Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Дурдиев, А. А. Рахмонов, Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 3, 491–506

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:01:57

© 2018 г.

Д. К. Дурдиев*, А. А. Рахмонов*

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ SH-ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ: ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Рассмотрена система интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде. Обратная задача состоит в восстановлении ядра (функции памяти) интегрального слагаемого в уравнении. Эта задача сведена к системе интегральных уравнений, к которой применен принцип сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций со взвешенной нормой. Доказано, что существует единственное глобальное решение обратной задачи, и получены оценки его устойчивости.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, ядро, гиперболическое уравнение, дельта-функция Дирака, параметр Ламе, глобальная разрешимость, взвешенная норма.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9480>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных гиперболических уравнений

$$\rho_s \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \Sigma(z, t) - \chi \rho_\ell^2 \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial t} \right), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \chi \rho_\ell (U - V), \quad x, z \in \mathbb{R}, \quad x > 0, \quad z > 0, \quad (1.2)$$

с начальными и граничным условиями

$$U|_{t \leq 0} = \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t \leq 0} \equiv 0, \quad V|_{t \leq 0} \equiv 0, \quad \Sigma(+0, t) = \delta'(t). \quad (1.3)$$

*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan.
E-mail: durdiev65@mail.ru, araxmonov@mail.ru

Здесь $U(z, t)$ – скорость упругого пористого тела с постоянной парциальной плотностью ρ_s и $V(z, t)$ – скорость жидкости с постоянной плотностью ρ_ℓ , χ – коэффициент трения между компонентами, который всюду в настоящей статье полагается постоянным и положительным, $\delta'(t)$ – производная дельта-функции Дирака. Напряжение $\Sigma(z, t)$ связано с $U(z, t)$ формулой

$$\Sigma(z, t) = \mu(z) \frac{\partial U}{\partial z} + \int_0^t k(t - \tau) \mu(z) \frac{\partial U}{\partial z}(z, \tau) d\tau, \quad (1.4)$$

где $\mu(z) > 0$ есть параметр Ламе, $k(t)$ – функция, характеризующая вязкость среды.

Задача определения U и V из уравнений (1.1)–(1.4) при заданных ρ_s , ρ_ℓ , χ , $\mu(z)$ и $k(t)$ называется прямой задачей для вязкоупругой пористой среды. Сформулируем обратную задачу: требуется найти ядро $k(t)$, $t > 0$, входящее в уравнение (1.1) посредством формулы (1.4), если о решении прямой задачи известно следующее:

$$U|_{z=0} = f(t), \quad (1.5)$$

где $f(t)$ – заданная функция.

Пористая среда, состоящая из деформируемого вязкоупругого вещества в жидкости, является достаточно реалистичной моделью, позволяющей объяснить свойства твердых пород, наблюдаемые в сейсмических экспериментах. В последнее время математическому моделированию распространения волн в жидкостях, пропитывающих пористую среду, уделяется значительное внимание благодаря широкому практическому применению таких моделей при решении задач геофизики, биомеханики, нефтяного дела и т. д. Задачи, в которых необходимо учитывать пористость среды и насыщение среды жидкостью, возникают, в частности, при геофизическом поиске нефтяных слоев и при выборе параметров волнового воздействия на нефтегазовые месторождения с целью определения возможных объемов добычи.

Уравнения (1.1), (1.2) и (1.4) описывают распространение упругих (поперечных) SH-волн в пористой среде с памятью в одномерном (в смысле пространственных переменных) случае. Прямая и обратная динамическая задача для таких уравнений при $k(t) \equiv 0$ изучалась в работах [1], [2]. Заметим, что в отсутствие пористости (при $\rho_\ell = 0$, $V(z, t) = 0$) обратная задача (1.1)–(1.5) совершенно аналогична задаче, рассматривавшейся в работе [3]. В монографии [4] исследовались обратные задачи определения плотности и модулей упругости из системы уравнений упругости для изотропной и анизотропной среды.

Обратные задачи для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений изучались многими авторами, отметим наиболее близкие к теме настоящей статьи работы [5]–[9]. В работе [5] были рассмотрены прямая и обратная задачи для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным членом типа свертки по временной переменной и одномерной функцией памяти среды. С использованием метода Фурье для решения прямой задачи обратная задача была сведена к системе интегральных уравнений вольтеровского типа относительно неизвестных функций от времени. В работах [6]–[8] (см. также ссылки в них) изучались задачи определения многомерного ядра уравнений вязкоупругости. В статьях [3] и [9] рассматривалась задача восстановления одномерного ядра уравнений вязкоупругости в ограниченной и неограниченной областях соответственно и были доказаны теоремы об однозначной разрешимости этих задач в классе непрерывных функций со

взвешенной нормой. Основная особенность, присущая работам [6]–[9] и настоящей работе, заключается в использовании в них источника, локализованного на границе рассматриваемой области пространства; это источник инициирует физический процесс распространения волны. Эта особенность существенно повышает прикладное значение исследования.

Введем новую переменную x с помощью формул

$$x = \psi(z) := \int_0^z \frac{d\xi}{c_t(\xi)}, \quad c_t(z) := \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho_s}}. \quad (1.6)$$

Обозначим через $\psi^{-1}(x)$ функцию, обратную к $\psi(z)$, и положим

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x, t) &:= U(\psi^{-1}(x), t), \quad \tilde{V}(x, t) := V(\psi^{-1}(x), t), \\ \frac{\chi \rho_\ell^2}{\rho_s} &= \lambda, \quad \sigma(x) := \sqrt{\rho_s \mu(x)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Сформулируем основной результат настоящей работы о глобальной однозначной разрешимости обратной задачи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть число $T > 0$ произвольно, но фиксировано, а функция $f(t)$ имеет вид (здесь и далее $\sigma(0)$ и пр. понимаются как пределы при $x \rightarrow +0$)

$$f(t) = \alpha(0)\delta(t) + \theta(t)f_0(t), \quad \alpha(0) = -\frac{1}{\sigma(0)}, \quad (1.8)$$

где $f_0(t) \in C^2[0, T]$ и $\theta(t)$ – функция Хевисайда. Пусть $\mu(z) \in C^2[0, \varphi^{-1}(T)]$. Тогда обратная задача (1.1)–(1.5) имеет единственное решение в классе $k(t) \in C^2[0, T]$.

