Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Н. А. Павленко, Классификация уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновым оператором первого порядка, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 1, 124–137

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9473>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:24:11

© 2018 г.

О. И. Мохов*, Н. А. Павленко*

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ АССОЦИАТИВНОСТИ, ОБЛАДАЮЩИХ ГАМИЛЬТОНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Изучается гамильтонова геометрия систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности в случае трех примарных полей. Получена полная классификация уравнений ассоциативности относительно наличия гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова.

Ключевые слова: уравнения ассоциативности, недиагонализуемые системы гидродинамического типа, гамильтонов оператор типа Дубровина–Новикова, плоская метрика, тензор Хаантьеса.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9473>

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения ассоциативности возникли в работах Виттена [1], Дейкхрафа, Верлинде, Верлинде [2] как уравнения на свободную энергию двумерных топологических теорий поля. Дубровин [3] доказал интегрируемость уравнений ассоциативности и развил связанную с ними теорию фробениусовых многообразий, играющих важную роль в различных задачах математики и математической физики.

В статье [4] (см. также работу [5]) Мохов доказал, что уравнения ассоциативности эквивалентны интегрируемым недиагонализуемым системам гидродинамического типа, что позволило поставить вопрос о гамильтоновости уравнений ассоциативности и их гамильтоновой геометрии в представлении в виде систем гидродинамического типа. Впервые задача о гамильтоновости уравнений ассоциативности была рассмотрена в работе Мохова и Ферапонтова [6], где было доказано, что среди уравнений ассоциативности, задаваемых различными плоскими метриками, есть и уравнения, обладающие гамильтоновой структурой первого порядка типа

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 16-11-10260).

*Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: mokhov@mi.ras.ru, nanapavl@gmail.com

Дубровина–Новикова, и уравнения, у которых таких гамильтоновых структур не существует, а также были приведены конкретные примеры уравнений ассоциативности обоих типов. При этом возникла важная проблема описания или классификации метрик, для которых уравнения ассоциативности гамильтоновы.

В дальнейшем был опубликован ряд статей, в которых по той же схеме были найдены другие примеры уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновыми структурами первого порядка типа Дубровина–Новикова (см., например, работы [7], [8]). Первым из авторов высказывалась гипотеза, что примеры, построенные в статьях [7], [8], связаны с примером из работы [6] преобразованиями, сохраняющими гамильтоновость рассматриваемого типа. Однако этот вопрос, а также проблема классификации уравнений ассоциативности, обладающих гамильтоновыми структурами типа Дубровина–Новикова, оставались открытыми. В настоящей статье эта гипотеза доказана и полностью решена проблема классификации.

Прежде всего напомним основные понятия и конструкции, необходимые для наших целей. Введем уравнения ассоциативности согласно работе [3].

Пусть $F(t^1, t^2, \dots, t^n)$ – функция n переменных такая, что выполнены условия:

1) матрица

$$\eta_{ij} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^i \partial t^j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

является постоянной и невырожденной;

2) функции

$$c_{jk}^i = \eta^{il} \frac{\partial^3 F}{\partial t^l \partial t^j \partial t^k}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n,$$

для любого t задают структуру ассоциативной алгебры с базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ и умножением $e_j \circ e_k = c_{jk}^i e_i$.

Требование ассоциативности умножения

$$e_i \circ (e_j \circ e_k) = (e_i \circ e_j) \circ e_k$$

приводит к условиям на функцию $F(t^1, \dots, t^n)$ – системе уравнений в частных производных

$$\eta^{pq} \frac{\partial^3 F}{\partial t^p \partial t^i \partial t^j} \frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^k \partial t^l} = \eta^{pq} \frac{\partial^3 F}{\partial t^p \partial t^i \partial t^l} \frac{\partial^3 F}{\partial t^q \partial t^j \partial t^k}. \quad (1)$$

Эти соотношения называются системой уравнений Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ) или уравнениями ассоциативности. Матрица η_{ij} играет роль плоской метрики соответствующего фробениусова многообразия.

Матрица η_{ij} фиксирует зависимость функции $F(t^1, t^2, \dots, t^n)$ от переменных t^1 :

$$\begin{aligned} F(t^1, \dots, t^n) = & \frac{1}{6} \eta_{11}(t^1)^3 + \sum_{j \geq 2} \frac{1}{2} \eta_{1j}(t^1)^2 t^j + \\ & + \sum_{i \geq 2} \sum_{j > i} \eta_{ij} t^1 t^i t^j + \sum_{i \geq 2} \frac{1}{2} \eta_{ii} t^1 (t^i)^2 + f(t^2, \dots, t^n). \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, уравнения ассоциативности являются уравнениями в частных производных на функцию $f(t^2, \dots, t^n)$.

В настоящей работе исследуется только случай трех примарных полей ($n = 3$). В этом случае уравнения ассоциативности налагают лишь одно нетривиальное соотношение на функцию $f(t^2, t^3)$.

