Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Самохин, Отражение и преломление солитонов в неоднородной диссипативной среде, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 1, 153–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:12:39

© 2018 г.

А. В. Самохин^{*†}

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СОЛИТОНОВ В НЕОДНОРОДНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

Изучается поведение солитона, который, перемещаясь в недиссипативной среде, сталкивается с барьером с диссипацией. Для моделирования этой ситуации использовано уравнение Кортвега–де Фриза–Бюргерса. Проведено моделирование прохождения волны через конечный диссипативный слой, аналогичный пакету воздух–стекло–воздух, а также прохождения волны из недиссипативного слоя в диссипативную среду (случай, аналогичный прохождению света из воздуха в воду). Диссипация предсказуемо приводит к уменьшению амплитуды/скорости солитона. Также в случае конечного барьера на пути солитонов возникают и другие эффекты: после того как волна покидает диссипативный барьер, она сохраняет солитонную форму, но возникает волна отражения в форме малых и квазигармонических колебаний (бризер). Бризер распространяется быстрее, чем солитон, проходящий через барьер.

Ключевые слова: уравнение Кортвега–де Фриза–Бюргерса, неоднородная (слоистая) среда, солитон, отражение, преломление.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9474>

1. ВВЕДЕНИЕ

Поведение решений уравнения Кортвега–де Фриза–Бюргерса (КдФБ) является предметом различных недавних исследований [1], [2]. Настоящая статья является продолжением работы [3], а ее основные результаты были представлены в статье [4]. Цель работы заключается в том, чтобы изучить поведение солитона, который при движении в недиссипативной среде встречается с барьером (конечным или бесконечным) с диссипацией. Мы провели моделирование в случае конечного диссипативного слоя, подобном случаю волны, проходящей через пакет воздух–стекло–воздух, а также волна, проходящая из недиссипативного слоя в диссипативный (процесс, аналогичный процессу прохождения света из воздуха в воду).

^{*}Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия.
E-mail: samohinalexey@gmail.com

[†]Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва, Россия

Новые результаты включают в себя численную модель поведения волны для разных типов неоднородности среды. Диссипация предсказуемо приводит к уменьшению амплитуды/скорости солитона, но в случае конечного барьера на пути солитонов также возникают другие эффекты: после того как волна покидает диссипативный барьер, она сохраняет форму солитона, но возникает волна отражения, имеющая форму малых квазигармонических колебаний (бризер). Этот бризер распространяется по мере того, как солитон движется через барьер, а затем – за счет энергии, рассеянной внутри барьера. Бризер движется быстрее, чем солитон, и в противоположном направлении. Для численного моделирования мы использовали пакет Maple PDETools.

Обобщенное уравнение КдФБ имеет вид

$$u_t(x, t) = \gamma(x)u_{xx}(x, t) - 2u(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t). \quad (1)$$

Формула (1) – простейшая модель среды, являющейся вязкой и диспергирующей. Вязкость гасит колебания за исключением стационарных решений (или бегущих волн).

Заметим, что случай $\gamma(x) \equiv 0$ соответствует уравнению КдФ, решениями которого являются солитоны (решения типа бегущих волн), а $\gamma(x) \equiv \text{const} > 0$ соответствует уравнению КдФБ, бегущие волны которого – это ударные волны. Для $\gamma(x) \neq 0$ ситуация аналогична геометрической оптике: когда луч входит в воду из воздуха, можно наблюдать отраженную волну и угасание прошедшей волны.

Мы рассматриваем слоистую среду, состоящую из слоев с дисперсией и диссипацией и слоев без диссипации. В последнем случае волны описываются уравнением КдФ, а в первом – с помощью уравнения КдФБ.

Таким образом, имеют место три возможных случая для $\gamma(x)$:

- 1) функция $\gamma(x) = \alpha(1 - \theta(x))$ есть функция Хевисайда (двуслойный случай),
- 2) функция $\gamma(x) = \alpha(\theta(x - \beta) - \theta(x + \beta))$ есть П-форма распределения вязкости (трехслойный случай),
- 3) функция $\gamma(x) = \alpha \operatorname{ch}^{-2} 2(\beta x)$ есть функция с (численно) компактным носителем (трехслойный случай).

Мы используем следующую начально-граничную задачу для уравнения КдФБ на $\mathbb{R}$:

$$u(x, 0) = 6a^2 \operatorname{ch}^{-2}(a(x + s)), \quad u(\pm\infty, t) = 0, \quad u_x(\pm\infty, t) = 0. \quad (2)$$

Для численных экспериментов вместо $\mathbb{R}$ используется интервал $x \in [a, b]$ при достаточно больших a, b .

