Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ч. Анко, М. Л. Гандариас, Е. Ресио, Законы сохранения, симметрии и решения типа солитонной волны для обобщенных уравнений Кадомцева–Петвиашвили и Буссинеска со степенными нелинейностями, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 1, 3–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:35:52

© 2018 г. С. Ч. Анко*, М. Л. Гандарияс†, Е. Ресио†

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ, СИММЕТРИИ И РЕШЕНИЯ ТИПА СОЛИТОННОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ КАДОМЦЕВА– ПЕТВИАШВИЛИ И БУССИНЕСКА СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Нелинейные обобщения одномерных интегрируемых уравнений, такие как уравнения Кортевега–де Фриза и Буссинеска со степенными нелинейностями с показателем степени p , возникают во многих физических приложениях и представляют интерес с аналитической точки зрения из-за своего критического поведения. Изучаются аналогичные обобщения, содержащие степенные нелинейности с показателем p , для двумерных интегрируемых уравнения Кадомцева–Петвиашвили и Буссинеска. Для всех $p \neq 0$ приведена гамильтонова форма этих двух обобщенных уравнений. Выведены все симметрии Ли, включая те, которые существуют для специальных степеней $p \neq 0$. Для вывода законов сохранения, возникающих из вариационных симметрий Ли, применяется теорема Нётер. Наконец, для всех показателей $p > 0$ получены явные решения типа солитонной волны; обсуждаются некоторые их свойства.

Ключевые слова: решения типа солитонной волны, законы сохранения, уравнение Кадомцева–Петвиашвили.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9483>

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$(u_t + \alpha u u_x + u_{xxx})_x + \beta u_{yy} = 0 \quad (1)$$

и его модифицированная версия

$$(u_t + \alpha u^2 u_x \pm \sqrt{2\alpha|\beta|} u_x \partial_x^{-1} u_y + u_{xxx})_x + \beta u_{yy} = 0 \quad (2)$$

С. Ч. Анко поддержан исследовательским грантом NSERC.

*Brock University, St. Catharines, Canada

†Cadiz University, Cadiz, Spain. E-mail: marialuz.gandarias@uca.es

являются интегрируемыми системами в $2 + 1$ измерениях и имеют важные применения в физике. Прежде всего следует отметить, что они описывают волны на мелкой воде [1], ионно-акустические волны [2] и магнитные возбуждения в тонких пленках [3]. Эти уравнения обладают решениями типа солитонной волны и типа лампов [4]–[8] и имеют разнообразные математические свойства, в частности, их размерные редукции к $1 + 1$ измерениям дают многочисленные физически важные интегрируемые системы.

Ранее подробно изучались нелинейные обобщения $(1 + 1)$ -мерных интегрируемых систем со степенными нелинейностями с показателем степени p . Самым известным пример – обобщенное уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) $u_t + u^p u + u_{xxx} = 0$ с $p \neq 0$, которое превращается в обычное уравнение КдФ при $p = 1$ и модифицированное уравнение КдФ при $p = 2$. Уравнение КдФ описывает волны на мелкой воде, движущиеся в одном направлении, а модифицированное уравнение КдФ – аналогичные ионно-акустические волны. Для произвольной степени p обобщенное уравнение КдФ имеет уединенные волновые решения

$$u = \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2} c \right)^{1/p} \operatorname{sech}^{2/p} \left(\frac{p}{2} \sqrt{c} (x - ct) \right),$$

характер взаимодействия которых чувствителен к значению p . Это можно понять, если посмотреть на масштабные свойства сохраняющихся массы и энергии

$$\mathcal{M}[u] = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx, \quad \mathcal{E}[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{(p+1)(p+2)} u^{p+2} \right) dx$$

для решения $u(x, t)$ задачи Коши. Масса масштабно-инвариантна относительно масштабной симметрии $x \rightarrow \lambda x$, $t \rightarrow \lambda^3 t$, $u \rightarrow \lambda^{-2/p} u$ при $p = 4$, в то время как энергия имеет отрицательный масштабный вес при любом $p > 0$. Эти свойства можно использовать, чтобы показать [9], что уединенные волны устойчивы под действием любых возмущений по норме пространства H^1 , $\|u\|_{H^1} = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + u_x^2) dx$, если p меньше критической величины $p^* = 4$. Эта устойчивость продолжается на критический случай $p = 4$ для уединенных волн достаточно малой энергии.

Намного хуже изучены обобщения самого уравнения КП и модифицированного уравнения КП, содержащие степенные нелинейности с показателем p . В частности, обобщенное уравнение КП (уравнение оКП)

$$(u_t + \alpha u^p u_x + u_{xxx})_x + \beta u_{yy} = 0, \quad p \neq 0, \quad (3)$$

представляет собой $(2 + 1)$ -мерный аналог обобщенного уравнения КдФ. Интересен вариант этого уравнения вида

$$u_{tt} = u_{xx} + \alpha (u^{p+1})_{xx} + \gamma u_{xxx} + \beta u_{yy}, \quad p \neq 0, \quad (4)$$

который является $(2 + 1)$ -мерным обобщенным уравнением Буссинеска (уравнением 2D-оБ). Его редукция к $1 + 1$ измерениям дает обобщение обычного уравнения Буссинеска, содержащего нелинейность степени p :

$$u_{tt} = u_{xx} + \alpha (u^2)_{xx} + \gamma u_{xxx}. \quad (5)$$

Это уравнение является интегрируемой системой, которую можно получить путем размерной редукции уравнения КП, и это физически состоятельная модель волн на мелкой воде, движущихся в двумерной плоскости. Очень интересная особенность уравнения Буссинеска с $\gamma < 0$ состоит в том, что его уединенные волновые решения обладают неустойчивостью, которая может привести к образованию сингулярности за конечное время [10], [11]. Это поведение контрастирует с типичным свойством устойчивости солитонов в интегрируемых системах.

Цель настоящей работы – найти законы сохранения, симметрии и решения типа солитонной волны, допускаемые уравнением оКП (3) и уравнением 2D-оБ (4) в размерности $2 + 1$ для всех степеней нелинейности $p > 0$.

Сначала в разделе 2 оба уравнения оКП и 2D-оБ при произвольных $p \neq 0$ путем введения потенциалов формулируются как гамильтоновы системы. Затем в разделе 3 для них получены все точечные симметрии Ли и найден класс вариационных точечных симметрий. В разделе 4 с помощью теоремы Нётер в гамильтоновой постановке выводятся соответствующие законы сохранения. Эти результаты включают в себя любые точечные симметрии и любые законы сохранения Нётер, возникающие для специальных степеней $p \neq 0$.

В разделе 5 рассмотрены решения типа солитонной волны $u = U(x + \mu y - \nu t)$ для уравнений оКП и 2D-оБ при всех $p > 0$, где параметры μ и ν определяют направление и скорость солитона. Получающиеся нелинейные дифференциальные уравнения четвертого порядка для U путем использования полученных выше законов сохранения непосредственно сводятся к дифференциальным уравнениям первого порядка с разделяющимися переменными. Затем эти дифференциальные уравнения интегрируются, в результате для всех $p > 0$ получаются в явном виде решения типа солитонной волны, причем μ и ν остаются произвольными, за исключением того, что они удовлетворяют кинематическому неравенству. Обсуждаются некоторые свойства этих решений. Наконец, в разделе 6 приведены заключительные замечания.

В случае $p = 2$ некоторые законы сохранения для уравнения оКП (3) и для уравнения 2D-оБ (4) ранее были найдены в работах [12], [13]. Некоторые решения трехмерного уравнения оКП без какого-либо обсуждения их свойств приводятся в работе [14]. Общий анализ симметрий, законов сохранения и их применений к дифференциальным уравнениям можно найти в [15]–[17].

2. ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА

Полезно начать с замечания, что параметры уравнения оКП (3) под действием преобразований масштаба $t \rightarrow \lambda^3 t$, $x \rightarrow \lambda x$, $y \rightarrow \lambda^a y$, $u \rightarrow \lambda^b u$ преобразуются как $\alpha \rightarrow \lambda^{-pb-2} \alpha$ и $\beta \rightarrow \lambda^{2a-4} \beta$. Следовательно, без потери общности мы можем положить $\alpha = 1$ и $\beta = \pm 1$. Аналогично можно положить $\alpha = 1$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = \pm 1$ в уравнении 2D-оБ (4). Поэтому далее мы будем рассматривать уравнения оКП и 2D-оБ, записанные соответственно как

$$(u_t + u^p u_x + u_{xxx})_x + \sigma^2 u_{yy} = 0 \quad (6)$$

и

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^{p+1})_{xx} \pm u_{xxx} + \sigma^2 u_{yy}, \quad (7)$$

где $p \neq 0$ и $\sigma^2 = \pm 1$. Оба этих уравнения можно записать как уравнения гамильтоновой эволюции. Самый простой способ сделать это – рассмотреть сначала лагранжеву форму уравнений.