Как доказано в статье [4] (см. также работу [5]), уравнения ассоциативности сводятся к системам гидродинамического типа

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 v_j^i(u) \frac{\partial u^j}{\partial x}, \quad u^i = u^i(t, x), \quad i = 1, 2, 3.$$

Конструкция основана на переходе к новым переменным $A = f_{xx}$, $B = f_{xt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$, где $x = t^2$, $t = t^3$. Система гидродинамического типа возникает из естественных соотношений совместности $A_t = B_x$, $B_t = C_x$, $C_t = D_x$ после выражения одной из переменных A , B , C или D через остальные при помощи уравнения ассоциативности.

Данное представление важно для исследования уравнений ассоциативности, поскольку для систем гидродинамического типа были хорошо разработаны теории гамильтоновости и интегрируемости (см., например, статьи [9]–[12]). Для изучения систем гидродинамического типа Дубровин и Новиков развили дифференциально-геометрический гамильтонов подход и ввели однородный оператор гидродинамического типа первого порядка

$$K^{ij}(u) = g^{ij}(u) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u) u_x^k. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1 (Дубровин, Новиков [9]). *Если $\det g^{ij}(u) \neq 0$, то оператор $K^{ij}(u)$ является гамильтоновым тогда и только тогда, когда $g^{ij}(u)$ является контравариантной плоской псевдоримановой метрикой, а $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – коэффициенты связности Леви-Чивиты, симметричной и согласованной с метрикой $g^{ij}(u)$.*

Статья посвящена исследованию систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности, и их гамильтоновой геометрии, порождаемой гамильтоновыми операторами первого порядка типа Дубровина–Новикова (3). Основным результатом статьи является полная классификация уравнений ассоциативности относительно наличия такой гамильтоновой структуры. Оказалось, что системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности с $\eta_{11} = 0$, и только они, обладают локальной гамильтоновой структурой первого порядка с плоской метрикой.

В разделе 2 рассмотрены примеры, демонстрирующие нетривиальную гамильтонову природу уравнений ассоциативности. В разделе 3 задача полной классификации систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности, сведена к классификации нескольких типов уравнений при помощи преобразований, сохраняющих данное гамильтоново свойство систем. В разделе 4 приведен критерий Богоявленского–Рейнольдса [13] существования гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова для трехкомпонентных недиагонализующих систем гидродинамического типа, который позволяет полностью решить рассматриваемую проблему в случае трех примарных полей. Раздел 5 содержит основной результат статьи. В приложении описаны системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности и сводящиеся рассматриваемыми нами преобразованиями к системе гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной метрикой [4]–[6], а также указан явный вид таких преобразований для примеров, найденных в работах [7], [8].

2. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим конкретные примеры систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности.

ПРИМЕР 1 ([4]–[6]). Пусть матрица η_{ij} антидиагональна:

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этой матрице η_{ij} соответствуют функция $F(t^1, t^2, t^3) = (t^1)^2 t^3 / 2 + t^1 (t^2)^2 / 2 + f(t^2, t^3)$ и уравнение ассоциативности $(x = t^2, t = t^3)$

$$f_{ttt} = (f_{xxt})^2 - f_{xxx} f_{xtt}. \quad (4)$$

Введем новые переменные $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$, связанные соотношениями совместности

$$A_t = B_x, \quad B_t = C_x, \quad C_t = D_x = D(A, B, C)_x = (B^2 - AC)_x,$$

где D выражено через A , B и C при помощи уравнения ассоциативности (4).

Таким образом, соответствующая система гидродинамического типа записывается как [4], [5]

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & 2B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x. \quad (5)$$

Система (5) обладает гамильтоновой структурой первого порядка типа Дубровина–Новикова, порождаемой плоской метрикой:

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3/2 & A/2 & B \\ A/2 & B & 3C/2 \\ B & 3C/2 & 2(B^2 - AC) \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & A_x/2 & B_x \\ 0 & B_x/2 & C_x \\ 0 & C_x/2 & (B^2 - AC)_x \end{pmatrix}, \quad (6)$$

соответствующий гамильтониан имеет вид $H = \int C dx$ [6].

Отметим также, что система (5) бигамильтонова, а именно, обладает второй гамильтоновой структурой третьего порядка типа Дубровина–Новикова, согласованной с первой [14].

ПРИМЕР 2 ([4]–[6]). Рассмотрим матрицу

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этой матрице η_{ij} соответствуют функция $F(t^1, t^2, t^3) = (t^1)^3 / 6 + t^1 t^2 t^3 + f(t^2, t^3)$ и уравнение ассоциативности $(x = t^2, t = t^3)$

$$f_{xxx} f_{ttt} - f_{xxt} f_{xtt} = 1. \quad (7)$$

В новых переменных $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$ имеем соотношения

$$A_t = B_x, \quad B_t = C_x, \quad C_t = D_x = D(A, B, C)_x = \left(\frac{1 + BC}{A} \right)_x,$$

где D выражено через A , B и C при помощи уравнения ассоциативности (7).

Таким образом, соответствующая система гидродинамического типа имеет вид [4], [5]

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(1 + BC)/A^2 & C/A & B/A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x. \quad (8)$$

Система (8) не допускает никакой локальной гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова [6].

