Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Факеки, Г. Макорини, М. Беккариа, Киральные следовые соотношения в $\mathcal{N} = 2^*$ суперсимметричных калибровочных теориях, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 3, 390–403

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:23:57

© 2018 г. А. Факеки^{*†}, Г. Макорини^{*†}, М. Беккариа^{*†}

КИРАЛЬНЫЕ СЛЕДОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В $\mathcal{N} = 2^*$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

Проведен анализ кирального кольца в Ω -деформированных $\mathcal{N} = 2^*$ суперсимметричных калибровочных теориях. С применением метода локализации выведены в замкнутом виде тождества для вакуумных средних киральных операторов следа. Для задания киральных операторов следа и системы локальных интегралов движения в соответствующей двумерной конформной теории поля в $SU(2)$ -случае использован подход Алдая–Гайотто–Тачикавы. В рамках этого подхода предсказаны некоторые универсальные члены, появляющиеся в киральных следовых тождествах.

Ключевые слова: суперсимметричные калибровочные теории, непертурбативные эффекты, интегрируемость.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9485>

1. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних десятилетий интенсивное всестороннее исследование суперсимметричных моделей было направлено на достижение понимания непертурбативных эффектов в калибровочных теориях. Теории поля с расширенной суперсимметрией занимают особое место в этих моделях благодаря теоремам, не требующим использования ренормировки [1]–[3]. В максимально симметричном $\mathcal{N} = 4$ случае β -функция равна нулю как в рамках теории возмущений, так и вне нее, и это означает, что модель является суперконформной даже на квантовом уровне. В $\mathcal{N} = 2$ теориях β -функция является в точности однопетлевой вследствие суперсимметрии, но получает непертурбативные вклады при любом инстантонном числе. Значительный шаг вперед к пониманию непертурбативной динамики в $\mathcal{N} = 2$ калибровочных теориях был сделан Зайбергом и Виттенем (ЗВ) [4]. Они показали, что построение препотенциала, управляющего низкоэнергетической чистой $SU(2)$ -теорией, можно свести к вычислению контурных интегралов вдоль подходящей гиперболической

^{*}Dipartimento di Matematica e Fisica, Università del Salento, Lecce, Italy

[†]Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Lecce, Lecce, Italy.

E-mail: alberto.fachechi@le.infn.it, macorini@nbi.ku.dk, matteo.beccaria@le.infn.it

кривой. Дальнейшие исследования [5] показали, что эта особенность имеет место во многих $\mathcal{N} = 2$ теориях. Помимо получения низкоэнергетических точных решений, подход ЗВ полезен для геометрической интерпретации S -дуальности [6], [7], также он проливает свет на связь теории с классическими интегрируемыми системами [8]–[11].

Альтернативой подходу ЗВ служит вычисление инстантонных вкладов с использованием преимуществ методов локализации. В работе [12] Некрасов ввел так называемый Ω -фон, регуляризирующий некомпактность в пространствах модулей инстантонов (см. также работы [13], [14]). Таким способом можно ввести корректно определенную статистическую сумму¹⁾ $\mathcal{Z}(\epsilon_1, \epsilon_2, \mathbf{a})$. Ее свободную энергию

$$\mathcal{F}(\epsilon_1, \epsilon_2, \mathbf{a}) = -\epsilon_1 \epsilon_2 \ln \mathcal{Z}(\epsilon_1, \epsilon_2, \mathbf{a}) \quad (1)$$

можно вычислить точно при любом инстантонном числе и свести к препотенциалу ЗВ, положив параметры деформации равными нулю [12], [15]. В последнее время статистическая сумма Некрасова обрела новое важное значение благодаря открытию дуальности Алдая–Гайотто–Тачикавы (АГТ) [16], а также благодаря своей связи с $\mathcal{N} = 2$ топологической статистической суммой теории струн [17]–[19]. Эти аспекты теории могут стимулировать изучение статистической суммы Некрасова также для конечных параметров деформации (см., например, работы [20], [21]).

В своей исходной формулировке дуальность АГТ связывает Ω -деформированные $\mathcal{N} = 2$ суперконформные колчанные $SU(2)$ -калибровочные теории и двумерную ливиллевскую КТП на подходящих римановых поверхностях. Физическая мотивация такого соответствия между двумерными и четырехмерными теориями лежит в М-теории [22], [23], поскольку данные $\mathcal{N} = 2$ модели можно получить с помощью размерной редукции шестимерной $(2, 0)$ - A_1 -теории на римановых поверхностях с выколотой точкой. На количественном уровне эта дуальность утверждает, что регуляризованная инстантонная статистическая сумма эквивалентна конформному блоку с подходящей вставкой оператора. Вслед за работой АГТ были предложены новые соответствия между двумерными и четырехмерными теориями, включая большие колчаны и КТП Тоды (детали см., например, в работах [23]–[29]).