2. СОЛИТОН В ДВУСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Этот случай моделирует переход от недиссипативного полупространства к диссипативному. Возьмем $\gamma(x) = \alpha(1 - \theta(x))$ в качестве функции распределения диссипации, чтобы представить границу, разделяющую эти полупространства. Можно ожидать, что каждое решение будет вести себя как одно из решений КдФ в правом полупространстве и как решение КдФБ – в левом.

Рис. 1. Солитон $u(x, t, a, s) = 6a^2 \operatorname{ch}^{-2}(4a^3t + a(x + s))$, скорость $-4a^2 = -4$, начальное смещение $s = -6$, $a = 1$ (а); препятствие-ступенька задается функцией $\gamma(x) = \alpha(1 - \theta(x))$, $\alpha = 6$ (б).

Рис. 2. Солитон ($a = 0.5$) проходит через препятствие-ступеньку, $\alpha = 6$, $t = 6$ (а), $t = 8$ (б).

Рис. 3. Солитон ($a = 0.5$) проходит через препятствие-ступеньку, $\alpha = 6$, $t = 10$ (а); солитон ($a = 1$) проходит через препятствие-ступеньку, $\alpha = 6$, $t = 3.6$ (б).

Процесс перехода от солитонного решения КдФ к соответствующему решению КдФБ в общем случае имеет вполне ожидаемый вид. Переходная волна в диссипативной среде превращается в ударную волну, которая теряет скорость и угасает, исчезая при $t \rightarrow +\infty$; отраженная волна наблюдается в недиссипативном полупространстве. Процесс подобен процессу прохождения света из воздуха в воду (см. рис. 1–3).

3. П-БАРЬЕР

Этот случай моделирует переход из одного недиссипативного полупространства в другое с переходом через диссипативный слой. Выберем $\gamma(x) = \alpha(\theta(x - \beta) - \theta(x + \beta))$ в качестве функции плотности распределения вязкости, имеющей П-форму, чтобы представить слой, разделяющий эти полупространства (трехслойный случай).

Наши численные эксперименты показывают, что начальный солитон ведет себя как солитон КдФ в правом полупространстве и как уменьшенный солитон в левом.

Процесс перехода достаточно естествен. Переходная волна в диссипативной среде теряет энергию и скорость и становится меньшим по амплитуде и относительно медленным солитоном в левом диссипативном полупространстве; отраженная волна видна в правом полупространстве, как показано на рис. 4–6.

Параметры отраженного бризера связаны, в частности, с параметрами α и β барьера. Это может иметь практическое применение: например, измеряя бризер в различных точках, можно определить, является ли мягкая прокладка, соединяющая две твердые поверхности, однородной.

4. ПРЕЛОМЛЕНИЕ

Поскольку коэффициент преломления $k = V_1/V_2 = 4a_1^2/4a_2^2$ совпадает с отношением амплитуд $6a_1^2/6a_2^2$, то на рис. 6б можно видеть, что $k \approx 6/0.95 \approx 6.3$.

Пусть $\langle f(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx$. Отметим, что

$$\frac{\partial \langle u^2(x, t) \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \langle u(x, t)(-2u(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t)) \rangle = 0$$

на решениях уравнения КдФ. Из этого закона сохранения следует, что

$$\langle [6a^2 \operatorname{ch}^{-2}(a(x + 4a^2t + s))]^2 \rangle = 48a^2 = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \langle a^2(t) \rangle}{\partial t} = 0.$$

Для уравнения КдФ и П-барьера на решениях верно равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u^2(x, t) \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \langle u(x, t)(\gamma(x)u_{xx}(x, t) - 2u(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t)) \rangle = \\ &= -\alpha \int_{-\beta}^{\beta} u_x^2(x, t) dx < 0. \end{aligned}$$

Игнорируя отраженный бризер, получаем грубую оценку для скорости угасания амплитуды/скорости

$$\frac{\partial \langle a^2(t) \rangle}{\partial t} \approx -\alpha \int_{-\beta}^{\beta} u_x^2(x, t) dx.$$

Рис. 4. Тонкий вязкий П-барьер, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ (а); солитон ($a = 0.5$) преодолевает тонкий вязкий П-барьер, $\alpha = 2.5$, $\beta = 2$, $t = 3$ (б).