Для уравнения КП лагранжева форма известна [18]. Чтобы ее получить, введем потенциал $v(x, y, t)$ формулой

$$u = v_x. \quad (8)$$

В терминах этого потенциала уравнение оКП принимает вид

$$0 = v_{tx} + v_x^p v_{xx} + v_{xxxx} + \sigma^2 v_{yy} = \frac{\delta L}{\delta v}, \quad (9)$$

где L – лагранжиан,

$$L = -\frac{1}{2}v_t v_x + \frac{1}{2}v_{xx}^2 - \frac{1}{(p+1)(p+2)}v_x^{p+2} - \frac{1}{2}\sigma^2 v_y^2. \quad (10)$$

Соответствующая гамильтонова форма такова:

$$v_t = -D_x^{-1} \left(\frac{\delta H}{\delta v} \right), \quad (11)$$

где гамильтонов функционал

$$H = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2}v_{xx}^2 - \frac{1}{(p+1)(p+2)}v_x^{p+2} - \frac{1}{2}\sigma^2 v_y^2 \right) dx dy, \quad (12)$$

а D_x^{-1} – гамильтонов оператор [15]. Уравнение в гамильтоновой форме можно эквивалентно записать в терминах u , используя тождество $\delta H / \delta v = -D_x(\delta H / \delta u)$ для вариационной производной, которое дает

$$u_t = D_x \left(\frac{\delta H}{\delta v} \right), \quad (13)$$

где плотность гамильтониана теперь нелокальна по u . Заметим, что если мы положим $\sigma^2 = 0$, то получим стандартную гамильтонову форму обобщенного уравнения КдФ [19].

Аналогичную лагранжеву форму можно получить для уравнения 2D-оБ, начав с потенциала (8). Соответствующее уравнение имеет вид

$$0 = v_{tt} - v_{xx} - (v_x^{p+1})_x \mp v_{xxxx} - \sigma^2 v_{yy} = \frac{\delta L}{\delta v}, \quad (14)$$

где лагранжиан

$$L = -\frac{1}{2}v_t^2 + \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{p+2}v_x^{p+2} \mp \frac{1}{2}v_{xx}^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 v_y^2. \quad (15)$$

Чтобы получить гамильтонову форму, необходимо преобразовать уравнение к эквивалентной эволюционной системе первого порядка

$$v_t = w, \quad w_t = v_{xx} + (v_x^{p+1})_x \pm v_{xxxx} + \sigma^2 v_{yy}. \quad (16)$$

В гамильтоновой форме эта система записывается как

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \delta H / \delta v \\ \delta H / \delta w \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где гамильтонов функционал

$$H = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{2} v_x^2 + \frac{1}{p+2} v_x^{p+2} \mp \frac{1}{2} v_{xx}^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 v_y^2 \right) dx dy, \quad (18)$$

а J играет роль гамильтонова оператора [15]. Эквивалентная формулировка в терминах u получается из соотношения $u_t = v_{tx} = w_x$ в комбинации с упомянутым выше тождеством $\delta H / \delta v = -D_x(\delta H / \delta u)$ для вариационной производной. Это дает

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t = \mathcal{D} \begin{pmatrix} \delta H / \delta u \\ \delta H / \delta w \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ D_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

с гамильтоновым оператором $\mathcal{D}$ и плотностью гамильтониана, нелокальной по u и w . Заметим, что если мы возьмем $\sigma^2 = 0$, то получим гамильтонову форму обобщенного $(1+1)$ -мерного уравнения Буссинеска, которая при $p = 1$ совпадает с первой гамильтоновой структурой [15] обычного уравнения Буссинеска (5).

Приведенные выше гамильтоновы формулировки послужили мотивом к изучению законов сохранения для уравнений оКП и 2D-оБ в их соответствующих потенциальных формах (9) и (14).

3. СИММЕТРИИ

Симметрии представляют базовую структуру нелинейных эволюционных уравнений. Они дают группы преобразований, под действием которых множество решений заданного уравнения отображается в себя, таким образом, их можно использовать для поиска решений, инвариантных относительно действия группы.

Сначала рассмотрим точечные симметрии $(x, y, t, v) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}, \tilde{v})$, где $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{t}$, $\tilde{v}$ — функции переменных x , y , t , v . Для уравнений оКП (9) и 2D-оБ (14) инфинитезимальная симметрия порождена генератором

$$X = \xi^x(x, y, t, v) \partial_x + \xi^y(x, y, t, v) \partial_y + \tau(x, y, t, v) \partial_t + \eta(x, y, t, v) \partial_v, \quad (20)$$

продолжение которого оставляет инвариантным соответствующее уравнение. Каждую точечную симметрию можно выразить в эквивалентном виде

$$\hat{X} = P \partial_v, \quad P = \eta(x, y, t, v) - \xi^x(x, y, t, v) v_x - \xi^y(x, y, t, v) v_y - \tau(x, y, t, v) v_t, \quad (21)$$

при этом она действует только на v . Функция P называется характеристикой симметрии.

Инвариантность уравнения оКП, записанного в потенциальной форме (9), выражается условием

$$0 = D_x(D_t P + v_x^p D_x P + D_3^4 P) + \sigma^2 D_y^2 P, \quad (22)$$

которое выполняется для всех решений $v(x, y, t)$ этого уравнения. Аналогично инвариантность уравнения 2D-оБ в потенциальной форме (14) задается условием

$$0 = D_t^2 P - D_x^2(P + (p+1)v_x^p D_x P \pm D_x^2 P) - \sigma^2 D_y^2 P, \quad (23)$$

которое выполняется для всех решений $v(x, y, t)$ этого уравнения. Каждое из этих условий инвариантности расщепляется на условия, содержащие производные функции v по x и по y , в результате получается переопределенная система для $\eta(x, y, t, v)$, $\xi^x(x, y, t, v)$, $\xi^y(x, y, t, v)$, $\tau(x, y, t, v)$, а также для показателя p с учетом условия $p \neq 0$. Легко выписать и решить эти две системы, используя систему компьютерной алгебры **Maple**. В частности, для получения полной классификации всех решений можно использовать пакет **rifsimp**.

Суммируем получающиеся результаты.

ТЕОРЕМА 3.1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Точечные симметрии, которые допускает потенциальное уравнение оКП (9) при произвольном $p \neq 0$, имеют генераторы*

$$\tau_1 = 0, \quad \xi_1^x = 1, \quad \xi_1^y = 0, \quad \eta_1 = 0; \quad (24a)$$

$$\tau_2 = 0, \quad \xi_2^x = 0, \quad \xi_2^y = 1, \quad \eta_2 = 0; \quad (24б)$$

$$\tau_3 = 1, \quad \xi_3^x = 0, \quad \xi_3^y = 0, \quad \eta_3 = 0; \quad (24в)$$

$$\tau_4 = 3t, \quad \xi_4^x = x, \quad \xi_4^y = 2y, \quad \eta_4 = (1 - 2/p)v; \quad (24г)$$

$$\tau_5 = 0, \quad \xi_5^x = y, \quad \xi_5^y = -2\sigma^2 t, \quad \eta_5 = 0; \quad (24д)$$

$$\tau_6 = 0, \quad \xi_6^x = 0, \quad \xi_6^y = 0, \quad \eta_6 = f_1(t) + f_2(t)y. \quad (24e)$$

Симметрии (24a)–(24в) представляют собой трансляции, симметрия (24г) есть преобразование масштаба, а симметрия (24д) является поворотом в плоскости $(y, t + \sigma^2 x)$ в комбинации с бустом в плоскости $(y, t - \sigma^2 x)$. Симметрия (24e) есть линейная комбинация двух бесконечномерных семейств, отвечающих общему решению $P(y, t)$ уравнения $P_{yy} = 0$.

2. *Только при $p = 1$ для потенциального уравнения оКП (9) допустима дополнительная точечная симметрия:*

$$\begin{aligned} \tau_7 &= f_3(t), \\ \xi_7^x &= -\frac{1}{6}\sigma^2 f_3''(t)y^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 f_4'(t)y + \frac{1}{3}f_3'(t)x + f_5(t), \quad \xi_7^y = \frac{2}{3}f_3'(t)y + f_4(t), \\ \eta_7 &= \frac{1}{72}f_3''''(t)y^4 + \frac{1}{12}\sigma^2 f_4'''(t)y^3 - \frac{1}{6}\sigma^2 f_3'''(t)y^2x - \frac{1}{2}\sigma^2 f_5''(t)y^2 - \frac{1}{2}f_4''(t)yx + \\ &+ \frac{1}{6}f_3''(t)x^2 + f_5'(t)x - \frac{1}{3}f_3'(t)v. \end{aligned} \quad (25)$$

Она является линейной комбинацией трех бесконечномерных семейств и включает масштабную симметрию (24г) в случае $p = 1$ для $f_3(t) = 3t$, $f_4(t) = f_5(t) = 0$.

