Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Расин, Д. Шифф, Неизвестные аспекты преобразований Беклунда и ассоциированное уравнение Дегаспериса–Прочези, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 3, 449–464

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:39:49

© 2018 г.

А. Г. Расин*, Д. Шифф†

НЕИЗВЕСТНЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕКЛУНДА И АССОЦИИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЕГАСПЕРИСА–ПРОЧЕЗИ

Получено обобщение некоторых недавних результатов о преобразованиях Беклунда, в частности, внимание уделено взаимосвязи преобразований Беклунда и инфинитезимальных симметрий. Для ассоциированного уравнения Дегаспериса–Прочези представлено преобразование Беклунда и принцип суперпозиции преобразований. Исследованы решения, полученные путем применения этого преобразования Беклунда. В рамках общего подхода принцип суперпозиции применен для генерации инфинитезимальных симметрий ассоциированного уравнения Дегаспериса–Прочези.

Ключевые слова: преобразование Беклунда, уравнение Дегаспериса–Прочези, принцип суперпозиции, солитон, симметрии.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9477>

1. ВВЕДЕНИЕ: ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА И СИММЕТРИИ

Преобразования Беклунда (ПБ) являются характерной чертой интегрируемых дифференциальных уравнений, которая обычно рассматривается как любопытная, но не имеющая фундаментального значения особенность. Классическим примером ПБ является преобразование потенциального уравнения КдФ (пКдФ): если u удовлетворяет уравнению пКдФ

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}u_x^2,$$

то ему также удовлетворяет функция $u_\alpha = u + v_\alpha$, где α – параметр, а v_α – решение системы уравнений

$$\begin{aligned}v_{\alpha,x} &= \alpha - 2u_x - v_\alpha^2, \\v_{\alpha,t} &= u_{xx}v_\alpha - \frac{1}{2}u_{xxx} + (\alpha + u_x)(\alpha - 2u_x - v_\alpha^2).\end{aligned}$$

*Department of Mathematics, Ariel University, Ariel, Israel. E-mail: rasin@ariel.ac.il

†Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel.
E-mail: schiff@math.biu.ac.il

Заметим, что мы имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно u_α (не сразу очевидно, что эти два уравнения совместны, но, как оказывается, условием совместности является то, что u_x удовлетворяет уравнению КдФ, а это имеет место, если u удовлетворяет уравнению пКдФ). Общее решение первого из уравнений системы зависит от произвольной функции переменной t , а второе уравнение определяет решение с точностью до произвольной постоянной. Таким образом, u_α фактически зависит от второго “скрытого” параметра, как и от α . В этом смысле ПБ при фиксированном значении α порождает однопараметрическое семейство решений u_α уравнения пКдФ для данного затравочного решения u .

Фундаментальным результатом в теории ПБ является *теорема Бьянки о перестановочности*, которая утверждает, что ПБ коммутируют. Решения $u_{\alpha,\beta}$, получающиеся из затравочного решения u в результате применения ПБ сначала с параметром α , а затем с параметром β , совпадают с решениями $u_{\beta,\alpha}$, полученными в результате применения ПБ в обратном порядке. Кроме того, мы имеем *алгебраический принцип суперпозиции*

$$u_{\alpha,\beta} = u_{\beta,\alpha} = u + \frac{\beta - \alpha}{u_\beta - u_\alpha}.$$

В нашей работе [1] был отмечен следующий простой факт: если в дроби в последнем выражении устремить β к α , то числитель дроби будет стремиться к нулю, но знаменатель стремиться к нулю не будет из-за зависимости различных величин от скрытых параметров в u_α и u_β . В результате

$$Q(\alpha) = \frac{1}{u_\alpha^{(1)} - u_\alpha^{(2)}} \quad (1)$$

является инфинитезимальной симметрией уравнения пКдФ. Здесь через $u_\alpha^{(1)}$ и $u_\alpha^{(2)}$ обозначены два различных решения, полученных из u путем применения ПБ с параметром α . Напомним [2], что η – инфинитезимальная симметрия уравнения пКдФ, если u и $u + \epsilon\eta$ являются решениями уравнения в первом порядке по ϵ , т. е. если

$$\eta_t = \frac{1}{4}\eta_{xxx} + 3u_x\eta_x. \quad (2)$$

Нетрудно проверить непосредственно, что функция $\eta = Q(\alpha)$, заданная формулой (1), удовлетворяет уравнению (2). Общее решение η уравнения (2) называется *локальной симметрией*, если оно зависит от координат x , t , от функции u и конечного числа ее производных. Симметрия $Q(\alpha)$ нелокальна; однако в работе [1] мы показали, что, разлагая $Q(\alpha)$ в асимптотический ряд при больших α , мы восстанавливаем стандартную бесконечную иерархию локальных симметрий уравнения пКдФ. Кроме того, мы получили стандартное рекуррентное соотношение [3] между локальными симметриями и доказали их коммутативность. Мы также показали, что $Q(\alpha)$ включает в себя известные нелокальные симметрии уравнения пКдФ.

Возможность использовать ПБ для получения локальных симметрий интегрируемых уравнений была показана в работе [4] для уравнения синус-Гордон¹⁾, но это считалось единичным случаем. На самом деле, если применять принципы суперпозиции, получение локальных симметрий из ПБ представляется возможным для

¹⁾Мы благодарим Питера Олвера за то, что он обратил наше внимание на эту работу.

