Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Лебле, Преобразование Дарбу интегрируемых потенциалов в ассоциативных кольцах и квантовые и классические задачи, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 1, 108–123

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:02:27

© 2018 г.

С. Б. Лебле*

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В АССОЦИАТИВНЫХ КОЛЬЦАХ И КВАНТОВЫЕ И КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Изучается задача в ассоциативных кольцах о левой и правой факторизации полиномиального дифференциального оператора, который рассматривается как оператор эволюции. В прямой сумме колец полином, возникающий в задаче деления оператора на оператор для двух коммутирующих операторов, приводит к зависящему от времени левому/правому преобразованию Дарбу, основанному на сплетающем соотношении и либо на отображениях Миуры, либо на обобщенных уравнениях Бюргерса. Сплетающие соотношения приводят к дифференциальному уравнению, включающему слабые производные. В свете применений к операторным задачам квантовой и классической механики напрямую получены квазидетерминанты или формулы для одевающих цепочек. Рассмотрено преобразование операторов рождения и уничтожения в указанных матричных кольцах. Изучается пример модели Дикке.

Ключевые слова: факторизация полиномиального дифференциального оператора, преобразование Дарбу, преобразование Дарбу–Матвеева, обобщенные преобразования Миуры, уравнения Бюргерса, цепочки в кольцах, одевание гамильтониана Дикке.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9475>

1. ВВЕДЕНИЕ. РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ

Теория одевания потенциала для квантовых или классических гамильтонианов, сформулированная в терминах скобок Пуассона присоединенных операторов, содержит некоммутативные составляющие и требует обобщения. Развитие методов одевания и методов левого и правого деления оператора на оператор приводит к соответствующим соотношениям Миуры и в случае эволюционных уравнений дает некоммутативные нелинейные уравнения линеаризации типа уравнения Бюргерса.

В работе [1] были введены зависящие от времени квантово-механические потенциалы, конечно-разностные уравнения и преобразования Дарбу (ПД) для эволюционных уравнений.

*Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград, Россия.
E-mail: lebleu@mail.ru

Обобщенные бинарные полиномы Белла вводятся как удобный аппарат для получения явных выражений для преобразований. Обобщенное уравнение Бюргерса при этом оказывается линеаризуемым. Его стационарный вариант отождествляется с (обобщенным) соотношением Миуры [2]. По сравнению с книгой [2] в настоящей работе мы различаем проблемы левого и правого деления на оператор, перенося открывающиеся при этом возможности на левые и правые ПД. Все компоненты теории ПД, особенно обобщения преобразования Миуры, являются инструментами для построения квазидетерминантов и уравнений цепочки посредством ПД.

Среди применений теории, которые основаны на специальном дифференцировании, можно отметить коммутатор или скобку Пуассона как присоединенные операторы в алгебре Ли [3], [4].

Многочисленные модельные гамильтонианы в квантовой механике, выраженные в терминах операторов рождения-уничтожения, можно переписать в терминах дифференциальных операторов [5]. Среди этих моделей наиболее привлекательными являются точно решаемые случаи [6].

После введения в разделе 2 основных определений дифференциального кольца и неабелевых многочленов, которые используются при работе с дифференциальными операторами, в разделе 3 мы переходим к двум возможным правой и левой факторизациям полиномиальных дифференциальных операторов и на основе этого получаем соответствующие сплетающие отношения и ПД. Раздел 4 содержит два представления для итерационного ПД: одно задает волновые функции и потенциалы в терминах квазидетерминантов, второе – в терминах так называемых суперпотенциалов, решений правой или левой одевающих цепочек; это обобщает результаты из трудов [5], [2]. Раздел 5 посвящен одеванию точно решаемых моделей (см., например, статью [7]).

2. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

2.1. Основные определения. Пусть K – дифференциальное кольцо с нулевой характеристикой, с двумя дифференцированиями D_1, D_2 , с единицей e (т.е. унитарное кольцо) и с инволюцией, которая обозначается верхним индексом $*$. Дифференцирования и инволюция согласованы с операциями кольца K : для всех $a, b \in K$

- 1) $(a^*)^* = a, (a + b)^* = a^* + b^*, (ab)^* = b^*a^*$;
- 2) $D_i(a + b) = D_i a + D_i b, D_i(ab) = (D_i a)b + a D_i b$;
- 3) $(D_i a)^* = -D_i a^*$.

Образуем прямую сумму $K \oplus K$ двух копий кольца K и зададим дифференцирование в ней как $D = D_1 \oplus D_2$, предполагая, что:

4) операторы D^n с различными n образуют базис в K -модуле $\text{Diff}(K)$ дифференциальных операторов; подкольцо постоянных функций есть K_0 , а мультипликативная группа элементов кольца K есть G ;

5) для каждого $s \in K$ существует элемент $\varphi \in K$, такой что $D\varphi = s\varphi$, это также означает, что в силу свойств инволюции существует решение уравнения $D\phi = -\phi s$.

Матричные дифференциальные кольца применяются в теории Лакса интегрируемых нелинейных уравнений, а также в классических и квантовых линейных задачах. Матрицы параметризуются переменной x , при этом D может быть производной по этой переменной или комбинацией частных производных, удовлетворяя при этом

условиям 1 и 2. Если D является стандартным дифференцированием, то инволюция $*$ может быть эрмитовым сопряжением. В случае, когда D связана с коммутатором, она действует как $Da = [d, a]$ и $(Da)^* = -[d^*, a]$.

