname{ch}(|k_1|(n_1 + \delta_1)) \operatorname{ch}(|k_2|(n_2 - \delta_2)) + \right. \\ \left. + \operatorname{ch}(|k_2|(n_1 + \delta_2)) \operatorname{ch}(|k_1|(n_2 - \delta_1)) \right), \\ a_{\text{a}}^{\text{a}}(n_1, n_2) = C(k_1, k_2) \left(\operatorname{ch}(|k_1|(n_1 + \delta_1)) \operatorname{sh}(|k_2|(n_2 - \delta_2)) + \right. \\ \left. + \operatorname{sh}(|k_2|(n_1 + \delta_2)) \operatorname{ch}(|k_1|(n_2 - \delta_1)) \right).$$

Граничные условия (16) для амплитуд $a_{\text{a}}^{\text{s}}(n_1, n_2)$ дают вместо (19) следующее выражение для фазы δ_2 :

$$\delta_2 = \delta'_2 + \frac{N}{2}, \quad \operatorname{th}(|k_2|\delta'_2) = -\frac{1 + \Delta}{1 - \Delta} \operatorname{th} \frac{k_2}{2}.$$

4. ЭНЕРГИИ ОДНО- И ДВУХМАГНОННЫХ СОСТОЯНИЙ

Спектр собственных значений энергии рассмотренных решений в зависимости от суммарного вещественного импульса $K = \operatorname{Re}(\sum k_i)$ показан для $N = 10$ и $\Delta = 0.9$ на рис. 2. Одномагнонным состояниям соответствуют кружки (темные для симметричных и светлые для антисимметричных состояний). Квадраты отвечают двухмагнонным состояниям (темные симметричным, светлые антисимметричным). Одномагнонные энергии содержат $N - 1$ волновых и одно ангармоническое значения

$$\varepsilon_{\text{w}}^{(1)} = \Delta \cos k - 1, \\ \varepsilon_{\text{a}}^{(1)} = \Delta \operatorname{ch} q - 1.$$

Последнее относится к симметричному решению. Пороговое условие (13) для данного примера не выполнено и антисимметричное a-состояние отсутствует. Поскольку $\operatorname{ch} q \geq 1$, энергии ангармонических решений для ферромагнитного обмена $J < 0$ лежат ниже ветви волновых энергий. Причем энергия симметричного ангармонического состояния минимальная (первое возбужденное состояние). Этот вывод прямо следует из

Рис. 2

вида волновых функций (см. рис. 1): энергия состояния тем ниже, чем более однородным является распределение намагниченности (амплитуды волновой функции) по цепочке. Распределение уровней в данной задаче полностью аналогично распределению уровней частицы в потенциальной яме в зависимости от числа узлов волновой функции.

Волновые двухмагнонные решения дают значения энергии

$$\varepsilon_w^{(2)} = \Delta(\cos k_1 + \cos k_2) - 2,$$

число которых по сравнению с изотропным случаем [4] уменьшается на N . Это уменьшение происходит за счет появления N m - и a -решений. Для данного примера существует только одно симметричное a -решение, имеющее наименьшую энергию среди двухмагнонных значений (на вставке рис. 2 оно находится на оси $K = 0$). Антисимметричное a -решение появляется при увеличении анизотропии (для $N = 10$) до $\Delta \approx 0.8$ за счет одного антисимметричного m -решения (на вставке рис. 2 оно ближайшее к оси $K = 0$). Энергии смешанных и ангармонических решений имеют соответственно вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_m^{(2)} &= \Delta(\cos k_1 + \operatorname{ch} |k_2|) - 2, \\ \varepsilon_a^{(2)} &= \Delta(\operatorname{ch} |k_1| + \cos k_2) - 2.\end{aligned}$$

Комплексы Бете образуют нижнюю ветвь двухмагнонных энергий

$$\varepsilon_B^{(2)} = 2\Delta \cos K \operatorname{ch} |q| - 2.$$

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Общие соотношения на импульсы и фазы экспоненциальных функций Бете [2] позволяют для $M = 1$ после соответствующих преобразований получить решения (6)–(8). Расширение области допустимых значений импульсов в область мнимых k дает ангармонические состояния, дополняющие набор до N . Число последних (1 или 2) зависит от соотношения между числом спинов и анизотропией, а энергия является наинизшей. Линейное решение, возникающее при $N = (1 + \Delta)/(1 - \Delta)$, не может быть получено из конечного числа экспонент. Это говорит о том, что экспоненты не всегда дают полный набор собственных функций.

Уже для $M = 2$ получить явный вид функций и уравнения для импульсов путем решения общих соотношений [2] весьма сложно. Использование симметризованных вещественных волновых функций позволяет математически просто и физически наглядно решить задачу анализа возможных типов решений и их числа. Анизотропия обмена $\Delta < 1$ (“легкая ось”) в сочетании со свободными ГУ приводит к уменьшению числа решений с вещественными k_i и появлению за их счет N решений с мнимыми k_i . Анизотропия $\Delta > 1$ (“легкая плоскость”) не приводит к появлению таких решений. В этом случае основное состояние вырождено по направлению в базисной плоскости и вид волновых функций возбужденных состояний требует отдельного рассмотрения. Число связанных комплексов Бете с появлением анизотропии $\Delta < 1$ не меняется, хотя по-прежнему имеет нетривиальную зависимость от числа спинов [5, 6]. Полное число состояний равно исходному числу состояний $C_N^2 = N(N - 1)/2$, все состояния являются однопараметрическими, состояний с совпадающими импульсами нет. Для ферромагнитного обмена энергии а-состояний лежат ниже дна зоны волновых двухмагнетонных энергий, а значения энергий m-состояний образуют нижнюю двухмагнетонную ветвь, проходящую над одномагнетонной ветвью (см. рис. 2). Значения их вещественных импульсов k_j близки к одномагнетонным, но не равны им, как в изотропном случае. Это означает, что резонансные переходы $\Delta M = 1$ возможны только с $\Delta K \neq 0$, и, поскольку в данном случае $\Delta K \ll \pi/N$, именно эта ветвь дает макроскопическую вероятность для переходов в однородном резонансном поле $W_n \sim N$.

Список литературы

- [1] Ю. А. Изюмов, Ю. И. Скрыбин. Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. М.: Наука, 1987.
- [2] М. Годен. Волновая функция Бете. М.: Мир, 1987.
- [3] H. A. Bethe. Z. Phys. 1931. V. 71. P. 205.
- [4] С. Н. Мартынов. ТМФ. 1997. Т. 113. С. 338.
- [5] K. Isler, M. B. Paranjape. Phys. Lett. B. 1993. V. 319. P. 209.
- [6] S. N. Martynov. Phys. Lett. A. 1996. V. 219. P. 329.

Поступила в редакцию 5.V.1998 г.,
после доработки 6.VII. 1998 г.