Соответствующие группы преобразований симметрии при произвольном $p \neq 0$ задаются как

$$(x, y, t, v) \rightarrow (x + \epsilon, y, t, v), \quad (26a)$$

$$(x, y, t, v) \rightarrow (x, y + \epsilon, t, v), \quad (26б)$$

$$(x, y, t, v) \rightarrow (x, y, t + \epsilon, v), \quad (26в)$$

$$(x, y, t, v) \rightarrow (e^\epsilon x, e^{2\epsilon} y, e^{3\epsilon} t, e^{(1-2/p)\epsilon} v), \quad (26г)$$

$$(x, y, t, v) \rightarrow (x + \epsilon y - \sigma^2 \epsilon^2 t, y - 2\epsilon \sigma^2 t, t, v), \quad (26д)$$

$$(x, y, t, v) \rightarrow (x, y, t, f_1(t)\epsilon + f_2(t)\epsilon y + v), \quad (26е)$$

где $\epsilon \in \mathbb{R}$ есть параметр группы. Для $p = 1$ группа преобразований симметрии, порожденная тремя бесконечными семействами (25), обсуждалась в работе [20].

ТЕОРЕМА 3.2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Точечные симметрии, которые допускает потенциальное уравнение 2D-оБ (14) при произвольном $p \neq 0$, имеют генераторы

$$\tau_1 = 0, \quad \xi_1^x = 1, \quad \xi_1^y = 0, \quad \eta_1 = 0; \quad (27a)$$

$$\tau_2 = 0, \quad \xi_2^x = 0, \quad \xi_2^y = 1, \quad \eta_2 = 0; \quad (27б)$$

$$\tau_3 = 1, \quad \xi_3^x = 0, \quad \xi_3^y = 0, \quad \eta_3 = 0; \quad (27в)$$

$$\tau_4 = y, \quad \xi_4^x = 0, \quad \xi_4^y = \sigma^2 t, \quad \eta_4 = 0; \quad (27г)$$

$$\tau_5 = 0, \quad \xi_5^x = 0, \quad \xi_5^y = 0, \quad \eta_5 = f_1(y + \sigma t) + f_2(y - \sigma t). \quad (27д)$$

Симметрии (27а)–(27в) представляют собой трансляции, симметрия (27г) является бустом в плоскости (y, t) , а симметрия (27д) – линейная комбинация двух бесконечномерных семейств, которые отвечают общему решению $P(y, t)$ уравнения $P_{tt} - \sigma^2 P_{yy} = 0$.

2. Только при $p = 1$ для потенциального уравнения 2D-оБ (14) допустима дополнительная точечная симметрия:

$$\tau_6 = 2t, \quad \xi_6^x = x, \quad \xi_6^y = 2y, \quad \eta_6 = -(v + x). \quad (28)$$

Это масштабная симметрия в комбинации со сдвигом функции v .

Соответствующие группы преобразований симметрии при произвольным $p \neq 0$ задаются как

$$(x, y, t, v) \rightarrow (x + \epsilon, y, t, v), \quad (29a)$$

$$(x, y, t, v) \rightarrow (x, y + \epsilon, t, v), \quad (29б)$$

$$(x, y, t, v) \rightarrow (x, y, t + \epsilon, v), \quad (29в)$$

$$(x, y, t, v) \rightarrow (x, \text{ch}(\epsilon\sigma)y + \text{sh}(\epsilon\sigma)t, \text{ch}(\epsilon\sigma)t + \text{sh}(\epsilon\sigma)t, v), \quad (29г)$$

$$(x, y, t, v) \rightarrow (x, y, t, f_1(y + \sigma t) + f_2(y - \sigma t) + v), \quad (29д)$$

где $\epsilon \in \mathbb{R}$ есть параметр группы. Группа преобразований симметрии, порожденная масштабно-сдвиговой симметрией (28) для $p = 1$, задается как

$$(x, y, t, v) \rightarrow \left(e^\epsilon x, e^{2\epsilon} y, e^{2\epsilon} t, e^{-\epsilon} v - \frac{1}{2} e^\epsilon x \right). \quad (30)$$

Вариационные симметрии. Далее мы определим, какие из симметрий в теоремах 3.1 и 3.2 являются вариационными.

Напомним, что инфинитезимальная симметрия $\hat{X} = P\partial_v$ называется вариационной, если она оставляет инвариантным любой заданный лагранжиан L с точностью до полной дивергенции,

$$\hat{X}L = D_t\Psi^t + D_x\Psi^x + D_y\Psi^y, \quad (31)$$

где Ψ^t, Ψ^x, Ψ^y – функции от t, x, y, v и производных функции v . Как правило, это условие инвариантности проверяется так: сначала вычисляется $\hat{X}L$, а затем делается попытка использовать интегрирование по частям, чтобы привести получившееся выражение к форме полной дивергенции. Можно также применить намного более эффективный метод, основанный на операторе Эйлера (т.е. вариационной производной)

$$E_v = \partial_v - D_t\partial_{v_t} - D_x\partial_{v_x} - D_y\partial_{v_y} + D_t^2\partial_{v_{tt}} + D_x^2\partial_{v_{xx}} + D_y^2\partial_{v_{yy}} + \\ + D_tD_x\partial_{v_{tx}} + D_tD_y\partial_{v_{ty}} + D_xD_y\partial_{v_{xy}} + \dots \quad (32)$$

Этот оператор обращает в ноль функцию от t, x, y, v и производных функции v , если и только если эта функция является полной дивергенцией $D_t\Psi^t + D_x\Psi^x + D_y\Psi^y$. Следовательно, условие вариационной симметрии (31) можно сформулировать как

$$E_v(\hat{X}L) = 0. \quad (33)$$

Кроме того, это условие можно дополнительно упростить [15], [21], если использовать вариационное тождество

$$\hat{X}L = E_v(L)\hat{X}v + D_t\Phi^t + D_x\Phi^x + D_y\Phi^y, \quad (34)$$

где $E_v(L)$ – вариационная производная лагранжиана L . Это тождество выводится путем интегрирования по частям. Комбинируя тождество (34) с уравнением (33) для оператора Эйлера, мы видим, что условие вариационной симметрии (31) принимает вид

$$E_v(PE_v(L)) = 0. \quad (35)$$

Данное соотношение содержит только характеристику симметрии P и левую часть уравнений Эйлера–Лагранжа $E_v(L) = 0$ для оператора L (которое не меняется, если прибавить к L произвольную полную дивергенцию).

Теперь мы применим условие вариационной симметрии (35) к точечным симметриям, допускаемым уравнениями оКП (9) и 2D-оБ (14) с соответствующими лагранжианами L , заданными в (10) и (15). Непосредственное вычисление дает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Вариационные точечные симметрии, которые допускает потенциальное уравнение оКП (9), порождаются трансляционными симметриями (24а)–(24в), симметрией (24д) типа комбинации поворота и буста, а также бесконечными семействами симметрий (24е) и (25). Масштабная симметрия (24г) является вариационной, когда показатель степени нелинейности $p = 1$, что совпадает со случаем $f_3(t) = 3t, f_4(t) = f_5(t) = 0$ в бесконечном семействе (25).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Вариационные точечные симметрии, которые допускает потенциальное уравнение 2D-оБ (14), порождаются трансляционными симметриями (27а)–(27в), симметрией (27г) типа буста, а также бесконечными семействами симметрий (27д). Масштабно-сдвиговая симметрия (28) не является вариационной при любом показателе степени нелинейности p .*

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Законы сохранения имеют основополагающее значение для нелинейных эволюционных уравнений, поскольку для всех решений они дают физически значимые сохраняющиеся величины, а также сохраняющиеся нормы.

Для уравнений оКП (9) и 2D-оБ (14) локальный закон сохранения представляет собой уравнение неразрывности

$$D_t T + D_x X + D_y Y = 0, \quad (36)$$

выполняющееся для всех решений $v(x, y, t)$ уравнения; здесь T – сохраняющаяся плотность, и (X, Y) – пространственный поток, которые зависят от t, x, y, v и производных функции v . Если рассматривать решение $v(x, y, t)$ в заданной области пространства $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, то каждый закон сохранения дает соответствующий сохраняющийся интеграл

$$\mathcal{C}[v] = \int_{\Omega} T \, dx \, dy, \quad (37)$$

удовлетворяющий уравнению глобального баланса

$$\frac{d}{dt} \mathcal{C}[v] = - \int_{\partial\Omega} (X, Y) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds, \quad (38)$$

где $\hat{\mathbf{n}}$ – единичный вектор внешней нормали к граничной кривой $\partial\Omega$, а ds – элемент длины дуги кривой. Это общее уравнение с физической точки зрения означает, что скорость изменения величины $\mathcal{C}[v]$, заданной в (37), в данной области пространства уравновешивается суммарным внешним потоком через границу области.

Закон сохранения является локально тривиальным, если для всех решений $v(x, y, t)$ в области Ω сохраняющаяся плотность T сводится к пространственной дивергенции $D_x \Psi^x + D_y \Psi^y$, а пространственный поток (X, Y) сводится к производной по времени $-D_t(\Psi^x, \Psi^y)$, поскольку тогда уравнение глобального баланса (38) становится тождеством. Аналогично два закона сохранения локально эквивалентны, если они отличаются локально тривиальным законом сохранения для всех решений $v(x, y, t)$ в области Ω . Нас будут интересовать только локально нетривиальные законы сохранения.