2.2. Вспомогательные соотношения. Левые и правые неабелевы полиномы Белла $B_n(s)$ задаются следующими рекуррентными соотношениями: для левых полиномов Белла

$$B_n(s) = DB_{n-1}(s) + B_{n-1}(s)s, \quad (1)$$

для правых полиномов Белла

$$B_n^+(s) = -DB_{n-1}^+(s) + sB_{n-1}^+(s), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

при этом имеет место “начальное условие” $B_0(s) = e$. Отсюда

$$B_1(s) = s, \quad B_2(s) = Ds + s^2, \dots \quad (3)$$

Пусть

$$L = \sum_{n=0}^N a_n D^n, \quad a_n \in K, \quad (4)$$

есть дифференциальный оператор порядка N . Мы изучаем правое и левое деление оператора L на оператор $L_s = D - s$. Предположим, что

$$L = ML_s + r, \quad L = L_s M^+ + r^+, \quad (5)$$

где M и M^+ – результаты правого и левого деления, а r и r^+ – остатки от деления. Если имеет место представление (5), то остаток r и результат деления M записываются как

$$r = \sum_{n=0}^N a_n B_n(s), \quad M = \sum_{n=0}^{N-1} b_n D^n, \quad (6)$$

где коэффициенты b_n могут быть выражены через двухиндексные полиномы (см. раздел 5):

$$b_n = \sum_{k=n+1}^N a_k B_{k-1,n}(s), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7)$$

Как следствие мы получаем, что, для того чтобы линейный оператор L делился справа на L_s без остатка, необходимо и достаточно, чтобы s являлось решением дифференциального уравнения

$$\sum_{n=0}^N a_n B_n(s) = 0. \quad (8)$$

Если это уравнение выполнено, то оператор L представляется в виде произведения $L = ML_s$, где оператор M задан формулами (6) и (7).

Уравнение (8) нелинейно. При $N = 2$ это уравнение типа Риккати, известное в теории уравнения КдФ как отображение Миуры. Таким образом, естественно называть (8) обобщенным правым уравнением Миуры. Оно связывает функцию s с коэффициентами оператора L . Левое уравнение Миуры получается путем аналогичного обобщения на основе факторизации, заданной в (5).

Пусть обратимая функция φ является решением линейного дифференциального уравнения

$$\sum_{n=0}^N a_n D^n \varphi = 0. \quad (9)$$

Тогда оператор L , заданный в (4), делится справа на L_s , где $s = \varphi' \varphi^{-1}$ и $\varphi' \equiv D\varphi$. Таким образом, s – решение правого уравнения Миуры (8).

Для решения задачи левого деления запишем результат деления в виде

$$M^+ = \sum_{n=0}^{N-1} b_n^+ D^n. \quad (10)$$

Теперь нам следует определить коэффициенты b_n^+ , $n = 0, 1, \dots, N-1$. Подставим выражение (10) в правую часть второго уравнения в (5) и приравняем коэффициенты при операторах D^n , получим

$$b_{N-1}^+ = a_N, \quad b_n^+ = a_{n+1} - L_s b_{n+1}^+, \quad n = 0, 1, \dots, N-2, \quad (11)$$

$$r^+ = a_0 - L_s b_0^+. \quad (12)$$

Формулы (5), (11), (12) дают решение задачи левого деления оператора L на L_s (детали см. в книге [2]).

Нелинейное уравнение $r^+ = 0$ называется обобщенным левым уравнением Миуры. Его также можно линеаризовать. Предположим, что обратимый элемент φ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n B_n(s)^+ a_n D^n \varphi = 0. \quad (13)$$

Тогда оператор L , заданный равенством (4), делится слева на оператор L_s , в то время как оператор (12) линеаризуется с помощью “антиподстановки Коула–Хопфа” $s = -\varphi^{-1} \varphi'$. Функция s является решением левого уравнения Миуры (13).

3. ПД ПОСРЕДСТВОМ ФАКТОРИЗАЦИИ

3.1. Правое уравнение Миуры. Правое ПД. Правое уравнение Миуры

$$\sum_{k=0}^N B_k(s) a_k = 0 \quad (14)$$

дает

$$L = M L_s, \quad (15)$$

и это соотношение можно напрямую применить к задаче на собственные значения $L\psi = M L_s \psi = \psi \lambda$, где $\lambda \in K$ есть “спектральный параметр”. Это приводит к уравнению $L_s M L_s \psi = L_s \psi \lambda$, которое можно переписать как $L_s M \tilde{\psi} = \tilde{L} \tilde{\psi} \lambda$, где равенства $\tilde{\psi} = L_s \psi$ и $\tilde{L} = L_s M$ задают правое ПД.

Если $s = (D\phi)\phi^{-1}$, $L_s = \phi D \phi^{-1}$, то формально $L_s^{-1} = \phi D^{-1} \phi^{-1}$.

3.2. Левое уравнение Миуры и левое ПД. Левое уравнение Миуры

$$r^+ = \sum_{k=0}^N (-1)^k L_s^k a_k = 0, \quad (16)$$

которое эквивалентно уравнению (14), теперь записываемому как

$$r^+ = \sum_{k=0}^N B_k^+(s) a_k = 0, \quad (17)$$

дает $L = L_{s^+} M^+$, где

$$L_{s^+} = D - s^+, \quad (18)$$

но в “левом” случае $s^+ = -\phi^{-1}D(\phi)$ подразумевается, что ϕ^{-1} существует.

Следовательно, задачу на собственные значения можно факторизовать следующим образом: $L\psi = L_{s^+} M^+ \psi = \psi\lambda$. Подставляя $\psi = L_{s^+} \phi$, мы имеем

$$L_{s^+} M^+ L_{s^+} \phi = L_{s^+} \phi \lambda. \quad (19)$$

Пусть существует ϕ^{-1} , тогда действие оператора $L_{s^+}^{-1} = (\phi^{-1}D\phi)^{-1} = \phi^{-1}D^{-1}\phi$ дает уравнение $M^+ L_{s^+} \phi = L^+ \phi = \phi\lambda$. Положим $L^+ = M^+ L_{s^+}$, тем самым левое ПД задается как $\phi = L_{s^+}^{-1} \psi$. Сравнивая этот результат с обычной формой ПД $\tilde{L} = L_s M$, можно использовать те же обозначения для левых полиномов Белла, что в (2), или напрямую использовать выражение

$$L^+ = M^+ L_{s^+} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n^+ D^n L_{s^+}. \quad (20)$$

Выделяя коэффициенты, получаем на основе (11) ПД для коэффициентов полиномов; для $N = 2$ это подробно показано в следующем пункте.