многих, если не всех, интегрируемых уравнений. В работе [5] мы исследовали ПБ уравнения Камассы–Холма (КХ), опираясь на результаты предыдущих работ [6], [1] для ассоциированного уравнения КХ (связанного с уравнением КХ заменой координат). Для задания инфинитезимальных симметрий был найден принцип суперпозиции двух ПБ. В работе [7] мы исследовали ПБ уравнения Буссинеска. В этом случае оказалось, что принцип суперпозиции, определяющий инфинитезимальные симметрии, подразумевает суперпозицию трех ПБ. Кажется естественным предположить, что это связано с тем, что пара Лакса для уравнения Буссинеска имеет третий порядок.

В указанных работах было отмечено множество других неизвестных аспектов ПБ. В случае уравнения КХ [5] ПБ действует не только на зависимую переменную, но и на независимую переменную (одну из всех). В случае уравнения Буссинеска [7] однократное применение ПБ порождает не только решения типа бегущей волны, но и то, что мы называем “слившиеся солитонные решения”, когда две одиночные волны сливаются в одну. Используя принцип суперпозиции, мы нашли суперпозиции слившихся солитонов с солитонами (например, дающие решение, в котором три одиночные волны сливаются в две), но суперпозиции самих слившихся солитонов, по-видимому, всегда порождают сингулярности при конечных временах (которые в некоторых случаях исчезают в более поздний, но конечный момент времени). Тот факт, что ПБ задают инфинитезимальные симметрии, возрождает интерес к ПБ как методу генерации решения. Однако отметим, что нам все еще не удалось использовать методы ПБ для получения мультипиконных решений уравнения КХ.

Цель настоящей статьи – еще раз продемонстрировать некоторые из этих многих интересных особенностей ПБ. В разделе 2 мы вводим уравнение, которое называем ассоциированным уравнением Дегаспериса–Прочези (аДП), и объясняем его важность. В разделе 3 мы формулируем ПБ и принцип суперпозиции. Разделы 4 и 5 посвящены соответственно решениям, получающимся с помощью одно- и двукратного ПБ. Однократное применение ПБ порождает два вида солитонов, а также несколько типов сингулярных решений и слившиеся решения, в которых сингулярный солитон поглощает несингулярный солитон (любого вида), при этом слияния несингулярных солитонов, по-видимому, не допускаются. После второго ПБ может возникать суперпозиция решений, в этом случае (по-видимому) какая-либо новая сингулярность не возникает. В разделе 6 мы используем принцип суперпозиции трех ПБ для получения инфинитезимальных симметрий уравнения аДП; первой нетривиальной симметрией является уравнение Каупа–Купершмидта (КК), что согласуется с результатами Дегаспериса, Холма, Хона [8] и Адлера, Шабата [9], согласно которым уравнение аДП связано с иерархией КК. Раздел 7 содержит заключение. В приложении мы кратко описываем, как напрямую получить решения типа бегущей волны для уравнения аДП.

2. АССОЦИИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ДП

Уравнение ДП [10] имеет вид

$$u_T - u_{XXT} + 4uu_X - uu_{XX} - 3u_Xu_{XX} = 0. \quad (3)$$

В случае $b = 3$ оно принадлежит так называемому b -семейству уравнений вида

$$m_T + um_X + bmu_X = 0, \quad m = u - u_{XX}. \quad (4)$$

В книге [11] было показано, что (за исключением случая $b = -1$) эти уравнения возникают из уравнений мелкой воды как результат преобразования Кодамы. Подробнее о b -семействе уравнений см. в работах [12], [13]. При $b > 1$ существуют устойчивые пиконные решения $u(X, T) = ce^{-|X-cT|}$, суперпозиция которых может давать более общие решения вида

$$u(X, T) = \sum_{i=1}^N p_i(T) e^{-|X-q_i(T)|}$$

при условии, что координаты $q_i(T)$ и скорости $p_i(T)$ удовлетворяют уравнениям движения определенной конечномерной гамильтоновой системы. В работе [13] было сделано предположение, что $b = 3$ является возможной точкой бифуркации b -семейства. Кроме того, как известно, в b -семействе имеются только два интегрируемых случая: случай $b = 2$, когда эти уравнения сводятся к уравнению КХ, и случай $b = 3$ уравнения ДП.

Интегрируемость в случае $b = 3$ была установлена в работе [8], где для уравнения, связанного с уравнением ДП изменением координат, была выписана пара Лакса и предложена бигамильтонова структура. Наличие бигамильтоновой структуры было подтверждено в работе [14], а дальнейший анализ показал, что случаи $b = 2$ и $b = 3$ являются выделенными. Версия уравнения ДП, получающаяся в результате замены координат, — это то, что мы называем здесь уравнением аДП, поэтому представим его вывод подробно. Уравнение (4) можно записать в виде

$$(m^{1/b})_T + (m^{1/b}u)_X = 0.$$

Если положить $p = m^{1/b}$, то можно задать новые координаты x, t соотношениями

$$dx = p dX - pu dT, \quad dt = dT.$$

Перейдя к новым координатам, мы находим, что u можно записать как

$$u = p^b - p_{xt} + \frac{p_x p_t}{p},$$

и в результате остается единственное решение для p , которое может быть задано либо уравнением

$$\left(\frac{1}{p}\right)_t + \left(p_{xt} - \frac{p_x p_t}{p} - p^b\right)_x = 0,$$

