Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Захаров, Асимптотическое решение многомерного уравнения Бюргерса вблизи сингулярности, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 1, 42–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:07:55

© 2018 г.

С. В. Захаров*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА ВБЛИЗИ СИНГУЛЯРНОСТИ

Рассматривается задача Коши для многомерного уравнения Бюргерса с малым параметром диссипации. Методом согласования строится асимптотическое решение вблизи сингулярности, обусловленной структурой векторного поля в начальный момент времени. Использованный в работе подход позволил проследить эволюцию решения с иерархией разномасштабных структур и дать строгое математическое определение асимптотического решения в главном приближении. Обсуждается связь рассматриваемой задачи с различными моделями фундаментальной и прикладной физики.

Ключевые слова: многомерное уравнение Бюргерса, задача Коши, асимптотика.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9479>

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача Коши для многомерного уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \varepsilon \Delta \mathbf{v}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{v}(x, 0, \varepsilon, \mu) = \mu \nabla \Lambda \left(\frac{x_1}{\mu}, \dots, \frac{x_m}{\mu} \right), \quad (2)$$

где $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ – *потенциальное* векторное поле, ε и μ – независимые малые положительные параметры, $\Lambda(s) = \Lambda(s_1, \dots, s_m)$ – непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными частными производными.

Уравнение (1) нашло широкое применение в механике сплошных сред [1]–[3]. Кроме того, при размерности пространства $m = 3$ оно используется в космологической

Работа выполнена при поддержке комплексной программы ФНИ УрО РАН “Аналитические, асимптотические и численные методы построения решений прямых, обратных и сингулярно возмущенных задач математической физики” (проект № 0387-2016-0039).

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия. E-mail: SVZ@imm.uran.ru

модели крупномасштабной структуры Вселенной [4]–[6], а случай малых ε непосредственно связан с возникновением наблюдаемого распределения галактик на расстояниях, исчисляемых миллиардами световых лет.

Основная цель данной работы – построить асимптотическое решение задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow +0$ и $\mu \rightarrow +0$ вблизи сингулярности, обусловленной структурой векторного поля в начальный момент времени. Несмотря на то что типы особых точек решений подробно классифицированы [7] и процессы формирования ударных волн для предельного уравнения первого порядка изучены [8], [9], аналитическое построение асимптотик решений в окрестностях особых точек уже в одномерном случае представляет собой отдельную и иногда довольно сложную задачу [10]–[12]. При этом результаты существенно зависят от соотношения параметров ε и μ [13]. В настоящем исследовании считается, что

$$\frac{\mu}{\varepsilon} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Разумеется, в рассматриваемой здесь задаче асимптотику можно получить из явной формулы, которая находится с помощью преобразования Коула–Хопфа

$$\mathbf{v} = -2\varepsilon \frac{\nabla U}{U}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \varepsilon \Delta U.$$

Несмотря на существование такой формулы для точного решения, в выражении, полученном ниже методом согласования [10], зависимость от малых параметров задачи сразу приобретает ясный смысл, а именно, становятся видны пространственно-временные масштабы, на которых происходит эволюция системы вблизи сингулярности. И хотя здесь речь идет о малых временах, подобные сингулярные события во многом определяют все последующее поведение системы, что видно уже на примере одномерного уравнения [10], [11]. Применительно к моделированию крупномасштабного распределения вещества во Вселенной это соответствует, в частности, формированию низкоразмерных структур на больших временах [4]. Что касается результата, полученного в настоящей работе, его можно использовать также в качестве примера эволюции скейлинговых (пространственно-временных) аномалий, которые появляются в различных областях физики: релятивистской гравитации [14], [15], магнетизме [16], сверхпроводимости [17].

В работе [18] было впервые установлено, что асимптотика решения в одномерном случае при выполнении условия (3) имеет нестандартную структуру вблизи особой точки. А именно, возникают две области со специфическими пространственно-временными масштабами, а не одна, как в других известных задачах для параболического уравнения.

