Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Скрыпник, Разделение переменных в анизотропной модели Шотки–Фрама, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 3, 465–486

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:42:16

© 2018 г.

Т. В. Скрыпник^{*†}

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В АНИЗОТРОПНОЙ МОДЕЛИ ШОТКИ–ФРАМА

Сконструированы разделенные переменные для полностью анизотропной классической модели Шотки–Фрама на произвольной коприсоединенной орбите группы $SO(4)$. В явном виде найдены формулы реконструкции, выражающие динамические переменные через координаты разделения, и записаны уравнения движения в форме типа Абеля.

Ключевые слова: интегрируемые системы, разделение переменных, классические волчки.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9470>

1. ВВЕДЕНИЕ

Движение твердого тела в четырех измерениях является классической проблемой в механике, начиная с работ Фрама [1] и Шотки [2]. Значительно позднее модель была рассмотрена и обобщена Манаковым [3], поэтому ее иногда называют моделью Манакова. С современной точки зрения модель Шотки–Фрама определяется двумя квадратичными гамильтонианами на алгебре $so(4)$, коммутирующими относительно стандартной скобки Пуассона, зависящими от четырех произвольных параметров анизотропии a_i , $i \in \overline{1, 4}$.

Недавно модель Шотки–Фрама была рассмотрена Переломовым [4]. Он проинтегрировал модель, используя “бигамильтонову эквивалентность” между моделями Шотки–Фрама и моделью Клебша [5], а также разделенные переменные Кеттера [6]. К сожалению, разделенные переменные Кеттера, записанные для модели Клебша, и аналогичные переменные для модели Шотки–Фрама не являются каноническими.

В контексте модели Шотки–Фрама необходимо упомянуть работу [7] о разделении переменных в модели Годена с N спинами [8]. Двухспиновая эллиптическая модель Годена эквивалентна модели Шотки–Фрама. К сожалению, сложный характер полученных результатов позволил авторам работы [7] рассмотреть в явном виде только случай $N = 1$. Другими словами, в случае $N = 2$ (эллиптической модели Годена) разделение переменных не было проведено в работе [7] явным образом.

^{*}University of Milano–Bicocca, Milano, Italy. E-mail: taras.skrypnyk@unimib.it

[†]Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина

Необходимо также упомянуть недавний результат о “частичном разделении переменных” для волчка Шотки–Фрама [9], которое, однако, не является настоящим разделением переменных в смысле Гамильтона–Якоби. Поэтому проблема явного разделения переменных в смысле Гамильтона–Якоби для модели Шотки–Фрама является нерешенной.

В настоящей работе мы решаем эту проблему. С этой целью мы используем наш недавний результат о разделении переменных в модели Клебша [10]. Следуя идеям, близким к идеям работы [10], мы явно получаем переменные разделения, формулы реконструкции и уравнения типа Абеля для модели Шотки–Фрама. В отличие от работы [10], в настоящей работе мы объясняем не только общие идеи, но также важные технические моменты, делающие наш результат возможным. Мы также объясняем связь наших результатов с бигамильтоновым подходом [11] к разделению переменных [12], [13].

Для удобства читателя мы формулируем наши основные теоремы во введении. Для этой цели мы коротко опишем модель Шотки–Фрама в обозначениях, используемых в настоящей работе. Мы применяем координаты $S_\alpha, T_\beta, \alpha, \beta \in \overline{1, 3}$, на алгебре $so(4)^*$, которые удовлетворяют следующим скобкам Ли–Пуассона:

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma, \quad \{S_\alpha, T_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma, \quad \{T_\alpha, T_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma.$$

Мы выбираем базис в алгебре интегралов движения, коммутирующих относительно стандартной скобки Пуассона, следующим образом:

$$\tilde{H} = \sum_{\alpha=1}^3 (b_\alpha^2 S_\alpha^2 + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_\alpha^2) T_\alpha^2), \quad \tilde{K} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{b_1^2 b_2^2 b_3^2}{b_\alpha^2} T_\alpha^2,$$

где новые параметры анизотропии b_α определяются формулой $b_\alpha^2 = a_\alpha - a_4, \alpha \in \overline{1, 3}$. Мы используем следующие “тривиальные” интегралы – функции Казимира C_1, C_2 :

$$C_1 = \sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha T_\alpha, \quad C_2 = \sum_{\alpha=1}^3 (S_\alpha^2 + T_\alpha^2).$$

Перейдем к описанию полученных переменных разделения. Мы будем использовать вспомогательные функции $f_\alpha, g_\beta, \alpha, \beta \in \overline{1, 3}$, заданные выражениями

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{c_\alpha}{b_\alpha} \frac{v_\alpha}{v_4} T_\alpha, & f_2 &= \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{c_\alpha}{b_\alpha^3} \frac{v_\alpha}{v_4} T_\alpha, & f_3 &= \frac{1}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha \frac{v_\beta v_\gamma}{v_4^2} T_\alpha, \\ g_1 &= \frac{1}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha \frac{v_\alpha}{v_4} S_\alpha, & g_2 &= \frac{1}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{c_\alpha}{b_\alpha} \frac{v_\alpha}{v_4} S_\alpha, & g_3 &= \frac{1}{b_1^3 b_2^3 b_3^3} \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha^3 \frac{v_\beta v_\gamma}{v_4^2} S_\alpha, \end{aligned}$$

где $c_\alpha^2 = a_\gamma - a_\beta, v_\alpha^2 = v + a_\alpha, \alpha \in \overline{1, 4}$, и v является некоторой функцией $S_\alpha, T_\beta, \alpha, \beta \in \overline{1, 3}$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть функция v определяется как решение уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^3 c_{\alpha} b_{\alpha} (v_{\beta} v_{\gamma} T_{\alpha} + v_{\alpha} v_4 S_{\alpha}) = 0. \quad (1)$$

Тогда для функций

$$\begin{aligned} x_1 &= v_4^2, & x_2 &= \frac{-f_1}{\left(\frac{b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_2^2 + b_3^2 b_1^2}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} + \frac{1}{v_4^2} \right) f_1 + g_3 - f_2}, \\ p_1 &= \frac{b_1^3 b_2^3 b_3^3}{2c_1 c_2 c_3} \frac{(g_1 + v_4^2 g_2)}{v_1 v_2 v_3 v_4} + \frac{b_1^2 b_2^2 b_3^2}{2c_1 c_2 c_3 v_4^2} f_1, \\ p_2 &= -\frac{b_1^2 b_2^2 b_3^2}{c_1 c_2 c_3} \left[\left(\frac{b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_2^2 + b_3^2 b_1^2}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} + \frac{1}{v_4^2} \right) f_1 + g_3 - f_2 \right] \end{aligned}$$

имеют место канонические скобки Пуассона

$$\{x_i, x_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

и справедливы следующие “уравнения разделения”:

$$\begin{aligned} &4p_1^2 x_1 (x_1 + b_1^2) (x_1 + b_2^2) (x_1 + b_3^2) + (\tilde{K} + x_1 \tilde{H} + x_1^2 C_2) + \\ &+ 2C_1 \sqrt{x_1 (x_1 + b_1^2) (x_1 + b_2^2) (x_1 + b_3^2)} = 0, \end{aligned} \quad (2a)$$

$$p_2^4 x_2 (x_2 + b_1^2) (x_2 + b_2^2) (x_2 + b_3^2) + p_2^2 (\tilde{K} + \tilde{H} x_2 + C_2 x_2^2) + C_1^2 = 0, \quad (26)$$

т.е. они образуют полный набор координат разделения в модели Шотки–Фрама.

Заметим, что как и в случае модели Клебша [10], полученные кривые разделения (2a) и (26) различны¹⁾. Этот факт является наиболее интересным свойством наших разделенных переменных. Такое свойство никогда ранее не встречалось для переменных разделения интегрируемых по Лаксу систем, к категории которых принадлежат также модели Шотки–Фрама и Клебша.

Хотя функции v и x_i, p_i определены неявно как функции динамических переменных S_{α}, T_{β} , сами динамические переменные S_{α}, T_{β} определяются явно в терминах функций x_i, p_i, C_1, C_2 . Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.2. Динамические переменные $S_{\alpha}, T_{\alpha}, \alpha \in \overline{1, 3}$, в модели Шотки–Фрама выражаются через полученные координаты разделения x_1, x_2, p_1, p_2 и выбранные функции Казимира C_1, C_2 посредством формул

$$\begin{aligned} S_{\alpha} &= \frac{1}{c_{\beta} c_{\gamma} b_{\beta} b_{\gamma}} \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{x_1 + b_{\beta}^2} \sqrt{x_1 + b_{\gamma}^2} C_1^2}{(x_1 - x_2)^2 p_2^3} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{x_1} \sqrt{x_1 + b_{\alpha}^2}}{(x_1 - x_2)^2 p_2^2} (2p_1 (x_1 + b_{\beta}^2) (x_1 + b_{\gamma}^2) - p_2 (x_2 + b_{\beta}^2) (x_2 + b_{\gamma}^2)) C_1 + \right. \end{aligned}$$

¹⁾Кривые (2a) и (26) проанализированы с точки зрения алгебраической геометрии в работе [14] (см. также статью [15]).