Любой нетривиальный закон сохранения (36) можно выразить в эквивалентном виде с использованием характеристик [15], [16], [21], применяя дивергентное тождество вне пространства решений $v(x, y, t)$. Для уравнений оКП и 2D-оБ законы сохранения записываются через характеристики так:

$$D_t \tilde{T} + D_x \tilde{X} + D_y \tilde{Y} = (v_{tx} + v_x^p v_{xx} + v_{xxx} + \sigma^2 v_{yy}) Q \quad (39)$$

и

$$D_t \tilde{T} + D_x \tilde{X} + D_y \tilde{Y} = (v_{tt} - v_{xx} - (v_x^{p+1})_x \mp v_{xxx} - \sigma^2 v_{yy}) Q, \quad (40)$$

где функции Q , $\tilde{T}$, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ зависят от t, x, y, v и производных функции v , а сохраняющаяся плотность $\tilde{T}$ и пространственный поток $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ сводятся к T и (X, Y) на любом решении $v(x, y, t)$ соответствующего уравнения. Такие дивергентные тождества называются уравнениями характеристик для закона сохранения, при этом функция Q называется множителем закона сохранения. В частности, функция Q не имеет особенностей на любом решении $v(x, y, t)$. Отсюда можно заключить, что уравнение характеристик для закона сохранения локально эквивалентно самому закону сохранения.

Поскольку уравнение оКП и уравнение 2D-ОБ имеют лагранжеву форму, теорема Нётер [16], [21] показывает, что для обоих уравнений существует взаимно однозначное соответствие между локально нетривиальными законами сохранения (с точностью до эквивалентности) и вариационными симметриями. В частности, это соответствие может быть установлено просто как $Q = p$, где Q – множитель закона сохранения, а P – характеристика вариационной симметрии. Сохраняющиеся плотность $\tilde{T}$ и пространственный поток $(\tilde{X}, \tilde{Y})$, соответствующие данной характеристике вариационной симметрии P , можно получить напрямую несколькими способами [16], [21], [22], начав с уравнений характеристик (39) и (40).

Для любой характеристики P вариационной симметрии можно напрямую применить метод повторного интегрирования [22] к слагаемым в выражении для $PE_v(L)$, что дает $\tilde{T}$, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$. Этот метод иногда может быть достаточно громоздким или затруднительным, в зависимости от сложности выражения $PE_v(L)$. Более систематический подход из книги [16] состоит в расщеплении уравнения характеристик $D_t\tilde{T} + D_x\tilde{X} + D_y\tilde{Y} = PE_v(L)$ на уравнения по переменной v и ее производным и приводит к переопределенной линейной системе, которую можно решить и получить величины $\tilde{T}$, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$. Альтернативный более прямой метод состоит в использовании формулы для интеграла гомотопии, которая позволяет обратить оператор Эйлера в уравнении вариационной симметрии $E_v(PE_v(L)) = 0$. Простейшую версию этой формулы можно найти в [16], [21]; более сложный общий вариант приведен в монографии [15].

Подведем итог исследования законов сохранения, возникающих из вариационных точечных симметрий, которые получены в предложениях 3.1 и 3.2.

ТЕОРЕМА 4.1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Законы сохранения, соответствующие вариационным точечным симметриям, которые допускает потенциальное уравнение оКП (9) при произвольном $p \neq 0$, задаются как*

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}v_{xx}^2 - \frac{\sigma^2}{2}v_y^2 - \frac{1}{(p+1)(p+2)}v_x^{p+2}, \\ X_1 &= v_tv_{xxx} - v_{tx}v_{xx} + \frac{1}{p+1}v_x^{p+1}v_t + \frac{1}{2}v_t^2, \end{aligned} \quad (41)$$

$$Y_1 = \sigma^2 v_t v_y,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}v_x^2,$$

$$X_2 = v_x v_{xxx} - \frac{1}{2}v_{xx}^2 + \frac{1}{p+2}v_x^{p+2} - \frac{\sigma^2}{2}v_y^2, \quad (42)$$

$$Y_2 = \sigma^2 v_x v_y,$$

$$T_3 = \frac{1}{2}v_x v_y,$$

$$X_3 = v_y v_{xxx} - v_{xx} v_{xy} + \frac{1}{p+1}v_y v_x^{p+1} + \frac{1}{2}v_t v_y, \quad (43)$$

$$Y_3 = \frac{1}{2}v_{xx}^2 + \frac{\sigma^2}{2}v_y^2 - \frac{1}{(p+1)(p+2)}v_x^{p+2} - \frac{1}{2}v_t v_x,$$

$$T_4 = \frac{1}{2}y v_x^2 - \sigma^2 t v_y v_x,$$

$$X_4 = (y v_x - 2\sigma^2 t v_y) v_{xxx} - \frac{1}{2}y v_{xx}^2 + 2\sigma^2 t v_{xy} v_{xx} - \frac{\sigma^2}{2}y v_y^2 - \sigma^2 t v_y v_t -$$

$$- 2\sigma^2 \frac{1}{p+1}t v_y v_x^{p+1} + \frac{1}{p+2}y v_x^{p+2}, \quad (44)$$

$$Y_4 = -\sigma^2 t v_{xx}^2 - t v_y^2 + \sigma^2 y v_y v_x + \sigma^2 t v_t v_x + 2\sigma^2 \frac{1}{(p+1)(p+2)}t v_x^{p+2},$$

$$T_5 = 0,$$

$$X_5 = \left(\frac{1}{p+1}v_x^{p+1} + v_{xxx} + v_t \right) (f_1(t)y + f_2(t)), \quad (45)$$

$$Y_5 = \sigma^2 ((y v_y - v) f_1(t) + f_2(t) v_y),$$

2. Только при $p = 1$ для потенциального уравнения оКП (9) допустимы дополнительные законы сохранения, отвечающие вариационным точечным симметриям:

$$T_6 = \frac{1}{2}f_5(t)v_x^2 + f_5'(t)v,$$

$$X_6 = \sigma^2(f_5(t)v_x + \frac{1}{2}f_5''(t)y^2 - f_5'(t)x)v_{xxx} - \frac{1}{2}f_5(t)v_{xx}^2 + f_5'(t)v_{xx} + \frac{1}{3}f_5(t)v_x^3 +$$

$$+ \left(\frac{\sigma^2}{4}y^2 f_5''(t) - \frac{1}{2}f_5'(t)x \right) v_x^2 - \frac{\sigma^2}{2}f_5(t)v_y^2 + \left(\frac{\sigma^2}{2}f_5''(t)y^2 - f_5'(t)x \right) v_t, \quad (46)$$

$$Y_6 = \sigma^2 f_5(t)v_x v_y + \left(\frac{1}{2}f_5''(t)y^2 - \sigma^2 f_5'(t)x \right) v_y - f_5''(t)y v,$$

$$T_7 = -\frac{\sigma^2}{4}f_4'(t)y v_x^2 + \frac{1}{2}f_4(t)v_y v_x - \frac{\sigma^2}{2}f_4''(t)y v,$$

$$X_7 = \left(-\frac{\sigma^2}{2}f_4'(t)y v_x + f_4(t)v_y - \frac{1}{12}f_4'''(t)y^3 + \frac{\sigma^2}{2}f_4''(t)y x \right) v_{xxx} +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{4}f_4'(t)y v_{xx}^2 - \left(f_4(t)v_{xy} + \frac{\sigma^2}{2}f_4''(t)y \right) v_{xx} -$$

$$- \frac{\sigma^2}{6}f_4'(t)y v_x^3 + \left(\frac{1}{2}f_4(t)v_y - \frac{1}{24}f_4'''(t)y^3 + \frac{\sigma^2}{4}f_4''(t)y x \right) v_x^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}f_4'(t)y v_y^2 + \frac{1}{2}f_4(t)v_t v_y + \left(-\frac{1}{12}f_4'''(t)y^3 + \frac{\sigma^2}{2}x y f_4''(t) \right) v_t, \quad (47)$$

$$Y_7 = \frac{1}{2}f_4(t)v_{xx}^2 - \frac{1}{6}f_4(t)v_x^3 - \left(\frac{1}{2}f_4'(t)y v_y + \frac{1}{2}f_4(t)v_t \right) v_x + \frac{\sigma^2}{2}f_4(t)v_y^2 +$$

$$+ \left(-\frac{\sigma^2}{12}f_4'''(t)y^3 + \frac{1}{2}f_4''(t)y x \right) v_y + \left(\frac{\sigma^2}{4}f_4'''(t)y^2 - \frac{1}{2}f_4''(t)x \right) v,$$