Помимо инстантонной статистической суммы, важную роль в калибровочной теории играют киральные операторы, в том числе степени скалярного поля в калибровочно мультиплете, т. е. $\text{Tr } \Phi^n$, поскольку они естественным образом возникают при изучении различных аспектов интегрируемости [30], [31] и физики поверхностных операторов [32]–[37]. В свете дуальности АГТ также ожидается, что их вакуумные средние $\mathcal{T}_n$ связаны с корреляционными функциями со вставкой гамильтонианов в рамках дуальной КТП [38], [39]. При этом изучение структуры кирального кольца этих операторов играет главную роль в понимании физики суперсимметричных калибровочных теорий. В недеформированном случае хорошо известно [40], что киральные следы не являются независимыми также на квантовом уровне. Для калибровочных $SU(N)$ -теорий существуют ровно $N - 1$ независимых величин $\mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_N$. Все более высокие вакуумные средние можно выразить как

$$\mathcal{T}_i = \mathcal{G}_i(\mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_N; q), \quad i > N, \quad (2)$$

¹⁾Здесь $\mathbf{a}$ – вакуумное среднее скалярного поля в калибровочном мультиплете, а ϵ_1, ϵ_2 – параметры деформации.

где зависимость от q учитывает все непертурбативные вклады. Эта зависимость самым тесным образом связана с материальной природой теории. В самом деле, для чистого случая она просто полиномиальная, и это говорит о том, что непертурбативные вклады обрезаются на конечном инстантонном числе (см. [39], [41]). В общем случае недеформированные киральные соотношения между следами фиксируются с помощью резольвенты [40], [41].

В настоящей работе в контексте $\mathcal{N} = 2^*$ теории изучаются модификации киральной кольцевой структуры, обусловленные Ω -фоном. Эта модель является суперконформной²⁾ и может быть получена с помощью массовой деформации $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной калибровочной теории: присоединенный мультиплет приобретает массу m , что вызывает частичное нарушение суперсимметрии $\mathcal{N} = 4 \rightarrow \mathcal{N} = 2$ (см. детали в работе [43]). С точки зрения соответствия АГТ $\mathcal{N} = 2^*$ теория соотносится с КТП на торе [16] и потому наследует ее модулярную структуру. Отсюда следует, что инстантонные поправки представляют собой (квази)модулярную форму Эйзенштейна [41], [43]. Что делает данный факт актуальным в контексте физики интегрируемых систем, так это то, что он убедительно свидетельствует о жесткой связи кирального кольца с бесконечной алгеброй локальных интегралов движения в КТП [44]. Впервые это было показано для $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ -калибровочной теории с $N_f = 4$ фундаментальными мультиплетами [38]. На основании данных результатов мы выдвигаем общую гипотезу о связи кирального кольца в калибровочной теории с системой гамильтонианов в КТП (см. также работу [39]).

2. Ω -ДЕФОРМИРОВАННАЯ $\mathcal{N} = 2^*$ КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ

В этом разделе мы вводим основные составляющие наших вычислений, а именно формулы локализации для инстантонной статистической суммы и вакуумные средние киральных операторов следа. Подробности можно найти в [45]–[48].

Формулы локализации для инстантонной статистической суммы и вакуумные средние киральных операторов следа. В рамках локализационного подхода статистическая сумма Некрасова имеет вид произведения классической, пертурбативной и инстантонной частей:

$$\mathcal{Z}(\mathbf{a}, m, \epsilon_i | q) = \mathcal{Z}_{\text{cl}}(\mathbf{a}, m, \epsilon_i | q) \mathcal{Z}_{\text{1-loop}}(\mathbf{a}, m, \epsilon_i) \mathcal{Z}_{\text{inst}}(\mathbf{a}, m, \epsilon_i | q), \quad (3)$$

где инстантонный считающий параметр соотносится с комплексифицированным калибровочным взаимодействием в теории как $q = e^{2\pi i \tau}$, где $\tau = \theta/(2\pi) + 4\pi i/g^2$. Классический вклад имеет простой вид:

$$\mathcal{Z}_{\text{cl}}(\mathbf{a}, m, \epsilon_i | q) = \exp\left(-\frac{a^2 \ln q}{\epsilon_1 \epsilon_2}\right), \quad (4)$$

где q – инстантонный считающий параметр. С другой стороны, пертурбативный вклад задается в терминах гамма-функции Барнса [14]. Наконец, инстантонную

²⁾Хотя присутствие массового члена на классическом уровне нарушает конформную инвариантность, на квантовом уровне поток ренормализационной группы при низкой энергии приводит к сверхконформной точке, где, конечно, β -функция исчезает. В рамках такого подхода в литературе уже обсуждались низкоэнергетические суперконформные теории, получающиеся в результате массовой деформации $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса (см., например, работу [42]).