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{x_1+b_\alpha^2}C_1}{p_2} + \frac{2\sqrt{x_1+b_\beta^2}\sqrt{x_1+b_\gamma^2}x_1(x_1+b_\alpha^2)p_1}{(x_1-x_2)^2p_2} \times \\
& \times ((x_1+b_\beta^2)(x_1+b_\gamma^2)p_1 - (x_2+b_\gamma^2)(x_2+b_\beta^2)p_2) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x_1+b_\beta^2}\sqrt{x_1+b_\gamma^2}C_2}{p_2} + (b_1^2b_2^2b_3^2x_1 + 2b_\alpha^2x_2^3 + (b_\alpha^2(b_\beta^2+b_\gamma^2) - b_\beta^2b_\gamma^2)x_2^2 + \\
& + 2b_\beta^2b_\gamma^2x_1x_2 + (b_\beta^2+b_\gamma^2-b_\alpha^2)x_2^2x_1 + x_2^4) \frac{\sqrt{x_1+b_\beta^2}\sqrt{x_1+b_\gamma^2}p_2}{2(x_1-x_2)^2}, \\
T_\alpha = & \frac{1}{c_\beta c_\gamma b_\beta b_\gamma} \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{x_1+b_\alpha^2}C_1^2}{(x_1-x_2)^2p_2^3} + \right. \\
& + \sqrt{x_1+b_\beta^2}\sqrt{x_1+b_\gamma^2} \left(\frac{2(x_1+b_\alpha^2)x_1p_1}{(x_1-x_2)^2p_2^2} - \frac{2x_2x_1-x_1^2+b_\alpha^2x_2}{(x_1-x_2)^2p_2} \right) C_1 + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x_1}\sqrt{x_1+b_\alpha^2}C_2}{p_2} + \frac{2\sqrt{x_1}\sqrt{x_1+b_\alpha^2}(x_1+b_\beta^2)(x_1+b_\gamma^2)p_1}{(x_1-x_2)^2p_2} \times \\
& \times (p_1x_1(x_1+b_\alpha^2) - p_2x_2(x_2+b_\alpha^2)) - \\
& - (b_1^2b_2^2b_3^2(x_1-2x_2) - 2(b_\beta^2+b_\gamma^2)x_2^3 - (b_\alpha^2(b_\beta^2+b_\gamma^2) + 3b_\beta^2b_\gamma^2)x_2^2 + \\
& + 2b_\beta^2b_\gamma^2x_1x_2 + (b_\beta^2+b_\gamma^2-b_\alpha^2)x_2^2x_1 - x_2^4) \frac{p_2\sqrt{x_1}\sqrt{x_1+b_\alpha^2}}{2(x_1-x_2)^2} \Big),
\end{aligned}$$

где подразумевается циклическая перестановка индексов $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{1, 3}$.

Чтобы закончить описание результатов данной работы, сформулируем еще одну теорему.

ТЕОРЕМА 1.3. Введем обозначения $\dot{x}_i = \{x_i, \tilde{H}\}$, $x_i' = \{x_i, \tilde{K}\}$, $i = 1, 2$. Тогда уравнения движения для координат разделения x_1, x_2 записываются в форме типа Абеля следующим образом:

$$\frac{\dot{x}_1}{8p_1x_1(x_1+b_3^2)(x_1+b_2^2)(x_1+b_1^2)} + \frac{\dot{x}_2}{2x_2(b_3^2+x_2)(b_2^2+x_2)(b_1^2+x_2)p_2 - \frac{2C_1^2}{p_2^3}} = 0, \quad (3a)$$

$$\frac{x_1\dot{x}_1}{8p_1x_1(x_1+b_3^2)(x_1+b_2^2)(x_1+b_1^2)} + \frac{x_2\dot{x}_2}{2x_2(b_3^2+x_2)(b_2^2+x_2)(b_1^2+x_2)p_2 - \frac{2C_1^2}{p_2^3}} = -1, \quad (3б)$$

$$\frac{x_1'}{8p_1x_1(x_1+b_3^2)(x_1+b_2^2)(x_1+b_1^2)} + \frac{x_2'}{2x_2(b_3^2+x_2)(b_2^2+x_2)(b_1^2+x_2)p_2 - \frac{2C_1^2}{p_2^3}} = -1, \quad (3в)$$

$$\frac{x_1x_1'}{8p_1x_1(x_1+b_3^2)(x_1+b_2^2)(x_1+b_1^2)} + \frac{x_2x_2'}{2x_2(b_3^2+x_2)(b_2^2+x_2)(b_1^2+x_2)p_2 - \frac{2C_1^2}{p_2^3}} = 0, \quad (3г)$$

где моменты разделения p_1, p_2 находятся из кривых разделения (2а), (2б) соответственно.

Можно показать [16], что дифференциалы, участвующие в наших уравнениях типа Абеля (3), являются голоморфными дифференциалами на “дуальных кривых” (2а) и (2б), их периоды соизмеримы и поэтому уравнения типа Абеля (3) можно обратить в терминах мероморфных функций от времен. Более того, можно показать, что эти функции выражаются в терминах тэта-функций на многообразии Прима [16].

Кратко объясним три основные идеи, которым мы следовали для решения старой проблемы о разделении переменных в модели Шотки–Фрама. Первой идеей является поиск канонических координат x_1, x_2 отдельно от моментов. Канонически сопряженные моменты p_1, p_2 вычисляются затем с использованием интегральной формы из работы [10]. Второй идеей является поиск координат x_1, x_2 как корней “фундаментального полинома” $K(x)$, который удовлетворяет так называемым “условиям Ковалевской” [10]. Третьей идеей является конструирование полинома $K(x)$ с помощью “метода векторного поля Z ”. В частности, необходимость введения функции v , удовлетворяющей уравнению (1), продиктована нужными свойствами векторного поля Z . Заметим, что метод векторного поля Z берет свое начало в бигамильтоновом подходе к разделению переменных [12], [13]. Метод был независимо переоткрыт в работе [17] в несколько иной форме.

Нашей важной технической находкой, кроме функции v , являются вспомогательные функции $f_\alpha, g_\beta, \alpha, \beta \in \overline{1, 3}$, которые дают возможность переписать уравнение (1) как линейное условие $f_3 + g_1 = 0$ и записать координаты x_1, x_2 как рациональные функции от v_4^2, f_α, g_β . Явная форма скобок Пуассона между ними дает возможность найти, начиная с x_1, x_2 , канонические сопряженные моменты p_1, p_2 как линейные функции от f_α, g_β даже без использования интегральной формулы работы [10]. Функции v_4, f_α, g_β оказываются полезными во всех наших вычислениях: при проверке “условий Ковалевской”, при получении уравнений разделения, при получении формул реконструкции. Теоретическую алгебро-геометрическую интерпретацию этих функций еще предстоит найти.

В конце введения заметим, что все рассмотрения данной работы относятся к случаю полностью анизотропной модели Шотки–Фрама, когда $a_\alpha \neq a_\beta, \alpha, \beta \in \overline{1, 4}$. Случай частично изотропной модели Шотки–Фрама был рассмотрен в статье [18].

Структура работы имеет следующий вид. В разделе 2 мы напоминаем общие факты о разделении переменных и “методе Ковалевской” [10]. В разделе 3 мы описываем модель Шотки–Фрама и ее бигамильтонову структуру. В разделе 4 мы строим переменные разделения, формулы реконструкции и уравнения типа Абеля для модели Шотки–Фрама. Наконец, в разделе 5 мы коротко обсуждаем связь полученных результатов с подходом, базирующимся на представлении Лакса [19].

2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ: ОБЩИЙ ПОДХОД

2.1. Подход Гамильтона–Якоби. Напомним определение интегрируемости по Лиувиллю и метод разделения переменных в общей теории гамильтоновых систем. Назовем интегрируемой гамильтонову систему с d степенями свободы, определенную на $2d$ -мерном симплектическом многообразии $\mathcal{M}$ (симплектическом листе в пространстве $(\mathcal{P}, \{, \})$), и d независимыми функциями (первыми интегралами) I_j , коммутирующими по отношению к скобкам Пуассона: $\{I_i, I_j\} = 0, i, j \in \overline{1, d}$ (в качестве гамильтониана H такой системы можно взять любой первый интеграл I_j).

Под разделенными переменными подразумевается набор локальных координат $x_i, p_j, i, j \in \overline{1, d}$, таких, что существует d соотношений $\Phi_i(x_i, p_i; I_1, \dots, I_d) = 0, i \in \overline{1, d}$, где координаты $x_i, p_j, i, j \in \overline{1, d}$, являются каноническими, т. е.

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad i, j \in \overline{1, d}.$$

Разделенные переменные дают возможность конструировать переменные “действие-угол” на основе теоремы Лиувилля и явно интегрировать уравнения движения.

В настоящей работе мы рассматриваем разделение переменных в простейшем нетривиальном случае $d = 2$.

2.2. Подход типа Ковалевской. Опишем другой подход к разделению переменных. Для простоты мы будем рассматривать лишь случай $d = 2$. Рассмотрим два коммутирующих относительно скобки Пуассона гамильтониана H, K как две локальные координаты на многообразии $\mathcal{M}$ и введем две дополняющие их локальные координаты x_1, x_2 . Мы будем использовать следующие обозначения: $\dot{x}_i = \{x_i, H\}$, $x'_i = \{x_i, K\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Координаты x_1, x_2 называются координатами типа Ковалевской, если соответствующие уравнения движения записываются в предабелевой форме

$$\frac{\dot{x}_1}{\psi_1(x_1, H, K)} + \frac{\dot{x}_2}{\psi_2(x_2, H, K)} = 0, \quad \frac{x_1 \dot{x}_1}{\psi_1(x_1, H, K)} + \frac{x_2 \dot{x}_2}{\psi_2(x_2, H, K)} = 1, \quad (4)$$

$$\frac{x'_1}{\psi_1(x_1, H, K)} + \frac{x'_2}{\psi_2(x_2, H, K)} = 1, \quad \frac{x_1 x'_1}{\psi_1(x_1, H, K)} + \frac{x_2 x'_2}{\psi_2(x_2, H, K)} = 0. \quad (5)$$

Имеет место следующая теорема [10].

ТЕОРЕМА 2.1. Координаты x_1, x_2 являются координатами типа Ковалевской, если и только если верны следующие уравнения:

$$x'_1 + x_2 \dot{x}_1 = 0, \quad (6a)$$

$$x'_2 + x_1 \dot{x}_2 = 0. \quad (6b)$$

Координаты x_1, x_2 , вообще говоря, не являются коммутирующими относительно скобки Пуассона. В случае, если они все же коммутируют, т. е.

$$\{x_1, x_2\} = 0, \quad (7)$$

можно доказать две важные теоремы [10].