либо уравнением

$$\left(\frac{p_{xx}}{p} - \frac{p_x^2}{2p^2} + \frac{1}{2p^2}\right)_t + \left(\frac{bp^{b-1}}{b-1}\right)_x = 0.$$

Вторая форма предполагает введение новой неизвестной функции $f(x, t)$, заданной равенством $p = f_t^{1/(b-1)}$. При этом уравнение для f таково:

$$f_{xxt} - \frac{(2b-3)f_{xt}^2}{2(b-1)f_t} + c_1 f_x f_t + c_2 f_t^{(b-3)/(b-1)} = 0,$$

где c_1, c_2 – постоянные, которые можно выбрать произвольно, меняя масштаб функции f и переменных x, t . После надлежащего выбора получаем в случае $b = 3$ то, что в рамках настоящей статьи называется уравнением аДП:

$$f_{xxt} - \frac{3}{4} \frac{f_{xt}^2}{f_t} + 3(1 - f_x f_t) = 0. \quad (5)$$

Причины, по которым мы не изучаем само уравнение ДП, а работаем с уравнением аДП, следующие. Оказывается, что формулы для ПБ более просто выражаются в терминах f , чем в терминах других полей, а именно u, m, p . Кроме того, в работе [8] было установлено, что после вышеописанной замены координат уравнение ДП можно рассматривать как отрицательный поток в иерархии КК. Переменной КК в обозначениях работы [8] является поле V , которое в наших обозначениях с точностью до масштабирования можно отождествить с f_x . Таким образом, неудивительно, что, как показано ниже в разделе 6, первая нетривиальная симметрия уравнения (5) – это потенциальное уравнение КК, а ПБ уравнения аДП связано с ПБ уравнения КК [15] (см. раздел 3). Связь между уравнениями ДП и КК, в свою очередь, изучалась в недавней работе [16].

Одной из мотиваций к изучению ПБ уравнения аДП (5) является продвижение вперед в анализе решений уравнения ДП (3), многие из которых уже известны. Мультипиконные решения обсуждались в работах [8] и [17]. Решения типа бегущих волн рассматривались в работах [18] и [19], в том числе было дано описание “петлевидных” уединенных волн и периодических решений. В выдающихся статьях Мацуно [20], [21] для получения мультисолитонных решений уравнения ДП была использована связь уравнения ДП с иерархией КК, а также тот факт, что иерархия КК является редукцией иерархии КП типа С, и известные результаты о тау-функциях иерархии КП типа С. Схожий подход был применен в работах [22]–[24], при этом для описания суперпозиции петлевых солитонов и смешанных суперпозиций солитонов и петлевых солитонов использовалось обобщение результатов Мацуно. Однако в настоящей статье мы сосредоточимся на применении ПБ к уравнению аДП и отложим сравнение с существующими результатами относительно уравнения ДП до следующей статьи.

Вторым поводом для изучения ПБ уравнения аДП (5) является его связь с уравнением КК. Как упоминалось выше, ПБ уравнения КК было приведено в работе [15], и в следующем разделе мы увидим, что x -часть этого ПБ совпадает с аналогичной частью для уравнения аДП. Но, кроме того, уравнение КК представляет собой часть более обширной картины: уравнения КК и Савады–Кортега (СК) являются редукциями общего уравнения Лакса, описывающего эволюцию оператора Лакса третьего порядка [25]. Уравнения КК и СК взаимосвязаны, они порождаются преобразованиями Миуры общего “модифицированного” уравнения [26]–[28]. Так же, как уравнение ДП связано с уравнением КК, уравнение Новикова [29] связано с уравнением СК изменением координат (см. работу [30]), подобным тому, которое мы ввели для уравнения ДП. Попутно отметим, что аналогичное описанному выше введение функции f для уравнения Новикова дает чрезвычайно простое ассоциированное уравнение Новикова (аН)

$$f_{xxt} + 3(1 - f_x f_t) = 0. \quad (6)$$

Мы полагаем, что для уравнения аН имеется аналог наших результатов для уравнения аДП, но опять же откладываем обсуждение ПБ для полного набора уравнений аДП, КК, аН и СК и их комбинаций, а также ПБ для общей системы Лакса, редукциями которой являются указанные уравнения, до последующих публикаций. Отметим, что ПБ для уравнения СК известно [25]. Взаимосвязи уравнений ДП, КК, Новикова и СК с упором на гамильтоновы структуры изучались в [16].

3. ПБ И ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Непосредственное вычисление показывает, что для уравнения аДП (5) имеется ПБ, которое можно записать в одном из двух видов:

$$f \rightarrow f - \frac{2\theta}{s^2 + 2s_x - 3f_x} \quad \text{или} \quad f \rightarrow f - 2q, \quad (7)$$

где s удовлетворяет уравнениям

$$s_{xx} = \theta - s^3 - 3ss_x + 3f_x s + \frac{3}{2}f_{xx}, \quad (8)$$

$$s_t = f_t + \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{2}f_{xt}s_x - f_t s s_x - f_t s^3 + f_{tx}s^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} + \frac{3f_x f_t}{2} - \frac{3f_{xt}^2}{8f_t} \right) s - \frac{3f_x f_{xt}}{4} + \frac{3f_{xt}}{4f_t} + \frac{f_{xt}^3}{16f_t^2} \right), \quad (9)$$