ПРИМЕР 3 ([7]). Пусть

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрице η_{ij} соответствуют функция

$$F(t^1, t^2, t^3) = \frac{(t^1)^2 t^3}{2} + \frac{t^1 (t^2)^2}{2} - \frac{(t^1)^2 t^2}{2} + f(t^2, t^3)$$

и уравнение ассоциативности ($x = t^2$, $t = t^3$)

$$f_{ttt} + f_{ttt} f_{xxx} - f_{xxt} f_{xtt} + f_{xxt} f_{ttt} - f_{xtt}^2 + f_{xxx} f_{xtt} - f_{xxt}^2 = 0. \quad (9)$$

В новых переменных $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$ получаем

$$A_t = B_x, \quad B_t = C_x, \quad C_t = D_x = D(A, B, C)_x = \left(\frac{B^2 + C^2 + BC - AC}{A + B + 1} \right)_x,$$

где D выражено через A , B и C при помощи уравнения ассоциативности (9).

Таким образом, соответствующая система гидродинамического типа имеет вид

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2BC - C - B^2 - C^2}{(A+B+1)^2} & \frac{2AB + 2AC + B^2 - C^2 + 2B + C}{(A+B+1)^2} & \frac{-A + B + 2C}{A+B+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x. \quad (10)$$

Как и система (5), система (10) тоже бигамильтонова, она обладает гамильтоновыми структурами типа Дубровина–Новикова первого и третьего порядков.

ПРИМЕР 4 ([8]). Рассмотрим матрицу

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

как в примере 1.

Матрице η_{ij} соответствуют функция $F(t^1, t^2, t^3) = (t^1)^2 t^3 / 2 + t^1 (t^2)^2 / 2 + f(t^2, t^3)$ и уравнение ассоциативности

$$f_{xxx} - (f_{xtt})^2 + f_{ttt} f_{xxt} = 0, \quad (11)$$

где $t = t^2$, $x = t^3$ (в отличие от примера 1, в котором $x = t^2$, $t = t^3$).

В новых переменных $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$ получаем

$$A_t = B_x, \quad B_t = C_x, \quad C_t = D_x = D(A, B, C)_x = \left(\frac{C^2 - A}{B} \right)_x,$$

где D выражено через A , B и C при помощи уравнения ассоциативности (11).

Соответствующая система гидродинамического типа имеет вид

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/B & (A - C^2)/B^2 & 2C/B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x. \quad (12)$$

Система (12) бигамильтонова, она обладает гамильтоновыми структурами типа Дубровина–Новикова первого и третьего порядков.

ПРИМЕР 5 ([8]). Пусть

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

как в примере 3.

Матрице η_{ij} соответствуют функция

$$F(t^1, t^2, t^3) = \frac{(t^1)^2 t^3}{2} + \frac{t^1 (t^2)^2}{2} - \frac{(t^1)^2 t^2}{2} + f(t^2, t^3)$$

и уравнение ассоциативности

$$f_{xxx} f_{ttt} - f_{xxt} f_{xtt} + f_{xtt} f_{xxx} - f_{xxt}^2 + f_{ttt} f_{xxt} - f_{xtt}^2 + f_{xxx} = 0, \quad (13)$$

где $t = t^2$, $x = t^3$ (вместо $x = t^2$, $t = t^3$, как в примере 3).

В новых переменных $A = f_{xxx}$, $B = f_{xxt}$, $C = f_{xtt}$, $D = f_{ttt}$ имеем

$$A_t = B_x, \quad B_t = C_x, \quad C_t = D_x = D(A, B, C)_x = \left(\frac{B^2 + C^2 + BC - AC - A}{A + B} \right)_x,$$

где D выражено через A , B и C при помощи уравнения ассоциативности (13).

Таким образом, соответствующая система гидродинамического типа имеет вид

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2BC - B - B^2 - C^2}{(A+B)^2} & \frac{2AB + 2AC + B^2 - C^2 + A}{(A+B)^2} & \frac{B - A + 2C}{A+B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x. \quad (14)$$

Система (14) бигамильтонова, она обладает гамильтоновыми структурами типа Дубровина–Новикова первого и третьего порядков.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТРИЦ η_{ij}

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Невырожденные линейные преобразования независимых переменных в уравнениях ассоциативности, не затрагивающие выделенную первую переменную t^1 :*

$$t^1 = \tilde{t}^1, \quad t^2 = \alpha \tilde{t}^2 + \beta \tilde{t}^3, \quad t^3 = \gamma \tilde{t}^2 + \delta \tilde{t}^3, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad (15)$$

сохраняют наличие гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова для систем гидродинамического типа, эквивалентных уравнениям ассоциативности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из конструкции следует, что при линейном преобразовании (15) независимых переменных t^1, t^2, t^3 в системе гидродинамического типа, эквивалентной уравнениям ассоциативности, происходит замена и независимых переменных, и полевых переменных.

Царевым [11] было доказано, что при любых допустимых линейных заменах независимых переменных система гидродинамического типа с локальной однородной гамильтоновой структурой первого порядка, задаваемой невырожденной плоской метрикой, перейдет в гамильтонову систему того же типа. Таким образом, система гидродинамического типа, эквивалентная уравнениям ассоциативности, при замене (15) независимых переменных сохраняет наличие (или отсутствие) локальной однородной гамильтоновой структуры первого порядка (добавим, что замены в нашем случае допустимы).