$$\begin{aligned}
T_8 &= \frac{1}{2}f_3(t)v_{xx}^2 - \frac{1}{6}f_3(t)v_x^3 + \frac{1}{12}\left(2f_3'(t)x - \sigma^2 f_3''(t)y^2\right)v_x^2 + \frac{1}{3}f_3'(t)yv_yv_x - \\
&\quad - \frac{\sigma^2}{2}f_3(t)v_y^2 + \frac{1}{6}\left(2f_3''(t)x - \sigma^2 f_3'''(t)y^2\right)v, \\
X_8 &= \left(\left(-\frac{\sigma^2}{6}f_3''(t)y^2 + \frac{1}{3}f_3'(t)x\right)v_x + \frac{2}{3}f_3'(t)yv_y + f_3(t)v_t + \frac{1}{3}f_3'(t)v - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{72}f_3''''(t)y^4 + \frac{\sigma^2}{6}f_3'''(t)y^2x - \frac{1}{6}f_3''(t)x^2\right)v_{xxx} + \\
&\quad + \left(\frac{\sigma^2}{12}f_3''(t)y^2 - \frac{1}{6}f_3'(t)x\right)v_{xx}^2 + \\
&\quad + \left(-\frac{2}{3}f_3'(t)yv_{xy} - \frac{2}{3}f_3'(t)v_x - \frac{\sigma^2}{6}f_3'''(t)y^2 + \frac{1}{3}f_3''(t)x - f_3(t)v_{tx}\right)v_{xx} + \\
&\quad + \left(-\frac{\sigma^2}{18}f_3''(t)y^2 + \frac{1}{9}f_3'(t)x\right)v_x^3 + \\
&\quad + \left(\frac{1}{3}f_3'(t)yv_y + \frac{1}{2}f_3(t)v_t + \frac{1}{6}f_3'(t)v - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{144}f_3''''(t)y^4 + \frac{\sigma^2}{12}f_3'''(t)y^2x - \frac{1}{12}f_3''(t)x^2\right)v_x^2 - \\
&\quad - \frac{1}{3}f_3''(t)v_x + \left(\frac{1}{12}f_3''(t)y^2 - \frac{\sigma^2}{6}f_3'(t)x\right)v_y^2 + \frac{1}{3}f_3'(t)yv_tv_y + \frac{1}{2}f_3(t)v_t^2 + \\
&\quad + \left(\frac{1}{3}f_3'(t)v - \frac{1}{72}f_3''''(t)y^4 + \frac{\sigma^2}{6}f_3'''(t)y^2x - \frac{1}{6}f_3''(t)x^2\right)v_t, \\
Y_8 &= \frac{1}{3}f_3'(t)yv_{xx}^2 - \frac{1}{9}f_3'(t)yv_x^3 + \\
&\quad + \left(\left(-\frac{1}{6}f_3''(t)y^2 + \frac{\sigma^2}{3}f_3'(t)x\right)v_y - \frac{1}{3}f_3'(t)yv_t\right)v_x + \frac{\sigma^2}{3}f_3'(t)yv_y^2 + \\
&\quad + \left(\sigma^2 f_3(t)v_t + \frac{\sigma^2}{3}f_3'(t)v - \frac{1}{72}\sigma^2 f_3''''(t)y^4 + \frac{1}{6}f_3'''(t)y^2x - \frac{\sigma^2}{6}f_3''(t)x^2\right)v_y + \\
&\quad + \left(\frac{\sigma^2}{18}f_3''''(t)y^3 - \frac{1}{3}f_3'''(t)yx\right)v.
\end{aligned} \tag{48}$$

ТЕОРЕМА 4.2. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Законы сохранения, соответствующие вариационным точечным симметриям, которые допускает потенциальное уравнение 2D-об (14) при произвольном $p \neq 0$, задаются как*

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}(v_t^2 \mp v_{xx}^2 + v_x^2 + \sigma^2 v_y^2) + \frac{1}{p+2}v_x^{p+2}, \\
X_1 &= -(v_x^{p+1} \pm v_{xxx} + v_x)v_t \pm v_{tx}v_x, \\
Y_1 &= -\sigma^2 v_tv_y,
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= v_xv_t, \\
X_2 &= -\frac{p+1}{p+2}v_x^{p+2} \mp \left(v_xv_{xxx} - \frac{1}{2}v_{xx}^2\right) + \frac{\sigma^2}{2}v_y^2 - \frac{1}{2}v_t^2 - \frac{1}{2}v_x^2, \\
Y_2 &= -\sigma^2 v_yv_x,
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} T_3 &= v_y v_t, \\ X_3 &= -(v_x^{p+1} \pm v_{xxx} + v_x) v_y \pm v_{xy} v_{xx}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} Y_3 &= \frac{1}{p+2} v_x^{p+2} + \frac{1}{2} (\mp v_{xx}^2 + v_x^2 - \sigma^2 v_y^2 - v_t^2), \\ T_4 &= \frac{1}{2} y (v_t^2 \mp v_{xx}^2 + v_x^2 + \sigma^2 v_y^2) + \sigma^2 t v_y v_t + \frac{1}{p+2} y v_x^{p+2}, \\ X_4 &= -(t \sigma^2 v_y + y v_t) (\pm v_{xxx} + v_x + v_x^{p+1}) \pm (\sigma^2 t v_{xy} + y v_{tx}) v_{xx}, \\ Y_4 &= \frac{1}{p+2} t v_x^{p+2} - \sigma^2 \left(\frac{1}{2} (\pm v_{xx}^2 + \sigma^2 v_y^2 + v_t^2 - v_x^2) t + y v_t v_y \right), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} T_5 &= (f_1(y + \sigma t) + f_2(y - \sigma t)) v_t - \sigma (f_1'(y + \sigma t) - f_2'(y - \sigma t)) v, \\ X_5 &= - (f_1(y + \sigma t) + f_2(y - \sigma t)) (\pm v_{xxx} + v_x + v_x^{p+1}), \\ Y_5 &= \sigma^2 ((f_1'(y + \sigma t) + f_2'(y - \sigma t)) v - (f_1(y + \sigma t) + f_2(y - \sigma t)) v_y). \end{aligned} \quad (53)$$

2. При любом $p \neq 0$ потенциальное уравнение 2D-оБ (14) не допускает никаких дополнительных законов сохранения, отвечающих вариационным точечным симметриям.

4.1. Сохраняющиеся величины для уравнения оКП. Для потенциального уравнения оКП закон сохранения (41) возникает из симметрии (24а), отвечающей сдвигу времени, и дает сохраняющуюся энергию

$$\mathcal{E}[v] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} v_{xx}^2 - \frac{\sigma^2}{2} v_y^2 - \frac{1}{(p+1)(p+2)} v_x^{p+2} \right) dx dy. \quad (54)$$

Законы сохранения (42) и (43) возникают из симметрий (24б) и (24в), отвечающих пространственному сдвигу, и дают сохраняющиеся импульсы

$$\mathcal{P}^x[v] = \int_{\Omega} \frac{1}{2} v_x^2 dx dy, \quad (55)$$

$$\mathcal{P}^y[v] = \int_{\Omega} \frac{1}{2} v_x v_y dx dy. \quad (56)$$

Закон сохранения (44) возникает из симметрии (24г), отвечающей вращению и бусту, и аналогично дает сохраняющийся импульс

$$\mathcal{Q}[v] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} y v_x^2 - \sigma^2 t v_y v_x \right) dx dy. \quad (57)$$

В дополнение к этим сохраняющимся величинам существуют два пространственных потока, которые возникают из закона сохранения (45) и описывают сохраняющиеся топологические заряды

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1[v] &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{p+1} v_x^{p+1} + v_{xxx} + v_t, \sigma^2 v_y \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0, \\ \mathcal{F}_2[v] &= \int_{\partial\Omega} \left(y \left(\frac{1}{p+1} v_x^{p+1} + v_{xxx} + v_t \right), \sigma^2 (y v_y - v) \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Сохранение величин (54)–(58) имеет место при $p \neq 0$. Эти величины однородны по отношению к масштабной симметрии (26г). В частности, они имеют масштабные веса

$$w_{\mathcal{E}} = 1 - \frac{4}{p}, \quad w_{\mathcal{P}^x} = 3 - \frac{4}{p}, \quad w_{\mathcal{P}^y} = 2 - \frac{4}{p}, \quad w_{\mathcal{Q}} = 5 - \frac{4}{p},$$

и

$$w_{\mathcal{F}_1} = -\frac{2}{p}, \quad w_{\mathcal{F}_2} = 2 - \frac{2}{p},$$

как это определяется симметрией $\mathcal{C}[v] \rightarrow e^{w_{\mathcal{C}}}\mathcal{C}[v]$.

Наконец, три бесконечных семейства из законов сохранения (46)–(48), которые выполнены только при $p = 1$, дают два сохраняющихся дилатонных импульса

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}^x[v] &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} f_5(t) v_x^2 + f_5'(t) v \right) dx dy, \\ \tilde{\mathcal{P}}^y[v] &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} f_4(t) v_y v_x - \frac{\sigma^2}{4} f_4'(t) y v_x^2 - \frac{\sigma^2}{2} f_4''(t) y v \right) dx dy \end{aligned} \quad (59)$$

и сохраняющуюся дилатонную энергию

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}[v] &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} f_3(t) \left(v_x^2 - \sigma^2 v_y^2 - \frac{1}{3} v_x^3 \right) + \frac{1}{3} f_3'(t) \left(\frac{1}{2} x v_x^2 + y v_y v_x \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} f_3''(t) \left(x v - \frac{1}{4} y^2 v_x^2 \right) - \frac{\sigma^2}{6} f_3'''(t) y^2 v \right) dx dy. \end{aligned} \quad (60)$$

Все эти величины масштабно-неоднородны, если только функции f_3 , f_4 , f_5 не выбраны как мономы по t .