3.3. Случай $N = 2$. В этом случае левое соотношение Миуры имеет вид

$$r^+ = \sum_{k=0}^2 B_k^+(s) a_k = B_0^+(s) a_0 + B_1^+(s) a_1 + B_2^+(s) a_2 = a_0 + s^+ a_1 - (Ds^+) a_2 + (s^+)^2 a_2 = 0,$$

при этом $b_1^+ = a_2$, $b_0^+ = a_1 - L_{s^+} b_1^+$. Напомним, что $r^+ = a_0 - L_{s^+} b_0^+ = 0$ и

$$\begin{aligned} L^+ &= M^+ L_{s^+} = (b_0^+ + b_1^+ D) L_{s^+} = (a_1 - (L_{s^+} a_2) + a_2 D) L_{s^+} = \\ &= (a_1 + a_2 D - (Da_2) + s^+ a_2) (D - s^+) = \\ &= (a_1 + a_2 D - (Da_2) + s^+ a_2) D - (a_1 + a_2 D - (Da_2) + s^+ a_2) s^+ = \\ &= a_1 D + a_2 D^2 - (Da_2) D + s^+ a_2 D - a_1 s^+ - a_2 D s^+ + (Da_2) s^+ - s^+ a_2 s^+. \end{aligned} \quad (21)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a_2^+ &= a_2, & a_1^+ &= a_1 - (Da_2) + s^+ a_2 - a_2 s^+, \\ a_0^+ &= -a_1 s^+ - a_2 (Ds^+) + (Da_2) s^+ - s^+ a_2 s^+. \end{aligned} \quad (22)$$

Добавляя нулевое слагаемое

$$r^+ = a_0 + s^+ a_1 - (Ds^+) a_2 + (s^+)^2 a_2 = 0, \quad (23)$$

приходим к соотношению

$$a_0^+ = a_0 + [s^+, a_1] - a_2(Ds^+) + (Da_2)s^+ - s^+a_2s^+ - (Ds^+)a_2 + (s^+)^2a_2. \quad (24)$$

Если $a_2 = -1$, то

$$\begin{aligned} a_1^+ &= a_1, & a_0^+ &= -a_1s^+ + (Ds^+) + s^+s^+, \\ r^+ &= a_0 + s^+a_1 + (Ds^+) - (s^+)^2 = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Комбинируя эти соотношения, получаем

$$a_1^+ = a_1, \quad a_0^+ = a_0 + 2(Ds^+) + [s^+a_1]. \quad (26)$$

Правое деление приводит к уравнениям

$$\tilde{L} = L_s M, \quad M = b_0 + b_1 D, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= \sum_{k=1}^2 a_k B_{k-1,0}(s) = a_1 B_{0,0}(s) + a_2 B_{1,0}(s) = a_1 + a_2, & b_1 &= a_2 B_{1,1}(s) = a_2 s, \\ M &= a_1 + a_2 + a_2 s D = \sum_{n=1}^N a_n H_{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n, \\ \tilde{L} &= L_s M = (D - s)(a_1 + a_2 + a_2 s D), \end{aligned} \quad (28)$$

Для коэффициентов в случае $N = 2$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{a}_2 &= a_2, & \tilde{a}_1 &= a_1 + Da_2 + [a_2, s], \\ \tilde{a}_0 &= a_0 + [a_1, s] + (Da_1) + [a_2, s]s + 2a_2Ds + (Da_2). \end{aligned} \quad (29)$$

При $a_2 = -1$ преобразования упрощаются и задаются как

$$\tilde{a}_1 = a_1, \quad \tilde{a}_0 = a_0 + Da_1 + [a_1, s] - 2(Ds). \quad (30)$$

Для левого преобразования имеем (25).

Напомним, линеаризация проведена с помощью “антиподстановки” Коула–Хопфа $s^+ = -\phi^{-1}\phi'$. Сравним с правым преобразованием Миуры (14) в случае $N = 2$:

$$a_2(s' + s^2) + a_1s + a_0 = 0. \quad (31)$$

В случае уравнения КдФ, когда $a_2 = -1$, $a_1 = 0$, взяв $a_0 = u(x, t) - \mu$, получаем правое соотношение Миуры $-(s' + s^2) + u = \mu$. Левое соотношение при этом имеет вид $(s^+)' - (s^+)^2 + u = \mu$ и отличается только знаком при s' . Таким образом, уравнения кажутся эквивалентными. Иная ситуация складывается в неабелевом случае.

4. ИТЕРАЦИИ. КВАЗИДЕТЕРМИНАНТЫ И ЦЕПОЧКИ

4.1. Квазидетерминанты. Для дифференцируемого элемента f кольца R положим $\mathcal{D}(\phi; f) = f' - \phi'f^{-1}f$, где ϕ, f – линейно независимые собственные функции спектральной задачи для оператора (4). Следуя работе [8], назовем $\mathcal{D}(\phi; f)$ ПД

функции f , задающимся функцией ϕ . Данное определение позволяет повторить преобразование с другой линейно независимой функцией ϕ_1 , и в результате мы имеем $\mathcal{D}(\phi_1; \mathcal{D}(\phi; f)) = \mathcal{D}(\phi; f)' - \phi_1' \phi_1^{-1} \mathcal{D}(\phi; f)$.