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Поскольку начальный потенциал в условии (2) содержит малый параметр μ , начало координат является в определенном смысле точкой сингулярности. Например, если существует вторая производная $\partial^2 \Lambda(0, \dots, 0)/\partial s_\alpha \partial s_\beta \neq 0$, то

$$\left. \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} \right|_{x=0, t=0} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \Lambda(0, \dots, 0)}{\partial s_\alpha \partial s_\beta} \rightarrow \infty, \quad \mu \rightarrow 0.$$

Для построения приближения, асимптотически удовлетворяющего начальному условию (2), естественно “растянуть” переменные x_α на величину μ^{-1} . Чтобы главная часть уравнения (1) осталась при этом эволюционной, производная по t должна иметь тот же порядок, что и правая часть, т.е. порядок $\varepsilon\mu^{-2}$. Исходя из этих соображений, сделаем замену переменных

$$\sigma_\alpha = \frac{x_\alpha}{\mu}, \quad \omega = \frac{\varepsilon t}{\mu^2}. \quad (4)$$

Тогда уравнение (1) для $h_\alpha(\sigma, \omega, \varepsilon, \mu) \equiv v_\alpha(x, t, \varepsilon, \mu)$ принимает вид¹⁾

$$\frac{\partial h_\alpha}{\partial \omega} - \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial^2 h_\alpha}{\partial \sigma_\beta^2} = -\frac{\mu}{\varepsilon} \sum_{\beta=1}^m h_\beta \frac{\partial h_\alpha}{\partial \sigma_\beta}. \quad (5)$$

Из уравнения (5), начального условия (2) и соотношения (3) получаем линейную предельную задачу

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial \omega} = \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial \sigma_\beta^2}, \quad H_\alpha(\sigma, 0) = \frac{\partial \Lambda(\sigma)}{\partial \sigma_\alpha} \quad (6)$$

с общеизвестным решением

$$H_\alpha(\sigma, \omega) = \frac{1}{(4\pi\omega)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \Lambda(s)}{\partial s_\alpha} e^{-|\sigma-s|^2/4\omega} ds, \quad 1 \leq \alpha \leq m. \quad (7)$$

Для уточнения вида сингулярности далее предполагаем, что выполнено асимптотическое условие

$$\Lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = \Theta(\sigma_1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_n(\sigma_2, \dots, \sigma_m)}{\sigma_1^n}, \quad \sigma_1 \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где $\Theta(\sigma_1)$ – функция Хевисайда, $\Theta(\sigma_1) = 1$ при $\sigma_1 \geq 0$, $\Theta(\sigma_1) = 0$ при $\sigma_1 < 0$,

$$\text{supp } \Lambda_n \subset \{|\sigma_2| + \dots + |\sigma_m| < R_n, R_n = \text{const} > 0\}.$$

Кроме того, пусть

$$\text{supp } \Lambda \subset \{\sigma_1 > 0, |\sigma_2| + \dots + |\sigma_m| < |\sigma_1|^\nu, \nu = \text{const} > 0\}.$$

Тогда из результатов работы [19] вытекает, что при $\omega + |\sigma|^2 \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\frac{1}{(4\pi\omega)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \Lambda(s) e^{-|\sigma-s|^2/4\omega} ds = \omega^{-m/2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{-n/2} [\omega^{1/2} S_n(z) + \ln \omega \Pi_n(z) e^{-|z|^2}],$$

где $z = (z_1, \dots, z_m)$ – автомодельные переменные,

$$z_1 = \frac{\sigma_1}{2\sqrt{\omega}}, \quad \dots, \quad z_m = \frac{\sigma_m}{2\sqrt{\omega}}, \quad (9)$$

¹⁾ На первый взгляд может показаться, что мы получили задачу с одним малым параметром μ/ε . В действительности второй малый параметр скрыт во внутренних переменных (4), и для изучения решения, например, при конечных значениях t все равно придется искать асимптотику при $\omega \rightarrow \infty$.