ТЕОРЕМА 2.2. Функции $\psi_1(x_1, H, K)$ и $\psi_2(x_2, H, K)$, входящие в предабелеву форму уравнений движения, зависят от интегралов H и K только как от $K + xH$, т. е.

$$\psi_1(x_1, H, K) \equiv \psi_1(x_1, Hx_1 + K), \quad \psi_2(x_2, H, K) \equiv \psi_2(x_2, Hx_2 + K).$$

ТЕОРЕМА 2.3. Функции

$$p_i = \Psi_i(x_i, x_i H + K) = \int_0^{x_i H + K} \frac{d\lambda}{\psi_i(x_i, \lambda)}, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

являются моментами, канонически сопряженными с координатами x_1, x_2 .

Из этой теоремы немедленно вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Существуют “функции разделения” Φ_i , $i = 1, 2$, зависящие от координат x_1, x_2 , моментов p_1, p_2 и гамильтонианов H, K следующим образом:*

$$\Phi_i(x_i, p_i, x_i H + K) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Вывод. В этом пункте мы превратили проблему разделения переменных в смысле Гамильтона–Якоби в проблему нахождения двух функций x_1, x_2 , удовлетворяющих уравнениям (6а), (6б), (7). В дальнейшем мы предполагаем, что функции x_1, x_2 получены как два корня квадратичного “фундаментального полинома”

$$K(x) = x^2 + s_1 x + s_2 = 0. \quad (10)$$

Для того чтобы построить функции s_1 и s_2 , мы далее используем так называемый “метод векторного поля Z ”, берущий свое начало в бигамильтоновом подходе к разделению переменных [12], [13]. Мы кратко описываем этот метод в следующих разделах работы.

3. ПОЛНОСТЬЮ АНИЗОТРОПНАЯ МОДЕЛЬ ШОТКИ–ФРАМА

3.1. Модель и первая структура Пуассона. Пусть $L_{ij} = -L_{ji}$, $i, j \in \overline{1, 4}$, – координатные функции на алгебре $so^*(4)$, удовлетворяющие скобке Ли–Пуассона:

$$\{L_{ij}, L_{kl}\}_1 = \delta_{kj} L_{il} - \delta_{il} L_{kj} - \delta_{ik} L_{jl} + \delta_{jl} L_{ki}.$$

Пусть a_i , $i \in \overline{1, 4}$, – произвольные попарно различные действительные (или комплексные) параметры. Рассмотрим следующие функции:

$$I_1 = H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_i - a_j) L_{ij}^2, \quad I_2 = K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{a_i a_j} L_{ij}^2.$$

Они являются гамильтонианом и интегралом движения анизотропной модели Шотки–Фрама [3], $\{H, K\}_1 = 0$.

Скобки $\{, \}_1$ имеют две квадратичные функции Казимира

$$C_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 L_{ij}^2, \quad C_1 = L_{12} L_{34} + L_{23} L_{14} - L_{13} L_{24}.$$

В дальнейшем мы используем другие координаты на пространстве $so^*(4)$, а именно

$$S_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_{\beta\gamma}, \quad T_\alpha = L_{\alpha 4}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \overline{1, 3},$$

которые удовлетворяют следующим скобкам Пуассона:

$$\{S_\alpha, S_\beta\}_1 = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma, \quad (11a)$$

$$\{S_\alpha, T_\beta\}_1 = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma, \quad (11б)$$

$$\{T_\alpha, T_\beta\}_1 = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma. \quad (11в)$$

В терминах этих координат интегралы и функции Казимира записываются как

$$H = \sum_{\alpha=1}^3 (a_4 + a_\alpha) S_\alpha^2 + \sum_{\alpha=1}^3 (a_\beta + a_\gamma) T_\alpha^2, \quad K = \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha a_4 S_\alpha^2 + \sum_{\alpha=1}^3 a_\beta a_\gamma T_\alpha^2,$$

$$C_2 = \sum_{\alpha=1}^3 (S_\alpha^2 + T_\alpha^2), \quad C_1 = \sum_{\alpha=1}^3 S_\alpha T_\alpha.$$

3.2. Вторая скобка и “пучок Пуассона”. На линейном пространстве $so^*(4)$ можно ввести также вторую скобку Ли–Пуассона

$$\{L_{ij}, L_{kl}\}_2 = a_j \delta_{kj} L_{il} - a_i \delta_{il} L_{kj} - a_i \delta_{ik} L_{jl} + a_j \delta_{jl} L_{ki}.$$

Функции H , K , C_1 , C_2 находятся в инволюции в том числе по отношению к скобке $\{, \}_2$. Функции Казимира второй скобки – это функции C_1 и K . Функция C_1 является, таким образом, функцией Казимира обеих структур, т. е. $\{C_1, S_\alpha\}_1 = \{C_1, T_\alpha\}_1 = \{C_1, S_\alpha\}_2 = \{C_1, T_\alpha\}_2 = 0$. В терминах координатных функций S_α , T_β вторая пуассонова структура записывается следующим образом:

$$\{S_\alpha, S_\beta\}_2 = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\gamma S_\gamma, \quad (12a)$$

$$\{S_\alpha, T_\beta\}_2 = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_\beta T_\gamma, \quad (12б)$$

$$\{T_\alpha, T_\beta\}_2 = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} a_4 S_\gamma. \quad (12в)$$

Скобки Пуассона $\{, \}_1$ и $\{, \}_2$ являются согласованными. Используя этот факт, можно ввести скобку Пуассона (так называемый пуассонов пучок) $\{, \}_u = u\{, \}_1 + \{, \}_2$. Заметим, что функция C_1 является функцией Казимира скобки $\{, \}_u$. Вторая функция Казимира скобки $\{, \}_u$ – это генерирующая функция интегралов движения $C(u) = u^2 C_2 + uH + K$. Она будет использована при построении так называемого “разделяющего” или “фундаментального” полинома.

4. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В МОДЕЛИ ШОТКИ–ФРАМА

4.1. Бигамильтонов подход и векторное поле Z . Для нахождения переменных разделения в рамках бигамильтонова подхода необходимо найти некоторое векторное поле Z на $so^*(4)$, которое удовлетворяет уравнениям [12], [13]

$$\text{Lie}_Z \{, \}_1 = 0, \quad \text{Lie}_Z \{, \}_2 = -Z \wedge [X_H, Z], \quad (13)$$

где X_H – гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану H и первой пуассоновой структуре. Кроме того, векторное поле Z должно удовлетворять условию нормировки

$$Z(C_1) = 0, \quad Z(C_2) = 1. \quad (14)$$

Условие $Z(C_1) = 0$ гарантирует, что векторное поле Z аннулирует общую функцию Казимира двух согласованных скобок Пуассона. Этот факт является важным требованием в бигамильтоновом подходе к разделению переменных, по крайней мере в случае, когда необходимо построить полином-разделитель $K(u)$ с помощью одного векторного поля Z по формуле [12], [13]

$$K(u) = Z(C_2)u^2 + Z(H)u + Z(K),$$

где $C(u) = C_2 u^2 + H u + K$ – вторая функция Казимира пуассоновой скобки $\{, \}_u$.

Обычно на векторное поле Z накладываются следующие условия [12], [13]:

$$Z^2(H) = 0, \quad Z^2(K) = 0, \quad Z^2(C_1) = 0, \quad Z^2(C_2) = 0. \quad (15)$$

Вместе с условиями (13) они гарантируют коммутативность координат разделения относительно скобки $\{, \}_u$. Наша стратегия состоит в применении условий (15) вместо более сложных условий (13).

4.2. Построение векторного поля Z . Общее векторное поле на пространстве $so^*(4)$ записывается следующим образом:

$$Z = \sum_{\alpha=1}^3 \left(A_{\alpha} \frac{\partial}{\partial S_{\alpha}} + B_{\alpha} \frac{\partial}{\partial T_{\alpha}} \right),$$

где $A_{\alpha}, B_{\alpha}, \alpha \in \overline{1, 3}$, – некоторые функции на пространстве $so^*(4)$. Мы будем искать функции $A_{\alpha}, B_{\alpha}, \alpha \in \overline{1, 3}$, удовлетворяющие условиям (15).

Уравнения (15) являются, вообще говоря, дифференциальными уравнениями для функций $A_{\alpha}, B_{\alpha}, \alpha \in \overline{1, 3}$. Для того чтобы решить их, мы будем налагать дополнительные условия на векторное поле Z , а именно условие, что векторное поле Z аннулирует собственные компоненты:

$$Z(A_{\alpha}) = 0, \quad Z(B_{\alpha}) = 0, \quad \alpha \in \overline{1, 3}. \quad (16)$$

Это условие преобразует систему дифференциальных уравнений (15) в систему алгебраических уравнений, накладываемых на функции A_{α}, B_{α} :

$$\sum_{\alpha=1}^3 (a_4 + a_{\alpha}) A_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha=1}^3 (a_{\beta} + a_{\gamma}) B_{\alpha}^2 = 0, \quad (17a)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} a_4 A_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha=1}^3 a_{\beta} a_{\gamma} B_{\alpha}^2 = 0, \quad (17б)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 A_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha=1}^3 B_{\alpha}^2 = 0, \quad (17в)$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 A_{\alpha} B_{\alpha} = 0. \quad (17г)$$

Имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Система четырех алгебраических уравнений (17) имеет решение

$$A_{\alpha} = \lambda \sqrt{a_{\gamma} - a_{\beta}} \sqrt{a_{\alpha} - a_4} v_{\beta} v_{\gamma}, \quad (18a)$$

$$B_{\alpha} = \lambda \sqrt{a_{\gamma} - a_{\beta}} \sqrt{a_{\alpha} - a_4} v_{\alpha} v_4, \quad \alpha \in \overline{1, 3}, \quad (18б)$$

где $v_{\alpha}^2 = v + a_{\alpha}, \alpha \in \overline{1, 4}$, а функции λ и v – произвольны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из первых трех уравнений (17), рассматриваемых как линейные уравнения по переменным B_α^2 , $\alpha = 1, 2, 3$, можно получить следующее выражение для функции B_α^2 :

$$B_\alpha^2 = (a_\alpha - a_4) \left(\frac{A_\beta^2}{a_\gamma - a_\alpha} - \frac{A_\gamma^2}{a_\alpha - a_\beta} \right), \quad (19)$$

где подразумевается циклическая перестановка индексов α, β, γ .