Уравнению ассоциативности после линейного преобразования (15) будет соответствовать другая система гидродинамического типа с новыми полевыми переменными. Найдем преобразование полевых переменных

$$\tilde{A} = \frac{\partial^3 \tilde{F}}{\partial \tilde{t}^2 \partial \tilde{t}^2 \partial \tilde{t}^2}, \quad \tilde{B} = \frac{\partial^3 \tilde{F}}{\partial \tilde{t}^2 \partial \tilde{t}^2 \partial \tilde{t}^3}, \quad \tilde{C} = \frac{\partial^3 \tilde{F}}{\partial \tilde{t}^2 \partial \tilde{t}^3 \partial \tilde{t}^3},$$

где $\tilde{F} = F(\vec{t}(\vec{\tilde{t}}))$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\vec{\tilde{t}}) &= \alpha^3 A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + 3\alpha^2\gamma B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + 3\alpha\gamma^2 C(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \gamma^3 D(A, B, C), \\ \tilde{B}(\vec{\tilde{t}}) &= \alpha^2\beta A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + (\alpha^2\delta + 2\alpha\beta\gamma)B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + (2\alpha\gamma\delta + \gamma^2\beta)C(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \\ &\quad + \gamma^2\delta D(A, B, C), \\ \tilde{C}(\vec{\tilde{t}}) &= \alpha\beta^2 A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + (2\alpha\beta\delta + \beta^2\gamma)B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + (2\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2)C(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \\ &\quad + \gamma\delta^2 D(A, B, C), \end{aligned}$$

$$D(A, B, C) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\eta^{12}\eta_{33}A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + (2\eta^{12}\eta_{23} - \eta^{13}\eta_{33})B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + (2\eta^{13}\eta_{23} - \eta^{12}\eta_{22})C(\vec{t}(\vec{\tilde{t}}))}{\eta^{13}\eta_{22} + \eta^{23}A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \eta^{33}B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}}))} + \\ &+ \frac{-\eta^{22}(AC)(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \eta^{22}(B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})))^2 + \eta^{23}(BC)(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \eta^{33}(C(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})))^2}{\eta^{13}\eta_{22} + \eta^{23}A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \eta^{33}B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}}))} + \\ &+ \frac{\eta^{11}((\eta_{23})^2 - \eta_{22}\eta_{33})}{\eta^{13}\eta_{22} + \eta^{23}A(\vec{t}(\vec{\tilde{t}})) + \eta^{33}B(\vec{t}(\vec{\tilde{t}}))}. \end{aligned}$$

Таким образом, замена полевых переменных является локальной и при этой замене наличие гамильтоновой структуры также сохраняется. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Матрицы η_{ij} , задающие уравнения ассоциативности, можно разбить на следующие четыре группы относительно невырожденных линейных преобразований (15), не затрагивающих фиксированную переменную t^1 :

$$\begin{aligned} 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = 1; & \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = 1; & \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = 1, \quad \mu^2 = 1. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку матрица η_{ij} полностью определяет уравнения ассоциативности, классификация уравнений ассоциативности относительно наличия локальной однородной гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова сводится к соответствующей классификации уравнений ассоциативности, заданных матрицами типов 1)–4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную симметричную невырожденную матрицу, определяющую уравнения ассоциативности:

$$(\eta_{ij}) = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^i \partial t^j} \right) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix}, \quad \det(\eta_{ij}) = aef + 2bcd - c^2e - b^2f - ad^2 \neq 0,$$

тогда после преобразования (15) матрица η_{ij} имеет вид

$$(\tilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} a & ab + \gamma c & \beta b + \delta c \\ ab + \gamma c & a^2e + 2\alpha\gamma d + \gamma^2f & \alpha\beta e + (\alpha\delta + \beta\gamma)d + \gamma\delta f \\ \beta b + \delta c & \alpha\beta e + (\alpha\delta + \beta\gamma)d + \gamma\delta f & \beta^2e + 2\beta\delta d + \delta^2f \end{pmatrix}.$$

Приведем явный вид замены для произвольных η_{ij} .

1. Пусть $a = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} & \xrightarrow[t^3 = \frac{-b}{\sqrt{|\det(\eta_{ij})|}}\tilde{t}^2 - \frac{ce-bd}{\det(\eta_{ij})}\tilde{t}^3]{t^1 = \tilde{t}^1, \quad t^2 = \frac{c}{\sqrt{|\det(\eta_{ij})|}}\tilde{t}^2 - \frac{bf-cd}{\det(\eta_{ij})}\tilde{t}^3} (\tilde{\eta}_{ij}) = \\ & = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\operatorname{sgn} \det(\eta_{ij}) & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{ef-d^2}{\det(\eta_{ij})} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Пусть $a \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $a = 1$. В противном случае домножим на $1/a$ исходную функцию F , а следовательно – и всю матрицу η_{ij} , что не влияет на уравнения ассоциативности.