а q — уравнениям

$$q_{xx} = \theta - q^3 + \frac{3}{4}\frac{q_x^2}{q} - 3qq_x + 3qf_x, \quad (10)$$

$$q_t = \frac{1}{2}f_t - \frac{1}{2\theta^2 f_t} \left(q^3 f_t + f_t q q_x - q^2 f_{xt} + \frac{f_t q_x^2}{4q} - \frac{1}{2}q_x f_{xt} + \frac{q f_{xt}^2}{4f_t} - 3q \right)^2. \quad (11)$$

Преимущества каждой из формулировок очевидны: вид ПБ проще в q -формулировке, но уравнения для q более сложные, чем те, которым удовлетворяет функция s (см. уравнение (15) ниже как упрощенную версию уравнения (9)). Взаимосвязь функций q и s такова:

$$q = \frac{\theta}{s^2 + 2s_x - 3f_x}, \quad s = \frac{q_x}{2q} + q.$$

Заметим, что уравнения для s (или для q) можно линеаризовать с помощью подстановки $s = \psi_x/\psi$, что дает

$$\psi_{xxx} = 3f_x \psi_x + \left(\frac{3}{2}f_{xx} + \theta \right) \psi, \quad (12)$$

$$\psi_t = \frac{1}{\theta} \left(f_t \psi_{xx} - \frac{1}{2}f_{tx} \psi_x + \left(\frac{1}{8}\frac{f_{xt}^2}{f_t} - \frac{3}{2}f_x f_t \right) \psi \right). \quad (13)$$

Это пара Лакса для уравнения аДП (ср. со статьей [8]). Уравнение (12) можно также записать в виде

$$\left(\psi \psi_{xx} - \frac{1}{2}\psi_x^2 - \frac{3}{2}f_x \psi^2 \right)_x = \theta \psi^2,$$

таким образом,

$$\psi\psi_{xx} - \frac{1}{2}\psi_x^2 - \frac{3}{2}f_x\psi^2 = \theta \int \psi^2 dx,$$

следовательно,

$$q = \frac{\theta}{2\frac{\psi_{xx}}{\psi} - \frac{\psi_x^2}{\psi^2} - 3f_x} = \frac{\psi^2}{2 \int \psi^2 dx}. \quad (14)$$

В качестве финального замечания о ПБ уравнения аДП отметим, что x -часть ПБ в q -формулировке совпадает с аналогичной частью ПБ, приведенной в работе [15] для уравнения КК в последнем соотношении на рис. 8 (чтобы получить уравнение (10) из формул работы [8], следует заменить $Q^* - Q$ на $-2q$, а Q заменить на f).

Попутно отметим, что ПБ позволяет получить законы сохранения для уравнения аДП. Из соотношений (8) и (9) следует, что

$$s_t = \frac{1}{\theta} \left(f_t(s_x + s^2) - \frac{1}{2}f_{xt}s - \frac{3}{2}f_x f_t + \frac{f_{xt}^2}{8f_t} \right)_x, \quad (15)$$

и это уравнение есть зависящий от θ закон сохранения для уравнения аДП. При больших $|\theta|$ функцию s можно разложить в асимптотический ряд

$$s \sim \sum_{i=0}^{\infty} s_i(x, t) \theta^{(1-i)/3}, \quad s_0(x, t) = 1. \quad (16)$$

Подстановка этого ряда в (8) дает рекуррентное соотношение для коэффициентов $s_i(x, t)$ в терминах функции f и ее производных по x . Как только эти коэффициенты определены, подстановка ряда в (15) и разложение по степеням $\theta^{-1/3}$ дают бесконечную последовательность законов сохранения, многие из которых тривиальны. Первый нетривиальный закон сохранения (после небольших упрощающих преобразований) имеет вид

$$(f_{xx}^2 + 4f_x^3)_t = \left(3f_t f_x^2 - 6f_x + \frac{3f_x f_{xt}^2 - 18}{2f_t} + \frac{3f_{xt}^2}{2f_t^2} - \frac{f_{xt}^4}{16f_t^3} \right)_x.$$

Заметим, что ПБ для уравнения аДП обладает интригующим сходством с ПБ для уравнения Буссинеска (см. уравнения (8), (9) в [7]). Однако это ПБ было фактически обнаружено методом проб и ошибок при поиске ПБ для уравнения ДП, которое внешне схоже с ПБ для уравнения КХ из работы [5].

Для ПБ справедлив принцип суперпозиции, который мы представим в q -формулировке: если q_1 и q_2 суть соответственно решения уравнений (10) и (11) с параметрами θ_1 и θ_2 , то решение, полученное двукратным применением ПБ с параметрами θ_1 и θ_2 в любой последовательности, записывается как

$$f_{12} = f - \frac{2(\theta_1 + \theta_2)(2Z + (\theta_1 - \theta_2)(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}))}{(Z + (\frac{\theta_1}{q_1} + \frac{\theta_2}{q_2}))^2 - \frac{(\theta_1 + \theta_2)^2}{q_1 q_2}}, \quad (17)$$

где

$$Z = \left(\frac{q_{1x}}{2q_1} - \frac{q_{2x}}{2q_2} + q_1 - q_2 \right)^2 = (s_1 - s_2)^2.$$

Этот результат также ищется подбором, но как только он получен, его можно легко проверить напрямую.