$\Pi_n(z)$ – полиномы степени n , $S_n(z)$ – гладкие функции медленного роста. В частности,

$$S_0(z) = \frac{2e^{-z_2^2 - \dots - z_m^2}}{(4\pi)^{m/2}} \int_{-z_1}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \Lambda_0(s_2, \dots, s_m) ds_2 \dots ds_m.$$

Отсюда для функций (7) при $2 \leq \alpha \leq m$ получаем асимптотику

$$\begin{aligned} H_\alpha(\sigma, \omega) &= \frac{2e^{-z_2^2 - \dots - z_m^2}}{(4\pi\omega)^{(m-1)/2}} \int_{-z_1}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{\partial \Lambda_0(s_2, \dots, s_m)}{\partial s_\alpha} ds_2 \dots ds_m + \\ &+ O\left(\frac{\ln(\omega + |\sigma|^2)}{(\omega + |\sigma|^2)^{m/2}}\right), \quad \omega + |\sigma|^2 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Имея в виду условие (8), представляется довольно естественным считать, что

$$\frac{\partial \Lambda(\sigma_1, \dots, \sigma_m)}{\partial \sigma_1} = -\sigma_1^{-2} \Lambda_1(\sigma_2, \dots, \sigma_m)[1 + O(\sigma_1^{-1})], \quad \sigma_1 \rightarrow +\infty.$$

Тогда при $\omega + |\sigma|^2 \rightarrow \infty$ получаем формулу

$$\begin{aligned} H_1(\sigma, \omega) &= \frac{1}{(4\pi\omega)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \Lambda(s)}{\partial s_1} e^{-|\sigma - s|^2/4\omega} ds = \\ &= \frac{e^{-|z|^2}}{(4\pi\omega)^{m/2}} \left[\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \Lambda(s)}{\partial s_1} ds + O\left(\frac{1}{\sqrt{\omega + |\sigma|^2}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, мы нашли формальное линейное приближение $\mathbf{v}(x, t, \varepsilon, \mu) \approx \mathbf{H}(x/\mu, \varepsilon t/\mu^2)$.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Опыт исследования одномерного случая [13] показывает, что приближение, полученное в переменных (4), не дает адекватного описания поведения решения при значениях $t \gg \mu^2/\varepsilon$, и возникает необходимость строить приближение в дополнительном внутреннем слое. Заметим, что согласно равенствам (4) автомодельные переменные z_α , определенные формулами (9), выражаются через x , t и ε следующим образом:

$$z_\alpha = \frac{x_\alpha}{2\sqrt{\varepsilon t}}.$$

Поэтому естественно ввести новые внутренние переменные с помощью замены

$$t = \varepsilon \theta, \quad x = \varepsilon \eta, \quad \eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m. \quad (12)$$

При $\theta > 0$ рассмотрим векторное поле $\mathbf{B}$, заданное как решение задачи Коши для уравнения (1) во внутренних переменных (θ, η)

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial \theta} + \sum_{\gamma=1}^m B_\gamma \frac{\partial B_\alpha}{\partial \eta_\gamma} = \sum_{\gamma=1}^m \frac{\partial^2 B_\alpha}{\partial \eta_\gamma^2} \quad (13)$$

с начальными условиями

$$B_1 \Big|_{\theta=0} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^m \delta(\eta) \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \Lambda(s_1, \dots, s_m)}{\partial s_1} ds_1 \dots ds_m, \quad (14)$$

где $\delta(\eta)$ – это обычная дельта-функция, и при $2 \leq \alpha \leq m$

$$B_\alpha|_{\theta=0} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{m-1} \Theta(\eta_1)\delta(\eta_2)\dots\delta(\eta_m) \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{\partial \Lambda_0(s_2, \dots, s_m)}{\partial s_\alpha} ds_2 \dots ds_m, \quad (15)$$

которые определяются из условия согласования асимптотик полей $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$.