Пусть $M(h_0)$ – множество функций $k(t) \in C^2[0, T]$, удовлетворяющих при всех значениях $t \in [0, T]$ неравенству $\|k(t)\|_{C^2[0, T]} \leq h_0$ с фиксированной положительной постоянной h_0 (заданной в формуле (3.15) ниже).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k^1(t) \in M(h_0)$ и $k^2(t) \in M(h_0)$ суть решения обратной задачи (1.1)–(1.5) с данными $\{\mu^1(\psi^{-1}(x)), f_0^1(t)\}$ и $\{\mu^2(\psi^{-1}(x)), f_0^2(t)\}$ соответственно. Тогда существует такое положительное число $C = C(h_0, h_{00}, T)$, где

$$h_{00} = \max\{\|\mu^1(x)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|f_0^1(t)\|_{C^2[0, T]}, \|\mu^2(x)\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]}, \|f_0^2(t)\|_{C^2[0, T]}\},$$

что имеет место следующая оценка устойчивости решения:

$$\|k^1(t) - k^2(t)\|_{C^2[0, T]} \leq C[\|\mu^1 - \mu^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \|f_0^1 - f_0^2\|_{C^2[0, T]}]. \quad (1.9)$$

В терминах функций $\tilde{U}(x, t)$, $\tilde{V}(x, t)$ и переменной x уравнения (1.1)–(1.5) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\tilde{U}(x, t) + \int_0^t k(t - \tau) \tilde{U}(x, \tau) d\tau \right] - \lambda \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{U} - \tilde{V}), \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = \chi \rho_\ell (\tilde{U} - \tilde{V}), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1.11)$$

с начальными и граничными условиями

$$\tilde{U}|_{t \leq 0} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} \Big|_{t \leq 0} \equiv 0, \quad \tilde{V}|_{t \leq 0} \equiv 0, \quad (1.12)$$

$$\left[\sigma(x) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \int_0^t k(t-\tau) \sigma(x) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x}(x, \tau) d\tau \right]_{x=+0} = \delta'(t), \quad (1.13)$$

$$\tilde{U}|_{x=+0} = f(t), \quad t > 0. \quad (1.14)$$

Преобразуем интегро-дифференциальное уравнение (1.10) так, чтобы, во-первых, оно не содержало производных функции $\tilde{U}$ по x под интегралом, и, во-вторых, чтобы коэффициенты при производных $\tilde{U}_x$ и $\tilde{U}_t$ в слагаемых вне интеграла были равны нулю. Эти требования можно удовлетворить, введя новую функцию

$$W(x, t) = \left[\tilde{U}(x, t) + \int_0^t k(t-\tau) \tilde{U}(x, \tau) d\tau \right] e^{(k(0)-\lambda)t/2} \sqrt{\frac{\sigma(x)}{\sigma(0)}}. \quad (1.15)$$

Как нетрудно проверить прямыми вычислениями, функция $\tilde{U}$ выражается через W следующим образом:

$$\tilde{U}(x, t) = \left[e^{(k(0)-\lambda)t/2} W(x, t) + \int_0^t r(t-\tau) e^{(k(0)-\lambda)\tau/2} W(x, \tau) d\tau \right] \sqrt{\frac{\sigma(0)}{\sigma(x)}},$$

где

$$r(t) = -k(t) - \int_0^t k(t-\tau) r(\tau) d\tau. \quad (1.16)$$

В новых функциях $W(x, t)$ и $r(t)$ задача (1.10)–(1.14) записывается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + H(x)W(x, t) - \int_0^t h(t-\tau)W(x, \tau) d\tau - \\ &\quad - \int_0^t q(t-\tau)W(x, \tau) d\tau - \int_0^t g(t-\tau)W(x, \tau) d\tau - \omega(x, t)\tilde{V}(x, t), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, t) &= \frac{\sqrt{\sigma(0)}\chi\rho_\ell}{\sqrt{\sigma(x)}} \int_0^t e^{\chi\rho_\ell(\tau-t)} \times \\ &\quad \times \left[e^{(k(0)-\lambda)\tau/2} W(x, \tau) + \int_0^\tau r(\tau-s) e^{(k(0)-\lambda)s/2} W(x, s) ds \right] d\tau, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$W|_{t \leq 0} \equiv 0, \quad W|_{x=+0} = f_0(t) + \int_0^t k_0(t-\tau)f_0(\tau) d\tau, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{x=+0} = \frac{1}{\sigma(0)} \delta'(t) - \frac{r(0)}{2\sigma(0)} \delta(t) + \frac{1}{2} \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} W(0, t), \quad (1.20)$$

где

$$\begin{aligned} f_0(t) &:= e^{(r(0)+\lambda)t/2} f(t), & k_0(t) &:= e^{(r(0)+\lambda)t/2} k(t), \\ H(x) &:= k'(0) - \frac{3}{4}(k(0))^2 + \frac{\lambda k(0)}{2} - \frac{3}{4}\lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{\sigma''(x)}{\sigma(x)} + \frac{1}{4} \left(\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \right)^2 + \lambda \chi \rho_\ell, \\ h(t) &:= e^{(r(0)+\lambda)t/2} r''(t), & q(t) &:= -\lambda e^{(r(0)+\lambda)t/2} r'(t), \\ g(t) &:= -\lambda \chi \rho_\ell e^{(r(0)+\lambda)t/2} r(t), & \omega(x, t) &:= \lambda \chi \rho_\ell \sqrt{\frac{\sigma(x)}{\sigma(0)}} e^{(r(0)+\lambda)t/2}. \end{aligned}$$

В условии (1.20) мы использовали равенство $k(0) = -r(0)$, вытекающее из (1.16).

Из теории гиперболических уравнений известно, что функция $W(x, t)$ как решение прямой задачи (1.17)–(1.20) удовлетворяет равенству $W \equiv 0$ при $t < x$, $x > 0$ и вблизи характеристики $t = x$ имеет следующую структуру:

$$W(x, t) = \alpha(x)\delta(t - x) + \theta(t - x)p(x, t), \quad (1.21)$$

где $p(x, t)$ – регулярная функция. Для разрешимости обратной задачи в соответствии с представлением (1.21) функция $f(t)$ должна иметь вид

$$f(t) = \alpha(0)\delta(t) + \theta(t)f_0(t), \quad (1.22)$$

где $f_0(t)$ – заданная функция.

Пусть $\beta(x) := p(x, x + 0)$. Подставляя функцию (1.21) в уравнения (1.17)–(1.20) и используя метод выделения особенностей [10], находим, что

$$\begin{aligned} 2\alpha'(x) &= 0, & \alpha(0) &= -\frac{1}{\sigma(0)}, & -\alpha''(x) + 2\beta'(x) - H(x)\alpha(x) &= 0, \\ \beta(0) &= \alpha'(0) + \frac{r(0)}{2\sigma(0)} + \frac{\sigma'(0)}{2\sigma^2(0)}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Решим эти обыкновенные дифференциальные уравнения, получим

$$\alpha(x) = -\frac{1}{\sigma(0)}, \quad \beta(x) = \beta(0) - \frac{1}{2\sigma(0)} \int_0^x H(\xi) d\xi. \quad (1.24)$$

Из вышеперечисленного следует, что функция $p(x, t)$ в области $D := \{(x, t) : t > x > 0\}$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + H(x)p(x, t) - \alpha(0)(h(t - x) + q(t - x) + g(t - x)) - \\ &- \int_x^t (h(t - \tau) + q(t - \tau) + g(t - \tau))p(x, \tau) d\tau - \omega(x, t)\tilde{V}(x, t), \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, t) &= g_1(x) e^{\chi \rho_\ell (x-t)} + g_2(x) \int_x^t e^{\chi \rho_\ell (\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)\tau/2} p(x, \tau) d\tau + \\ &+ g_1(x) \int_0^t r(\tau - x) e^{\chi \rho_\ell (\tau-t)} d\tau + \\ &+ g_2(x) \int_0^t \int_x^\tau r(\tau - s) e^{\chi \rho_\ell (\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)s/2} p(x, s) ds d\tau, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$p|_{t=x+0} = \beta(x), \quad (1.27)$$

$$p|_{x=+0} = \tilde{f}_0(t) + \alpha(0)k_0(t) + \int_0^t k_0(t-\tau)\tilde{f}_0(\tau) d\tau, \quad (1.28)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=+0} = \frac{\sigma'(0)}{2\sigma(0)} p(+0, t), \quad (1.29)$$