4. РЕШЕНИЯ, ПОЛУЧАЮЩИЕСЯ ПУТЕМ ОДНОКРАТНОГО ПРИМЕНЕНИЯ ПБ

Применим ПБ к “тривиальному” решению

$$f = \beta x + \frac{t}{\beta} + \alpha,$$

где α , β – постоянные, $\beta \neq 0$. Общее решение уравнений (12), (13) имеет вид

$$\psi = C_1 e^{\lambda_1 x + t/\beta \lambda_1} + C_2 e^{\lambda_2 x + t/\beta \lambda_2} + C_3 e^{\lambda_3 x + t/\beta \lambda_3},$$

где λ_1 , λ_2 , λ_3 – три корня уравнения $\lambda^3 = 3\beta\lambda + \theta$, а C_1 , C_2 , C_3 – постоянные. С учетом выражения (14) это дает новые решения

$$f = \beta x + \frac{t}{\beta} - \frac{2(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)^2}{\frac{\eta_1^2}{\lambda_1} + \frac{\eta_2^2}{\lambda_2} + \frac{\eta_3^2}{\lambda_3} - \frac{4\eta_1\eta_2}{\lambda_3} - \frac{4\eta_2\eta_3}{\lambda_1} - \frac{4\eta_3\eta_1}{\lambda_2}}, \quad (18)$$

где $\eta_i = C_i e^{\lambda_i x + t/\beta \lambda_i}$ для $i = 1, 2, 3$.

Анализ этих решений проводится так же, как и в работе [7]. Мы ограничиваемся случаем $4\beta^3 > \theta^2$, когда все корни λ_i действительны. Если две константы C_i равны нулю, решение тривиально. Если ровно одна из констант C_i обращается в нуль, то решение является бегущей волной со скоростью $\lambda_i/\beta\theta$ (где λ_i – корень с тем же индексом, что и нулевой коэффициент C_i). Существуют два типа солитонных решений (распространяющихся вправо) и два типа сингулярных солитонных решений (распространяющихся влево). Профили волны показаны на рис. 1. Один из солитонов имеет регулярный солитонный профиль – мы называем это решение *простым солитоном*. У другого имеются впадины, когда профиль падает до нуля до и после основного солитонного пика, – мы называем это решение *солитоном со впадинами*. Все сингулярные солитоны имеют одну впадину, но различаются тем, что она находится слева или справа от основного солитонного пика (см. приложение для прямого вывода решений уравнения аДП типа бегущей волны и других более полезных формул).

Решения со всеми отличными от нуля C_i не являются бегущими волнами. Они описывают поглощение одного из двух типов солитонов одним из двух типов сингулярных солитонов. Когда простое решение поглощается любым из типов сингулярных солитонов, тип сингулярного солитона остается тем же. Но когда поглощается солитон со впадинами, тип сингулярных солитонов изменяется на противоположный (см. рис. 2, 3 в качестве двух примеров).

Решения типа солитона со впадинами являются в определенном смысле артефактами, связанными с тем, что мы рисуем профиль f_t как высоту волны. В терминах переменной p , удовлетворяющей уравнению $f_t = p^2$, солитоны со впадинами возникают как антисолитоны. Но между солитонами и антисолитонами существует асимметрия: в то время как солитоны могут иметь сколь угодно малую высоту над уровнем фона, антисолитоны имеют минимальную глубину (отвечающую падению значения функции f_t с уровня $1/\beta$ до 0).

Рис. 1. Профили решений уравнения аДП (5) типа бегущей волны. На рисунке показана функция f_t в зависимости от x , где f определена в (18). Параметры заданы как $\beta = 1$, $\theta = 1/2$, таким образом, $\lambda_1 \approx -1.64$, $\lambda_2 \approx -0.17$, $\lambda_3 \approx 1.81$. На рисунке приведены случаи $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$, солитон движется вправо, мы имеем простой солитон (а); $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, солитон движется влево (б); $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $C_3 = 0$, солитон движется вправо, мы имеем солитон со впадинами (в); $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = -1$, солитон движется влево (г).

Рис. 2. Поглощение простого солитона сингулярным солитоном. Параметры выбраны, как на рис. 1, но $C_1 = C_2 = C_3 = 1$. Заметим, что тип сингулярного солитона не меняется в результате поглощения – впадина остается справа.

Рис. 3. Поглощение солитона со впадинами сингулярным солитоном. Параметры выбраны, как на рис. 1, но $C_1 = -1$, $C_2 = C_3 = 1$. Заметим, что тип сингулярного солитона меняется в результате поглощения солитона – впадина смещается справа налево. Также заметим, что в определенный момент времени пара впадин исчезает вследствие столкновения с сингулярностью.

Рис. 4. Суперпозиция быстрого солитона со впадинами и медленного простого солитона. Солитон со впадинами поглощает простой солитон, после чего простой солитон возникает с другой стороны. Графики построены для $\beta = 1$, прочие параметры заданы как $\theta = 0.8$, $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = 0$ для q_1 и как $\theta = 1.0$, $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = 0$ для q_2 .

Рис. 5. Суперпозиция быстрого простого солитона и медленного солитона со впадинами. Графики построены для $\beta = 1$, прочие параметры заданы как $\theta = 1/2$, $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $C_3 = 0$ для q_1 и как $\theta = 4/3$, $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $C_3 = 0$ для q_2 . Показано уменьшение центрального горба (а)–(г), возникновение горба справа и аннигиляция горба слева (д)–(з), возрождение центрального горба (и)–(м).