Теперь, следуя методу согласования [10], запишем составную асимптотику в главном приближении: $\mathbf{v}(x, t, \varepsilon, \mu) \approx \mathbf{W}(x, t, \varepsilon, \mu)$,

$$\mathbf{W}(x, t, \varepsilon, \mu) \equiv \mathbf{H}\left(\frac{x}{\mu}, \frac{\varepsilon t}{\mu^2}\right) - \mathbf{R}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}, \frac{\varepsilon t}{\mu^2}\right) + \mathbf{B}\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}, \frac{\mu}{\varepsilon}\right), \quad (16)$$

где $H_\alpha(\sigma, \omega)$ определяются по формуле (7),

$$R_1\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}, \frac{\varepsilon t}{\mu^2}\right) = \frac{\mu^m}{(4\pi\varepsilon t)^{m/2}} e^{-|x|^2/4\varepsilon t} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \Lambda(s_1, \dots, s_m)}{\partial s_1} ds_1 \dots ds_m, \quad (17)$$

$$R_\alpha\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}, \frac{\varepsilon t}{\mu^2}\right) = \frac{2\mu^{m-1}}{(4\pi\varepsilon t)^{(m-1)/2}} e^{-(x_2^2 - \dots - x_m^2)/4\varepsilon t} \int_{-x_1/2\sqrt{\varepsilon t}}^{\infty} e^{-u^2} du \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{\partial \Lambda_0(s_2, \dots, s_m)}{\partial s_\alpha} ds_2 \dots ds_m, \quad 2 \leq \alpha \leq m, \quad (18)$$

$B_\alpha(\eta, \theta, \mu/\varepsilon)$ – решения задач (13)–(15).

Обращая оператор теплопроводности в уравнении (13), получаем интегральное соотношение

$$\mathbf{B} = \mathbf{R} - \int_0^\theta \frac{1}{(4\pi(\theta - \theta'))^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left[-\frac{|\eta - \eta'|^2}{4(\theta - \theta')}\right] (\mathbf{B} \nabla_{\eta'}) \mathbf{B} d\eta' d\theta', \quad (19)$$

из которого с учетом условия (3) вытекает, что в правой части формулы (16) при (x, t) из области $\Omega_1 = \{0 < t < 2\mu - |x|^2/\varepsilon\}$ разность $\mathbf{B} - \mathbf{R}$ асимптотически мала; тогда поле $\mathbf{W}(x, t, \varepsilon, \mu)$ согласно уравнениям (5) и (6) должно быть асимптотическим решением задачи. Наоборот, при (x, t) из области

$$\Omega_2 = \{\mu < t + |x|^2/\varepsilon, t > 0, t^2 + |x|^2 < K\varepsilon^2, K = \text{const} > 0\}$$

в выражении (16) разность $\mathbf{H} - \mathbf{R}$ асимптотически мала согласно формулам (10), (11), (17) и (18); тогда поле $\mathbf{W}(x, t, \varepsilon, \mu)$ согласно уравнению (13) должно быть асимптотическим решением. Вид приведенных здесь областей в пространстве независимых переменных (x, t) определяется масштабами внутренних переменных (4) и (12).

Образно говоря, сингулярность, локализованная в очень малой области относительно масштабов времени порядка ε и больше, может при этом являться весьма далеким будущим, если смотреть во внутренних переменных из области Ω_1 (см. рис. 1). Для одномерного случая формула, аналогичная выражению (16), была получена в работе [13], согласно которой при $t \gg \varepsilon$ сингулярность переходит в диссипативную ударную волну.