статистическую сумму можно разложить в сумму по вкладам, ассоциированным со множеством диаграмм Юнга $\mathbf{Y}$ с общим числом клеток $|\mathbf{Y}|$, равным инстантонному числу:

$$\mathcal{Z}_{\text{inst}}(\mathbf{a}, m, \epsilon_i | q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sum_{|\mathbf{Y}|=k} \mathcal{Z}(\mathbf{Y}). \quad (5)$$

В $U(N)$ -теории $\mathbf{Y}$ является диаграммой Юнга из N клеток. В каждом инстантонном секторе можно точно рассчитать величину $\mathcal{Z}(\mathbf{Y})$ по формуле Некрасова. Для удобства дальнейшего изложения сначала введем величину

$$\phi(a_{uv}, Y_u, Y_v, s) = a_{uv} - \epsilon_1 L_{Y_v}(s) + \epsilon_2 (A_{Y_u}(s) + 1), \quad (6)$$

где $L_Y(s)$ и $A_Y(s)$ суть количество клеток диаграммы Юнга Y ниже клетки s (длина ноги) и количество клеток справа от s (длина руки), кроме того, $a_{uv} = a_u - a_v$. Функции Некрасова имеют вид

$$\mathcal{Z}(\mathbf{Y}) = \prod_{u,v=1}^N \prod_{s \in Y_u} \frac{(\phi(a_{uv}, Y_u, Y_v, s) - \tilde{m})(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \phi(a_{uv}, Y_u, Y_v, s) - \tilde{m})}{\phi(a_{uv}, Y_u, Y_v, s)(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \phi(a_{uv}, Y_u, Y_v, s))}. \quad (7)$$

Здесь $\tilde{m} = m + (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$, где m – присоединенная масса. Поскольку мы рассматриваем $SU(N)$ -теории, необходимо в дальнейшем наложить следующее ограничение на след: $\sum_u a_u = 0$.

После того как мы ввели статистическую сумму, нам потребуются формулы локализации для общих киральных наблюдаемых. Их нетрудно найти в литературе, но для согласованности работы мы приведем их здесь. В этом контексте важной является функция

$$O_m(\mathbf{Y}) = \sum_{u=1}^N \left[a_u^m + \sum_{j=1}^{k_{1u}} ((a_u + (\epsilon_2(j-1) + \epsilon_1 k'_{ju}))^m - (a_u - \epsilon_2(j-1))^m - (a_u + \epsilon_2 j + \epsilon_1 k'_{ju}))^m + (a_u + \epsilon_2 j)^m) \right], \quad (8)$$

где k_{ju} (k'_{ju}) – число клеток в j -й строке (столбце) диаграммы Юнга Y_u . Тогда вакуумные средние киральных операторов следа имеют вид

$$\langle \text{Tr } \varphi^m \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{inst}}} \sum_k q^k \sum_{|\mathbf{Y}|=k} O_m(\mathbf{Y}) \mathcal{Z}(\mathbf{Y}). \quad (9)$$

Для мультиследового оператора $\text{Tr } \Phi^n \text{Tr } \Phi^m$ необходимо использовать функции $O_n(\mathbf{Y}) O_m(\mathbf{Y})$. Отсюда следует, что для недеформированной теории имеет место факторизация следа $\langle \text{Tr } \Phi^n \text{Tr } \Phi^m \rangle \rightarrow \langle \text{Tr } \Phi^n \rangle \langle \text{Tr } \Phi^m \rangle$ [40], которая при этом не выполняется в общем Ω -фоне (см., например, работу [41]).

Результаты. Чтобы понять наш метод вывода тождеств для киральных колец, полезно начать с недеформированных $SU(2)$ -теорий, используя формулы локализации³⁾. Очевидно, эти формулы дают вакуумные средние операторов следа в виде

³⁾О резольвентной технике в указанном случае см. работу [41].