где

$$g_1(x) = \frac{\sqrt{\sigma(0)}\alpha(0)\chi\rho_\ell}{\sqrt{\sigma(x)}} e^{(k(0)-\lambda)x/2}, \quad g_2(x) = \frac{\sqrt{\sigma(0)}\chi\rho_\ell}{\sqrt{\sigma(x)}}, \quad \tilde{f}_0(t) := e^{(r(0)+\lambda)t/2} f_0(t).$$

Наложим условие непрерывности функций $p(x, t)$, $\frac{\partial p}{\partial x}(x, t)$ при $x = t = 0$. Из соотношений (1.27)–(1.29) нетрудно выразить $r(0)$, $r'(0)$ через известные данные:

$$r(0) = \lambda + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} - 2\sigma(0)\tilde{f}_0(0), \quad r'(0) = -\sigma(0)\tilde{f}_0'(0) + \left(\sigma(0)\tilde{f}_0(0) + \frac{1}{2}r(0) \right) r(0).$$

Для получения $r'(0)$ мы использовали равенство $k'(0) = -r'(0) + r^2(0)$, которое вытекает из (1.16). Далее мы считаем, что в $H(x)$ вместо $r(0)$, $r'(0)$ подставлены их значения.

2. СВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ К ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq t \leq T - x\}$.

ЛЕММА 1. При выполнении условий теоремы 1 система уравнений (1.25)–(1.29) для $(x, t) \in D_T$ эквивалентна следующей задаче: требуется найти функции $p(x, t)$, $\frac{\partial p}{\partial t}(x, t)$, $h(t)$, $g(t)$, $q(t)$, $k_0(t)$, $k_0'(t)$, $k_0''(t)$, $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}(x, t)$, $\tilde{V}(x, t)$ из системы уравнений

$$p(x, t) = \beta(x) + \int_x^t \frac{\partial p}{\partial \tau}(x, \tau) d\tau, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = & \frac{1}{2} \left(\tilde{f}_0(t-x) - \frac{1}{\sigma(0)} k_0'(t-x) + k_0(0)\tilde{f}_0(t-x) - \frac{\sigma'(0)}{2\sigma(0)} p(0, t-x) \right) + \\ & + \frac{\beta'}{2} \left(\frac{x+t}{2} \right) + \frac{(h(t-x) + q(t-x) + g(t-x))x}{2\sigma(0)} + \frac{1}{2} \int_0^{t-x} k_0'(t-x-\tau)\tilde{f}_0(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^x \left[H(\xi)p(\xi, \xi+t-x) - \int_0^{t-x} (h(\tau) + q(\tau) + g(\tau))p(\xi, t-x+\xi-\tau) d\tau \right] d\xi - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^x \omega(\xi, \xi+t-x)\tilde{V}(\xi, \xi+t-x) d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[H(\xi)p(\xi, x+t-\xi) + \frac{h(x+t-2\xi) + q(x+t-2\xi) + g(x+t-2\xi)}{\sigma(0)} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^{t+x-2\xi} (h(\tau) + q(\tau) + g(\tau))p(\xi, x+t-\xi-\tau) d\tau - \right. \\ & \quad \left. - \omega(\xi, x+t-\xi)\tilde{V}(\xi, x+t-\xi) \right] d\xi, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(x, t) = & g_1(x) e^{\chi \rho_\ell(x-t)} + \\
& + g_2(x) \int_x^t e^{\chi \rho_\ell(\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)\tau/2} p(x, \tau) d\tau + g_1(x) \int_0^t e^{\chi \rho_\ell(\tau-t)} r(\tau-x) d\tau + \\
& + g_2(x) \int_0^t \int_x^\tau e^{\chi \rho_\ell(\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)s/2} r(\tau-s) p(x, s) ds d\tau,
\end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}(x, t) = & -g_1(x) \chi \rho_\ell e^{\chi \rho_\ell(x-t)} + g_2(x) e^{(k(0)-\lambda)t/2} p(x, t) - \\
& - g_2(x) \chi \rho_\ell \int_x^t \chi e^{\rho_\ell(\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)\tau/2} p(x, \tau) d\tau - \frac{g_1(x)}{\lambda \chi \rho_\ell} e^{(k(0)-\lambda)(t-x)/2} g(t-x) - \\
& - g_1(x) \chi \rho_\ell \int_0^t e^{\chi \rho_\ell(\tau-t)} r(\tau-x) d\tau + g_2(x) \int_x^t e^{(k(0)-\lambda)s/2} r(t-s) p(x, s) ds - \\
& - g_2(x) \chi \rho_\ell \int_0^t \int_x^\tau e^{\chi \rho_\ell(\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)s/2} r(\tau-s) p(x, s) ds d\tau.
\end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
h(t) = & 2\sigma(0) \left[\tilde{f}_0'(t) - \frac{1}{\sigma(0)} k_0''(t) + k_0(0) \tilde{f}_0'(t) + k_0'(0) \tilde{f}_0(t) + \frac{\sigma'(0)}{2\sigma(0)} \frac{\partial}{\partial t} p(0, t) \right] - \\
& - q(t) - g(t) - \sigma(0) [\beta''(t/2) + 2H(t/2)\beta(t/2) - 2\omega(t/2, t/2)\tilde{V}(t/2, t/2)] - \\
& - \frac{2}{\alpha(0)} \int_0^t k_0''(t-\tau) \tilde{f}_0(\tau) d\tau - \\
& - 2\sigma(0) \int_0^{t/2} \left[H(\xi) \frac{\partial}{\partial t} p(\xi, t-\xi) - (h(t-2\xi) + q(t-2\xi) + g(t-2\xi))\beta(\xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t-2\xi} (h(\tau) + q(\tau) + g(\tau)) \frac{\partial}{\partial t} p(\xi, t-\xi-\tau) d\tau - \right. \\
& \quad \left. - \tilde{V}(\xi, t-\xi) \frac{\partial}{\partial t} \omega(\xi, t-\xi) - \omega(\xi, t-\xi) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{V}(\xi, t-\xi) \right] d\xi,
\end{aligned} \quad (2.5)$$

$$k_0(t) = k(0) + \left(-\frac{k^2(0)}{2} + \frac{\lambda k^2(0)}{2} + k'(0) \right) t + \int_0^t (t-\tau) k_0''(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

$$k_0'(t) = -\frac{k^2(0)}{2} + \frac{\lambda k^2(0)}{2} + k'(0) + \int_0^t k_0''(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

$$k_0''(t) = -h(t) + q(t) - \left[r'(0) - \frac{\lambda^2 + r^2(0)}{4} \right] k_0(t) - \int_0^t (h(t-\tau) - g(t-\tau)) k_0(\tau) d\tau, \quad (2.8)$$

$$g(t) = \lambda \chi \rho_\ell k_0(t) - \int_0^t g(t-\tau) k_0(\tau) d\tau, \quad (2.9)$$

$$q(t) = -\lambda r'(0) + \frac{r(0) + \lambda}{2} \int_0^t q(\tau) d\tau - \lambda \int_0^t h(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенства

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) p = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) p,$$

проинтегрируем уравнение (1.25) вдоль соответствующих характеристик дифференциального оператора первого порядка при $(x, t) \in D_T$. Интегрирование дифференциального оператора $\partial/\partial t - \partial/\partial x$ вдоль характеристик мы выполним от точки (x, t) до точки $((x+t)/2, (x+t)/2)$ на плоскости переменных (ξ, τ) . Применим равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)p\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right) = \beta'\left(\frac{x+t}{2}\right),$$

которое выводится из уравнения (1.27) дифференцированием его по x , и получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)p(x, t) &= \beta'\left(\frac{x+t}{2}\right) + \\ &+ \int_x^{(x+t)/2} \left[H(\xi)p(\xi, x+t-\xi) - \alpha(0)(h(x+t-2\xi) + q(x+t-2\xi) + g(x+t-2\xi)) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t+x-2\xi} (h(\tau) + q(\tau) + g(\tau))p(\xi, x+t-\xi-\tau) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \omega(\xi, x+t-\xi)\tilde{V}(\xi, x+t-\xi) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Интегрирование дифференциального оператора $\partial/\partial t + \partial/\partial x$ мы выполним от точки $(0, t-x)$ до точки (x, t) . Используя условия (1.28), (1.29), находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)p(x, t) &= \tilde{f}'_0(t-x) + \alpha(0)k'_0(t-x) + k_0(0)\tilde{f}_0(t-x) - \frac{\sigma'(0)}{2\sigma(0)}p(0, t-x) - \\ &- \alpha(0)(h(t-x) + q(t-x) + g(t-x))x + \int_0^{t-x} k'_0(t-x-\tau)\tilde{f}_0(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^x \left[H(\xi)p(\xi, \xi+t-x) - \int_0^{t-x} (h(\tau) + q(\tau) + g(\tau))p(\xi, t-x+\xi-\tau) d\tau \right] d\xi - \\ &- \int_0^x \omega(\xi, \xi+t-x)\tilde{V}(\xi, \xi+t-x) d\xi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из соотношений (2.11) и (2.12) нетрудно вывести уравнение (2.2). Положим $x = 0$ в (2.11) и, используя условия (1.28), (1.29), получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}'_0(t) - \frac{1}{\sigma(0)}k'_0(t) + k_0(0)\tilde{f}_0(t) + \int_0^t k'_0(t-\tau)\tilde{f}_0(\tau) d\tau + \frac{\sigma'(0)}{2\sigma(0)}p(0, t) &= \\ &= \beta'(t/2) + \frac{1}{2\sigma(0)} \int_0^t (h(\tau) + q(\tau) + g(\tau)) d\tau + \\ &+ \int_0^{t/2} \left[H(\xi)p(\xi, t-\xi) - \int_0^{t-2\xi} (h(\tau) + q(\tau) + g(\tau))p(\xi, t-\xi-\tau) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \omega(\xi, t-\xi)\tilde{V}(\xi, t-\xi) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Продифференцируем это уравнение и после некоторых преобразований получим уравнение (2.5).

С учетом равенства (1.16) имеем

$$\begin{aligned} g(t) &= \lambda \chi \rho_\ell e^{(r(0)+\lambda)t/2} k(t) + \lambda \chi \rho_\ell \int_0^t e^{(r(0)+\lambda)(t-\tau)/2} e^{(r(0)+\lambda)\tau/2} r(t-\tau) k(\tau) d\tau = \\ &= \lambda \chi \rho_\ell k_0(t) - \int_0^t g(t-\tau) k_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Чтобы вывести уравнение (2.10), сначала продифференцируем функцию $q(t)$, а затем проинтегрируем ее, получим

$$\begin{aligned} q(t) &= -\lambda e^{(r(0)+\lambda)t/2} r'(t), \quad q'(t) = -\lambda h(t) + \frac{r(0)+\lambda}{2} q(t), \\ q(t) &= q(0) + \frac{r(0)+\lambda}{2} \int_0^t q(\tau) d\tau - \lambda \int_0^t h(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Из последнего равенства вытекает уравнение (2.10). Остальные уравнения в формулировке леммы записаны для замыкания системы. Их можно получить из определения функций $k_0(t)$, $g(t)$, $q(t)$ и уравнения (1.16). При выполнении условий теоремы 1 эквивалентность задач (2.1)–(2.10) и (1.22)–(1.28) выводится обычным образом [3].

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Введем следующие обозначения:

$$r_{00} = \frac{r^2(0)}{4} + \frac{\lambda^2}{4} - r'(0), \quad k_{00} = -\frac{k^2(0)}{2} + \frac{\lambda k^2(0)}{2} + k'(0).$$

Представим систему (2.1)–(2.8) в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi, \tag{3.1}$$

где $\varphi = [\varphi_i(x, t)]_{i=1}^{10}$ – вектор-функция с компонентами

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, t) &= p(x, t), \quad \varphi_3(x, t) = \tilde{V}(x, t), \\ \varphi_2(x, t) &= \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2\sigma(0)} k'_0(t-x) - \frac{\sigma'(0)}{4\sigma^2(0)} k_0(t-x) - \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma(0)} (h(t-x) + q(t-x) + g(t-x))x, \\ \varphi_4(x, t) &= \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t}(x, t) - g_2(x) e^{(k(0)-\lambda)t/2} p(x, t) + \frac{g_1(x)}{\lambda \chi \rho_\ell} e^{(k(0)-\lambda)(t-x)/2} g(t-x), \\ \varphi_5(x, t) &= h(t) + 2k''_0(t) + \frac{\sigma'(0)}{2\sigma(0)} k'_0(t) + q(t) + g(t) - 2\sigma(0)\omega(t/2, t/2) \tilde{V}(t/2, t/2), \\ \varphi_6(x, t) &= k_0(t), \quad \varphi_7(x, t) = k'_0(t), \quad \varphi_8(x, t) = k''_0(t) + h(t) - q(t) - r_{00}k_0(t), \\ \varphi_9(x, t) &= g(t) - \lambda \chi \rho_\ell k_0(t), \quad \varphi_{10}(x, t) = q(t), \end{aligned}$$