Остается только решить уравнение (17r), которое приобретает вид

$$\sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha \sqrt{\frac{(a_\alpha - a_4)(A_\beta^2(a_\alpha - a_\beta) - A_\gamma^2(a_\gamma - a_\alpha))}{(a_\gamma - a_\alpha)(a_\alpha - a_\beta)}} = 0,$$

где также подразумевается циклическая перестановка индексов α, β, γ .

Легко проверить, что анзац $A_\alpha = \lambda \sqrt{a_\gamma - a_\beta} \sqrt{a_\alpha - a_4} v_\beta v_\gamma$, в котором функция λ произвольна и $v_\alpha \neq 0$, $\alpha \in \overline{1, 3}$, приводит это уравнение к следующему виду:

$$\sum_{\alpha=1}^3 (a_\alpha - a_4) \sqrt{(v_\beta^2(a_\gamma - a_4) - v_\gamma^2(a_\beta - a_4))(a_\beta - a_\gamma)} = 0. \quad (20)$$

Наконец, замена $v_\alpha^2 = v + a_\alpha$, $a \in \overline{1, 3}$, где v – произвольная функция, преобразует уравнение (20) в легко проверяемое равенство

$$\sum_{\alpha=1}^3 (a_\alpha - a_4)(a_\beta - a_\gamma) = 0.$$

Формула (186) для B_α следует из равенства (18a) и формулы (19). Утверждение доказано.

Неизвестные функции v и λ выбираются таким образом, что векторное поле Z нормируется условием (14). Функция v определяется следующим важным “уравнением связи”:

$$Z(C_1) = \sum_{\alpha=1}^3 \sqrt{a_\gamma - a_\beta} \sqrt{a_\alpha - a_4} (v_\beta v_\gamma T_\alpha + v_\alpha v_4 S_\alpha) = 0. \quad (21)$$

Уравнение $Z(C_2) = 1$ задает функцию λ , имеющую вид

$$\lambda = \left(\sum_{\alpha=1}^3 \sqrt{a_\gamma - a_\beta} \sqrt{a_\alpha - a_4} (v_\beta v_\gamma S_\alpha + v_\alpha v_4 T_\alpha) \right)^{-1}. \quad (22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Благодаря тому факту, что фундаментальный полином $K(x)$ определен с точностью до множителя, функция λ не является важной для наших целей – она не влияет на корни x_1, x_2 полинома $K(x)$.

Чтобы проверить согласованность наших вычислений, остается показать, что равенство (16) верно для построенного векторного поля Z . Имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Векторное поле Z , определенное формулами (18), условием связи (21) и условием нормировки (22), удовлетворяет равенствам (16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения достаточно показать, что $Z(v) = 0$, $Z(\lambda) = 0$. Докажем первое из этих равенств, т. е. покажем, что уравнение (21) определяет такую функцию v , что $Z(v) = 0$. Используя уравнение (21), мы получаем формулы

$$\frac{\partial v}{\partial T_\alpha} = -\frac{2\sqrt{a_\gamma - a_\beta}\sqrt{a_\alpha - a_4}v_\alpha v_4 v_\beta^2 v_\gamma^2}{D}, \quad \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} = -\frac{2\sqrt{a_\gamma - a_\beta}\sqrt{a_\alpha - a_4}v_4^2 v_\alpha^2 v_\beta v_\gamma}{D},$$

где

$$D = \sum_{\alpha=1}^3 \sqrt{a_\gamma - a_\beta}\sqrt{a_\alpha - a_4}(v_\beta v_\gamma(v_4^2 + v_\alpha^2)S_\alpha + v_\alpha(v_\beta^2 + v_\gamma^2)T_\alpha).$$

Принимая во внимание компоненты векторного поля Z , мы немедленно получаем, что

$$Z(v) \sim \sum_{\alpha=1}^3 (a_\alpha - a_4)(a_\beta - a_\gamma) = 0.$$

Аналогичным способом показывается, что $Z(\lambda) = 0$. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Можно показать, что векторное поле Z удовлетворяет также условиям (13). Однако доказательство является очень громоздким, и мы будем следовать другой стратегии, показывая, что координаты x_1 , x_2 , построенные ниже с помощью векторного поля Z , действительно являются координатами разделения. Наша стратегия будет базироваться на доказательстве условий (6a), (6б) и (7) для x_1 , x_2 .

4.3. Фундаментальный полином $K(u)$. Векторное поле Z позволяет определить так называемый “фундаментальный полином” или “полином-разделитель”, т. е. полином второго порядка, корни которого совпадают с координатами разделения. При условии $Z(C_1) = 0$ он определяется следующей формулой:

$$K(u) = u^2 Z(C_2) + u Z(H) + Z(K).$$

С точностью до коэффициента нормировки λ мы имеем выражение

$$\begin{aligned} K(u) = & u^2 \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha (S_\alpha v_\beta v_\gamma + v_\alpha v_4 T_\alpha) + \\ & + u \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha ((a_\alpha + a_4)S_\alpha v_\beta v_\gamma + (a_\beta + a_\gamma)v_\alpha v_4 T_\alpha) + \\ & + \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha (a_\alpha a_4 S_\alpha v_\beta v_\gamma + a_\beta a_\gamma v_\alpha v_4 T_\alpha), \end{aligned} \quad (23)$$

где v определяется, как и раньше, с помощью иррационального уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha (v_\beta v_\gamma T_\alpha + v_\alpha v_4 S_\alpha) = 0, \quad (24)$$

в котором с целью удобства мы ввели следующие параметры анизотропии:

$$b_\alpha^2 = a_\alpha - a_4, \quad c_\alpha^2 = a_\gamma - a_\beta, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \overline{1, 3}.$$

Заметим также, что в таких обозначениях $v_\alpha^2 = v_4^2 + b_\alpha^2$, $\alpha \in \overline{1, 3}$. Далее мы будем использовать параметры b_α, c_α , $\alpha \in \overline{1, 3}$, вместо параметров анизотропии a_i , $i \in \overline{1, 4}$.

4.4. Координаты разделения x_1, x_2 и их свойства. Для того чтобы осуществить все необходимые вычисления и найти координаты разделения настолько явно, насколько это возможно, необходимо ввести шесть вспомогательных функций на пространстве $so^*(4)$

$$f_1 = \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{c_\alpha}{b_\alpha} \frac{v_\alpha}{v_4} T_\alpha, \quad f_2 = \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{c_\alpha}{b_\alpha^3} \frac{v_\alpha}{v_4} T_\alpha, \quad f_3 = \frac{1}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha \frac{v_\beta v_\gamma}{v_4^2} T_\alpha, \quad (25)$$

$$g_1 = \frac{1}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha \frac{v_\alpha}{v_4} S_\alpha, \quad g_2 = \frac{1}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{c_\alpha}{b_\alpha} \frac{v_\alpha}{v_4} S_\alpha, \quad g_3 = \frac{1}{b_1^3 b_2^3 b_3^3} \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha^3 \frac{v_\beta v_\gamma}{v_4^2} S_\alpha, \quad (26)$$

где v (или v_4) – произвольная функция. Заметим, что формулы (25), (26) легко обратимы, т. е. можно просто выразить функции T_α, S_β через функции f_α, g_β и v_4 :

$$T_\alpha = c_\alpha \frac{b_1 b_2 b_3}{c_1^2 c_2^2 c_3^2} \left(\left(\frac{(v_4^2(b_\beta^2 + b_\gamma^2) + b_\beta^2 b_\gamma^2) b_\alpha^3}{v_4^3} f_1 - b_1^2 b_2^2 b_3^2 \frac{b_\alpha}{v_4} f_2 \right) v_\alpha - b_1 b_2 b_3 \frac{b_\alpha^3}{v_4^2} v_\beta v_\gamma f_3 \right), \quad (27a)$$

$$S_\alpha = c_\alpha \frac{b_1^2 b_2^2 b_3^2}{c_1^2 c_2^2 c_3^2} \left(\left(\frac{(v_4^2(b_\beta^2 + b_\gamma^2) + b_\beta^2 b_\gamma^2) b_\alpha}{v_4^3} g_1 - b_1 b_2 b_3 \frac{b_\beta b_\gamma}{v_4} g_2 \right) v_\alpha - b_1 b_2 b_3 \frac{b_\alpha}{v_4^2} v_\beta v_\gamma g_3 \right). \quad (27b)$$

В терминах функции f_α, g_β уравнение связи (24) имеет очень простую форму $f_3 + g_1 = 0$. Следовательно, мы можем выбрать функции $v_4, f_1, f_2, g_1, g_2, g_3$ в качестве новых локальных координат на пространстве $so^*(4)$. Как мы увидим ниже, эти новые координаты существенно упрощают форму фундаментального полинома, координат разделения и всех последующих вычислений. Прямой подсчет дает следующую форму полинома-разделителя в новых координатах:

$$K(u) = 2b_1^3 b_2^3 b_3^3 (v_4^2 - u) \left[\left(\left(\frac{b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_2^2 + b_3^2 b_1^2}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} + \frac{1}{v_4^2} \right) f_1 + g_3 - f_2 \right) u + f_1 \right].$$

Используя ее, мы получаем следующую форму двух корней полинома $K(u)$:

$$x_1 = v_4^2, \quad (28a)$$

$$x_2 = \frac{-f_1}{\left(\frac{b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_2^2 + b_3^2 b_1^2}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} + \frac{1}{v_4^2} \right) f_1 + g_3 - f_2}. \quad (28b)$$