А) Пусть $b = c = f = 0$, тогда

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & d \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[t^3 = \frac{1-e}{2d}\tilde{t}^2 - \frac{1+e}{2d}\tilde{t}^3]{t^1 = \tilde{t}^1, t^2 = \tilde{t}^2 + \tilde{t}^3} (\tilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Б) Пусть $b = c = 0$, $f \neq 0$, в таком случае

$$\begin{aligned} (\eta_{ij}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & d \\ 0 & d & f \end{pmatrix} \xrightarrow[t^3 = -\frac{d}{f}\sqrt{\frac{|f|}{|ef-d^2|}}\tilde{t}^2 + \frac{\tilde{t}^3}{\sqrt{|f|}}]{t^1 = \tilde{t}^1, t^2 = \sqrt{\frac{|f|}{|ef-d^2|}}\tilde{t}^2} (\tilde{\eta}_{ij}) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn}(e - d^2/f) & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sgn} f \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В) Наконец, пусть $b \neq 0$ или $c \neq 0$ или $b \neq 0$, $c \neq 0$. Тогда:
при $c^2e - 2bcd + b^2f = 0$, $c = 0$ (откуда следует, что $f = 0$)

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ b & e & d \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[t^3 = \frac{b}{d}\tilde{t}^2 - \frac{e}{2bd}\tilde{t}^3]{t^1 = \tilde{t}^1, t^2 = \frac{1}{b}\tilde{t}^3} (\tilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

при $c^2e - 2bcd + b^2f = 0$, $c \neq 0$

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} \xrightarrow[t^3 = \frac{bc}{bf-cd}\tilde{t}^2 + \frac{bf-2cd}{2c(bf-cd)}\tilde{t}^3]{t^1 = \tilde{t}^1, t^2 = \frac{-c^2}{bf-cd}\tilde{t}^2 + \frac{f}{2(bf-cd)}\tilde{t}^3} (\tilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

при $H = c^2e - 2bcd + b^2f \neq 0$

$$\begin{aligned} (\eta_{ij}) &= \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ b & e & d \\ c & d & f \end{pmatrix} \xrightarrow[t^3 = \frac{-b}{\sqrt{|H|}}\tilde{t}^2 + \frac{ce-bd}{H}\tilde{t}^3]{t^1 = \tilde{t}^1, t^2 = \frac{c}{\sqrt{|H|}}\tilde{t}^2 + \frac{bf-cd}{H}\tilde{t}^3} (\tilde{\eta}_{ij}) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \operatorname{sgn} H & 0 \\ 1 & 0 & (ef-d^2)/H \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СТРУКТУРЫ

Богоявленский и Рейнольдс [13] предложили эффективный критерий существования локальной гамильтоновой структуры первого порядка для трехкомпонентных недиагонализуемых систем гидродинамического типа, а также алгоритм построения плоской метрики, задающей эту структуру. Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, всегда недиагонализуемы (см. работы [4], [5]), поэтому критерий применим к данным системам, что позволяет полностью решить проблему классификации относительно наличия рассматриваемой гамильтоновой структуры. Изложим необходимую нам конструкцию, следуя статье [13].

Рассмотрим систему гидродинамического типа

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n A_j^i(u) \frac{\partial u^j}{\partial x}, \quad (16)$$

где функции $u^i = u^i(t, x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, зависят от времени t и пространственной переменной x .

Конструкция основана на построении метрики h_{ij} по тензору Хаантьеса. Напомним определения тензоров Нейенхейса

$$N_{jk}^i = A_j^\alpha \frac{\partial A_k^i}{\partial u^\alpha} - A_k^\alpha \frac{\partial A_j^i}{\partial u^\alpha} + A_\alpha^i \frac{\partial A_j^\alpha}{\partial u^k} - A_\alpha^i \frac{\partial A_k^\alpha}{\partial u^j},$$

и Хаантьеса

$$H_{jk}^i = A_\alpha^i A_\beta^\alpha N_{jk}^\beta + N_{\alpha\beta}^i A_j^\alpha A_k^\beta - A_\alpha^i N_{\beta k}^\alpha A_j^\beta - A_\alpha^i N_{j\beta}^\alpha A_k^\beta,$$

задаваемых произвольным аффинором $A_j^i(u)$. Также необходимо напомнить следующее важное утверждение.

ТЕОРЕМА 2 (Хаантьес [15]). *Если в любой точке окрестности u аффинора $A_j^i(u)$ есть полный набор собственных векторов, то тензор $A_j^i(u)$ диагонализуем в окрестности тогда и только тогда, когда его тензор Хаантьеса тождественно равен нулю.*

Метрика h_{ij} определяется по тензору Хаантьеса $H_{jk}^i(u)$ аффинора $A_j^i(u)$ системы гидродинамического типа (16):

$$h_{ij} = h_{ji} = H_{i\beta}^\alpha H_{j\alpha}^\beta.$$

Определим вспомогательные тензоры

$$B_j^i = A_j^i - \frac{1}{n} (\text{Tr } A) \delta_j^i, \quad T_{ij}^k = A_{i,j}^k - A_{j,i}^k.$$

Запятая в нижних индексах здесь и далее означает ковариантное дифференцирование Леви-Чивиты, порожденное метрикой h_{ij} :

$$A_{i,j}^k = \frac{\partial A_i^k}{\partial u^j} + \Gamma_{\alpha j}^k A_i^\alpha - \Gamma_{ij}^\alpha A_\alpha^k, \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} h^{is} \left(\frac{\partial h_{js}}{\partial u^k} + \frac{\partial h_{sk}}{\partial u^j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^s} \right).$$

Также будут использованы следующие обозначения: R_{ij} – тензор Риччи для метрики h_{ij} , R – ее скалярная кривизна.