а оператор $A = [A_i]_{i=1}^{10}$ действует на вектор-функции с компонентами $\varphi_i \in C[D_T]$ и в соответствии с уравнениями (2.1)–(2.10) задается равенствами

$$\begin{aligned} A_1\varphi = & \varphi_{01} + \\ & + \int_x^t \left\{ \varphi_2(x, \tau) - \frac{1}{2\sigma(0)} \varphi_7(\tau - x) + \frac{\sigma'(0)}{4\sigma^2(0)} \varphi_6(\tau - x) + \right. \\ & + \frac{x}{2\sigma(0)} \left[2\varphi_8(\tau - x) - \varphi_5(\tau - x) + 4\varphi_{10}(\tau - x) + \right. \\ & + 2\varphi_9(\tau - x) + 2(r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell)\varphi_6(\tau - x) + \\ & \left. \left. + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(\tau - x) - 2\sigma(0)\omega\left(\frac{\tau - x}{2}, \frac{\tau - x}{2}\right)\varphi_3\left(\frac{\tau - x}{2}, \frac{\tau - x}{2}\right) \right] \right\} d\tau, \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2\varphi = & \varphi_{02} + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{t-x} \left(-\frac{\sigma'(0)}{2\sigma(0)} \varphi_6(t - x - \tau) + \varphi_7(t - x - \tau) \right) \tilde{f}_0(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^x \left\{ H(\xi)\varphi_1(\xi, t - x + \xi) - \right. \\ & - \int_0^{t-x} \left[2\varphi_8(\tau) - \varphi_5(\tau) + 4\varphi_{10}(\tau) + 2\varphi_9(\tau) + 2(r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell)\varphi_6(\tau) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(\tau) - 2\sigma(0)\omega\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)\varphi_3\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \right] \varphi_1(\xi, t - x + \xi - \tau) d\tau \right\} d\xi - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t \omega(\xi, \xi + t - x) \varphi_3(\xi, \xi + t - x) d\xi + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left\{ H(\xi)\varphi_1(\xi, t + x - \xi) + \right. \\ & + \frac{1}{\sigma(0)} \left[2\varphi_8(x + t - 2\xi) - \varphi_5(x + t - 2\xi) + 4\varphi_{10}(x + t - 2\xi) + 2\varphi_9(x + t - 2\xi) + \right. \\ & + 2(r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell)\varphi_6(x + t - 2\xi) + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(x + t - 2\xi) - \\ & \left. \left. - 2\sigma(0)\omega\left(\frac{x + t - 2\xi}{2}, \frac{x + t - 2\xi}{2}\right)\varphi_3\left(\frac{x + t - 2\xi}{2}, \frac{x + t - 2\xi}{2}\right) \right] - \right. \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{t+x-2\xi} \left[2\varphi_8(\tau) - \varphi_5(\tau) + 4\varphi_{10}(\tau) + 2\varphi_9(\tau) + 2(r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell)\varphi_6(\tau) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(\tau) - 2\sigma(0)\omega\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right)\varphi_3\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \right] \varphi_1(\xi, t + x - \xi - \tau) d\tau - \right. \\ & \left. - \omega(\xi, t + x - \xi) \varphi_3(\xi, t + x - \xi) \right\} d\xi, \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3\varphi = & \varphi_{03} + \\ & + g_2(x) \int_x^t e^{\chi\rho_\ell(\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)\tau/2} \varphi_1(x, \tau) d\tau - \\ & - \frac{g_1(x)}{\lambda\chi\rho_\ell} \int_0^t e^{\chi\rho_\ell(\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)(\tau-x)/2} (\varphi_9(\tau - x) + \lambda\chi\rho_\ell\varphi_6(\tau - x)) d\tau - \\ & - \frac{g_2(x)}{\lambda\chi\rho_\ell} \int_0^t \int_x^\tau e^{\chi\rho_\ell(\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)\tau/2} (\varphi_9(\tau - \xi) + \lambda\chi\rho_\ell\varphi_6(\tau - \xi)) \varphi_1(x, \xi) d\xi d\tau, \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4\varphi = & \varphi_{04} - \\
& - \chi\rho_l g_2(x) \int_x^t e^{\chi\rho_\ell(\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)\tau/2} \varphi_1(x, \tau) d\tau + \\
& + \frac{g_1(x)}{\lambda} \int_0^t e^{\chi\rho_\ell(\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)(\tau-x)/2} (\varphi_9(\tau-x) + \lambda\chi\rho_\ell\varphi_6(\tau-x)) d\tau - \\
& - \frac{g_2(x)}{\lambda\chi\rho_\ell} e^{(k(0)-\lambda)t/2} \int_x^t (\varphi_9(t-\xi) + \lambda\chi\rho_\ell\varphi_6(t-\xi)) \varphi_1(x, \xi) d\xi + \\
& + \frac{g_2(x)}{\lambda} \int_0^t \int_x^\tau e^{\chi\rho_\ell(\tau-t)} e^{(k(0)-\lambda)\tau/2} (\varphi_9(\tau-\xi) + \lambda\chi\rho_\ell\varphi_6(\tau-\xi)) \varphi_1(x, \xi) d\xi d\tau, \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5\varphi = & \varphi_{05} + \\
& + \int_0^t \left\{ -\sigma'(0)\varphi_7(t-\tau) + 2\sigma(0) \left[\varphi_5(t-\tau) - \varphi_8(t-\tau) - 2\varphi_{10}(t-\tau) - \varphi_9(t-\tau) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell)\varphi_6(t-\tau) + 2\sigma(0)\omega\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}\right) \varphi_3\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}\right) \right] \right\} \tilde{f}_0(\tau) d\tau - \\
& - 2\sigma(0) \int_0^{t/2} \left\{ H(\xi) \left[\varphi_2(\xi, t-\xi) - \frac{1}{2\sigma(0)} \varphi_7(t-2\xi) + \frac{\sigma'(0)}{4\sigma^2(0)} \varphi_6(t-2\xi) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\xi}{2\sigma(0)} \left(2\varphi_8(t-2\xi) - \varphi_5(t-2\xi) + 4\varphi_{10}(t-2\xi) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + 2\varphi_9(t-2\xi) + 2(r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell)\varphi_6(t-2\xi) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(t-2\xi) - 2\sigma(0)\omega\left(\frac{t-2\xi}{2}, \frac{t-2\xi}{2}\right) \varphi_3\left(\frac{t-2\xi}{2}, \frac{t-2\xi}{2}\right) \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \left(2\varphi_8(t-2\xi) - \varphi_5(t-2\xi) + 4\varphi_{10}(t-2\xi) + 2\varphi_9(t-2\xi) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2(r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell)\varphi_6(t-2\xi) + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(t-2\xi) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2\sigma(0)\omega\left(\frac{t-2\xi}{2}, \frac{t-2\xi}{2}\right) \varphi_3\left(\frac{t-2\xi}{2}, \frac{t-2\xi}{2}\right) \right) \beta(\xi) - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t-2\xi} \left\{ 2\varphi_8(\tau) - \varphi_5(\tau) + 4\varphi_{10}(\tau) + 2\varphi_9(\tau) + 2(r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell)\varphi_6(\tau) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(\tau) - 2\sigma(0)\omega\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \varphi_3\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \right\} \times \right. \\
& \quad \times \left\{ \varphi_2(\xi, t-\xi-\tau) - \frac{1}{2\sigma(0)} \varphi_7(t-2\xi-\tau) + \frac{\sigma'(0)}{4\sigma^2(0)} \varphi_6(t-2\xi-\tau) + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\xi}{2\sigma(0)} \left[2\varphi_8(t-2\xi-\tau) - \varphi_5(t-2\xi-\tau) + 4\varphi_{10}(t-2\xi-\tau) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + 2\varphi_9(t-2\xi-\tau) + 2(r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell)\varphi_6(t-2\xi-\tau) + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(t-2\xi-\tau) - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - 2\sigma(0)\omega\left(\frac{t-2\xi-\tau}{2}, \frac{t-2\xi-\tau}{2}\right) \varphi_3\left(\frac{t-2\xi-\tau}{2}, \frac{t-2\xi-\tau}{2}\right) \right] \right\} d\tau -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\varphi_3(\xi, t-\xi) \frac{\partial}{\partial t} \omega(\xi, t-\xi) - \\
& -\omega(\xi, t-\xi) \left[\varphi_4(\xi, t-\xi) + g_2(\xi) e^{(k(0)-\lambda)(t-\xi)/2} \varphi_1(\xi, t-\xi) - \right. \\
& \left. - \frac{g_1(\xi)}{\lambda \chi \rho_\ell} e^{(k(0)-\lambda)(t-2\xi)/2} (\varphi_9(t-2\xi) + \lambda \chi \rho_\ell \varphi_6(t-2\xi)) \right] \Big\} d\xi, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_6 \varphi &= \varphi_{06} + \\
& + \int_0^t (t-\tau) \left(\varphi_5(\tau) - \varphi_8(\tau) - \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(\tau) - 2\varphi_{10}(\tau) - \varphi_9(\tau) - (r_{00} + \lambda \chi \rho_\ell) \varphi_6(\tau) + \right. \\
& \left. + 2\sigma(0) \omega\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \varphi_3\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \right) d\tau, \quad (3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_7 \varphi &= \varphi_{07} + \\
& + \int_0^t \left(\varphi_5(\tau) - \varphi_8(\tau) - \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(\tau) - 2\varphi_{10}(\tau) - \varphi_9(\tau) - \right. \\
& \left. - (r_{00} + \lambda \chi \rho_\ell) \varphi_6(\tau) + 2\sigma(0) \omega\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \varphi_3\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \right) d\tau, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_8 \varphi &= \varphi_{08} - \\
& - \int_0^t \left(2\varphi_{10}(t-\tau) + 2\varphi_8(t-\tau) - \varphi_5(t-\tau) + \varphi_9(t-\tau) + (2r_{00} + \lambda \chi \rho_\ell) \varphi_6(t-\tau) + \right. \\
& \left. + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(t-\tau) - 2\sigma(0) \omega\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}\right) \varphi_3\left(\frac{t-\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}\right) \right) \varphi_6(\tau) d\tau, \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$A_9 \varphi = \varphi_{09} - \int_0^t (\varphi_9(t-\tau) + \lambda \chi \rho_\ell \varphi_6(t-\tau)) \varphi_6(\tau) d\tau, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
A_{10} \varphi &= \varphi_{010} + \\
& + \int_0^t \left(\frac{r(0) - 5\lambda}{2} \varphi_{10}(\tau) - \lambda \left[2\varphi_8(\tau) - \varphi_5(\tau) + \varphi_9(\tau) + (2r_{00} + \lambda \chi \rho_\ell) \varphi_6(\tau) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \varphi_7(\tau) - 2\sigma(0) \omega\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \varphi_3\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \right] \right) d\tau, \quad (3.11)
\end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\varphi_{01} &= \beta(x), & \varphi_{02} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{f}_0(t-x) + k_0(0) \tilde{f}(t-x) - \frac{\sigma'(0)}{2\sigma(0)} \tilde{f}_0(t-x) + \beta((x+t)/2) \right), \\
\varphi_{03} &= g_1(x) e^{\chi \rho_\ell (x-t)}, & \varphi_{04} &= -g_1(x) \chi \rho_\ell e^{\chi \rho_\ell x-t}, \\
\varphi_{05} &= 2\sigma(0) \left(\tilde{f}''(t) + k_0(0) \tilde{f}'_0(t) + k'_0(0) \tilde{f}_0(t) + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} (\tilde{f}'_0(t) + k_0(0) \tilde{f}_0(t)) \right) - \\
& - \sigma(0) (\beta''(t/2) + 2(t/2) \beta(t/2)), \\
\varphi_{06} &= k(0) + k_{00}t, & \varphi_{07} &= k_{00}, & \varphi_{08} &= \varphi_{09} = 0, & \varphi_{010} &:= -\lambda r'(0).
\end{aligned}$$