Рис. 5. Солитон ($a = 1$) преодолевает тонкий вязкий П-барьер, $\alpha = 2.5$, $\beta = 2$, $t = 5$ (а), $t = 10$ (б).

Рис. 6. Солитон ($a = 0.5$) преодолевает тонкий вязкий П-барьер, $t = 12$ (а), $t = 50$ (б).

Рис. 7. Солитоноподобное препятствие, $\gamma(x) = 3 \operatorname{ch}^{-2}(3x)$ (а); солитон ($a = 0.5$) преодолевает тонкий вязкий барьер $\gamma(x) = 3 \operatorname{ch}^{-2}(3x)$, $t = 3$ (сплошная линия), $t = 6$ (штриховая линия).

Рис. 8. Солитон ($a = 0.5$) преодолевает тонкий вязкий барьер $\gamma(x) = 3 \operatorname{ch}^{-2}(3x)$, $t = 1.5$ (сплошная линия), $t = 12$ (штриховая линия) (а); солитон ($a = 1$) преодолевает тонкий вязкий барьер $3 \operatorname{ch}^{-2}(3x)$, $t = 20$. Коэффициент преломления $k \approx 6/4.3 \approx 1.4$ (б).

5. СОЛИТОНОПОДОБНОЕ ПРЕПЯТСТВИЕ

Поскольку барьер $\gamma(x) = \delta \operatorname{ch}^{-2}(\delta x)$ имеет с численной точки зрения компактный носитель, то процесс его преодоления отличается от такового для П-барьера незначительно, как это демонстрируют рис. 7, 8.

6. ДРУГИЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

Уравнение КдФ (для $\gamma = 0$) обладает решениями типа бегущих волн, имеющими вид $-6a^2 \operatorname{th}(a(Vt + x) + s)^2 + 4a^2 + (1/2)V$. Настоящий солитон – это такая бегущая волна, которая стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$. Тогда $V = 4a^2$, и она движется влево.

Рис. 9. Бегущая волна при $V = -1$, $s = 3.75$, $a = 0.25$, движущаяся вправо, $t = 0$ (а), $t = 62$ (б).

Рис. 10. Бегущая волна при $V = -1$, $s = 3.75$, $a = 0.25$, $t = 186$ (а), $t = 357$ (б).

Выберем $V = -1$, $s = 3.75$, $a = 0.25$. График соответствующего решения представлен на рис. 9а. В качестве барьера выбрана функция $\gamma(x) = 3 \operatorname{ch}^{-2}(3x)$.

В этом случае и бегущая волна, и бризер двигаются вправо, причем бризер движется быстрее, чем бегущая волна. Разрыв между бегущей волной и опережающим ее бризером растет с течением времени (см. рис. 10).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ СООБРАЖЕНИЯ

Результаты настоящей статьи могут иметь практическое применение. Например, форму отраженной волны можно использовать для оценки толщины и/или плотности вязкого барьера. Величину преломления также можно предсказать.

Графики в этой статье были получены численно с использованием пакета Maple PDETools. Применялся метод Эйлера, являющийся центрированной неявной схемой, которую можно использовать для решения уравнений в частных производных первого порядка по времени и любого порядка по пространственным переменным (при

отсутствии смешанных производных). Эта неявная схема безусловно устойчива для многих задач (этот факт, вообще говоря, нуждается в проверке).

Отметим, что рассматриваемой модели внутренне присущи ударные волны и точки разрыва производной. Таким образом, стандартные процедуры, используемые с параметрами по умолчанию, могут терять устойчивость, что приводит к потере точности. Эта проблема была решена с помощью адаптации параметров *spacstep* и/или *timestep*.

Качественные и аналитические оценки величины рефракции, полученные на основе относительного невыполнения выбранных законов сохранения для уравнения КдФ, будут опубликованы в следующих работах.

Список литературы

- [1] A. Samokhin, *Modelling solutions to the Kdv–Burgers equation in the case of non-homogeneous dissipative media*, [arXiv: 1707.03649](#).
- [2] A. Samokhin, “On nonlinear superposition of the KdV–Burgers shock waves and the behavior of solitons in a layered medium”, *Differential Geom. Appl.*, **54**, Part A (2017), 91–99.
- [3] R. L. Pego, P. Smereka, M. I. Weinstein, “Oscillatory instability of traveling waves for a KdV–Burgers equation”, *Phys. D.*, **67**:1–3 (1993), 45–65.
- [4] А. П. Чугайнова, В. А. Шаргатов, “Устойчивость нестационарных решений обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **55**:2 (2015), 253–266.