Представляется удобным ввести новый базис в пространстве интегралов в виде

$$\tilde{H} = H - 2a_4 C_2, \quad \tilde{K} = K - a_4 H + a_4^2 C_2.$$

В терминах новых констант b_α , $\alpha \in \overline{1,3}$, и координат S_α , T_α эти интегралы перепи-
сываются как

$$\tilde{H} = \sum_{\alpha=1}^3 (b_\alpha^2 S_\alpha^2 + (b_\beta^2 + b_\gamma^2) T_\alpha^2), \quad \tilde{K} = \sum_{\alpha=1}^3 b_\beta^2 b_\gamma^2 T_\alpha^2.$$

Далее мы будем использовать обозначения $\dot{F} = \{F, \tilde{H}\}_1$, $F' = \{F, \tilde{K}\}_1$, где F –
произвольная функция динамических переменных.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.1. *Координаты x_1 , x_2 являются координатами типа Ковалевской.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы доказать теорему, необходимо показать, что
верны дифференциальные уравнения

$$x'_1 + x_2 \dot{x}_1 = 0, \quad (29a)$$

$$x'_2 + x_1 \dot{x}_2 = 0. \quad (29б)$$

Чтобы осуществить это, мы будем использовать представление функции x_1 , x_2 в тер-
минах промежуточных координат v_4 , f_α , g_β . Рассмотрим в деталях уравнение (29a).
Благодаря тому факту, что $x_1 = v_4^2$, нужно доказать, что $v'_4 = -x_2 \dot{v}_4$. С этой целью
вычислим v'_4 и $\dot{v}_4$. Для этого рассмотрим уравнение связи

$$C(S_\alpha, T_\beta, v_1, v_2, v_3, v_4) = \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha (v_\beta v_\gamma T_\alpha + v_\alpha v_4 S_\alpha)$$

и примем во внимание, что для произвольной функции F имеет место равенство

$$\{F, v_4\}_1 = - \frac{\sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha (v_\beta v_\gamma \{F, T_\alpha\}_1 + v_\alpha v_4 \{F, S_\alpha\}_1)}{\sum_{i=1}^4 \frac{\partial C(S_\alpha, T_\beta, v_1, v_2, v_3, v_4)}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial v_4}}. \quad (30)$$

Далее мы будем рассматривать случаи $F = \tilde{H}$ и $F = \tilde{K}$. Используя явную форму
скобок Пуассона и гамильтонианы $\tilde{H}$, $\tilde{K}$, легко получаем, что

$$\{\tilde{H}, T_\alpha\}_1 = 2b_\alpha^2 (S_\beta T_\gamma - S_\gamma T_\beta), \quad (31a)$$

$$\{\tilde{H}, S_\alpha\}_1 = -2(b_\beta^2 - b_\gamma^2) (T_\beta T_\gamma - S_\beta S_\gamma), \quad (31б)$$

$$\{\tilde{K}, T_\alpha\}_1 = 2(S_\beta T_\gamma b_\beta^2 - S_\gamma T_\beta b_\gamma^2), \quad (31в)$$

$$\{\tilde{K}, S_\alpha\}_1 = 2(b_\beta^2 - b_\gamma^2) T_\beta T_\gamma. \quad (31г)$$

Вычисляя выражения $\sum_{i=1}^4 \frac{\partial C(S_\alpha, T_\beta, v_1, v_2, v_3, v_4)}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial v_4}$, подставляя все найденное выше
в формулу (30), используя формулу (27) и связь $f_3 = -g_1$, мы приходим к выраже-
ниям

$$\begin{aligned} v'_4 &= 2b_1^2 b_3^2 b_2^2 f_1 \times \\ &\times \frac{(v_4^6 f_1 + f_1 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) v_4^4 + b_1 b_2 b_3 v_4^3 v_1 v_2 v_3 g_2 + f_1 (b_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_3^2 + b_2^2 b_3^2) v_4^2 + b_1 b_2 b_3 v_4 v_1 v_2 v_3 g_1 + b_1^2 b_2^2 f_1 b_3^2)}{v_4 c_1 c_2 c_3 ((b_1^2 b_2^2 f_1 - b_1^2 b_2^2 b_3^2 f_2 + b_1^2 b_3^2 f_1 + b_1^2 b_2^2 b_3^2 g_3 + b_2^2 f_1 b_3^2) v_4^2 + 2b_1^2 b_2^2 b_3^2 f_1)} \\ v_4 &= 2b_1^2 b_3^2 b_2^2 \frac{(((b_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_3^2 + b_2^2 b_3^2) f_1 - b_1^2 b_2^2 b_3^2 (f_2 - g_3)) v_4^2 + b_1^2 b_2^2 b_3^2 f_1)}{v_4^2} \times \\ &\times \frac{(v_4^6 f_1 + f_1 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) v_4^4 + b_1 b_2 b_3 v_4^3 v_1 v_2 v_3 g_2 + f_1 (b_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_3^2 + b_2^2 b_3^2) v_4^2 + b_1 b_2 b_3 v_4 v_1 v_2 v_3 g_1 + b_1^2 b_2^2 f_1 b_3^2)}{v_4 c_1 c_2 c_3 ((b_1^2 b_2^2 f_1 - b_1^2 b_2^2 b_3^2 f_2 + b_1^2 b_3^2 f_1 + b_1^2 b_2^2 b_3^2 g_3 + b_2^2 f_1 b_3^2) v_4^2 + 2b_1^2 b_2^2 b_3^2 f_1)}. \end{aligned}$$

Теперь, принимая во внимание формулу (286), мы получаем равенство (29a). Равенство (296) доказывается аналогичным прямым способом. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. В следующем пункте мы также показываем, что $\{x_1, x_2\}_1 = 0$, т. е. что функции x_i , $i = 1, 2$, являются координатами разделения в смысле Гамильтона–Якоби.

4.5. Моменты разделения и уравнения разделения. В предыдущем разделе мы нашли разделенные (в смысле Ковалевской) координаты x_1, x_2 . Для того чтобы получить также разделение переменных по Гамильтону–Якоби, нужно показать, что $\{x_1, x_2\}_1 = 0$, и посчитать моменты, сопряженные с координатами x_1, x_2 . С этой целью мы снова будем использовать промежуточные координаты $v_4, f_1, f_2, g_1, g_2, g_3$ и вычислим скобку Пуассона между ними. Соответствующие скобки Пуассона немедленно предполагают форму канонических моментов, и нам не придется использовать интегральную формулу (8) для определения моментов.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2. *Функции*

$$P_1 = \frac{b_1^3 b_2^3 b_3^3}{2c_1 c_2 c_3} \frac{v_4}{v_1 v_2 v_3} (g_1 + v_4^2 g_2) + \frac{b_1^2 b_2^2 b_3^2}{2c_1 c_2 c_3} f_1, \quad (32a)$$

$$P_2 = \frac{b_1^2 b_2^2 b_3^2}{c_1 c_2 c_3} f_1 \quad (326)$$

являются моментами, квазиканонически сопряженными с координатами x_1, x_2 , заданными формулой (28), т. е.

$$\{x_i, P_j\}_1 = x_i \delta_{ij}, \quad \{x_i, x_j\}_1 = 0, \quad \{P_i, P_j\}_1 = 0. \quad (33)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Отметим, что канонически сопряженные моменты p_i записываются как $p_i = P_i/x_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы доказываем теорему прямыми вычислениями, используя явную форму скобок Пуассона между новыми координатными функциями v_4, f_α, g_β , $\alpha = 1, 2, \beta \in \overline{1, 3}$. Координаты x_1, x_2 уже определены формулой (28). Необходимо показать, что $\{x_1, x_2\}_1 = 0$, и найти сопряженные квазимоменты P_1, P_2 . Для этого мы будем использовать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. *Скобки Пуассона между функциями v_4, f_α, g_β , $\alpha = 1, 2, \beta \in \overline{1, 3}$, имеют явный вид*

$$\{f_1, v_4\}_1 = 0, \quad (34a)$$

$$\{f_2, v_4\}_1 = \frac{c_1 c_2 c_3 (v_1^2 v_2^2 v_3^2 f_1 + v_1 v_2 v_3 v_4^3 b_3 b_2 b_1 g_2)}{v_4 b_1^4 b_2^4 b_3^4 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2)}, \quad (346)$$

$$\{g_1, v_4\}_1 = \frac{c_1 c_2 c_3 v_1 v_2 v_3 f_1}{b_1^3 b_2^3 b_3^3 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2)}, \quad (34b)$$

$$\{g_2, v_4\}_1 = - \frac{c_1 c_2 c_3 v_1 v_2 v_3 (- (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2}) f_1 + f_2 v_4^2 b_1^2 b_2^2 b_3^2 - g_3 v_4^2 b_1^2 b_2^2 b_3^2)}{b_1^3 b_2^3 b_3^3 v_4^4 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2)}, \quad (34r)$$

$$\{g_3, v_4\}_1 = \frac{c_1 c_2 c_3 v_1 v_2 v_3 (v_1^2 v_2^2 v_3^2 f_1 + g_2 v_1 v_2 v_3 v_4^3 b_3 b_2 b_1)}{b_1^4 b_2^4 b_3^4 v_4 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2)}, \quad (34d)$$

$$\{f_1, g_1\}_1 = -\frac{c_1 c_2 c_3 (- (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2}) f_1 + f_2 v_4^2 b_1^2 b_2^2 b_3^2 - g_3 v_4^2 b_1^2 b_2^2 b_3^2)}{b_1^2 b_2^2 b_3^2 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2)}, \quad (34e)$$

$$\{f_1, g_2\}_1 = \frac{c_1 c_2 c_3 (- (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2}) f_1 + f_2 v_4^2 b_1^2 b_2^2 b_3^2 - g_3 v_4^2 b_1^2 b_2^2 b_3^2)}{v_4^2 b_1^2 b_2^2 b_3^2 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2)}, \quad (34ж)$$