степенных рядов по инстантонному считающему параметру с коэффициентами, зависящими от вакуумного среднего a скалярного поля, присоединенной массы m мультиплета и параметров деформации. Если применить формулы локализации и затем перейти к пределу $\epsilon_i \rightarrow 0$, то мы получим первые три нетривиальных следа:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_2 &= 2a^2 + q\left(-4m^2 + \frac{m^4}{a^2}\right) + q^2\left(-12m^2 + \frac{6m^4}{a^2} - \frac{3m^6}{a^4} + \frac{5m^8}{16a^6}\right) + \\ &\quad + q^3\left(-16m^2 + \frac{12m^4}{a^2} - \frac{24m^6}{a^4} + \frac{15m^8}{a^6} - \frac{7m^{10}}{2a^8} + \frac{9m^{12}}{32a^{10}}\right) + \mathcal{O}(q^4), \\ \mathcal{T}_4 &= 2a^4 + q\left(-24a^2m^2 + 6m^4\right) + q^2\left(-72a^2m^2 + 48m^4 - \frac{18m^6}{a^2} + \frac{9m^8}{8a^4}\right) + \\ &\quad + q^3\left(-96a^2m^2 + 152m^4 - \frac{156m^6}{a^2} + \frac{72m^8}{a^4} - \frac{55m^{10}}{4a^6} + \frac{7m^{12}}{8a^8}\right) + \mathcal{O}(q^4), \\ \mathcal{T}_6 &= 2a^6 + q\left(-60a^4m^2 + 15a^2m^4\right) + q^2\left(-180a^4m^2 + 270a^2m^4 - 105m^6 + \frac{135m^8}{16a^2}\right) + \\ &\quad + q^3\left(-240a^4m^2 + 1380a^2m^4 - 1060m^6 + \frac{405m^8}{a^2} - \frac{285m^{10}}{4a^4} + \frac{125m^{12}}{32a^6}\right) + \mathcal{O}(q^4).\end{aligned}$$

Понятно, что инстантонные поправки в $\mathcal{N} = 2^*$ теории возникают при любом инстантонном числе. Однако, учитывая общую модулярную структуру модели и результаты резольвентного подхода, мы знаем, что они должны суммироваться в терминах рядов Эйзенштейна⁴⁾ E_2 , E_4 и E_6 . В поисках подходящей комбинации этих выражений мы можем переписать предыдущие формулы в виде следующих разложений по массе:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_2 &= 2a^2 + \frac{E_2 - 1}{6}m^2 + \frac{E_4 - E_2^2}{288a^2}m^4 + \frac{-5E_2^3 + 3E_4E_2 + 2E_6}{17280a^4}m^6 + \mathcal{O}(m^8), \\ \mathcal{T}_4 &= 2a^4 + a^2(E_2 - 1)m^2 + \frac{5E_2^2 - 60E_2 + 13E_4 + 42}{720}m^4 + \\ &\quad + \frac{-20E_2^3 + 15E_2^2 + 18E_4E_2 - 15E_4 + 2E_6}{8640a^2}m^6 + \mathcal{O}(m^8), \\ \mathcal{T}_6 &= 2a^6 + \frac{5}{2}a^4(E_2 - 1)m^2 + \frac{a^2}{96}(35E_2^2 - 120E_2 + E_4 + 84)m^4 + \\ &\quad + \frac{-525E_2^3 - 350E_2^2 + 21(39E_4 + 140)E_2 - 2(455E_4 + 57E_6 + 930)}{40320}m^6 + \mathcal{O}(m^8).\end{aligned}$$

Теперь мы можем обратить первое соотношение, чтобы выразить параметр a через $\mathcal{T}_2$ и подставить его в высшие тождества. С помощью этой процедуры мы без труда восстанавливаем результаты недеформированной теории [41].

Теперь можно попытаться следовать той же методике в деформированном случае. При этом средние значения оказываются гораздо более значимыми. Например, для

⁴⁾Модулярные формы Эйзенштейна имеют вид

$$E_2 = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n, \quad E_4 = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n, \quad E_6 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n,$$

где $\sigma_p(n)$ – функция дивизора порядка p от целого n .