Пусть $\phi_1, \dots, \phi_k \in R$. Определим по индукции *итерационное* ПД $\mathcal{D}(\phi_k, \dots, \phi_1; f)$ следующим образом. Для $k = 1$ оно совпадает с ПД, заданным выше. Пусть теперь $k > 1$. Преобразование $\mathcal{D}(\phi_k, \dots, \phi_1; f)$ определено, если известны преобразования $\mathcal{D}(\phi_k, \dots, \phi_2; f)$ и $\mathcal{D}(\phi_k; f)$, причем $\mathcal{D}(\phi_k; f)$ обратимо. В этом случае

$$\mathcal{D}(\phi_k, \dots, \phi_1; f) = \mathcal{D}(\mathcal{D}(\phi_k, \dots, \phi_2; f); \mathcal{D}(\phi_1; f)).$$

Если обратимы все квадратные подматрицы $(\phi_i^{(j)})$, $i = 1, \dots, k$, $j = k - 1, \dots, 0$, то суперматрица Вандермонда определяет квазидетерминант

$$\widehat{\mathcal{D}}(\phi_k, \dots, \phi_1; f) = \begin{vmatrix} f^{(k)} & \phi_1^{(k)} & \dots & \phi_k^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f & \phi_1 & \dots & \phi_k \end{vmatrix}$$

(мы используем шляпку для обозначения квазидетерминанта). Итерационное ПД задается двумя квазидетерминантами [2].

4.2. Цепочки левых и правых ПД. Чтобы пояснить алгоритм, ограничимся случаем $N = 2$. Пусть $a_0 = u$ есть базовое поле. Выразим u из левого соотношения Миуры как

$$u = a_0 = -s^+ a_1 - (Ds^+) a_2 - (s^+)^2 a_2 \quad (32)$$

или, аналогично, из правого соотношения как

$$u = a_0 = -a_2(s' + s^2) - a_1 s. \quad (33)$$

Изучая итерации левого и правого ПД, мы приходим к двум типам цепочек ПД. Оба отображения (32), (33) позволяют для любого n выразить u через функции s или s^+ , называемые суперпотенциалами:

$$u_n = -s_n^+ a_1 - (Ds_n^+) a_2 - (s_n^+)^2 a_2 \quad (34)$$

или, для правого преобразования,

$$u_n = -a_2(s'_n + s_n^2) - a_1 s_n. \quad (35)$$

Рассматривая формулы (29), мы видим, что условие инвариантности формы оператора L выполнено, если выбрать коэффициент a_2 так, что для правого ПД мы имеем $Da_2 + [a_2, s] = 0$, а для левого имеем $-(Da_2) + s^+[a_2, s^+] = 0$, при этом результаты упрощаются следующим образом. Левые ПД в терминах потенциалов записываются как $u_{n+1}^+ = u_n + 2(Ds_n^+) + [s_n^+, a_1]$. В случае правых преобразований при условии $Da_2 = [a_2, s] = 0$ мы получаем

$$u_{n+1} = u_n + [a_1, s_n] + (Da_1) + 2a_2 Ds_n \quad (36)$$

и записываем уравнения цепочки ПД для суперпотенциалов как

$$-a_2(Ds_{n+1} + s_{n+1}^2) - a_1 s_{n+1} = a_2 Ds_n - a_2 s_n^2 - a_1 s_n + [a_1, s_n] + Da_1. \quad (37)$$

Случай левых преобразований при аналогичных условиях приводит к уравнениям

$$u_{n+1}^+ = u_n - a_1 s_n^+ - a_2 (Ds_n^+) + (Da_2)s_n^+ - s_n^+ a_2 s_n^+. \quad (38)$$

Далее, левое ПД в терминах “суперпотенциалов” имеет вид

$$\begin{aligned} -s_{n+1}^+ a_1 - (Ds_{n+1}^+) a_2 - (s_{n+1}^+)^2 a_2 = \\ = -s_n^+ a_1 - (Ds_n^+) a_2 - (s_n^+)^2 a_2 + [a_1, s_n^+] + (Da_1) + 2a_2 Ds_n^+. \end{aligned} \quad (39)$$

Оба соотношения (37) и (39) мы называем общими уравнениями цепочки ПД.

Полученные результаты естественным образом обобщаются на все случаи, когда выполнены основные свойства ПД: преобразование, получающееся на n -й итерации, есть линейная функция от $T^n \psi$, и оператор преобразования имеет n -мерное ядро [2].

5. ПД И ЭВОЛЮЦИЯ. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Проблема деления оператора на оператор напрямую связана с ПД. Чтобы это пояснить, предположим, что в кольце K существует еще один оператор дифференцирования D_0 , коммутирующий с D . Это может быть дифференцирование по параметру t .

Введем вспомогательное коммутационное соотношение

$$L_s r = r L_s + D r + [r, s]. \quad (40)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} L_s r - r L_s &= (D - s)r - r(D - s) = Dr - sr - rD + rs = \\ &= rD + Dr - sr - rD + rs = Dr + [r, s]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенства (40) и (15), мы приходим к соотношению

$$L_s (D_0 - L) = (D_0 - \tilde{L}) L_s + D_0 s - Dr - [r, s], \quad (41)$$

где

$$\tilde{L} = L_s M + r. \quad (42)$$

В результате получаем важный вывод: если функция s удовлетворяет уравнению

$$D_0 s = Dr + [r, s], \quad (43)$$

то оператор L_s является сплетающим для операторов $D_0 - L$ и $D_0 - \tilde{L}$:

$$L_s (D_0 - L) = (D_0 - \tilde{L}) L_s. \quad (44)$$

Явное выражение для $\tilde{L}$ можно получить в терминах операторов (42) и (15).