$$\begin{aligned} \{f_1, g_3\}_1 = & c_1 c_2 c_3 v_1 v_2 v_3 \times \\ & \times ((2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) (v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2}) + 1) f_1^2 v_4^{-2} - \\ & - (3 + 2 v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 f_2 + v_1 v_2 v_3 v_4^{-1} b_1^{-1} b_2^{-1} b_3^{-1} f_1 g_1 + \\ & + (v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2}) + 1) g_3 f_1 - g_3 f_2 + g_2 g_1 v_4^2 + f_2^2 v_4^2) \times \\ & \times (b_1^2 b_2^2 b_3^2 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2))^{-1}, \end{aligned} \quad (34з)$$

$$\begin{aligned} \{f_1, f_2\}_1 = & \frac{c_1 c_2 c_3 v_1 v_2 v_3 (v_1 v_2 v_3 (b_1 b_2 b_3)^{-1} g_1 f_1}{v_1 v_2 v_3 v_4 b_1^2 b_2^2 b_3^2 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2)} - \\ & - \frac{v_4 (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 g_3 + v_4^3 (g_3 f_2 + g_1 g_2 - g_3^2)}{v_1 v_2 v_3 v_4 b_1^2 b_2^2 b_3^2 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2)}, \end{aligned} \quad (34и)$$

$$\{g_1, g_2\}_1 = \frac{c_1 c_2 c_3 v_1 v_2 v_3 g_1 (- (1 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1^2 - (f_2 - g_3) v_4^2)}{v_4^3 b_1^3 b_2^3 b_3^3 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2)}, \quad (34к)$$

$$\begin{aligned} \{g_1, g_3\}_1 = & \frac{c_1 c_2 c_3 v_1 v_2 v_3 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) g_1 f_1}{v_4^2 b_1^2 b_2^2 b_3^2 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2)} - \\ & - \frac{v_4^2 (1 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) g_2 f_1 + v_1 v_2 v_3 v_4 (b_1 b_2 b_3)^{-1} g_3 f_1}{v_4^2 b_1^2 b_2^2 b_3^2 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2)}, \end{aligned} \quad (34л)$$

$$\begin{aligned} \{f_2, g_1\}_1 = & -c_1 c_2 c_3 (-v_1 v_2 v_3 (b_1 b_2 b_3)^{-1} (v_4^{-1} (3 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1^2 + v_4 f_1 f_2) - \\ & - (3 + 3 v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2}) + v_4^3 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})^2) g_1 f_1 + \\ & + v_4^2 (1 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) (g_1 f_2 - g_1 g_3) + g_3 g_2 v_4^4) \times \\ & \times (b_1^2 b_2^2 b_3^2 v_4^2 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2))^{-1}, \end{aligned} \quad (34м)$$

$$\begin{aligned} \{f_2, g_2\}_1 = & -c_1 c_2 c_3 (-v_1 v_2 v_3 (1 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) (3 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1^2 + \\ & + 2 v_1 v_2 v_3 v_4^2 (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 f_2 - \\ & - v_4 b_1 b_2 b_3 (2 + (b_2^2 + b_3^2) (b_3^2 + b_1^2) (b_1^2 + b_2^2) b_1^{-4} b_3^{-4} b_2^{-4} v_4^6 + \\ & + (3 b_1^4 b_3^2 b_2^2 + b_1^4 b_3^4 + 3 b_1^2 b_3^2 b_2^4 + b_3^4 b_2^4 + 3 b_1^4 b_3^2 b_2^2 + b_1^4 b_2^4) b_1^{-4} b_3^{-4} b_2^{-4} v_4^4 + \\ & + (3 (b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_3^2 + b_3^2 b_1^2)) b_1^{-4} b_3^{-4} b_2^{-4} v_4^2) g_1 f_1 - \\ & - v_4^2 v_1 v_2 v_3 (3 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 g_3 v_4^4 v_1 v_2 v_3 f_2^2 - \\ & - v_4^3 b_1 b_2 b_3 (2 + (b_1^{-2} + b_2^{-2} + b_3^{-2}) v_4^2 + (b_1^{-2} b_2^{-2} + b_2^{-2} b_3^{-2} + b_3^{-2} b_1^{-2}) v_4^4) \times \\ & \times (g_1 f_2 + g_1 g_3) + v_4^4 v_1 v_2 v_3 (g_3 f_2 + g_1 g_2) - v_4^5 b_1 b_2 b_3 g_2 g_3) \times \\ & \times (b_1^3 b_2^3 b_3^3 v_4^5 (- (2 + v_4^2 (b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2})) f_1 - g_3 v_4^2 + f_2 v_4^2))^{-1}, \end{aligned} \quad (34н)$$

$$\begin{aligned} \{g_2, g_3\}_1 = & c_1 c_2 c_3 ((b_1 b_2 b_3)^{-4} ((b_3^2 + b_2^2) (b_3^2 + b_1^2) (b_1^2 + b_2^2) v_4^6 + \\ & + (5 b_1^4 b_3^2 b_2^2 + 5 b_1^2 b_3^4 b_2^2 + 5 b_1^2 b_3^2 b_2^4 + 2 b_1^4 b_2^4 + 2 b_1^4 b_3^4 + \\ & + 2 b_3^4 b_2^4) v_4^4 + 5 b_1^2 b_2^2 b_3^2 (b_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_3^2 + b_3^2 b_2^2) v_4^2 + 3 b_1^4 b_3^4 b_2^4) g_1 f_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + v_4^2(1 + v_4^2(b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2}))g_2f_1 + \\
& + (b_1b_2b_3)^{-1}v_1v_2v_3v_4(1 + v_4^2(b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2}))g_3f_1 + \\
& + v_4^2(b_1b_2b_3)^{-2}((b_3^2 + b_1^2 + b_2^2)v_4^4 + 2(b_3^2b_2^2 + b_1^2b_3^2 + b_1^2b_2^2)v_4^2 + \\
& + 3b_1^2b_2^2b_3^2)(g_1f_2 - g_1g_3) - v_4^4g_2f_2 - \\
& - (b_1b_2b_3)^{-1}v_4^3v_1v_2v_3(g_3f_2 - g_2g_1 - g_3^2) \times \\
& \times (b_1^2b_2^2b_3^2v_4^4(-2 + v_4^2(b_1^{-2} + b_3^{-2} + b_2^{-2}))f_1 - g_3v_4^2 + f_2v_4^2))^{-1}. \quad (34o)
\end{aligned}$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Утверждение доказывается с помощью факта, что функции f_α , g_β являются линейными функциями динамических переменных S_α , T_β и известными иррациональными функциями переменной v_4 . Функция v_4 определена неявно. Чтобы посчитать ее скобку Пуассона с произвольной функцией F , мы будем использовать соотношения

$$\{v_4, F\}_1 = \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial v_4}{\partial S_\alpha} \{S_\alpha, F\}_1 + \frac{\partial v_4}{\partial T_\alpha} \{T_\alpha, F\}_1 \right),$$

где явные выражения для $\partial v_4 / \partial S_\alpha$, $\partial v_4 / \partial T_\alpha$ рассчитываются с использованием связи (24). Получаем, что

$$\frac{\partial v_4}{\partial T_\alpha} = -\frac{c_\alpha b_\alpha v_\alpha v_\beta^2 v_\gamma^2}{D}, \quad \frac{\partial v_4}{\partial S_\alpha} = -\frac{c_\alpha b_\alpha v_\alpha v_4^2 v_\beta v_\gamma}{D},$$

где

$$D = \sum_{\alpha=1}^3 c_\alpha b_\alpha (v_\beta v_\gamma (v_4^2 + v_\alpha^2) S_\alpha + v_\alpha (v_\beta^2 + v_\gamma^2) T_\alpha).$$

Применяя формулу (27), выражающую T_α , S_β в терминах функций v_4 , f_α , g_β , $\alpha = 1, 2$, $\beta \in \overline{1, 3}$, мы получаем скобки Пуассона между функциями v_4 , f_α , g_β , $\alpha = 1, 2$, $\beta \in \overline{1, 3}$, записанные в терминах функций v_4 , f_α , g_β , $\alpha = 1, 2$, $\beta \in \overline{1, 3}$. С помощью прямых и тщательных вычислений, используя связь $g_1 + f_3 = 0$, мы получаем явную форму скобок (34). Утверждение доказано.

Вернемся к доказательству теоремы. Благодаря тому факту (очевидному из явной формы скобок (34)), что $\{v_4, f_1\}_1 = 0$ и $\{v_4, g_3 - f_2\}_1 = 0$, мы немедленно приходим к равенству $\{x_1, x_2\}_1 = 0$.

Используя вновь явную форму скобок Пуассона (34), мы видим, что квазиомомент P_2 должен быть пропорционален функции f_1 : $P_2 = k f_1$ в силу того факта, что $\{v_4, f_1\}_1 = 0$, и, следовательно, такая функция P_2 коммутирует с функцией x_1 относительно скобки Пуассона. Теперь нужно найти такой квазиомомент P_1 , что $\{P_2, P_1\}_1 = 0$. Из явной формы скобок Пуассона (34) легко увидеть, что

$$v_4^2 \{g_1, f_1\}_1 + \{g_1, f_1\}_1 = \{v_4^2 g_2 + g_1, f_1\}_1 = 0.$$

Следовательно, квазиомомент P_1 должен иметь вид $P_1 = k_1(v_4)f_1 + k_2(v_4)(v_4^2 g_2 + g_1)$. Налагая требования $\{x_1, P_1\}_1 = x_1$, мы получаем явную форму функции $k_i(v_4)$ и, следовательно, явную форму квазиомомента P_1 , а именно формулу (32a).

Соотношение $\{x_2, P_1\}_1 = 0$ является менее очевидным. Оно проверяется прямыми вычислениями с помощью явной формы скобок Пуассона (34). Наконец, соотношение $\{x_2, P_2\}_1 = x_2$ фиксирует форму коэффициента k как в равенстве (326). Теорема доказана.