$n = 2$ мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 = & 2a^2 + q\left(\frac{m^4}{a^2} - 4m^2\right) + q^2\left(\frac{5m^8}{16a^6} - \frac{3m^6}{a^4} + \frac{6m^4}{a^2} - 12m^2\right) + \mathcal{O}(q^3) + \\ & + p\left[q\left(\frac{m^2}{a^2} - 4\right) + q^2\left(-\frac{m^8}{8a^8} + \frac{17m^6}{8a^6} - \frac{15m^4}{2a^4} + \frac{6m^2}{a^2} - 12\right) + \mathcal{O}(q^3)\right] + \\ & + s^2\left[q\left(\frac{m^4}{4a^4} - \frac{m^2}{2a^2} + 1\right) + q^2\left(\frac{21m^8}{32a^8} - \frac{65m^6}{16a^6} + \frac{27m^4}{4a^4} - \frac{3m^2}{a^2} + 3\right) + \mathcal{O}(q^3)\right] + \\ & + ps^2\left[q\left(\frac{m^2}{4a^4} - \frac{1}{4a^2}\right) + q^2\left(-\frac{35m^8}{64a^{10}} + \frac{95m^6}{16a^8} - \frac{471m^4}{32a^6} + \frac{33m^2}{4a^4} - \frac{3}{2a^2}\right) + \mathcal{O}(q^3)\right] + \\ & + \dots, \end{aligned}$$

где мы положили $s = \epsilon_1 + \epsilon_2$ и $p = \epsilon_1 \epsilon_2$. Аналогичные выражения справедливы и для вакуумных средних высших порядков. Если теперь обратить приведенное выше разложение и подставить результат в уравнения для высших порядков, то мы не получим замкнутых полиномиальных соотношений. Чтобы это увидеть, рассмотрим одноинстантонную поправку к $\mathcal{T}_4$, выраженную через $\mathcal{T}_2$, которая имеет вид

$$\mathcal{T}_4 = \frac{\mathcal{T}_2^2}{2} + \frac{C^2(p + s^2 - 2\mathcal{T}_2) - 4C(p^2 + 2s^4 - 2s^2\mathcal{T}_2 - 4\mathcal{T}_2^2)}{4(s^2 - 2\mathcal{T}_2)}q + \mathcal{O}(q^2) \quad (10)$$

и очевидным образом неполиномиально зависит от $\mathcal{T}_2$.

Данная проблема имеет простое решение. Если мы допустим, что в выражениях могут присутствовать производные независимых следов по q , то удастся найти замкнутые соотношения. В этом случае $\mathcal{T}_n$ представляют собой замкнутые полиномиальные комбинации независимых следов и их производных по q . Процедура, которую мы применяем, несложная. Сначала мы должны записать вакуумные средние высших порядков как комбинации независимых средних и их производных с коэффициентами, содержащими модулярные формы Эйзенштейна. После этого коэффициенты фиксируются путем сравнения с результатами, полученными по формулам локализации. Положив $C = 4m^2 - (\epsilon_1 - \epsilon_2)^2$, мы получаем для калибровочной группы $SU(2)$ следующие выражения⁵⁾:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3 = & -\frac{3}{2}CsE_3, \quad \mathcal{T}_4 = \frac{1}{12}C(E_2 - 1)\mathcal{T}_2 - p\mathcal{T}_2' + \frac{\mathcal{T}_2^2}{2} + \mathcal{Q}_4, \\ \mathcal{T}_5 = & -\frac{15}{2}CsE_3\mathcal{T}_2 + \frac{5}{4}Cs(C - 4p)E_3' - \frac{5}{8}Cs(C - 8p + 4s^2)E_5, \\ \mathcal{T}_6 = & \frac{\mathcal{T}_2^3}{4} + \frac{1}{8}C(E_2 - 1)\mathcal{T}_2^2 - \frac{3}{2}p\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2' - \frac{1}{4}Cp(E_2 - 1)\mathcal{T}_2' + p^2\mathcal{T}_2'' - \\ & - \frac{1}{192}C(p(-7E_2^2 - 5E_4 + 12) + 3C(E_2 - 1) + 12s^2(E_4 - 1))\mathcal{T}_2 + \mathcal{Q}_6 \end{aligned} \quad (11)$$

⁵⁾ Нечетные ряды Эйзенштейна имеют вид

$$E_{2k+1}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k}(n)q^n.$$

и т. д., где $\mathcal{T}'_n = q \partial_q \mathcal{T}_n$, а $\mathcal{Q}_i$ — не зависящие от $\mathcal{T}_2$ вклады. В явном виде они записываются как