ЗАМЕЧАНИЕ. Факторизация нам не требуется ($r = 0$), элемент s должен только быть решением “обобщенного уравнения Бюргерса” (43). А именно, запишем уравнение (43) в явном виде, используя выражение (15). Мы утверждаем, что, для

того чтобы выполнялось сплетающее соотношение (44), необходимо и достаточно, чтобы s являлось решением уравнения

$$D_0 s = \sum_{n=0}^N (D a_n B_n(s) + a_n B_{n+1}(s) - s a_n B_n(s)). \quad (45)$$

Используя соотношение (1), мы получаем еще одно представление, удобное для анализа:

$$D_0 s = \sum_{n=0}^N (D(a_n B_n(s)) + [a_n, s] B_n(s) s). \quad (46)$$

Уравнение (45) нелинейно, но линеаризуемо. Предложенная нами формула (43) наиболее компактна и удобна для дальнейшего исследования, например, в рамках техники билинеаризации Хироты.

В случае, когда коэффициенты коммутируют и $L = D^2$, уравнение (45) приобретает вид известного уравнения Бюргерса. По этой причине и вследствие возможности проинтегрировать уравнение (45) с помощью преобразования Коула–Хопфа естественно назвать (45) обобщенным уравнением Бюргерса. Предположим, что обратимая функция φ является решением линейного дифференциального уравнения $D_0 \varphi = L \varphi$. Тогда функция s удовлетворяет обобщенному уравнению Бюргерса (45).

Пусть функции ψ и φ являются решениями уравнений $D_0 \psi = L \psi$ и $D_0 \varphi = L \varphi$, при этом функция φ обратима. Тогда функции $\tilde{\psi} = L_s \psi = D \psi - s \psi$ и $s = (D \varphi) \varphi^{-1}$ являются решениями уравнения $D_0 \tilde{\psi} = \tilde{L} \tilde{\psi}$. Последнее утверждение завершает доказательство теоремы Матвеева для дифференциальных многочленов (см., например, работу [1]) в ее неабелевом варианте.

Равенство (42) дает представление преобразованных операторов в терминах обобщенных полиномов Белла. Явные выражения для коэффициентов после преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{a}_N &= a_N, \\ \tilde{a}_k &= a_k + \sum_{n=k+1}^N (a_n B_{n,n-k} + (a'_n - s a_n) B_{n-1,n-1-k}), \quad k = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (47)$$

Функции $B_{m,n}$ были введены в работе [9]. Воспроизведем здесь определения и некоторые утверждения об этих функциях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнения $B_{n,0}(\sigma) = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} B_{n,k}(\sigma) &= B_{n-1,k}(\sigma) + D B_{n-1,k-1}(\sigma), & k = 1, \dots, n-1, & \quad n = 2, 3, \dots, \\ B_{n,n}(\sigma) &= D B_{n-1,n-1}(\sigma) + B_n(\sigma), & n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

определяют *обобщенные полиномы Белла* $B_{m,n}$.

Можно получить следующие формулы:

$$B_{n,n-k+1}(\sigma) = \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} B_{n,n-i}(\sigma) D^{i-k} \sigma, \quad k = 1, \dots, n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$B_{n+1}(\sigma) = \sum_{i=0}^n B_{n,n-i}(\sigma) D^i \sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Они связывают неабелевы и обобщенные полиномы Белла:

$$B_{n+1}(\sigma) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(v) D^{n-i} \sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Расчет первых трех обобщенных полиномов Белла непосредственно из определения дает

$$\begin{aligned} B_{n,1}(\sigma) &= \sigma, & B_{n,2}(\sigma) &= \sigma^2 + n D \sigma, \\ B_{n,3}(\sigma) &= \sigma^3 + n \sigma' \sigma + (n-1) \sigma D \sigma + \binom{n}{2} D^2 \sigma. \end{aligned}$$

6. ЛЕВОЕ ПД И ЭВОЛЮЦИЯ

Введем вспомогательное коммутационное соотношение

$$L_s r^+ = r^+ L_s + D r^+ + [r^+, s]. \quad (48)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} L_s r^+ - r^+ L_s &= (D - s) r^+ - r^+ (D - s) = D r^+ - s r^+ - r^+ D + r^+ s = \\ &= r^+ D + D r^+ - s r^+ - r^+ D + r^+ s = D r^+ + [r^+, s]. \end{aligned} \quad (49)$$

Принимая во внимание соотношения (48) и (18), мы приходим к уравнению

$$L_s (D_0 - L) = (D_0 - \tilde{L}) L_s + D_0 s - D r^+ - [r^+, s], \quad (50)$$

где $\tilde{L} = L_s M^+ + r^+$.

Соответствующее обобщенное уравнение Бюргерса $D_0 s - D r^+ - [r^+, s] = 0$ влечет сплетающее соотношение $L_s (D_0 - L) = (D_0 - \tilde{L}) L_s$, которое в свою очередь приводит к уравнению $D_0 \tilde{\phi} = (L_s M^+ + r^+) \tilde{\phi}$, если $(D_0 - L) \psi = 0$; решением этого уравнения является функция $\tilde{\psi} = L_s \phi$.

Временное неабелево уравнение Шредингера. Простейшая квантовая эволюция

$$i \psi_t = H \psi = (-D^2 + u(x, t)) \psi \quad (51)$$

задается условиями $a_2 = -1$, $a_1 = 0$, $a_0 = u(x, t)$. Мы, однако, допускаем, что потенциал и суперпотенциал являются неабелевыми и

$$D_0 s = \sum_{n=0}^2 (D(a_n B_n(s)) + [a_n, s] B_n(s) s). \quad (52)$$

Правое уравнение Бюргерса имеет вид $s_t = D(-(s' + s^2) + u)$, $\tilde{L} = L_s M + r$. Его применение к абелевому кольцу хорошо известно в теории уравнения КП. Недавние результаты для множественных волн-убийц см. в работе [10].