ТЕОРЕМА 3 (Богоявленский, Рейнольдс [13]). В случае $n = 3$ система гидродинамического типа

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 A_j^i(u) \frac{\partial u^j}{\partial x} \quad (17)$$

с невырожденной метрикой $h_{ij}(u)$ обладает гамильтоновой структурой с невырожденной плоской метрикой $g_{ij}(u)$ тогда и только тогда, когда:

1) кососимметрический тензор типа $(1, 2)$

$$V_{ij}^k = \text{Tr}(B^2)T_{ij}^k + (A_i^k T_{j\beta}^\alpha - A_j^k T_{i\beta}^\alpha + (A_i^\gamma \delta_j^k - A_j^\gamma \delta_i^k) T_{\gamma\beta}^\alpha) B_\alpha^\beta$$

тождественно равен нулю;

2) 1-форма

$$w_i = \frac{1}{\text{Tr } B^2} T_{i\beta}^\alpha B_\alpha^\beta$$

точна, и, следовательно, существует функция $\sigma(u)$ такая, что $\partial\sigma/\partial u^i = w_i$;

3) функция $\sigma(u)$ удовлетворяет уравнению Вейля–Схоутена

$$\sigma_{,ij} = \sigma_{,i}\sigma_{,j} + \frac{1}{4} R h_{ij} - R_{ij} - \frac{1}{2} h_{ij} \sigma_{,\alpha} \sigma_{,\beta} h^{\alpha\beta}.$$

При выполнении условий 1–3 метрика $g_{ij} = h_{ij} e^{2\sigma(u)}$ является плоской и задает гамильтонову структуру типа Дубровина–Новикова для системы гидродинамического типа (17).

5. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ АССОЦИАТИВНОСТИ

ТЕОРЕМА 4. Произвольное уравнение ассоциативности в случае трех примарных полей можно свести невырожденными линейными преобразованиями (15), не затрагивающими t^1 и сохраняющими наличие локальной однородной гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова, к одному из следующих четырех типов, заданных матрицами η_{ij} ($\lambda, \mu = \text{const}$):

$$\begin{aligned} 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = 1; & \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = 1; & \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = 1, \quad \mu^2 = 1. \end{aligned}$$

Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности первого типа ($\eta_{11} = 0$), при $\lambda^2 = 1$ и любых μ имеют гамильтонову структуру первого порядка с плоской метрикой

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 3/2 & -u^1/2 & \lambda\mu/2 - u^2 \\ -u^1/2 & \lambda\mu/2 - u^2 & -3u^3/2 \\ \lambda\mu/2 - u^2 & -3u^3/2 & 2u^1u^3 + 2\lambda\mu u^2 - 2(u^2)^2 - \lambda^2\mu^2/2 \end{pmatrix}.$$

Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности типов 2–4, не имеют локальной однородной гамильтоновой структуры первого порядка типа Дубровина–Новикова.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Метрика g_{ij} , полученная при помощи критерия, совпадает с точностью до знака с метрикой гамильтонового оператора первого порядка (6) для системы (4) при соответствующем выборе параметров $\lambda = 1$, $\mu = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Системы гидродинамического типа, сводящиеся преобразованиями (15) к системе гидродинамического типа (5), эквивалентной уравнениям ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij}

Рассмотрим функцию $F(t^1, t^2, t^3) = (t^1)^2 t^3 / 2 + t^1 (t^2)^2 / 2 + f(t^2, t^3)$ с антидиагональной матрицей η_{ij} (отметим, что эта матрица имеет тип 1 из теоремы 4 без необходимости преобразования (15)), а также соответствующее ей уравнение ассоциативности (4)

$$f_{ttt} = (f_{xxt})^2 - f_{xxx} f_{xtt}$$

и эквивалентную ему систему гидродинамического типа (5)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & 2B & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_x.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Системы гидродинамического типа, эквивалентные уравнениям ассоциативности, получаемым из уравнения ассоциативности (4) с антидиагональной матрицей η_{ij} при произвольном невырожденном преобразовании (15), имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{pmatrix}_{\tilde{t}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ q & r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \end{pmatrix}_{\tilde{x}},$$