Итак, использованный выше метод согласования позволил проследить эволюцию решения уравнения Бюргерса с асимптотикой, имеющей различную структуру во

Рис. 1

вложенных друг в друга областях. Количество областей, возможно, даже увеличится при других начальных данных с особым функциональным видом асимптотики или дополнительными параметрами. В связи с этим уместно отметить, что аналогичное явление возникновения иерархии вложенных друг в друга пограничных слоев было ранее обнаружено при изучении геострофических потоков [20] и турбулентной конвекции [21]. Напротив, если в исходной постановке задачи оставить только параметр ε и рассматривать разрывную начальную функцию ($\mu = 0$), то структура асимптотики вблизи сингулярности упрощается: существует уже только одна область Ω_2 (см., например, работу [10] для одномерного случая).

Теперь выясним порядок точности, с которым поле $\mathbf{W}(x, t, \varepsilon, \mu)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса (1) и начальному условию (2), что приводит к строгой формулировке понятия *асимптотического решения* в рассматриваемой задаче. В первую очередь заметим, что из формул (4), (7) и (19) следует, что при $t \rightarrow +0$ поле (16) стремится к начальным данным в правой части условия (2). Далее, при $(x, t) \in \Omega_1$ из уравнения (6) и формул (7), (16), (19) получаем выражение

$$\mathcal{B}\mathbf{W} \equiv \mathbf{W}_t + (\mathbf{W}\nabla)\mathbf{W} - \varepsilon\Delta\mathbf{W} = O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad \frac{\mu}{\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\frac{\mathcal{B}\mathbf{W}}{|\mathbf{W}_t| + |(\mathbf{W}\nabla)\mathbf{W}| + |\varepsilon\Delta\mathbf{W}|} = O\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right), \quad \frac{\mu}{\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

поскольку в Ω_1 знаменатель имеет порядок $\varepsilon\mu^{-2}$ согласно формулам (4) и (7). Используя уравнения (6) и (13), с учетом соотношений (17) и (18) нетрудно показать, что

$$\mathcal{B}\mathbf{W} = ((\mathbf{H} - \mathbf{R})\nabla)(\mathbf{H} - \mathbf{R}) + ((\mathbf{H} - \mathbf{R})\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\nabla)(\mathbf{H} - \mathbf{R}).$$

Отсюда при $(x, t) \in \Omega_2$ с помощью асимптотик (10) и (11) и простых оценок производных (для всех $1 \leq \alpha \leq m$ и $1 \leq \beta \leq m$)

$$\frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \frac{\partial(H_\alpha - R_\alpha)}{\partial x_\beta} = O\left(\frac{\ln(\omega + |\sigma|^2)}{\sqrt{\varepsilon\mu}(\omega + |\sigma|^2)^{m/2}}\right), \quad \omega + |\sigma|^2 > \frac{\varepsilon}{\mu},$$

получаем равенство

$$\mathcal{B}\mathbf{W} = O\left(\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{m/2} \frac{\ln \mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right), \quad \frac{\mu}{\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Кроме того, в Ω_2 величина $|\mathbf{W}_t| + |(\mathbf{W}\nabla)\mathbf{W}| + |\varepsilon\Delta\mathbf{W}|$ имеет порядок ε^{-1} , что вытекает из тех же асимптотик (10), (11) и формул (17)–(19).

Таким образом, приходим к главному результату настоящей работы. *Векторное поле, определенное формулой (16), является асимптотическим решением задачи (1), (2) при $t^2 + |x|^2 < K\varepsilon^2$, $\mu/\varepsilon \rightarrow +0$ и $\varepsilon \rightarrow +0$ в следующем смысле:*

$$\frac{\mathbf{W}_t + (\mathbf{W}\nabla)\mathbf{W} - \varepsilon\Delta\mathbf{W}}{|\mathbf{W}_t| + |(\mathbf{W}\nabla)\mathbf{W}| + |\varepsilon\Delta\mathbf{W}|} = O\left(\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{(m-1)/2} \ln \mu\right),$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \mathbf{W}(x, t, \varepsilon, \mu) = \mu \nabla \Lambda\left(\frac{x_1}{\mu}, \dots, \frac{x_m}{\mu}\right).$$