Решения приведенного выше нелинейного уравнения Шредингера образуют $2n$ -параметрическое семейство гладких рациональных решений уравнения КП-I

$$4u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 3u_{yy}.$$

Заменим в уравнении t на y и 3 на t . Функция $f(k; x; y; t) := e^{kx + ik^2y + k^3t + \phi(k)}$, где $\phi(k) := \Phi(k) - \varphi_3 k^3$, удовлетворяет системе уравнений

$$f_t = f_{xxx}, \quad if_y - f_{xx} = 0.$$

Явное решение второго уравнения записывается как

$$u(x; y; t) = 2\partial_{xx} \ln W(f_1; \dots; f_{2n}) = 2(|v|^2 - B^2),$$

где v – решение нелинейного уравнения Шредингера, и также представляет интерес в одномерной квантовой механике. Связь с теорией нелинейного уравнения Шредингера была обнаружена в упомянутой статье [10]. Потенциал считается ограниченным сверху и снизу. Соответствующее решение временного уравнения Шредингера имеет вид

$$\psi := \frac{W(f_1, \dots, f_n, f)}{W(f_1, \dots, f_n)}$$

и, следовательно, дает модель потенциала, зависящего от времени, вместе с соответствующим решением уравнения Шредингера.

7. СТАЦИОНАРНЫЙ СЛУЧАЙ

Интересен случай оператора L с некоммутирующими коэффициентами, даже если взять стационарное решение уравнения эволюции. В этом случае имеем

$$\sigma_t = \phi_{xt}\phi^{-1} - \phi_x\phi^{-1}\phi_t\phi^{-1} = 0. \quad (53)$$

Следовательно, первое слагаемое в сумме (45) мы можем записать как

$$Da_0 + a_0s - sa_0 + \sum_{n=1}^N D(a_n B_n(s)) + [a_n s] B_n(s)s = 0. \quad (54)$$

Возьмем в качестве примера $a_0(\hat{A})$, $\hat{A} \in K$. Тогда функция s должна также зависеть от оператора $\hat{A}$, а коэффициент a_0 коммутирует с s . Вообще говоря, соотношение (43) означает, что если все коэффициенты a_n коммутируют с s , то мы приходим к уравнению $Dr = 0$; таким образом, получаем, что $r = C$, $DC = 0$.

8. ПРИМЕР. МОДЕЛЬ ДИККЕ

8.1. Решение задачи на собственные значения. Пусть система из N атомов взаимодействует с одномодовым полем излучения. Суть совместного поведения частиц заключается в том, что для атомных систем атомные диполи когерентно взаимодействуют с излучением. В последние годы модель Дикке стала вновь вызывать интерес из-за наличия в ней фазовых переходов и потому, что она представляет

собой простую модель системы, в которой можно найти многочастичную запутанность. Простая модель двухатомной системы служит полезным введением в структуру энергетических уровней модели Дикке. В представлении Фока гамильтониан модели имеет вид

$$H_0 = \omega_c a^+ a + \omega_0 S_z + g(a^+ S_- + a S_+). \quad (55)$$

Здесь ω_c – частота моды резонатора, ω_0 – резонансная частота атомов и g – константа связи в атоме.

Чтобы найти собственные значения, заметим, что число возбуждений $a^+ a + S_z$ коммутирует с гамильтонианом H_0 , и тогда при $S = 1$ мы получаем линейную комбинацию состояний Дике, соответствующих состоянию $|n\rangle$, так что число возбуждений можно считать постоянной величиной n (не путать с числом фотонов). Пусть

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Выберем матрицы в уравнении (55) как

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

С помощью известных соотношений $a = (\partial_x + x)/\sqrt{2}$, $a^+ = (\partial_x - x)/\sqrt{2}$ получаем

$$H_0 = -\frac{\omega_c}{2} \partial_x^2 + \frac{g}{\sqrt{2}} (S_- + S_+) \partial_x + \frac{\omega_c}{2} (x^2 + 1) + \frac{gx}{\sqrt{2}} (S_- + S_+) + \omega_0 S_z, \quad (58)$$

следовательно,

$$a_1 = \frac{g}{\sqrt{2}} (S_- + S_+), \quad a_0 = \frac{\omega_c}{2} (x^2 + 1) + \frac{gx}{\sqrt{2}} (S_- + S_+) + \omega_0 S_z. \quad (59)$$

Напомним, что

$$a^+ \phi_n = \sqrt{n+1} \phi_{n+1}, \quad a \phi_n = \sqrt{n} \phi_{n-1}, \quad (60)$$

и положим $\phi_n = |n\rangle$.

В базисе $|i\rangle|n\rangle$, $i = 0, \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, подпространство элементов вида $A|1\rangle|n-1\rangle + B|0\rangle|n\rangle + C|-1\rangle|n+1\rangle$ является инвариантным относительно действия гамильтониана. Действие гамильтониана записывается как

$$\begin{aligned} H_0|1\rangle|n-1\rangle &= (\omega_c a^+ a + \omega_0 S_z + g(a^+ S_- + a S_+))|1\rangle|n-1\rangle = \\ &= (\omega_c(n-1) + \omega_0)|1\rangle|n-1\rangle + g\sqrt{n}|0\rangle|n\rangle, \\ H_0|0\rangle|n\rangle &= (\omega_c a^+ a + \omega_0 S_z + g(a^+ S_- + a S_+))|0\rangle|n\rangle = \\ &= \omega_c n|0\rangle|n\rangle + g\sqrt{n+1}|-1\rangle|n+1\rangle + g\sqrt{n}|1\rangle|n-1\rangle, \\ H_0|-1\rangle|n+1\rangle &= (\omega_c a^+ a + \omega_0 S_z + g(a^+ S_- + a S_+))|-1\rangle|n+1\rangle = \\ &= (\omega_c(n+1) - \omega_0)|-1\rangle|n+1\rangle + g\sqrt{n+1}|0\rangle|n\rangle. \end{aligned} \quad (61)$$