Пусть C_ρ – банахово пространство непрерывных вектор-функций со взвешенной нормой $\|\cdot\|_\rho$, $\rho \geq 0$, заданной как

$$\|\varphi\|_\rho = \max \left\{ \max_{i=1,\dots,4} \sup_{(x,t) \in D_T} |\varphi_i(x,t) e^{-\rho t}|, \max_{j=5,\dots,10} \sup_{t \in [0,T]} |\varphi_j(t) e^{-\rho t}| \right\}. \quad (3.12)$$

Очевидно, что C_ρ при $\rho = 0$ есть обычное пространство непрерывных функций с равномерной нормой, которую мы далее будем обозначать как $\|\cdot\|$. Поскольку

$$e^{-\rho T} \|\varphi\| \leq \|\varphi\|_\rho \leq \|\varphi\|, \quad (3.13)$$

нормы $\|\cdot\|_\rho$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны при любом $T \in (0, \infty)$. Число ρ мы подберем далее.

В пространстве C_ρ с $\rho \geq 0$ введем шар $Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|) := \{\varphi: \|\varphi - \varphi_0\|_\rho \leq \|\varphi_0\|\}$ радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке φ_0 , где φ_0 – вектор-функция с компонентами φ_{ij} , $i = 1, \dots, 10$, и $\|\varphi_0\| = \max_{i=1,\dots,10} \|\varphi_{ij}\|$. Очевидно, что для функций $\varphi \in Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ справедлива оценка $\|\varphi\|_\rho \leq \|\varphi\|_\rho + \|\varphi_0\| \leq 2\|\varphi_0\|$. Пусть функция $\varphi \in Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Докажем, что при надлежащем выборе $\rho > 0$ оператор A на множестве $Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ является сжимающим. Сначала мы покажем, что если подходящим образом [11] выбрать $\rho > 0$, то оператор A переведет шар в тот же шар, т. е. $A\varphi \in Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$.