где

$$\begin{aligned} q &= \frac{\alpha^3 \beta^3 \Delta^2 + \beta^2 \gamma \Delta (\beta \gamma - 3\alpha \delta) \tilde{B} + \alpha^2 \delta \Delta (3\beta \gamma - \alpha \delta) \tilde{C} + \gamma \delta^3 \tilde{B}^2 - 2\gamma^2 \delta^2 \tilde{B} \tilde{C} + \gamma^3 \delta \tilde{C}^2}{(\alpha^3 \Delta + \gamma^2 \tilde{B} - \gamma \delta \tilde{A})^2}, \\ r &= \frac{\Delta (\beta^2 \gamma (3\alpha \delta - \beta \gamma) \tilde{A} + 2\alpha^3 \delta^2 \tilde{B} - \alpha^2 \gamma (\alpha \delta + 3\beta \gamma) \tilde{C} - 3\alpha^4 \beta^2 \Delta) - 2\gamma \delta^3 \tilde{A} \tilde{B} - \gamma^4 \tilde{C}^2}{(\alpha^3 \Delta + \gamma^2 \tilde{B} - \gamma \delta \tilde{A})^2} + \\ &+ \frac{\gamma^2 \delta^2 (2\tilde{A} \tilde{C} + \tilde{B}^2)}{(\alpha^3 \Delta + \gamma^2 \tilde{B} - \gamma \delta \tilde{A})^2}, \\ s &= \frac{3\alpha^2 \beta \Delta - \delta^2 \tilde{A} - \gamma \delta \tilde{B} + 2\gamma^2 \tilde{C}}{\alpha^3 \Delta + \gamma^2 \tilde{B} - \gamma \delta \tilde{A}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $F(t^1, t^2, t^3) = (t^1)^2 t^3 / 2 + t^1 (t^2)^2 / 2 + f(t^2, t^3)$. Рассмотрим произвольное невырожденное преобразование (15)

$$t^1 = \tilde{t}^1, \quad t^2 = \alpha \tilde{t}^2 + \beta \tilde{t}^3, \quad t^3 = \gamma \tilde{t}^2 + \delta \tilde{t}^3, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{const}, \quad \Delta = \alpha \delta - \beta \gamma \neq 0.$$

При переходе к переменным $\tilde{t}^i$ в функции $F(t^1, t^2, t^3)$ получаем функцию

$$\tilde{F}(\tilde{t}^1, \tilde{t}^2, \tilde{t}^3) = \frac{\gamma}{2} (\tilde{t}^1)^2 \tilde{t}^2 + \frac{\delta}{2} (\tilde{t}^1)^2 \tilde{t}^3 + \frac{\alpha^2}{2} \tilde{t}^1 (\tilde{t}^2)^2 + \frac{\beta^2}{2} \tilde{t}^1 (\tilde{t}^3)^2 + \alpha \beta \tilde{t}^1 \tilde{t}^2 \tilde{t}^3 + \tilde{f}(\tilde{t}^2, \tilde{t}^3),$$

где $\tilde{f}(\tilde{t}^2, \tilde{t}^3) = f(t^2(\tilde{t}^2, \tilde{t}^3), t^3(\tilde{t}^2, \tilde{t}^3))$, с матрицей

$$(\tilde{\eta}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & \delta \\ \gamma & \alpha^2 & \alpha\beta \\ \delta & \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение ассоциативности сводится к уравнению $(\partial^3 \tilde{f} / \partial \tilde{t}^i \partial \tilde{t}^j \partial \tilde{t}^k = \tilde{f}_{ijk})$

$$\begin{aligned} & \beta \Delta (\alpha^2 \tilde{f}_{233} + \beta^2 \tilde{f}_{222} - 2\alpha\beta \tilde{f}_{223}) - \alpha \Delta (\alpha^2 \tilde{f}_{333} + \beta^2 \tilde{f}_{223} - 2\alpha\beta \tilde{f}_{233}) - \\ & - \delta^2 (\tilde{f}_{222} \tilde{f}_{233} - \tilde{f}_{223}^2) - \gamma^2 (\tilde{f}_{223} \tilde{f}_{333} - \tilde{f}_{233}^2) + \gamma \delta (\tilde{f}_{222} \tilde{f}_{333} - \tilde{f}_{223} \tilde{f}_{233}) = 0. \end{aligned}$$

Перейдем к эквивалентной системе гидродинамического типа согласно конструкции. Обозначим $\tilde{t}^2 = \tilde{x}$, $\tilde{t}^3 = \tilde{t}$ и введем новые переменные $\tilde{A} = \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}$, $\tilde{B} = \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}}$, $\tilde{C} = \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{t}\tilde{t}}$, $\tilde{D} = \tilde{f}_{\tilde{t}\tilde{t}\tilde{t}}$. Согласно конструкции имеем следующую систему:

$$\tilde{A}_{\tilde{t}} = \tilde{B}_{\tilde{x}}, \quad \tilde{B}_{\tilde{t}} = \tilde{C}_{\tilde{x}}, \quad \tilde{C}_{\tilde{t}} = \tilde{D}_{\tilde{x}} = \tilde{D}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})_{\tilde{x}} = \tilde{D}_{\tilde{A}} \tilde{A}_{\tilde{x}} + \tilde{D}_{\tilde{B}} \tilde{B}_{\tilde{x}} + \tilde{D}_{\tilde{C}} \tilde{C}_{\tilde{x}}. \quad (18)$$

Выразим $\tilde{D}$ из уравнения ассоциативности:

$$\tilde{D} = \frac{\beta^3 \Delta \tilde{A} - 3\alpha\beta^2 \Delta \tilde{B} + 3\alpha^2 \beta \Delta \tilde{C} - \delta^2 \tilde{A} \tilde{C} + \delta^2 \tilde{B}^2 + \gamma^2 \tilde{C}^2 - \gamma \delta \tilde{B} \tilde{C}}{\alpha^3 \Delta + \gamma^2 \tilde{B} - \gamma \delta \tilde{A}}.$$

Полагая $q = \tilde{D}_{\tilde{A}}$, $r = \tilde{D}_{\tilde{B}}$, $s = \tilde{D}_{\tilde{C}}$ и выписывая систему (18) в матричном виде, получаем исконое. Утверждение 3 доказано.