Задача на собственные значения

$$\begin{aligned} A(\omega_c(n-1) + \omega_0) + Bg\sqrt{n} &= \lambda A, & Ag\sqrt{n} + B\omega_c n + Cg\sqrt{n+1} &= \lambda B, \\ Bg\sqrt{n+1} + C(\omega_c(n+1) - \omega_0) &= \lambda C \end{aligned} \quad (62)$$

имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} A(\omega_c(n-1) + \omega_0 - \lambda) + Bg\sqrt{n} &= 0, & Ag\sqrt{n} + B(\omega_c n - \lambda) + Cg\sqrt{n+1} &= 0, \\ B &= -C \frac{\omega_c(n+1) - \omega_0 - \lambda}{g\sqrt{n+1}}. \end{aligned} \quad (63)$$

Далее,

$$\begin{aligned} A(\omega_c(n-1) + \omega_0 - \lambda) - C \frac{\omega_c(n+1) - \omega_0 - \lambda}{g\sqrt{n+1}} g\sqrt{n} &= 0, \\ A &= \frac{C}{g\sqrt{n}} \left[\left(\frac{\omega_c(n+1) - \omega_0 - \lambda}{g\sqrt{n+1}} \right) (\omega_c n - \lambda) - g\sqrt{n+1} \right], & B &= -C \frac{\omega_c(n+1) - \omega_0 - \lambda}{g\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} [(\omega_c(n+1) - \omega_0 - \lambda)(\omega_c n - \lambda) - g^2(n+1)](\omega_c(n-1) + \omega_0 - \lambda) - \\ - (\omega_c(n+1) - \omega_0 - \lambda)g^2 n = 0. \end{aligned}$$

В точке резонанса $\omega_c = \omega_0$ мы получаем уравнение

$$(\omega_c n - \lambda)[(\omega_c n - \lambda)^2 - g^2(n+1) - g^2 n] = 0 \quad (64)$$

и, решая его, находим собственные векторы

$$\begin{aligned} |n, 0\rangle &= \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} |1\rangle |n-1\rangle - \sqrt{\frac{n}{2n+1}} |-1\rangle |n+1\rangle, \\ |n, \pm\rangle &= \sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}} |1\rangle |n-1\rangle + \sqrt{\frac{n+1}{2(2n+1)}} |-1\rangle |n+1\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle |n\rangle \end{aligned} \quad (65)$$

с соответствующими собственными значениями

$$n\omega_c, \quad n\omega_c \pm 2g\sqrt{n + \frac{1}{2}}.$$

При $n = 0$ мы имеем два уровня. Чтобы в этом убедиться, запишем соотношения

$$\begin{aligned} H_0|0, +\rangle &= (\omega_c a^+ a + \omega_0 S_z + g(a^+ S_- + a S_+))(C|-1\rangle|1\rangle + B|0\rangle|0\rangle) = \\ &= (\omega_c - \omega_0)C|-1\rangle|1\rangle + gC|0\rangle|0\rangle + Bg|-1\rangle|1\rangle \end{aligned} \quad (66)$$

и $(\omega_c - \omega_0)C + Bg = \lambda C$, $gC = \lambda B$. Условие резонанса $\omega_c - \omega_0 = 0$ дает $Bg = \lambda C$, $g^2 = \lambda^2$, $\lambda = \pm g$. Действие гамильтониана принимает вид

$$\begin{aligned} H_0|1, 0\rangle &= (\omega_c a^+ a + \omega_0 S_z + g(a^+ S_- + a S_+)) \left(\sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |-1\rangle|2\rangle \right) = \\ &= \omega_0 \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle|0\rangle + g\sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle|0\rangle + g\sqrt{\frac{1}{2}} |0\rangle|0\rangle - (2\omega_c + \omega_0) \sqrt{\frac{1}{3}} |-1\rangle|2\rangle. \end{aligned} \quad (67)$$

8.2. Одевание. Запишем общую формулу для ПД (см. (30))

$$\tilde{a}_1 = a_1, \quad \tilde{a}_0 = a_0 + [a_1, s] - 2(Ds), \quad \text{где} \quad a_1 = \frac{\sqrt{2}g}{\omega_c}(S_- + S_+). \quad (68)$$

Рассмотрим инвариантное подпространство с заданным n . Удобно записать собственные векторы как матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}}\phi_{n-1} & \sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}}\phi_{n-1} & \sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}}\phi_{n-1} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_n & -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_n \\ \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\phi_{n+1} & \sqrt{\frac{n+1}{2(2n+1)}}\phi_{n+1} & \sqrt{\frac{n+1}{2(2n+1)}}\phi_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (69)$$

так что $H\Phi = \Phi\Lambda$, где

$$\Lambda = \text{diag}\left(n\omega_c + 2g\sqrt{n + \frac{1}{2}}, n\omega_c, n\omega_c - 2g\sqrt{n + \frac{1}{2}}\right).$$

Производная матрицы Φ имеет вид

$$\Phi_x = \frac{a - a^+}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{n+1}{2(2n+1)}}\phi_{n-1} & \sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}}\phi_{n-1} & \sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}}\phi_{n-1} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_n & -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_n \\ \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\phi_{n+1} & \sqrt{\frac{n+1}{2(2n+1)}}\phi_{n+1} & \sqrt{\frac{n+1}{2(2n+1)}}\phi_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (70)$$

при этом

$$\tilde{a}_0 = a_0 + \left[\frac{\sqrt{2}g}{\omega_c}(S_- + S_+), s \right] - 2\frac{a - a^+}{\sqrt{2}}s. \quad (71)$$

Используя (71), мы получаем множество интегрируемых потенциалов/моделей, возникающих из модели Дикке. Из функции $\phi_0 = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$ получается множество функций, порожденных действием повышающих и понижающих операторов. В данном базисе

$$s = \text{diag}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\phi_1}{\phi_0}, \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\phi_0}{\phi_1} - \frac{3}{2}\frac{\phi_2}{\phi_1}, \frac{\phi_1}{\phi_2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{\phi_3}{\phi_2}\right).$$