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_4 &= -\frac{C^2}{1440} - \frac{1}{120}C(p-s^2) - \frac{1}{288}C(C-3p)\mathcal{E}_2^2 + \frac{C^2}{288}\mathcal{E}_2 + \frac{C(C-3(p+4s^2))}{1440}\mathcal{E}_4, \\ \mathcal{Q}_6 &= \frac{C^3}{6048} + \frac{C^2(2p-3s^2)}{1344} - \frac{C(p^2-3ps^2+s^4)}{168} - \\ &\quad - \frac{C(C-3p)(C+2p)}{3456}\mathcal{E}_2^3 + \frac{C^2(5C-8p)}{4608}\mathcal{E}_2^2 + \frac{45C^2s^2}{4}\mathcal{E}_3^2 - \\ &\quad - \frac{C(3C^2+54s^2(C+6p)-71Cp+186p^2-360s^4)}{60480}\mathcal{E}_6 + \\ &\quad + \frac{CE_2(C^2(\mathcal{E}_4-5)+CE_4(18s^2-17p)+6E_4p(7p-12s^2))}{5760}.\end{aligned}$$

Для $SU(3)$ -калибровочной теории мы получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_4 &= \frac{1}{2}\mathcal{T}_2^2 + \frac{1}{16}C(\mathcal{E}_2-1)\mathcal{T}_2 - p\mathcal{T}'_2 + \frac{1}{256}C^2\mathcal{E}_2 - \frac{CE_2^2(9C-32p)}{1536} - \\ &\quad - \frac{C(C+32(p-s^2))}{2560} + \frac{CE_4(9C-32p-48s^2)}{3840}, \\ \mathcal{T}_5 &= \frac{5}{6}\mathcal{T}_2\mathcal{T}_3 - \frac{5}{3}p\mathcal{T}'_3 - \frac{5}{32}C\mathcal{T}_3 + \frac{5}{32}CE_2\mathcal{T}_3 - \frac{45}{8}Cs\mathcal{E}_3\mathcal{T}_2 - \frac{45}{128}C^2s\mathcal{E}_3 + \\ &\quad + \frac{45}{128}C^2s\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3 - \frac{15}{16}Cs(C-8p+4s^2)\mathcal{E}_5 + \frac{15}{16}Cs(3C-16p)\mathcal{E}'_3, \\ \mathcal{T}_6 &= \frac{1}{4}\mathcal{T}_2^3 + \frac{1}{3}\mathcal{T}_{3,3} - \frac{3}{2}p\mathcal{T}_2\mathcal{T}'_2 + p^2\mathcal{T}_2'' + \frac{7}{64}C(\mathcal{E}_2-1)\mathcal{T}_2^2 - \frac{7}{32}Cp(\mathcal{E}_2-1)\mathcal{T}'_2 - \\ &\quad - \frac{3}{512}C^2\mathcal{E}_2\mathcal{T}_2 - \frac{27}{2}Cs\mathcal{E}_3\mathcal{T}_3 + \frac{1}{768}C(3C-2(p+24s^2))\mathcal{E}_4\mathcal{T}_2 + \\ &\quad + \frac{C(200p-27C)}{3072}\mathcal{E}_2^2\mathcal{T}_2 + \frac{C(11C+64(s^2-p))\mathcal{T}_2}{1024} + \mathcal{Q}_6\end{aligned}$$

и т. д., где теперь

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_6 &= \frac{C(653C^2-738C(83p-198s^2)+19680(10p^2-9ps^2-18s^4))}{1269760}\mathcal{E}_2 + \\ &\quad + \frac{C(-313C^2+8C(949p-2079s^2)-2240(10p^2-9ps^2-18s^4))}{253952}\mathcal{E}_4 + \\ &\quad + \frac{C(135C^2+C(5184p-4980s^2)+1600(10p^2-9ps^2-18s^4))}{3968}\mathcal{E}_3^2 + \\ &\quad + \frac{C(-99C^2+C(4303p-10014s^2)+16(-878p^2+939ps^2+1382s^4))}{126976} + \\ &\quad + \frac{C(393C^2+C(5940p-3110s^2)+800(10p^2-9ps^2-18s^4))}{253952}\mathcal{E}_2^2 + \\ &\quad + \frac{C(531C^2-8C(821p-3051s^2)+320(52p^2-363ps^2+18s^4))}{3809280}\mathcal{E}_2\mathcal{E}_4 + \\ &\quad + \frac{75C(27C^2+C(2376s^2-996p)+320(10p^2-9ps^2-18s^4))}{15872}\mathcal{E}_3 - \\ &\quad - \frac{3C(27C^2+C(2376s^2-996p)+320(10p^2-9ps^2-18s^4))}{15872}\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3 +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{9C(27C^2 + C(2376s^2 - 996p) + 320(10p^2 - 9ps^2 - 18s^4))}{1984} E'_3 - \\
 & - \frac{C(72C^2 + C(599p + 198s^2) - 80(38p^2 + 3ps^2 + 6s^4))}{380928} E_2^3.
 \end{aligned} \quad (12)$$

В отличие от случая $SU(2)$, здесь появляются вакуумные средние мультиследовых операторов. Это следствие упомянутых выше результатов для общего Ω -фона: $\langle \text{Tr } \Phi^n \text{Tr } \Phi^m \rangle \neq \langle \text{Tr } \Phi^n \rangle \langle \text{Tr } \Phi^m \rangle$.