Сохраняющиеся энергии (54) и (60), импульсы (55)–(57), (59) и топологические заряды (58) существенным образом зависят от потенциала v . Таким образом, соответствующие законы сохранения нелокальны по u .

Единственный закон сохранения, локальный по u , есть x -момент, и для него сохраняющаяся величина (55) описывает массу величины u :

$$\mathcal{M}[u] = \int_{\Omega} u^2 dx dy = 2\mathcal{P}^x[v]. \quad (61)$$

Это величина масштабно-инвариантна, если и только если $p = 4/3$. При этом сохраняющаяся энергия масштабно-инвариантна, если и только если $p = 4$.

4.2. Сохраняющиеся величины для уравнения 2D-оБ. Аналогично для потенциального уравнения 2D-оБ закон сохранения (49) дает сохраняющуюся энергию

$$\mathcal{E}[v] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (v_t^2 \mp v_{xx}^2 + v_x^2 + \sigma^2 v_y^2) + \frac{1}{p+2} v_x^{p+2} \right) dx dy, \quad (62)$$

которая возникает из симметрии (27а), отвечающей сдвигу времени. Законы сохранения (50) и (51) дают сохраняющиеся импульсы

$$\mathcal{P}^x[v] = \int_{\Omega} v_x v_t dx dy, \quad (63)$$

$$\mathcal{P}^y[v] = \int_{\Omega} v_y v_t dx dy, \quad (64)$$

которые возникают из симметрий (27б) и (27в), отвечающих пространственному сдвигу. Закон сохранения (52) дает сохраняющийся бустовый импульс

$$\mathcal{Q}[v] = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} y(v_t^2 \mp v_{xx}^2 + v_x^2 + \sigma^2 v_y^2) + \sigma^2 t v_y v_t + \frac{1}{p+2} y v_x^{p+2} \right) dx dy, \quad (65)$$

который возникает из симметрии (27г), отвечающей бусту. Бесконечное семейство законов сохранения (53) дает бесконечное семейство сохраняющихся величин

$$\mathcal{T}[v] = \int_{\Omega} ((f_1(y + \sigma t) + f_2(y - \sigma t))v_t - \sigma(f'_1(y + \sigma t) - f'_2(y - \sigma t))v) dx dy, \quad (66)$$

которые являются аналогами поперечных импульсов, известных для линейного волнового уравнения $v_{tt} - \sigma^2 v_{yy} = 0$. В частности, если мы положим $f_1 = f_2 = 1/2$, то сохраняющаяся величина

$$\mathcal{T}[v] = \int_{\Omega} v_t dx dy = \dot{A}[v]$$

является производной по времени от амплитуды

$$A[v] = \int_{\Omega} v dx dy.$$

Это влечет уравнение $\ddot{A}[v] = 0$ и, следовательно, $A[v] = t\dot{A}[v]|_{t=0} + A[v]|_{t=0}$. Таким образом, амплитуда ведет себя так же, как и в случае свободной частицы. Если мы затем положим $f_1 = (y + \sigma t)/2$ и $f_2 = (y - \sigma t)/2$, то получим сохраняющуюся величину

$$\mathcal{T}[v] = \int_{\Omega} y v_t dx dy = \dot{A}_1[v],$$

являющуюся производной по времени от первого y -момента амплитуды

$$A_1[v] = \int_{\Omega} y v dx dy.$$

Отсюда $\ddot{A}_1[v] = 0$ и, следовательно, $A_1[v] = t\dot{A}_1[v]|_{t=0} + A_1[v]|_{t=0}$. Если мы положим $f_1 = (y + \sigma t)^2/2$ и $f_2 = (y - \sigma t)^2/2$, то результирующая сохраняющаяся величина есть

$$\mathcal{T}[v] = \int_{\Omega} ((y^2 + \sigma^2 t^2)v_t - 2\sigma^2 t v) dx dy = \dot{A}_2[v] + \sigma^2 t^2 \dot{A}[v] - 2\sigma^2 t A[v],$$

где $A_2[v] = \int_{\Omega} y^2 v dx dy$ является вторым y -моментом амплитуды. В результате получаем уравнение $\ddot{A}_2[v] = 2\sigma^2 A[v]$, из которого имеем

$$A_2[v] = \frac{1}{3} \sigma^2 t^3 \dot{A}[v]|_{t=0} + \sigma^2 t^2 A[v]|_{t=0} + t \dot{A}_2[v]|_{t=0} + A_2[v]|_{t=0}.$$

Аналогичные выражения возникают для y -моментов $A_n[v] = \int_{\Omega} y^n v dx dy$ более высокого порядка $n = 3, 4, \dots$.

Величины (62)–(66) сохраняются при $p \neq 0$. Они не имеют масштабирующих свойств за исключением случая $p = 1$, так как это единственный показатель степени

нелинейности, для которого существует масштабная симметрия (28). Эта масштабная симметрия содержит сдвиг функции v и порождает группу преобразований (30). Можно показать, что производные функции v преобразуются масштабно-однородным образом, за исключением преобразования $v_x \rightarrow e^{-2\epsilon} v_x - 1/2$, которое содержит сдвиг.

Чтобы выяснить, как преобразуются сохраняющиеся величины, можно применить общий результат из работы [23], который связывает действие симметрии на законы сохранения с коммутаторами масштабной симметрии и вариационными симметриями, которые порождают законы сохранения. Мы обнаружили, что энергия (62), y -момент (64), и бустовый импульс (65) масштабно-однородны по модулю добавления локально тривиальной сохраняющейся величины. В частности, они имеют масштабные веса

$$w_{\mathcal{E}} = w_{\mathcal{P}^x} = w_{\mathcal{P}^y} = -3, \quad w_{\mathcal{Q}} = -1, \quad (67)$$

как это определяется преобразованием $\mathcal{C}[v] \rightarrow e^{w\epsilon} \mathcal{C}[v]$. Напротив, x -момент (63) является только масштабно-однородным по модулю добавления сохраняющегося поперечного импульса $\dot{A}[v]$, а также локально тривиальной сохраняющейся величины. Кроме того, бесконечное семейство сохраняющихся величин (66) не является масштабно-однородным, если только функции f_1 , f_2 не выбраны как мономы по переменной $y \pm \sigma t$.

Наконец, все сохраняющиеся величины (62)–(66) существенным образом зависят от потенциала v , поэтому соответствующие законы сохранения нелокальны по u .

5. РЕШЕНИЯ ТИПА СОЛИТОННОЙ ВОЛНЫ

Решения типа солитонной волны представляют собой уединенную движущуюся в двумерном пространстве волну

$$u = U(x + \mu y - \nu t), \quad (68)$$

где параметры μ и ν задают направление и скорость волны. В более геометрическом виде такие решения можно записать как $x + \mu y = (x, y) \cdot \mathbf{k}$, где $\mathbf{k} = (1, \mu)$ есть постоянный вектор в плоскости (x, y) . Тогда волновая переменная выражается как

$$\xi = x + \mu y - \nu t = |\mathbf{k}|(\hat{\mathbf{k}} \cdot (x, y) - ct). \quad (69)$$

Здесь единичный вектор $\hat{\mathbf{k}} = (\cos \theta, \sin \theta)$, где $\tan \theta = \mu$, показывает направление распространения солитона, а постоянная $c = \nu/|\mathbf{k}|$, где $|\mathbf{k}|^2 = 1 + \mu^2$, определяет скорость солитона. Угол, задающий направление распространения, удовлетворяет условию $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, в то время как скорость $c > 0$ или $c < 0$. Заметим, что солитон (68) инвариантен относительно двухпараметрической группы трансляций $t \rightarrow t + \epsilon_1$, $x \rightarrow x + \epsilon_1 \nu - \epsilon_2 \mu$, $y \rightarrow y + \epsilon_2$ с $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}$.

Теперь выведем явные выражения для решений типа солитонной волны (68) уравнений оКП (3) и 2D-оБ (4). Для этого удобно использовать координатную форму переменной бегущей волны $\xi = x + \mu y - \nu t$.

Подстановка выражения (68) в уравнения оКП и 2D-оБ в потенциальной форме дает нелинейные ОДУ третьего порядка. Чтобы свести их к уравнениям с разделяющимися переменными, которые можно проинтегрировать, нам потребуются два

функционально независимых первых интеграла. Их можно получить из законов сохранения, приведенных в теоремах 4.1 и 4.2, с помощью следующей процедуры.