Имеет место также следующая важная для разделения переменных теорема.

ТЕОРЕМА 4.3. *Функции x_1, x_2, P_1, P_2 удовлетворяют уравнениям разделения*

$$\begin{aligned} \frac{4P_1^2}{x_1}(x_1 + b_1^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_3^2) + (\tilde{K} + x_1\tilde{H} + x_1^2C_2) + \\ + 2C_1\sqrt{x_1(x_1 + b_1^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_3^2)} = 0, \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\frac{P_2^4}{x_2}(x_2 + b_1^2)(x_2 + b_2^2)(x_2 + b_3^2) + P_2^2(\tilde{K} + \tilde{H}x_2 + C_2x_2^2) + x_2^2C_1^2 = 0. \quad (35б)$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Для доказательства мы будем использовать наши новые координаты v_4, f_α, g_β , выражая в их терминах не только координаты и моменты разделения x_1, x_2, P_1, P_2 , но также гамильтонианы $\tilde{H}, \tilde{K}$ и функции Казимира C_1, C_2 . С этой целью мы применяем формулы обращения, выражающие координаты T_α, S_β через функции f_i, g_i и v . Таким образом, мы, в частности, приходим к формуле

$$C_1 = \frac{b_3^5 b_2^5 b_1^5}{c_1^2 c_2^2 c_3^2 v_4^2} (((b_2^{-2} + b_1^{-2} + b_3^{-2})v_4^2 + 1)f_1 g_1 - v_4^2(f_3 g_3 + f_1 g_2 + f_2 g_1)).$$

Благодаря тому, что равенство (9) верно, гамильтонианы должны появляться в уравнениях разделения в комбинации $\tilde{K} + \tilde{H}x_i, i = 1, 2$. Более того, в силу связи наших координат с бигамильтоновым подходом уравнения разделения должны содержать полный казимир “пучка скобок” следующей формы: $\tilde{K} + \tilde{H}x_i + C_2 x_i^2, i = 1, 2$. Рассмотрим это выражение в случае $i = 1$. Используя явную формулу для функции x_1 , мы записываем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{K} + \tilde{H}x_1 + C_2 x_1^2 = \frac{b_1^3 b_2^3 b_3^3}{c_1^2 c_2^2 c_3^2} (-b_2 b_3 b_1 (v_4^6 + (b_2^2 + b_1^2 + b_3^2)v_4^4 + \\ + (b_1^2 b_2^2 + b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_3^2)v_4^2 + b_2^2 b_1^2 b_3^2)v_4^{-2} f_1^2 - \\ - 2v_1 v_2 v_3 ((b_1^2 b_2^2 + b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_3^2)v_4^2 + 2b_1^2 b_2^2 b_3^2)g_1 f_1 v_4^{-1} + \\ + 2b_2^2 b_3^2 b_1^2 v_1 v_2 v_3 g_1 f_2 - b_2^3 b_1^3 b_3^3 g_1^2 - \\ - 2b_2^3 b_1^3 b_3^3 v_4 g_1 g_2 - 2b_2^2 b_3^2 b_1^2 v_4 v_1 v_2 v_3 g_3 g_1 - b_2^3 b_1^3 b_3^3 g_2^2 v_4^4). \end{aligned} \quad (36)$$

Сравнивая это выражение с явной формой функций C_1, x_1, P_1 в новых координатах и используя тот факт, что $v_i^2 = x_1 + b_i^2$, мы легко видим справедливость равенства (35a). Равенство (35б) доказывается аналогичным образом. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Отметим, что в терминах канонически сопряженных моментов $p_i = P_i/x_i$ уравнения разделения (35a), (35б) приобретают форму (2a), (2б).

4.6. Формулы реконструкции. Для того чтобы реконструировать динамические переменные через построенные координаты разделения, мы применяем формулы обращения (27) и выражаем функции f_i, g_j, v_4 через x_i, P_j, C_1, C_2 .

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.4. *На поверхности уровня функций Казимира C_1, C_2 динамические переменные T_α, S_α выражаются формулой (27), где функции f_i, g_j и v_4 определены следующим образом:*

$$v_4 = \sqrt{x_1}, \quad (37a)$$

$$f_1 = \frac{c_1 c_2 c_3}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} P_2, \quad (37б)$$

$$\begin{aligned} f_2 = & \frac{c_1 c_2 c_3}{b_1^4 b_2^4 b_3^4} \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} \times \\ & \times \left(-\frac{x_1 x_2^3}{2P_2^3} C_1^2 \sqrt{x_1(x_1 + b_1^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_3^2)} \frac{x_2(2x_2 P_1 + (x_1 - 2x_2)P_2)}{P_2^2} C_1 - \right. \\ & - \frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2)^2}{2P_2} C_2 - 2x_2(x_1 + b_3^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_1^2)(P_1 x_1 - P_2 x_2) \frac{P_1}{x_1 P_2} + \\ & + (x_1(x_1 - 2x_2)(b_1^2 + x_2)(b_2^2 + x_2)(b_3^2 + x_2) + \\ & \left. + x_2(x_1 - x_2)((b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_3^2 + b_1^2 b_2^2)x_1 + 2b_1^2 b_3^2 b_2^2 - x_2^2 x_1)) \frac{P_2}{2x_2} \right), \quad (37в) \end{aligned}$$

$$f_3 = \frac{c_1 c_2 c_3}{b_1^3 b_2^3 b_3^3} \frac{1}{(x_1 - x_2)} \left(\frac{x_1 x_2}{P_2} C_1 + \sqrt{(x_1 + b_1^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_3^2)} \frac{x_2}{\sqrt{x_1}} (2P_1 - P_2) \right), \quad (37г)$$

$$g_1 = -f_3, \quad (37д)$$

$$g_2 = \frac{c_1 c_2 c_3}{b_1^3 b_2^3 b_3^3} \frac{1}{(x_1 - x_2)} \left(\frac{x_2}{P_2} C_1 + \sqrt{(x_1 + b_1^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_3^2)} \frac{1}{\sqrt{x_1}} (2P_1 - P_2) \right), \quad (37е)$$

$$\begin{aligned} g_3 = & \frac{c_1 c_2 c_3}{b_1^4 b_2^4 b_3^4} \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} \times \\ & \times \left(-\frac{x_1 x_2^3}{2P_2^3} C_1^2 - \sqrt{x_1(x_1 + b_1^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_3^2)} \frac{x_2(2x_2 P_1 + (x_1 - 2x_2)P_2)}{P_2^2} C_1 - \right. \\ & - \frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2)^2}{2P_2} C_2 - 2x_2(x_1 + b_3^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_1^2)(P_1 x_1 - P_2 x_2) \frac{P_1}{x_1 P_2} - \\ & - (2x_2^3(x_1 + b_1^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_3^2) + x_1^2(x_2^3(x_2 - 2x_1) - \\ & \left. - ((b_2^2 + b_1^2 + b_3^2)x_1 + b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_3^2 + b_1^2 b_2^2)x_2^2 + b_1^2 b_3^2 b_2^2(x_1 - 2x_2))) \frac{P_2}{2x_1 x_2} \right), \quad (37ж) \end{aligned}$$

а координаты x_i, P_j являются координатами разделения, определены в предыдущем пункте и удовлетворяют квазиканонической скобке Пуассона (33).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы получить формулы реконструкции, необходимо выразить (при фиксированных функциях Казимира C_1, C_2) функции f_i, g_j, v_4 через функции x_i, P_j . По определению мы имеем, что $v_4 = \sqrt{x_1}$, $f_1 = (c_1 c_2 c_3 / b_1^2 b_2^2 b_3^2) P_2$. Кроме того, $g_1 = -f_3$ благодаря уравнению связи. Поэтому остается только найти функции f_2, f_3, g_2, g_3 .

Момент P_1 записывается следующим образом:

$$P_1 = \frac{b_1^3 b_2^3 b_3^3}{2c_1 c_2 c_3} \frac{(v_4^2 g_1 + v_4^4 g_2)}{v_1 v_2 v_3 v_4} + \frac{b_1^2 b_2^2 b_3^2}{2c_1 c_2 c_3} f_1. \quad (38)$$

Используя его, мы легко находим, что

$$g_2 = \frac{2c_1 c_2 c_3 \sqrt{x_1 + b_1^2} \sqrt{x_1 + b_2^2} \sqrt{x_1 + b_3^2} P_1}{b_2^3 b_1^3 b_3^3 x_1^{3/2}} - \frac{c_1 c_2 c_3 \sqrt{x_1 + b_1^2} \sqrt{x_1 + b_2^2} \sqrt{x_1 + b_3^2} P_2}{b_2^3 b_1^3 b_3^3 x_1^{3/2}} + \frac{f_3}{x_1}.$$

Координата x_2 записывается как

$$x_2 = \frac{-f_1}{\left(\frac{(b_2^2 b_3^2 + b_2^2 b_3^2 + b_3^2 b_1^2)}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} + \frac{1}{v_4^2} \right) f_1 + g_3 - f_2}. \quad (39)$$

Используя ее, мы получаем равенство

$$g_3 = -c_1 c_2 c_3 \frac{(x_2 x_1 (b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_3^2 + b_1^2 b_2^2) + b_1^2 b_2^2 b_3^2 (x_1 + x_2)) P_2}{b_1^4 b_2^4 b_3^4 x_2 x_1} + f_2,$$

т. е. остается найти только функции f_2 , f_3 . Функция Казимира C_1 переписывается в терминах функций f_i , g_j и v_4 в виде

$$C_1 = \frac{b_3^5 b_2^5 b_1^5}{c_1^2 c_2^2 c_3^2 v_4^2} [((b_2^{-2} + b_1^{-2} + b_3^{-2}) v_4^2 + 1) f_1 g_1 - v_4^2 (f_3 g_3 + f_1 g_2 + f_2 g_1)].$$

Подставляя в эту формулу полученные выражения для функций v_4 , f_1 , g_2 , g_3 , мы получаем следующее равенство:

$$C_1 = \frac{p_2 b_2^3 b_3^3 b_1^3 (x_1 - x_2) f_3}{c_1 c_2 c_3 x_1 x_2} + \left(P_2^2 \sqrt{x_1 (x_1 + b_1^2) (x_1 + b_2^2) (x_1 + b_3^2)} - 2P_2 \sqrt{x_1 (x_1 + b_1^2) (x_1 + b_2^2) (x_1 + b_3^2) P_1} \right) x_1^{-2}.$$

Используя эту формулу, мы выводим ответ (37г) для f_3 , из которого немедленно находим явное выражение (37е) для g_2 .