Наконец, мы распространяем наш анализ на $SU(4)$ -теорию, для которой получаем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_5 &= \frac{5}{12} C^2 s E_2 E_3 - \frac{5}{12} C^2 s E_3 - \frac{5}{4} C^2 s E_5 + \frac{5 C E_2}{36} \mathcal{T}_3 - 5 C s E_3 \mathcal{T}_2 + 10 C p s E_5 - \\
 & - 5 C s^3 E_5 - \frac{5 C}{36} \mathcal{T}_3 - \frac{5 p}{3} \mathcal{T}_3' + \frac{5}{6} \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_3, \\
 \mathcal{T}_6 &= \frac{1}{240} (C^2 (-5 E_2^2 + 5 E_2 + E_4 - 1) + 3 C p (5 E_2^2 - E_4 - 4) - 12 C E_4 s^2 + 12 C s^2) \mathcal{T}_2 + \\
 & + \frac{1}{8} C p (E_2 - 1) \mathcal{T}_2' + \frac{15}{240} C (1 - E_2) \mathcal{T}_2^2 + \frac{60}{240} C (E_2 - 1) \mathcal{T}_4 - 13 C s E_3 \mathcal{T}_3 - \\
 & - \frac{p^2}{2} \mathcal{T}_2'' + \frac{3 p}{4} \mathcal{T}_2 \mathcal{T}_2' - \frac{1}{8} \mathcal{T}_2^3 + \frac{3}{4} \mathcal{T}_{2,4} + \frac{1}{3} \mathcal{T}_{3,3} + \mathcal{Q}_6
 \end{aligned}$$

и т. д., где вновь $\mathcal{Q}_6$ – не зависящий от $\mathcal{T}_n$ коэффициент, структура которого сходна с (12). Этот результат обладает теми же характеристиками, что и в предыдущем случае. В качестве общего заключения отметим, что в деформированных теориях киральное кольцо требует введения дифференциальной структуры.

3. ДУАЛЬНОСТЬ АГТ И КИРАЛЬНЫЕ СЛЕДОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В этом разделе мы обсуждаем полученные результаты с точки зрения дуальности АГТ. Для этого мы делаем общее предположение, касающееся операторов с единственным следом и локальных интегралов движения в КТП. Сначала приведем краткий обзор основных составляющих теории и условий дуальности АГТ.

3.1. КТП на торе: очень краткий обзор. КТП на римановых поверхностях естественным образом возникает при многопетлевых расчетах по теории возмущений в теории струн. Помимо обычных условий конформной симметрии топология тора налагает к тому же ограничение на модулярную инвариантность. Как и в обычной КТП, основным является расчет данных рассеяния, т. е. конформных блоков и корреляционных функций.

Одноточечный конформный блок и интегралы движения. В лиувиллевской КТП на торе с модулярным параметром $q = e^{2\pi i \tau}$ вакуумное среднее произвольного поля O_{Δ_m} с конформной размерностью Δ_m задается как

$$\langle O_{\Delta_m} \rangle = \sum_{\Delta} C_{\Delta \Delta_m}^{\Delta} (q \bar{q})^{\Delta - c/24} |\mathcal{F}(\Delta, \Delta_m | q)|^2,$$

где $\mathcal{F}$ – одноточечный конформный блок, промежуточный канал которого несет конформную размерность Δ , а $C_{\Delta \Delta_m}^{\Delta} = \langle \Delta | O_{\Delta_m} | \Delta \rangle$ есть трехточечная корреляционная функция теории (см., например, работы [19], [49]). Как хорошо известно,

можно записать одноточечный конформный блок в форме следа по пространству, натянутому на наивысший вес $|\Delta\rangle$ и его более низкие состояния:

$$q^{\Delta-c/24}\mathcal{F}(\Delta, \Delta_m|q) = \text{Tr}_\Delta(q^{L_0-c/24}O_{\Delta_m}).$$