5. РЕШЕНИЯ, ПОЛУЧАЮЩИЕСЯ ПУТЕМ ДВУКРАТНОГО ПРИМЕНЕНИЯ ПБ

Эксперименты с формулой суперпозиции (17) показывают, что с помощью двукратных ПБ можно получить широкий спектр различных решений. В данном случае физическое содержание решения, полученного с помощью двукратного ПБ, не

Рис. 6. Суперпозиция решений, описывающая столкновение простого солитона с сингулярным солитоном со впадинами и возникновение солитона со впадинами. Графики построены для $\beta = 1$, прочие параметры заданы как $\theta = 1/2$, $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, $C_3 = 0$ для q_1 и как $\theta = 4/3$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$ для q_2 .

является “суммой” физических содержаний решений, полученных путем применения двух отдельных ПБ – суперпозиция сильно нелинейна.

Можно рассчитать суперпозиции простых решений друг с другом, солитонов со впадинами друг с другом, а также простых солитонов и солитонов со впадинами. Процесс, в ходе которого быстрый солитон со впадинами проходит мимо медленного простого солитона, достаточно очевидный: солитон со впадинами поглощает простой солитон справа, затем простой солитон возникает слева (см. рис. 4). Процесс, в ходе которого быстрый простой солитон проходит мимо медленного солитона со впадинами, намного сложнее и включает в себя три этапа (см. рис. 5):

1) по мере того как простой солитон подходит к солитону со впадинами, он начинает поглощать его; высота основного пика быстро увеличивается, в то время как высота горба между двумя впадинами резко падает (но следует подчеркнуть, что впадины не исчезают ни на одной стадии процесса, даже если они сближаются, а высота горба между ними становится очень малой);

2) когда горб между двумя впадинами становится достаточно низким, новый горб начинает расти справа от него, в то время как горб слева (возросший входящий простой солитон) распадается; этот этап занимает чрезвычайно мало времени;

3) как только горб слева от ямочек полностью распадется, а горб справа вырастет до конца, последний горб снова начинает распадаться, в то время как горб между впадинами снова растет, чтобы принять свой первоначальный размер.

Приведем еще один пример суперпозиции. Напомним, что слияние решений показано на рис. 2, где простой солитон поглощается сингулярным. Существуют также суперпозиции с начальным состоянием, включающим простой солитон и сингулярный солитон (того же типа, что и пример на рис. 2). В суперпозиции решений слияние не происходит, но после столкновения простой солитон возникает на другой стороне сингулярного как солитон со впадинами, при этом также меняется тип сингулярного солитона (см. рис. 6). В ходе этого процесса в точке сингулярности образуется пара новых впадин.

6. СИММЕТРИИ

Можно проверить, что двукратное ПБ, заданное формулой (17), не включает в себя тождественное преобразование при любом выборе θ_1 , θ_2 или скрытых параметров в q_1 , q_2 . Таким образом, мы вынуждены обратиться к троекратному ПБ. Нам пока не удалось найти алгебраические формулы для тройных суперпозиций по аналогии с теми, которые были найдены для уравнения Буссинеска в работе [7], хотя естественно предположить, что некоторая связь с дискретным уравнением КП типа С должна присутствовать, как это описано в препринте [31]. Тем не менее можно вычислить действие троекратного ПБ в пределе, когда все три параметра θ_1 , θ_2 , θ_3 стремятся к одному и тому же пределу θ . В этом пределе троекратное ПБ дает инфинитезимальную симметрию

$$Q(\theta) = (s^{(1)} - s^{(2)}) \times \frac{1}{(s^{(1)} - s^{(2)})s_x^{(3)} + (s^{(2)} - s^{(3)})s_x^{(1)} + (s^{(3)} - s^{(1)})s_x^{(2)} - (s^{(1)} - s^{(2)})(s^{(2)} - s^{(3)})(s^{(3)} - s^{(1)})},$$

где $s^{(1)}$, $s^{(2)}$, $s^{(3)}$ – три различных решения уравнений (8), (9). Примечательно, что это в точности производящая функция симметрий, найденных для уравнения Буссинеска в работе [7] (см. уравнение (32) в этой работе). Несмотря на то что для получения $Q(\theta)$ требуются чрезвычайно громоздкие расчеты, как только результат найден, легко проверить, что $\eta = Q(\theta)$ есть решение линеаризованного уравнения аДП

$$\eta_{xxt} - \frac{3}{2} \frac{f_{xt}\eta_{xt}}{f_t} + \frac{3}{4} \frac{f_{xt}^2 \eta_t}{f_t^2} - 3(f_x \eta_t + \eta_x f_t) = 0. \quad (19)$$

Чтобы получить локальные симметрии уравнения аДП из выражения для $Q(\theta)$, мы берем $s^{(1)}$, $s^{(2)}$, $s^{(3)}$, заданные тремя возможными асимптотическими разложениями для s при больших $|\theta|$. Одно разложение уже определено в формуле (16), а остальные получаются из него путем замены в разложении $\theta^{1/3}$ на $\omega\theta^{1/3}$ и $\omega^2\theta^{1/3}$, где $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ есть кубический корень из единицы. Подстановка этих асимптотических разложений в $Q(\theta)$ и разложение по обратным степеням $\theta^{1/3}$ дают две первые нетривиальные локальные симметрии уравнения аДП:

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= f_{5x} - 15f_x f_{xxx} - \frac{45}{4} f_{xx}^2 + 15f_x^3, \\ \eta^{(2)} &= f_{7x} - 21f_x f_{5x} - \frac{105}{2} f_{4x} f_{xx} - \frac{147}{4} f_{xxx}^2 + 126f_x^2 f_{xxx} + \frac{315}{2} f_x f_{xx}^2 - 63f_x^4 \end{aligned} \quad (20)$$

(здесь $f_{4x}, f_{5x}, \dots$ обозначают четвертую, пятую и т. д. производные по x). Первая симметрия определяет, как и ожидалось, потенциальный поток КК. Заметим, что в работе [9] указано, что существуют другие локальные симметрии уравнения аДП с характеристиками, зависящими от производных функции f как по t , так и по x .