Элементы данной матрицы в x -представлении задаются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1}{\phi_0} &= \sqrt{2}x, & \frac{\phi_0}{\phi_1} &= \frac{1}{\sqrt{2}x}, \\ \frac{\phi_2}{\phi_1} &= \frac{x^2 + 2x - 1}{x\sqrt{2}}, & \frac{\phi_1}{\phi_2} &= \frac{x\sqrt{2}}{x^2 + 2x - 1}, \\ \frac{\phi_3}{\phi_2} &= \frac{\sqrt{2}x^3 + 2x + 1}{\sqrt{3}x^2 - 1 + 2x}. \end{aligned} \quad (72)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае конечной размерности, учитывая равенство $H^+ = H$, мы имеем, что обратная матрица для выбора нормировки есть $\Phi^{-1} = \Phi^+$, при этом $s = \Phi_x \Phi^+$.

8.3. Цепочки ПД. Можно применить результаты п. 4.2, рассмотрев их наименее сложный вариант: один шаг итераций. Считая, что форма суперпотенциала фиксирована [5], запишем потенциал, имеющий инвариантную форму, для левой и правой цепочек соответственно как

$$s_n^+ = \eta_n a(x) + \xi_n, \quad s_n = \zeta_n b(x) + \rho_n. \quad (73)$$

Подставим второе из этих равенств в формулу (37), в которой мы перегруппируем слагаемые и сделаем минимальное упрощение $Da_1 = 0$, получим

$$a_2 D(s_n + s_{n+1}) = a_2 (s_n^2 - s_{n+1}^2) - a_1 s_{n+1} + s_n a_1, \quad (74)$$

это дает

$$\begin{aligned} a_2 D(\zeta_n b(x) + \rho_n + \zeta_{n+1} b(x) + \rho_{n+1}) = \\ = a_2 ((\zeta_n b(x) + \rho_n)^2 - (\zeta_{n+1} b(x) + \rho_{n+1})^2) - a_1 (\zeta_{n+1} b(x) + \rho_{n+1}) + (\zeta_n b(x) + \rho_n) a_1. \end{aligned}$$

Далее подставим первое равенство из (73) в формулу (29), записанную как

$$(Ds_n^+ - Ds_{n+1}^+) a_2 = (s_{n+1}^+)^2 a_2 - (s_n^+)^2 a_2 - s_n^+ a_1 + [a_1, s_n^+] + (Da_1) + 2a_2 Ds_n^+ + s_{n+1}^+ a_1, \quad (75)$$

в результате получим условия на параметры ζ_n , ρ_n , и функцию $b(x)$:

$$a_2 D(s_n + s_{n+1}) = a_2 (s_n^2 - s_{n+1}^2) - a_1 s_{n+1} + s_n a_1 + Da_1. \quad (76)$$

Аналогичные условия имеют место для η_n , ξ_n и функции $a(x)$.

В случае гамильтониана Дикке (58) коэффициенты a_i задаются с использованием выражений (59) как $a_2 = -\omega_0/2$, $a_1 = (g/\sqrt{2})(S_- + S_+)$. Наконец, для гамильтониана Дикке и его ближайших модификаций можно применить полином $b(x) = fx + g$ с потенциалом, заданным соотношением Миуры

$$u_n = \frac{\omega_0}{2} (\zeta_n f + (\zeta_n (fx + g) + \rho_n)^2) - \frac{g}{\sqrt{2}} (S_- + S_+) (\zeta_n (fx + g) + \rho_n),$$

выбирая подходящим образом значения коэффициентов.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Бесконечномерное (операторное) одевание требует разработки некоммутативной техники. Например, можно исследовать такие вопросы, как задачи с рядами многократного рассеяния и сходимость соответствующего разложения [2]. Важным примером задачи с оператором более высокого порядка (по D) является также модель Хаббарда.

Список литературы

- [1] V. B. Matveev, “Darboux transformations in associative rings and functional-difference equations”, *The Bispectral Problem* (Montreal, PQ, March 1997), CRM Proceedings and Lecture Notes, **14**, eds. J. Harnad, A. Kasman, AMS, Providence, RI, 1998, 211–226.
- [2] E. V. Doktorov, S. B. Leble, *A Dressing Method in Mathematical Physics*, Mathematical Physics Studies, **28**, Springer, Dordrecht, 2007.

- [3] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.), *Введение в квантовую статистическую механику*, Наука, М., 1984.
- [4] С. Б. Лебле, “Отклик классической многочастичной системы на двухимпульсное возбуждение”, *Когерентное возбуждение конденсированных сред*, ред. У. Х. Копвиллем, Дальневост. науч. центр АН СССР, Владивосток, 1979, 51–74; С. Б. Лебле, А. И. Иванов, *Метод вторичного квантования*, Калинингр. гос. ун-т, Калининград, 1981.
- [5] С. Б. Лебле, “Метод одевания в квантовых моделях взаимодействия излучения с веществом”, *ТМФ*, **152**:1 (2007), 118–132.
- [6] Л. И. Меньшиков, “Сверхизлучение и некоторые родственные явления”, *УФН*, **169**:2 (1999), 113–154.
- [7] Н. М. Боголюбов, П. П. Кулиш, *Зап. науч. сем. ПОМИ*, **398** (2012), 26–54.
- [8] V. B. Matveev, “Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev–Petviashvili equation, depending on functional parameters”, *Lett. Math. Phys.*, **3**:3 (1979), 213–216.
- [9] S. Leble, A. Zaitsev, “Division of differential operators, intertwine relations and Darboux transformations”, *Rep. Math. Phys.*, **46**:1–2 (2000), 165–174.
- [10] P. Dubard, V. B. Matveev, “Multi-rogue waves solutions: from the NLS to the KP-I equation”, *Nonlinearity*, **26**:12 (2013), R93–R125.