Интеграл $\tilde{K}$ приобретает в промежуточных координатах следующий явный вид:

$$\tilde{K} = \frac{b_1^2 b_3^2 b_2^2 ((b_1^2 b_2^2 + b_2^2 b_3^2 + b_1^2 b_3^2) v_4^2 + b_1^2 b_3^2 b_2^2) f_1^2}{v_4^4 c_1^2 c_2^2 c_3^2} - \frac{2b_3^4 b_2^4 b_1^4 f_2 f_1}{c_1^2 c_2^2 c_3^2} - \frac{b_3^4 b_2^4 b_1^4 f_3^2}{c_1^2 c_2^2 c_3^2}. \quad (40)$$

Решая уравнение (40) как линейное уравнение относительно функции f_2 и используя известное выражение для функций f_1 и f_3 в терминах координат и моментов разделения, мы получаем выражение для f_2 как функции от P_1 , P_2 , C_1 , $\tilde{K}$.

Наконец, используя уравнение разделения (35а), (35б), мы выражаем интеграл $\tilde{K}$ через функции P_1 , P_2 , C_1 , C_2 . Подставляя соответствующее выражение в найденную для f_2 формулу, мы записываем равенство (37в) и, как следствие, формулу (37ж) для g_3 . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Подставляя полученные выражения (37) в формулы (27) и используя канонические моменты вместо квазиканонических моментов, мы приходим к теореме 1.2, сформулированной во введении.

4.7. Уравнения движения для координат разделения x_1, x_2 . В этом пункте мы будем использовать вместо квазиканонических координат x_i, P_j канонические координаты $x_i, p_j = P_j/x_j$. Гамильтонианы $\tilde{H}, \tilde{K}$ приобретают в терминах этих координат явный вид

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & -\frac{4x_1(x_1 + b_1^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_3^2)p_1^2}{(x_1 - x_2)} + \frac{x_2(b_3^2 + x_2)(b_2^2 + x_2)(b_1^2 + x_2)p_2^2}{(x_1 - x_2)} - \\ & - \frac{2\sqrt{x_1(x_1 + b_1^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_3^2)}C_1}{(x_1 - x_2)} - (x_1 + x_2)C_2 + \frac{C_1^2}{(x_1 - x_2)p_2^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K} = & \frac{4x_2x_1(x_1 + b_1^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_3^2)p_1^2}{(x_1 - x_2)} - \frac{x_1x_2(b_3^2 + x_2)(b_2^2 + x_2)(b_1^2 + x_2)p_2^2}{(x_1 - x_2)} + \\ & + \frac{2\sqrt{x_1(x_1 + b_1^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_3^2)}x_2C_1}{(x_1 - x_2)} + x_2x_1C_2 - \frac{C_1^2x_1}{(x_1 - x_2)p_2^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

Заметим, что эти формулы можно вывести как из уравнений разделения, так и из наших формул реконструкции.

Используя явный вид гамильтонианов и канонические скобки Пуассона, мы получаем следующие уравнения движения для координат разделения:

$$\dot{x}_1 = \{x_1, \tilde{H}\}_1 = -\frac{8p_1x_1(x_1 + b_3^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_1^2)}{(x_1 - x_2)}, \quad (43a)$$

$$\dot{x}_2 = \{x_2, \tilde{H}\}_1 = \frac{2x_2(b_3^2 + x_2)(b_2^2 + x_2)(b_1^2 + x_2)p_2}{(x_1 - x_2)} - \frac{2C_1^2b_1^2b_2^2b_3^2}{(x_1 - x_2)p_2^3}, \quad (43б)$$

$$x'_1 = \{x_1, \tilde{K}\}_1 = \frac{8p_1x_1x_2(x_1 + b_3^2)(x_1 + b_2^2)(x_1 + b_1^2)}{(x_1 - x_2)}, \quad (43в)$$

$$x'_2 = \{x_2, \tilde{K}\}_1 = -\frac{2x_2x_1(b_3^2 + x_2)(b_2^2 + x_2)(b_1^2 + x_2)p_2}{(x_1 - x_2)} - \frac{2C_1^2b_1^2b_2^2b_3^2x_1}{(x_1 - x_2)p_2^3}. \quad (43г)$$

Уравнения типа Абеля (3) немедленно следуют из уравнений (43).

5. ОБСУЖДЕНИЯ И ВЫВОДЫ

В этом разделе мы обсуждаем связь наших результатов с подходом к разделению переменных, базирующимся на паре Лакса [19]. В этом подходе роль уравнений разделения играет спектральная кривая *одной* матрицы Лакса $L(u)$

$$\Phi_i(x_i, p_i, I_1, \dots, I_d) = \det(p_i Id - L(x_i)), \quad i \in \overline{1, d}.$$

Координаты разделения x_i вычисляются как нули некоей функции $B(u)$, зависящей от матричных элементов матрицы Лакса: $B(x_i) = 0, i \in \overline{1, d}$, а моменты разделения

вычисляются как значения другой функции $A(u)$ в этих нулях: $p_i = A(x_i)$, $i \in \overline{1, d}$. Этот подход, несмотря на свою эффективность, кажется очень ограничивающим. Действительно, справедливы следующие рассуждения.

1. Как следует из рассмотренного в настоящей работе примера, требование, чтобы все функции $\Phi_i(x_i, p_i, I_1, \dots, I_d)$, $i \in \overline{1, d}$, имели одну и ту же форму, является слишком сильным. Можно показать, что наши две кривые разделения (случай $d = 2$) связаны со спектральными кривыми двух *разных* матриц Лакса модели Шотки–Фрама: уравнение разделения (2а) связано с эллиптической матрицей Лакса размера 2×2 , в то время как уравнение разделения (2б) связано с эллиптической матрицей Лакса размера 4×4 .

2. Одна функция $A(u)$, которая определяет сопряженные моменты, существует не всегда даже в случае, когда существует одна функция $B(u)$, определяющая координаты разделения x_i . Действительно, в нашем случае модели Шотки–Фрама каждый момент p_i , $i = 1, 2$, определен своей собственной формулой, хотя существует одна функция $B(u)$, определяющая координаты разделения x_i , совпадающая с нашим фундаментальным полиномом $K(u)$.

Основываясь на этих наблюдениях, мы хотели бы закончить нашу работу выводом, что “магический рецепт” из работы [19] нуждается в дальнейших обобщениях.

Благодарности. Автор выражает признательность Ф. Магри за объяснение своего подхода к разделению переменных и за плодотворное сотрудничество, а также Ю. Федорову за обсуждение алгебро-геометрических аспектов полученных кривых разделения и уравнений типа Абеля.

Список литературы

- [1] F. Frahm, “Ueber gewisse Differentialgleichungen”, *Math. Ann.*, **8**:1 (1874), 35–44.
- [2] F. Shottky, “Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen”, *Sitzunber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, **13** (1891), 227–232.
- [3] С. В. Манаков, “Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела”, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:4 (1976), 93–94.
- [4] A. Perelomov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **38**:47 (2005), L801–L807.
- [5] A. Clebsch, “Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit”, *Math. Ann.*, **3**:2 (1871), 238–261.
- [6] F. Kötter, “Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit”, *J. Reine Angew. Math.*, **1892**:109 (2009), 51–81; 89–111.
- [7] E. Sklyanin, T. Takebe, “Separation of variables in the elliptic Gaudin model”, *Commun. Math. Phys.*, **204**:1 (1999), 17–38.
- [8] M. Gaudin, “Diagonalisation d’une classe d’Hamiltoniens de spin”, *J. Physique*, **37**:10 (1976), 1087–1098.
- [9] V. G. Marikhin, V. V. Sokolov, “Separation of variables on a non-hyperelliptic curve”, *Reg. Chaot. Dyn.*, **10**:1 (2005), 59–75.
- [10] F. Magri, T. Skrypnyk, *The Clebsch System*, arXiv: 1512.04872.
- [11] F. Magri, “A simple model of the integrable Hamiltonian equation”, *J. Math. Phys.*, **19** (1978), 1156.
- [12] G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni, “Bihamiltonian geometry and separation of variables for Toda lattices”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**, suppl. (2001), 118–127.

- [13] G. Falqui, M. Pedroni, “On a Poisson reduction for Gel’fand–Zakharevich manifolds”, *Rep. Math. Phys.*, **50**:3 (2002), 395–407.
- [14] L. Haine, “Geodesic flow on $SO(4)$ and abelian surfaces”, *Math. Ann.*, **263**:4 (1983), 435–472.
- [15] V. Z. Enolski, Yu. N. Fedorov, “Algebraic description of Jacobians isogeneous to certain Prym varieties with polarization $(1, 2)$ ”, *Exp. Math.*, **27**:2 (2018), 147–178.
- [16] Y. Fedorov, private communications, article in preparation.
- [17] A. Tsiganov, “On the invariant separated variables”, *Reg. Chaot. Dyn.*, **6**:3 (2001), 307–326.
- [18] G. Falqui, “A note on the rotationally symmetric $SO(4)$ Euler rigid body”, *SIGMA*, **3** (2007), 032.
- [19] E. Sklyanin, “Separation of variables: new trends”, *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **118** (1995), 35–60.