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В представленной статье мы ввели ПБ для уравнения аДП и получили для него принцип суперпозиции. Мы увидели, каким образом данное ПБ генерирует интересные решения, в частности, мы заметили, что однократное ПБ тривиального решения порождает не только решения типа бегущей волны, но и в некотором роде слияния решений. Мы также обнаружили, что суперпозиция трех ПБ позволяет вычислить иерархию инфинитезимальных симметрий, и это является еще одной иллюстрацией предложенной нами общей схемы.

Возникает ряд проблем, требующих дальнейших исследований; вкратце перечислим их. Мы до сих пор не перенесли решения, полученные для уравнения аДП, на случай уравнения ДП, которое представляет больший интерес вследствие своей физической значимости. Мы отмечали, что уравнения ДП и аДП вписываются в более общий контекст интегрируемых уравнений с оператором Лакса третьего порядка, включая уравнения КК, СК и уравнения Новикова, и было бы хорошо понять, что представленные в настоящей работе результаты возникают как частные случаи или редукции более общих результатов (тот факт, что для уравнения аДП генератор инфинитезимальных симметрий $Q(\theta)$, по крайней мере на первый взгляд, совпадает с соответствующим оператором уравнения Буссинеска, кажется хорошим свидетельством в пользу этого предположения).

Наконец, мы еще не нашли явной формулы для суперпозиции трех ПБ уравнения аДП, и есть веские основания полагать, что она должна существовать. Хотя нам удалось представить формулу суперпозиции в достаточно компактной форме (17), она включает в себя четвертые степени разности $s_1 - s_2$, работать с которыми трудно. Мы подозреваем, что есть какой-то лежащий в основе всего формализм или способ выбора полей, в рамках которого всё становится гораздо более прозрачным.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Решения уравнения аДП типа бегущих волн

Будем искать решения типа бегущих волн для уравнения (5) в виде

$$f = \beta x + \frac{t}{\beta} + U(\sqrt{\beta}(x - ct)),$$

где β – положительная постоянная. Положив $z = \sqrt{\beta}(x - ct)$ и $P(z) = 1 - c\beta^{3/2}U'(z)$, находим, что должно быть выполнено уравнение

$$P'' = \frac{3}{4} \frac{P'^2}{P} + 3(1 - P) \left(1 - \frac{P}{\beta^2 c} \right). \quad (21)$$

Заметим, что $f_t(x, t) = P(z)/\beta$.

Уравнение (21) можно проинтегрировать, и это дает

$$P'^2 = -\frac{4}{\beta^2 c} P^3 + 12 \left(1 + \frac{1}{\beta^2 c} \right) P^2 + 4dP^{3/2} + 12P.$$

Понятно, что полезно сделать подстановку $P(z) = Q^2(z)$, в результате имеем

$$Q'^2 = -\frac{1}{\beta^2 c} Q^4 + 3 \left(1 + \frac{1}{\beta^2 c} \right) Q^2 + dQ + 3.$$

Для солитонного решения мы требуем наличие двойного корня у полинома в правой части равенства. Выбирая d так, что существует двойной корень при $Q = 1$ (что отвечает солитону с высотой фона $f_t = 1/\beta$), мы получаем

$$Q'^2 = -\frac{1}{\beta^2 c} (Q - 1)^2 (Q^2 + 2Q - 3\beta^2 c). \quad (22)$$

Если $\beta^2 c > 1$, правая часть уравнения (22) в дополнение к двойному корню $Q = 1$ имеет два простых вещественных корня, лежащих по разные стороны от двойного корня. Соответствующие решения записываются как

$$Q(z) = 1 + \frac{3(\beta^2 c - 1)}{2 \pm \sqrt{3\beta^2 c + 1} \operatorname{ch}(z\sqrt{3(1 - 1/\beta^2 c)})}. \quad (23)$$

Решение со знаком плюс перед квадратным корнем отвечает простому солитону из раздела 4 (величина $Q > 1$ при всех z), в то время как решение со знаком минус отвечает солитону со впадинами (величина Q меняет знак, но $P = Q^2$ остается положительным). Если $\beta^2 c < -1/3$, то правая часть уравнения (22) не имеет других корней, кроме двойного корня при $Q = 1$, и неотрицательна при всех Q . Соответствующие решения имеют вид

$$Q(z) = 1 - \frac{3(\beta^2 |c| + 1)}{2 \pm \sqrt{3\beta^2 |c| - 1} \operatorname{sh}(z\sqrt{3(1 + 1/\beta^2 |c|)})} \quad (24)$$

и отвечают сингулярному солитону из раздела 4. Непосредственно можно проверить, что (23) и (24) являются единственными решениями уравнения (5) типа уединенных волн.