Следует подчеркнуть, что, поскольку в данной работе построено только главное приближение, использование стандартного определения асимптотического решения [10] через оценку значения оператора теряет смысл, даже если бы эта оценка оказалась мала. Поэтому довольно естественным было сравнение значения оператора и абсолютных величин его отдельных слагаемых, выяснив тем самым относительный порядок малости. *Omnia relativa sunt.*

Список литературы

- [1] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977.
- [2] О. В. Руденко, С. И. Солуян, *Теоретические основы нелинейной акустики*, Наука, М., 1975.
- [3] С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко, А. И. Саичев, *Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике*, Физматлит, М., 2008.
- [4] F. Bernardeau, P. Valageas, “Merging and fragmentation in the Burgers dynamics”, *Phys. Rev. E*, **82**:1 (2010), 016311, 20 pp., arXiv: 0912.3603.
- [5] С. Н. Гурбатов, А. И. Саичев, С. Ф. Шандарин, “Крупномасштабная структура Вселенной. Приближение Зельдовича и модель слипания”, *УФН*, **182**:3 (2012), 233–261, arXiv: astro-ph/9311075.
- [6] A. L. Melott, S. F. Shandarin, D. H. Weinberg, “A test of the adhesion approximation for gravitational clustering”, *Astrophys. J.*, **428**:1 (1994), 28–34, arXiv: astro-ph/9311075.
- [7] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, Фазис, М., 1996.
- [8] И. А. Богаевский, “Перестройки особенностей функций минимума и бифуркации ударных волн уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью”, *Алгебра и анализ*, **1**:4 (1989), 1–16.
- [9] И. А. Богаевский, “Разрывные градиентные дифференциальные уравнения и траектории в вариационном исчислении”, *Матем. сб.*, **197**:12 (2006), 11–42.
- [10] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [11] С. В. Захаров, “Сингулярные асимптотики в задаче Коши для параболического уравнения с малым параметром”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **21**:1 (2015), 97–104.
- [12] С. В. Захаров, “Особенности А и В типов в асимптотическом анализе решений параболического уравнения”, *Функц. анализ и его прил.*, **49**:4 (2015), 82–85.

- [13] С. В. Захаров, “Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с большим начальным градиентом и малой вязкостью”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:4 (2010), 699–706.
- [14] T. Hollowood, J. L. Miramontes, J. S. Guillén, “Generalized integrability and two-dimensional gravitation”, *ТМФ*, **95**:2 (1993), 258–275.
- [15] J. Schnittger, U. Ellwanger, “Nonperturbative conditions for local Weyl invariance on a curved world sheet”, *ТМФ*, **95**:2 (1993), 361–384.
- [16] S. Kachru, X. Liu, M. Mulligan, “Gravity duals of Lifshitz-like fixed points”, *Phys. Rev. D*, **78**:10 (2008), 106005, 8 pp., arXiv:0808.1725.
- [17] I. Arav, S. Chapman, Y. Oz, “Lifshitz scale anomalies”, *JHEP*, **02** (2015), 078, 58 pp., arXiv:1410.5831.
- [18] С. В. Захаров, “Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с двумя малыми параметрами”, *Докл. РАН*, **422**:6 (2008), 733–734.
- [19] С. В. Захаров, “Асимптотическое вычисление распределения тепла на плоскости”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **22**, № 1, 2016, 93–99.
- [20] K. Stewartson, “On almost rigid rotations. Part 2”, *J. Fluid Mech.*, **26** (1966), 131–144.
- [21] F. H. Busse, “On Howard’s upper bound for heat transport by turbulent convection”, *J. Fluid Mech.*, **37**:3 (1969), 457–477.

Поступила в редакцию 9.10.2017,
после доработки 23.01.2018