Приведем явный вид преобразований переменных, приводящих системы гидродинамического типа из примеров 3–5 к системе гидродинамического типа (5), эквивалентной уравнению ассоциативности с антидиагональной матрицей η_{ij} .

1. Система гидродинамического типа (10), рассмотренная Калайджи и Нутку в работе [7], сводится к системе (5) с антидиагональной матрицей η_{ij} при помощи преобразования независимых и полевых переменных ($\alpha = \pm 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$, $\delta = 1$)

$$\begin{aligned} t^1 &= \tilde{t}^1, & t^2 &= \alpha \tilde{t}^2, & t^3 &= -\tilde{t}^2 + \tilde{t}^3, \\ \tilde{A} &= \alpha A - 3B + 3\alpha C - B^2 + AC, & \tilde{B} &= B - 2\alpha C + B^2 - AC, & \tilde{C} &= \alpha C - B^2 + AC. \end{aligned}$$

2. Система гидродинамического типа (12), рассмотренная Калайджи и Нутку в статье [8], сводится к системе (5) с антидиагональной матрицей η_{ij} при помощи преобразования независимых и полевых переменных ($\alpha = \delta = 0$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = 1$)

$$t^1 = \tilde{t}^1, \quad t^2 = \beta \tilde{t}^3, \quad t^3 = \tilde{t}^2, \quad \tilde{A} = B^2 - AC, \quad \tilde{B} = \beta C, \quad \tilde{C} = B.$$

3. Система гидродинамического типа (14), рассмотренная Калайджи и Нутку в статье [8], сводится к системе (5) с антидиагональной матрицей η_{ij} при помощи преобразования независимых и полевых переменных ($\alpha = 0$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = 1$, $\delta = \pm 1$)

$$\begin{aligned} t^1 &= \tilde{t}^1, & t^2 &= \beta \tilde{t}^3, & t^3 &= \tilde{t}^2 + \delta \tilde{t}^3, \\ \tilde{A} &= B^2 - AC, & \tilde{B} &= \beta C + \delta(B^2 - AC), & \tilde{C} &= B + 2\beta\delta C + B^2 - AC. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] E. Witten, “On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity”, *Nucl. Phys. B*, **340**:2–3 (1990), 281–332.
- [2] R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde, “Topological strings in $d < 1$ ”, *Nucl. Phys. B*, **352**:1 (1991), 59–86.
- [3] B. A. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories*, Preprint SISSA-89/94/FM, SISSA, Trieste, Italy, 1994; *Integrable Systems and Quantum Groups* (Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993), Lecture Notes in Mathematics, **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 120–348, arXiv: hep-th/9407018.
- [4] O. I. Mokhov, “Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations”, *Topics in Topology and Mathematical Physics*, American Mathematical Society Translations, Ser. 2, **170**, ed. S. P. Novikov, AMS, Providence, RI, 1995, 121–151, arXiv: hep-th/9503076.
- [5] О. И. Мохов, “Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы”, *УМН*, **53**:3 (1998), 85–192.
- [6] О. И. Мохов, Е. В. Фералонтов, “Уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля как интегрируемые гамильтоновы недиагонализующиеся системы гидродинамического типа”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:3 (1996), 62–72.
- [7] J. Kalayci, Y. Nutku, “Bi-Hamiltonian structure of a WDVV equation in 2-d topological field theory”, *Phys. Lett. A*, **227**:3–4 (1997), 177–182.
- [8] J. Kalayci, Y. Nutku, “Alternative bi-Hamiltonian structures for WDVV equations of associativity”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**:2 (1998), 723–734, arXiv: hep-th/9810076.
- [9] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, “Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема”, *Докл. АН СССР*, **270**:4 (1983), 781–785.
- [10] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, “Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория”, *УМН*, **44**:6 (1989), 29–98.
- [11] С. П. Царев, “Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 1048–1068.
- [12] E. V. Ferapontov, “On integrability of 3×3 semi-Hamiltonian hydrodynamic type systems which do not possess Riemannian invariants”, *Phys. D*, **63**:1–2 (1993), 50–70.
- [13] O. I. Bogoyavlenskij, A. P. Reynolds, “Criteria for existence of a Hamiltonian structure”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **15**:4–5 (2010), 431–439.
- [14] E. V. Ferapontov, C. A. P. Galvão, O. I. Mokhov, Y. Nutku, “Bi-Hamiltonian structure of equations of associativity in 2D topological field theory”, *Commun. Math. Phys.*, **186**:3 (1997), 649–669.
- [15] A. Haantjes, “On X_{n-1} -forming sets of eigenvectors”, *Indag. Math.*, **17**:2 (1955), 158–162.