Действительно, с помощью соотношений (3.2)–(3.11) для нормы разности мы имеем при $(x, t) \in D_T$

$$\begin{aligned} \|A_1\varphi - \varphi_{01}\|_\rho &= \sup_{(x,t) \in D_T} |(A_1\varphi - \varphi_{01}) e^{-\rho t}| \leq \\ &\leq \left(\|\varphi_2\|_\rho + \frac{1}{2\sigma(0)} \|\varphi_7\|_\rho + \frac{\sigma'(0)}{4\sigma^2(0)} \|\varphi_6\|_\rho + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T}{4\sigma(0)} \left(2\|\varphi_8\|_\rho + \|\varphi_5\|_\rho + 4\|\varphi_{10}\|_\rho + 2\|\varphi_9\|_\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell) \|\varphi_6\|_\rho + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \|\varphi_7\|_\rho \right) + T\omega_0 \|\varphi_3\|_\rho \right) \frac{1}{\rho} \leq \\ &\leq 2\|\varphi_0\| \left(M_0 + \frac{T}{4\sigma(0)} (P_0 + 2\sigma(0)\omega_0) \right) \frac{1}{\rho}, \\ \|A_2\varphi - \varphi_{02}\|_\rho &= \sup_{(x,t) \in D_T} |(A_2\varphi - \varphi_{02}) e^{-\rho t}| \leq \\ &\leq 2\|\varphi_0\| \left(\frac{G_0}{2} \left(1 + \frac{\sigma'(0)}{2\sigma(0)} \right) + \frac{H_0}{2} + \frac{\omega_0 T}{2} + \frac{P_0}{4\sigma(0)} + \right. \\ &\quad \left. + \left(H_0 + \frac{3P_0}{2} + \sigma(0)\omega_0 \right) \left(\frac{\beta_0}{2} + \frac{T}{2} \|\varphi_0\| \left(2M_0 + \frac{P_0 T}{4\sigma(0)} \right) \right) \right) \frac{1}{\rho}, \\ \|A_3\varphi - \varphi_{03}\|_\rho &= \sup_{(x,t) \in D_T} |(A_3\varphi - \varphi_{03}) e^{-\rho t}| \leq \\ &\leq \frac{2\|\varphi_0\| \sqrt{\sigma(0)}}{\sqrt{\sigma_0}} e^{|k(0) - \lambda|T/2} \left[\chi\rho_\ell + \frac{1 + \lambda\chi\rho_\ell}{\lambda} \left(\frac{e^{|k(0) - \lambda|T/4}}{\sigma(0)} + 2T\|\varphi_0\| \right) \right] \frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_4\varphi - \varphi_{04}\|_\rho &= \sup_{(x,t) \in D_T} |(A_4\varphi - \varphi_{04})e^{-\rho t}| \leq \\ &\leq \frac{2\|\varphi_0\|\sqrt{\sigma(0)}}{\sqrt{\sigma_0}} e^{|k(0)-\lambda|T/2} \left[(\chi\rho_\ell)^2 + \frac{1+\lambda\chi\rho_\ell}{\lambda} \left(\frac{\chi\rho_\ell e^{|k(0)-\lambda|T/4+}}{\sigma(0)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\|\varphi_0\|T \left(\chi\rho_\ell + M_0 + \frac{T}{4\sigma(0)}(P_0 + 2\sigma(0)\omega_0) \right) \right) \right] \frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_5\varphi - \varphi_{05}\|_\rho &= \sup_{(x,t) \in D_T} |(A_5\varphi - \varphi_{05})e^{-\rho t}| \leq \\ &\leq 2\|\varphi_0\| \left[G_0(\sigma'(0) + 2\sigma(0)(K_0 + 2\sigma(0)\omega_0)) + \sigma(0)H_0(M_0 + 1) + \right. \\ &\quad + (P_0 + 2\sigma(0)\omega_0) \left(\frac{H_0T}{2}\sigma(0)\beta_0 + 2\|\varphi_0\|T \left(\sigma(0)M_0 + \frac{T}{4}(P_0 + 2\sigma(0)\omega_0) \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\sigma(0) \left(L_0 + \omega_0 \left(1 + \left(\frac{1+\lambda\chi\rho_\ell}{2\lambda\chi\rho_\ell} + \frac{\chi\rho_\ell\sqrt{\sigma(0)}}{\sqrt{\sigma_0}} \right) e^{|k(0)-\lambda|T/2} \right) \right) \right) \right] \frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

$$\|A_6\varphi - \varphi_{06}\|_\rho = \sup_{t \in [0,T]} |(A_6\varphi - \varphi_{06})e^{-\rho t}| \leq 2\|\varphi_0\|T \left(K_0 + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} + 2\sigma(0)\omega_0 \right) \frac{1}{\rho},$$

$$\|A_7\varphi - \varphi_{07}\|_\rho = \sup_{t \in [0,T]} |(A_7\varphi - \varphi_{07})e^{-\rho t}| \leq 2\|\varphi_0\| \left(K_0 + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} + 2\sigma(0)\omega_0 \right) \frac{1}{\rho},$$

$$\begin{aligned} \|A_8\varphi - \varphi_{08}\|_\rho &= \sup_{t \in [0,T]} |(A_8\varphi - \varphi_{08})e^{-\rho t}| \leq \\ &\leq 2\|\varphi_0\| \left(k(0) + k_{00}T + 2\|\varphi_0\| \left(K_0 + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \right) \right) (N_0 + 2 + 4\sigma(0)\omega_0) \frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_9\varphi - \varphi_{09}\|_\rho &= \sup_{t \in [0,T]} |(A_9\varphi - \varphi_{09})e^{-\rho t}| \leq \\ &\leq 2\|\varphi_0\| \left((1 + \lambda\chi\rho_\ell)(k(0) + k_{00}T) + 2\|\varphi_0\|(1 + \lambda\chi\rho_\ell) \left(K_0 + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \right) \right) \frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_{10}\varphi - \varphi_{010}\|_\rho &= \sup_{t \in [0,T]} |(A_{10}\varphi - \varphi_{010})e^{-\rho t}| \leq \\ &\leq 2\|\varphi_0\| \left(\frac{r(0) + 5\lambda}{2} + \lambda(N_0 + 4\sigma(0)\omega_0) \right) \frac{1}{\rho}, \end{aligned}$$

где

$$H_0 := \max_{x \in [0, T/2]} |H(x)|, \quad \beta_0 := \max_{x \in [0, T/2]} |\beta(x)|, \quad \omega_0 := \max_{(x,t) \in D_T} |\omega(x,t)|,$$

$$G_0 := \max_{t \in [0, T]} |\tilde{f}_0(t)|, \quad L_0 := \max_{(x,t) \in D_T} \left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right|,$$

$$M_0 := 1 + \frac{1}{2\sigma(0)} + \frac{\sigma'(0)}{4\sigma^2(0)}, \quad K_0 := 5 + r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell + 2\sigma(0)\omega_0,$$

$$P_0 := 5 + \lambda\chi\rho_\ell + 2\sigma(0)\omega_0 + N_0, \quad N_0 = 4 + 2r_{00} + \lambda\chi\rho_\ell + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)}$$

и $\sigma(x) \geq \sigma_0 > 0$, что вытекает из (3.7)–(3.11).