Предположим, что закон сохранения $D_t T + D_x X + D_y Y = 0$ не зависит явно от переменных t, x, y . Тогда из закона сохранения с помощью редукций мы получаем первый интеграл ОДУ для решения типа солитонной волны:

$$D_t|_{u=U(\xi)} = -\nu \frac{d}{d\xi}, \quad D_x|_{u=U(\xi)} = \frac{d}{d\xi}, \quad D_y|_{u=U(\xi)} = \mu \frac{d}{d\xi}. \quad (70)$$

Отсюда

$$\frac{d}{d\xi} ((X + \mu Y - \nu T)|_{u=U(\xi)}) = 0. \quad (71)$$

Таким образом, первый интеграл задается как

$$X + \mu Y - \nu T = C = \text{const}. \quad (72)$$

Физический смысл данного выражения состоит в том, что оно определяет пространственный поток сохраняющейся величины $\int_{\Omega} T \, dx \, dy$ в системе отсчета, движущейся в плоскости (x, y) со скоростью c в направлении $\mathbf{k}$ (т.е. в системе, где солитон покоится).

5.1. Решения типа солитонной волны для уравнения оКП. Начнем с потенциального уравнения оКП (9). Используя соотношение (8), связывающее u с потенциалом v , и подставляя солитонное решение (68), получаем нелинейное ОДУ третьего порядка для $U(\xi)$:

$$(\sigma^2 \mu^2 - \nu)U' + U^p U' + U''' = 0. \quad (73)$$

Из теоремы 4.1 мы видим, что законы сохранения для уравнения оКП не зависят явно от t, x, y и содержат энергию (41), x - и y -моменты (42), (43) и пространственный поток (45) с $f_2 = 1$ и $f_1 = 0$. Применяя формулу (72) для первого интеграла к этим четырем законам сохранения, мы находим, что с точностью до постоянного общего множителя энергия и y -момент дают тот же первый интеграл, что и x -момент,

$$C_1 = UU'' + \frac{1}{2}(\sigma^2 \mu^2 - \nu)U^2 - \frac{1}{2}U'^2 + \frac{1}{p+2}U^{p+2}, \quad (74)$$

в то время как пространственный поток дает независимый первый интеграл

$$C_2 = U'' + (\sigma^2 \mu^2 - \nu)U + \frac{1}{p+1}U^{p+1}. \quad (75)$$

Нас интересуют решения типа уединенных волн, поэтому мы налагаем асимптотические условия $U, U', U'' \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Тогда $C_1 = C_2 = 0$. Далее, взяв комбинацию первых интегралов (74) и (75), мы получаем ОДУ первого порядка с разделенными переменными

$$U'^2 = (\nu - \mu^2 \sigma^2)U^2 - \frac{2}{(p+2)(p+1)}U^{p+2}, \quad (76)$$

которое можно проинтегрировать непосредственно. Его общее решения с точностью до сдвига переменной ξ задается как

$$U(\xi) = (2(p+2)(p+1)\kappa)^{1/p} \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}p(p+1)(p+2)\sqrt{\kappa}\xi\right)^{2/p}, \quad \kappa = \nu - \mu^2\sigma^2, \quad (77)$$

является гладким и удовлетворяет необходимым условиям затухания при $\kappa > 0$ и $p > 0$. При всех $p > 0$ оно представляет собой общее решение уравнения оКП (3) типа солитонной волны и совпадает с хорошо известным решением из работы [4] для обычного уравнения КП (1), если $p = 1$.

Обсудим некоторые свойства решения (77).

Прежде всего, параметры $\mu = \operatorname{tg} \theta$ и $\nu = c\sqrt{1 + \mu^2}$ определяют угол θ направления движения солитона относительно оси x и скорость c солитона вдоль направления своего движения. Эти два параметра должны подчиняться кинематическому условию $\nu > \operatorname{sgn}(\sigma^2)\mu^2$ где, напомним, $\sigma^2 = \pm 1$. Поскольку скорость c должна быть конечна, мы заключаем, что солитон может распространяться в любом направлении, кроме направления с $|\theta| = \pi/2$ (т.е. параллельно оси y). В случае $\sigma^2 = -1$ кинематическое условие выполняется для всех скоростей $c > 0$, а также для скоростей $0 > c > -\mu^2/\sqrt{1 + \mu^2}$. Напротив, в случае $\sigma^2 = 1$ кинематическое условие требует, чтобы скорость удовлетворяла неравенству $c > \mu^2/\sqrt{1 + \mu^2}$ и, следовательно, была положительна. Эти кинематические свойства не зависят от показателя степени нелинейности.

Далее, физические сохраняющиеся величины для решения типа солитонной волны задаются плотностями x - и y -моментов

$$\left(\frac{q}{2}\kappa\right)^{1+2/p} \operatorname{sech}\left(\frac{pq}{2}\sqrt{\kappa}\xi\right)^{4/p}, \quad \mu\left(\frac{q}{2}\kappa\right)^{1+2/p} \operatorname{sech}\left(\frac{pq}{2}\sqrt{\kappa}\xi\right)^{4/p},$$

а также плотностью энергии

$$\left(\frac{q}{2}\kappa\right)^{1+2/p} \operatorname{sech}\left(\frac{pq}{2}\sqrt{\kappa}\xi\right)^{4/p} \left(\left(q + \frac{1}{q}\right) \operatorname{th}\left(\frac{pq}{2}\sqrt{\kappa}\xi\right)^2 - \frac{q\nu}{\kappa} \right),$$

где $q = (p+1)(p+2)$. Эти плотности получаются из законов сохранения (41)–(43) для решения типа солитонной волны (77).

5.2. Решения типа солитонной волны для уравнения 2D-оБ. Применим предыдущие рассуждения к потенциальному уравнению 2D-оБ (14).

Нелинейное ОДУ третьего порядка для решения типа солитонной волны (68) имеет вид

$$(1 + \sigma^2\mu^2 - \nu^2)U' + (p+1)U^p U' \pm U''' = 0. \quad (78)$$

Из теоремы 4.2 мы видим, что законы сохранения для уравнения 2D-оБ не зависят явно от t , x , y и содержат энергию (49), x - и y -моменты (50), (51) и поперечный импульс (53) с $f_1 = f_2 = 1$. Формула (72) для первого интеграла в этом случае дает интеграл

$$C_1 = \pm U''' + (1 + \mu^2\sigma^2 - \nu^2)U + U^{p+1}, \quad (79)$$

который возникает из поперечного импульса, а также интеграл

$$C_2 = \pm(UU'' - \frac{1}{2}U'^2) + \frac{1}{2}(1 + \mu^2\sigma^2 - \nu^2)U^2 + \frac{p+1}{p+2}U^{p+2}, \quad (80)$$

который приходит из энергии и x - и y -моментов. Данные первые интегралы функционально независимы. Нас интересуют решения типа уединенных волн, поэтому мы налагаем асимптотические условия $U, U', U'' \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, отсюда $C_1 = C_2 = 0$. Тогда, взяв комбинацию первых интегралов (79) и (80), мы получаем ОДУ первого порядка с разделенными переменными

$$U'^2 = \pm \left((\nu^2 - \mu^2 \sigma^2 - 1) U^2 - \frac{2}{p+2} U^{p+2} \right), \quad (81)$$

которое можно проинтегрировать непосредственно. Его общее решения с точностью до сдвига переменной ξ задается как

$$U(\xi) = \left(\frac{(p+2)}{2} \kappa \right)^{1/p} \operatorname{sech} \left(\frac{p(p+2)}{2} \sqrt{\pm \kappa} \xi \right)^{2/p}, \quad \kappa = \nu^2 - \mu^2 \sigma^2 - 1, \quad (82)$$

является гладким и удовлетворяет необходимым условиям затухания, если $\kappa > 0$ и $p > 0$ или если $\kappa < 0$ и $1/p$ – рациональное число с нечетным знаменателем. Таким образом, при $\kappa > 0$ решение (82) уравнения 2D-оБ, в котором под корнем стоит знак плюс, описывает солитонную волну при всех $p > 0$, а в случае $\kappa < 0$, решение (82), в котором под корнем стоит знак минус, описывает солитонную волну, если $1/p$ – рациональное число с нечетным знаменателем.

Далее обсудим некоторые свойства решения (82). Напомним, что μ и ν задают угол $\theta = \operatorname{arctg} \mu$ направления движения солитона относительно оси x и скорость солитона $c = \nu / \sqrt{1 + \mu^2}$. Заметим, что, поскольку скорость c должна быть конечна, направление движения не может быть параллельно оси y .

Во-первых, в случае знака плюс под корнем в (82) параметры должны удовлетворять кинематическому условию $\nu^2 > \operatorname{sgn}(\sigma^2) \mu^2 + 1$. Оно влечет, что $|c| > 1$, если $\sigma^2 = 1$, и $|c| > \sqrt{(1 - \mu^2)/(1 + \mu^2)}$, если $\sigma^2 = -1$. Следовательно, при $\sigma^2 = -1$ направление движения должно лежать внутри угла размера $\pi/4$ относительно оси x , при этом существует минимальная скорость, $|c| > \sqrt{(1 - \mu^2)/(1 + \mu^2)} > 0$.