Список литературы

- [1] A. G. Rasin, J. Schiff, “The Gardner method for symmetries”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:15 (2013), 155202, 15 pp.
- [2] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [3] P. J. Olver, “Evolution equations possessing infinitely many symmetries”, *J. Math. Phys.*, **18**:6 (1977), 1212–1215.
- [4] S. Kumei, “Invariance transformations, invariance group transformations, and invariance groups of the sine-Gordon equations”, *J. Math. Phys.*, **16**:12 (1975), 2461–2468.
- [5] A. G. Rasin, J. Schiff, “Bäcklund transformations for the Camassa–Holm equation”, *J. Nonlin. Sci.*, **27**:1 (2017), 45–69.
- [6] J. Schiff, “The Camassa–Holm equation: a loop group approach”, *Phys. D*, **121**:1–2 (1998), 24–43.
- [7] A. G. Rasin, J. Schiff, “Bäcklund transformations for the Boussinesq equation and merging solitons”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**:32 (2017), 325202, 21 pp.
- [8] А. Дегасперис, Д. Д. Холм, А. Хон, “Новое интегрируемое уравнение с пиконными решениями”, *ТМФ*, **133**:2 (2002), 170–183.

- [9] V. E. Adler, A. B. Shabat, “Toward a theory of integrable hyperbolic equations of third order”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:39 (2012), 395207, 17 pp.
- [10] A. Degasperis, M. Procesi, “Asymptotic integrability”, *Symmetry and Perturbation Theory* (Rome, 16–22 December, 1998), eds. A. Degasperis, G. Gaeta, World Sci., Singapore, 1999, 23–37.
- [11] H. R. Dullin, G. A. Gottwald, D. D. Holm, “Camassa–Holm, Korteweg–de Vries-5 and other asymptotically equivalent equations for shallow water waves”, *Fluid Dynam. Res.*, **33**:1–2 (2003), 73–95.
- [12] D. D. Holm, M. F. Staley, “Nonlinear balance and exchange of stability of dynamics of solitons, peakons, ramps/cliffs and leftons in a 1 + 1 nonlinear evolutionary PDE”, *Phys. Lett. A*, **308**:5–6 (2003), 437–444.
- [13] D. D. Holm, M. F. Staley, “Wave structure and nonlinear balances in a family of evolutionary PDEs”, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, **2**:3 (2003), 323–380.
- [14] A. N. W. Hone, J. P. Wang, “Prolongation algebras and Hamiltonian operators for peakon equations”, *Inverse Problems*, **19**:1 (2003), 129–145.
- [15] M. C. Nucci, “Painlevé property and pseudopotentials for nonlinear evolution equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**:15 (1989), 2897–2914.
- [16] J. Kang, X. Liu, P. J. Olver, C. Qu, “Liouville correspondences between integrable hierarchies”, *SIGMA*, **13** (2017), 035, 26 pp.
- [17] H. Lundmark, J. Szmigielski, “Multi-peakon solutions of the Degasperis–Procesi equation”, *Inverse Problems*, **19**:6 (2003), 1241–1245.
- [18] V. O. Vakhnenko, E. J. Parkes, “Periodic and solitary-wave solutions of the Degasperis–Procesi equation”, *Chaos Solitons Fractals*, **20**:5 (2004), 1059–1073.
- [19] J. Lenells, “Traveling wave solutions of the Degasperis–Procesi equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **306**:1 (2005), 72–82.
- [20] Y. Matsuno, “Multisoliton solutions of the Degasperis–Procesi equation and their peakon limit”, *Inverse Problems*, **21**:5 (2005), 1553–1570.
- [21] Y. Matsuno, “The N -soliton solution of the Degasperis–Procesi equation”, *Inverse Problems*, **21**:6 (2005), 2085–2101.
- [22] B.-F. Feng, K.-I. Maruno, Y. Ohta, “On the τ -functions of the Degasperis–Procesi equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:4 (2013), 045205, 25 pp.
- [23] B.-F. Feng, K.-I. Maruno, Y. Ohta, “An integrable semi-discrete Degasperis–Procesi equation”, *Nonlinearity*, **30**:6 (2017), 2246–2267.
- [24] S. Stalin, M. Senthilvelan, “Multi-loop soliton solutions and their interaction in the Degasperis–Procesi equation”, *Phys. Scr.*, **86**:1 (2012), 015006, arXiv:1207.4634.
- [25] А. Б. Шабат, В. Э. Адлер, В. Г. Марихин, А. А. Михайлов, В. В. Соколов (ред.), *Энциклопедия интегрируемых систем*, ИТФ, М., 2009.
- [26] A. P. Fordy, J. Gibbons, “Some remarkable nonlinear transformations”, *Phys. Lett. A*, **75**:5 (1980), 325.
- [27] A. P. Fordy, J. Gibbons, “Factorization of operators. I. Miura transformations”, *J. Math. Phys.*, **21**:10 (1980), 2508–2510.
- [28] A. P. Fordy, J. Gibbons, “Factorization of operators. II”, *J. Math. Phys.*, **22**:6 (1981), 1170–1175.
- [29] V. Novikov, “Generalizations of the Camassa–Holm equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:34 (2009), 342002, 14 pp.
- [30] A. N. W. Hone, J. P. Wang, “Integrable peakon equations with cubic nonlinearity”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:37 (2008), 372002, 10 pp.
- [31] W. Fu, F. Nijhoff, “On reductions of the discrete Kadomtsev–Petviashvili-type equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**:50 (2017), 505203, arXiv:1705.04819.