Пусть $\rho \geq \rho_0$, где

$$\begin{aligned} \rho_0 = 2 \max & \left\{ M_0 + \frac{T}{4\sigma(0)}(P_0 + 2\sigma(0)\omega_0), \right. \\ & \frac{G_0}{2} \left(1 + \frac{\sigma'(0)}{2\sigma(0)} \right) + \frac{H_0}{2} + \frac{\omega_0 T}{2} + \frac{P_0}{4\sigma(0)} + \\ & + \left(H_0 + \frac{3P_0}{2} + \sigma(0)\omega_0 \right) \left(\frac{\beta_0}{2} + \frac{T}{2} \|\varphi_0\| \left(2M_0 + \frac{P_0 T}{4\sigma(0)} \right) \right), \\ & \frac{\sqrt{\sigma(0)}}{\sqrt{\sigma_0}} e^{|k(0)-\lambda|T/2} \left(\chi\rho_\ell + \frac{1+\lambda\chi\rho_\ell}{\lambda} \left(\frac{e^{|k(0)-\lambda|T/4}}{\sigma(0)} + 2T\|\varphi_0\| \right) \right), \\ & \frac{2\|\varphi_0\|\sqrt{\sigma(0)}}{\sqrt{\sigma_0}} e^{|k(0)-\lambda|T/2} \left((\chi\rho_\ell)^2 + \frac{1+\lambda\chi\rho_\ell}{\lambda} \left(\frac{\chi\rho_\ell e^{|k(0)-\lambda|T/4}}{\sigma(0)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\|\varphi_0\|T \left(\chi\rho_\ell + M_0 + \frac{T}{4\sigma(0)}(P_0 + 2\sigma(0)\omega_0) \right) \right) \right), \\ & G_0(\sigma'(0) + 2\sigma(0)(K_0 + 2\sigma(0)\omega_0)) + \sigma(0)H_0(M_0 + 1) + \\ & + (P_0 + 2\sigma(0)\omega_0) \left(\frac{H_0 T}{2} \sigma(0)\beta_0 + 2\|\varphi_0\|T \left(\sigma(0)M_0 + \frac{T}{4}(P_0 + 2\sigma(0)\omega_0) \right) + \right. \\ & \left. + 2\sigma(0) \left(L_0 + \omega_0 \left(1 + \left(\frac{1+\lambda\chi\rho_\ell}{2\lambda\chi\rho_\ell} + \frac{\chi\rho_\ell\sqrt{\sigma(0)}}{\sqrt{\sigma_0}} \right) e^{|k(0)-\lambda|T/2} \right) \right) \right), \\ & T \left(K_0 + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} + 2\sigma(0)\omega_0 \right), K_0 + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} + 2\sigma(0)\omega_0, \\ & (N_0 + 2 + 4\sigma(0)\omega_0) \left(k(0) + k_{00}T + 2\|\varphi_0\| \left(K_0 + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \right) \right), \\ & (1 + \lambda\chi\rho_\ell)(k(0) + k_{00}T) + 2\|\varphi_0\|(1 + \lambda\chi\rho_\ell) \left(K_0 + \frac{\sigma'(0)}{\sigma(0)} \right), \\ & \left. \frac{r(0) + 5\lambda}{2} + \lambda(N_0 + 4\sigma(0)\omega_0) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда оператор A переводит шар в тот же шар, т. е. $A\varphi \in Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$.

Пусть теперь φ^1, φ^2 – два произвольных элемента шара $Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Используя очевидное неравенство

$$|\varphi_k^{(1)}\varphi_s^{(1)} - \varphi_k^{(2)}\varphi_s^{(2)}| \leq |\varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}| |\varphi_s^{(1)}| + |\varphi_k^{(2)}| |\varphi_s^{(1)} - \varphi_s^{(2)}| \leq 4\|\varphi_0\| \cdot \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|,$$

после некоторых простых оценок мы получаем, что для $(x, t) \in D_T$

$$\|(A\varphi^1 - A\varphi^2)\| \leq \|\varphi^1 - \varphi^2\|_\rho \cdot \frac{\rho_0}{2\rho}.$$

Пусть ρ_{00} получается из ρ_0 заменой во всех выражениях под знаком максимума величины $\|\varphi_0\|$ на $2\|\varphi_0\|$. На основе оценок, аналогичных проведенным выше, мы получаем, что если выбрать $\rho > \rho^* := \max\{\rho_0, \rho_{00}\}$, то оператор A является сжимающим на шаре $Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда в силу теоремы Банаха о неподвижной точке уравнение (3.1) разрешимо и имеет единственное решение в $Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ для любого фиксированного $T > 0$.

Поскольку $k_0(t) := e^{(\lambda - \tau(0))t/2} k(t)$, функция $k_0(t)$ рассчитывается по формуле

$$k(t) = e^{(\tau(0) - \lambda)t/2} k_0(t). \quad (3.14)$$

Теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2. В условиях теоремы 1 решение уравнения (3.1) принадлежит множеству $Q_\rho(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ и $\|\varphi_i\|_\rho \leq 2\|\varphi_0\|$, $i = 1, \dots, 10$. Следовательно,

$$\max_{t \in [0, T]} |k(t)| \leq 2\|\varphi_0\| e^{|\tau(0) - \lambda|T/2} := h_0. \quad (3.15)$$

Пусть φ^j – вектор-функции, являющиеся решениями уравнения (3.1) с данными $\{\mu^j(\psi^{-1}(x)), f_0^j(t)\}$, $j = 1, 2$, другими словами, $\varphi^j = A\varphi^j$ для $j = 1, 2$. Заданные функции $\mu^j(\psi^{-1}(x))$ в свободных членах этих интегральных уравнений определяются через функции $H^j(x)$, $j = 1, 2$. Переход от этих выражений к $\mu^1 - \mu^2$ проводится так, как это сделано в книге [4]. Как и при доказательстве теоремы 1, для $\rho \geq \rho^*$ получаем оценку

$$\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\rho \leq C_0\gamma + \frac{\rho^*}{\rho} \|\varphi^1 - \varphi^2\|_\rho, \quad (3.16)$$

где $\gamma := \|\mu^1 - \mu^2\|_{C^3[0, \psi^{-1}(T/2)]} + \|f_0^1 - f_0^2\|_{C^2[0, T]}$, а постоянная C_0 зависит от этого параметра так же, как C в теореме 2. Из неравенств (3.13) и (3.16) вытекает оценка $\|k_0^1 - k_0^2\| \leq C_1\gamma$ с постоянной $C_1 = \rho C_0/(\rho - \rho^*)$. Далее, рассматривая функцию (3.14) для $\{k^1, k_0^1\}$, $\{k^2, k_0^2\}$ и используя (3.16), получаем оценку (1.9).

Список литературы

- [1] В. Н. Доровский, Ю. В. Перепечко, Е. И. Роменский, “Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах”, *Физика горения и взрыва*, 1993, № 1, 100–111.
- [2] Х. Х. Имомназаров, А. Э. Холмуродов, “Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористой среде”, *Вестн. НУУз. Сер. Мех. Матем.*, 2006, № 2, 86–91.
- [3] Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева, “Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **16:2** (2013), 72–82.
- [4] В. Г. Яхно, *Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости*, Наука, Новосибирск, 1990.
- [5] J. Janno, L. Von Wolfersdorf, “Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **20:4** (1997), 291–314.
- [6] В. Г. Романов, “Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **15:1** (2012), 86–98.
- [7] Д. К. Дурдиев, Ж. Д. Тотиева, “Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости”, *Владикавказ. матем. журн.*, **17:4** (2015), 18–43.
- [8] D. K. Durdiev, “Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations”, *Журн. матем. физ., анализ, геом.*, **3:4** (2007), 411–423.
- [9] Д. К. Дурдиев, Ж. Ш. Сафаров, “Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области”, *Матем. заметки*, **97:6** (2015), 855–867.
- [10] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.
- [11] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Физматлит, М., 2004.