Во-вторых, в случае знака минус параметры солитона μ и ν должны удовлетворять противоположному кинематическому условию $\nu^2 < \operatorname{sgn}(\sigma^2) \mu^2 + 1$. Следовательно, если $\sigma^2 = 1$, существует максимальная скорость, $|c| < 1$. Если $\sigma^2 = -1$, направление движения ограничена углом $\pi/4$ по отношению к оси x , а скорость подчиняется условию $|c| < \sqrt{(1 - \mu^2)/(1 + \mu^2)}$. Эти кинематические свойства не зависят от показателя степени нелинейности.

Наконец, физические сохраняющиеся величины для решения типа солитонной волны задаются плотностями x - и y -моментов

$$-\nu \left(\frac{q}{2} \kappa \right)^{1/p} \operatorname{sech} \left(\frac{pq}{2} \sqrt{\pm \kappa} \xi \right)^{4/p}, \quad -\mu \nu \left(\frac{q}{2} \kappa \right)^{1+2/p} \operatorname{sech} \left(\frac{pq}{2} \sqrt{\kappa} \xi \right)^{4/p},$$

а также плотностью энергии

$$-\left(\frac{q}{2} \kappa \right)^{1+2/p} \operatorname{sech} \left(\frac{pq}{2} \sqrt{\pm \kappa} \xi \right)^{4/p} \left(\left(q + \frac{1}{q} \right) \operatorname{th} \left(\frac{pq}{2} \sqrt{\pm \kappa} \xi \right)^2 - \frac{2q\nu^2}{\kappa} \right),$$

где $q = p + 2$. Эти плотности получаются из законов сохранения (49)–(51) для решения типа солитонной волны (82).

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Для уравнения оКП (3) и уравнения 2D-оБ (4) со степенными нелинейностями с показателем степени p выведены все законы сохранения, возникающие из вариационных точечных симметрий, и с их помощью получены общие решения типа солитонной волны для этих двух уравнений при всех показателях $p > 0$. Мы также обсудили некоторые основные кинематические свойства таких решений.

Наши результаты можно будет использовать в качестве отправной точки при исследовании устойчивости решений типа солитонной волны для уравнения оКП. Известно [2], [24], что солитонные решения уравнения КП ($p = 1$) устойчивы, если $\sigma^2 = 1$, и неустойчивы в противоположном случае $\sigma^2 = -1$. Интересно получить ответ на вопрос, являются ли устойчивым решения типа солитонной волны при более высоких показателях $p \geq 2$. По сравнению с уравнением КдФ критический показатель для сохраняющейся массы в случае двух измерений равен $p = 4/3$, в то время для энергии он равен $p = 4$.

В дополнение к решениям типа солитонной волны уравнение КП обладает решениями типа лампов, которые являются рациональными функциями и содержат несколько параметров. Для модифицированного уравнения КП неизвестно никаких решений типа лампов, и интересно, будет ли аналогичный результат справедлив для уравнения оКП при всех $p > 1$. Устойчивость решений типа солитонной волны и типа лампа можно исследовать и для уравнения 2D-оБ.

В качестве другого направления исследований отметим работу [25], в которой изучались решения для комбинации обычного и модифицированного уравнений КП

$$(u_t + 6\alpha u u_x + 6\beta u^2 u_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0,$$

а также для комбинации обычного и модифицированного двумерных уравнений Буссинеска

$$u_{tt} = u_{xx} + (6\alpha u u_x + 6\beta u^2 u_x + u_{xxx})_x + u_{yy}.$$

Естественной задачей является поиск решений типа солитонной волны, решений типа лампов и других типов уединенных волн, а также законов сохранения для полного обобщения уравнений КП и двумерного уравнения Буссинеска

$$(u_t + f(u)u_x + u_{xxx})_x + \sigma^2 u_{yy} = 0, \quad u_{tt} = u_{xx} + (f(u)u_x + u_{xxx})_x + \sigma^2 u_{yy}.$$

Благодарности. Мы благодарим Такаюки Чудиа за полезные замечания.

Список литературы

- [1] M. J. Ablowitz, H. Segur, "On the evolution of packets of water waves", *J. Fluid Mech.*, **92**:4 (1979), 691–715.
- [2] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, "Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах", *Докл. АН СССР*, **192**:4 (1970), 753–756.
- [3] V. Veerakumar, M. Daniel, "Modified Kadomtsev–Petviashvili (MKP) equation and electromagnetic soliton", *Math. Comput. Simulation*, **62**:1–2 (2003), 163–169.
- [4] J. Satsuma, "N-Soliton solution of the two-dimensional Korteweg–deVries equation", *J. Phys. Soc. Japan*, **40**:1 (1976), 286–290.
- [5] J. Satsuma, M. J. Ablowitz, "Two-dimensional lumps in nonlinear dispersive systems", *J. Math. Phys.*, **20**:7 (1979), 1496–1503.

- [6] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its, V. B. Matveev, “Two-dimensional solitons of the Kadomtsev–Petviashvili equation and their interaction”, *Phys. Lett. A*, **63**:3 (1977), 205–206.
- [7] F. Gesztesy, H. Holden, E. Saab, B. Simon, “Explicit construction of solutions of the modified Kadomtsev–Petviashvili equation”, *J. Funct. Anal.*, **98**:1 (1991), 211–228.
- [8] B. G. Konopel’chenko, V. G. Dubrovsky, “Inverse spectral transform for the modified Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Stud. Appl. Math.*, **86**:3 (1992), 219–268.
- [9] T. Tao, “Why are solitons stable?”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **46**:1 (2009), 1–33.
- [10] L. V. Bogdanov, V. E. Zakharov, “The Boussinesq equation revisited”, *Phys. D*, **165**:3–4 (2002), 137–162.
- [11] G. E. Falkovich, M. D. Spector, S. K. Turitsyn, “Destruction of stationary solutions and collapse in the nonlinear string equation”, *Phys. Lett. A*, **99**:6–7 (1983), 271–274.
- [12] R. Naz, Z. Ali, I. Naeem, “Reductions and new exact solutions of ZK, Gardner KP, and modified KP equations via generalized double reduction theorem”, *Abstr. Appl. Anal.*, **2013** (2013), 340564, 11 pp.
- [13] W. Rui, P. Zhao, Y. Zhang, “Invariant solutions and conservation laws of the $(2 + 1)$ -dimensional Boussinesq equation”, *Abstr. Appl. Anal.*, **2014**:2014 (2014), 840405, 6 pp.
- [14] A. R. Adem, C. M. Khalique, A. Biswas, “Solutions of Kadomtsev–Petviashvili equation with power law nonlinearity in $1 + 3$ dimensions”, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **34**:5 (2010), 532–543.
- [15] П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989.
- [16] G. W. Bluman, A. F. Cheviakov, S. C. Anco, *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, **168**, Springer, New York, 2010.
- [17] S. C. Anco, G. Bluman, “Direct construction method for conservation laws of partial differential equations Part II: General treatment”, *Eur. J. Appl. Math.*, **13**:5 (2002), 567–585.
- [18] L. A. Dickey, “On Hamiltonian and Lagrangian formalisms for the KP-hierarchy of integrable equations”, *Ann. Acad. Sci. (N. Y.)*, **491**:1 (1987), 131–148.
- [19] S. C. Anco, E. Recio, M. Gandarias, M. Bruzón, “A nonlinear generalization of the Camassa–Holm equation with peakon solutions”, *Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, Proceedings of the 10th AIMS Conference, eds. M. de Leon, W. Feng, Z. Feng, J. Lopez-Gomez, X. Lu, J. M. Martell, J. Parcet, D. Peralta-Salas, W. Ruan, AIMS, Madrid, Spain, 2015, 29–37.
- [20] S. Y. Lou, “Symmetries of the Kadomtsev–Petviashvili equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26**:17 (1993), 4387–4394.
- [21] S. C. Anco, “Generalization of Noether’s theorem in modern form to non-variational partial differential equations”, *Recent Progress and Modern Challenges in Applied Mathematics, Modeling and Computational Science*, Fields Institute Communications, **79**, Springer, New York, 2017, 119–182.
- [22] T. Wolf, “A comparison of four approaches to the calculation of conservation laws”, *Eur. J. Appl. Math.*, **13**:2 (2002), 129–152.
- [23] S. C. Anco, A. Kara, “Symmetry-invariant conservation laws of partial differential equations”, *Eur. J. Appl. Math.*, **29**:1 (2017), 78–117.
- [24] I. S. O’Keir, E. J. Parkes, “The derivation of a modified Kadomtsev–Petviashvili equation and the stability of its solutions”, *Phys. Scr.*, **55**:2 (1997), 135–142.
- [25] M. Matsukawa, S. Watanaba, H. Tanaca, “Soliton solutions of generalized 2D Boussinesq equation with quadratic and cubic nonlinearity”, *J. Phys. Soc. Japan*, **58**:3 (1989), 827–830.