Со стороны интегрируемости исследование характеристик двумерной КТП началось в серии знаменитых работ Бажанова, Лукьянова, Замолотчикова [44], [50], [51]. Для нашего анализа важной составной частью теории является присутствие бесконечной башни локальных интегралов движения. Фактически в общей двумерной КТП алгебра, порожденная тензором энергии-импульса (вместе с его степенями и производными), содержит бесконечномерную абелеву подалгебру, натянутую на эти операторы (см. также [52]). Первые из них имеют вид [44]

$$\hat{\mathcal{J}}_1 = L_0 - \frac{c}{24},$$

$$\hat{\mathcal{J}}_3 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} L_{-n}L_n + L_0^2 - \frac{c+2}{12}L_0 + \frac{c(5c+22)}{2880},$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}_5 = & \sum_{n_1+n_2+n_3=0} :L_{n_1}L_{n_2}L_{n_3}: + \sum_n \left(\frac{c+11}{6}n^2 - 1 - \frac{c}{4} \right) L_{-n}L_n + \\ & + \frac{3}{2} \sum_n L_{1-2r}L_{2r-1} + \frac{c+4}{8}L_0^2 + \frac{(c+2)(3c+20)}{576}L_0 - \frac{c(3c+14)(7c+68)}{290304}. \end{aligned}$$

Проблема определения точного словаря для перевода калибровочной теории кирального кольца на язык этой алгебры не рассматривается в настоящей статье.

3.2. Основное утверждение о дуальности АГТ. С количественной точки зрения дуальность АГТ утверждает, что инстантонная статистическая сумма $\mathcal{N} = 2^*$ теории с калибровочной группой $SU(2)$ эквивалентна лиувилевскому одноточечному конформному блоку на торе. Точное утверждение таково [16]:

$$\mathcal{Z}_{\text{inst}}(\mathbf{a}, m, \epsilon_i|q) = [q^{-1/24}\eta(q)]^{2\Delta_m-1}\mathcal{F}(\Delta, \Delta_m|q). \quad (13)$$

Связь параметров в разных частях равенства задается как

$$\Delta_m = \frac{Q^2}{4} - \frac{m^2}{\epsilon_1\epsilon_2}, \quad \Delta = \frac{Q^2}{4} - \frac{a^2}{\epsilon_1\epsilon_2}, \quad (14)$$

где $b = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$ и $Q = b + b^{-1}$ параметризует центральный заряд в соответствии с равенством $c = 1 + 6Q^2$. Наконец, инстантонный считающий параметр q играет роль модуля тора. Равенство (13) можно проверить, рассматривая его порядок за порядком по инстантонному числу, если использовать формулу Некрасова для статистической суммы в одной его части и рекуррентные соотношения Замолотчикова для конформного блока в другой [19], [53]–[55].

3.3. Связующие операторы и интегралы движения: общее предложение. В заключение мы обсуждаем наше предложение о наличии связи между киральным кольцом и алгеброй локальных интегралов движения в КТП. Начальной

точкой являются соотношение Матоне [56], [45], связывающее вакуумное среднее $\mathcal{T}_2$ и инстантонную статистическую сумму:

$$\mathcal{T}_2 = 2a^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2q \partial_q \ln \mathcal{Z}_{\text{inst}}.$$

Подставляя тождество АГТ (13) в это равенство, после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 &= 2a^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2q \partial_q \ln([q^{-1/24}\eta(q)]^{2\Delta_m-1}\mathcal{F}(\Delta, \Delta_m|q)) = \\ &= 2a^2 - 2\epsilon_1\epsilon_2(2\Delta_m - 1)q \partial_q \ln[q^{-1/24}\eta(q)] - 2\epsilon_1\epsilon_2q \partial_q \ln \mathcal{F}(\Delta, \Delta_m|q) = \\ &= (4m^2 - \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)\frac{E_2 - 1}{24} - \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{12} - 2\epsilon_1\epsilon_2 \frac{\text{Tr}_\Delta(O_{\Delta_m}(L_0 - c/24)q^{L_0-c/24})}{\text{Tr}_\Delta(O_{\Delta_m}q^{L_0c/24})}. \end{aligned} \quad (15)$$

Это выражение слегка вдохновляет, поскольку числитель в последнем слагаемом получается посредством вставки вирасоровской части первого интеграла движения $\widehat{\mathcal{J}}_1$. Далее мы определяем величины

$$\mathcal{V}_k = \text{Tr}_\Delta(O_{\Delta_m}\widehat{\mathcal{J}}_kq^{L_0-c/24}), \quad \mathcal{V} = \text{Tr}_\Delta(O_{\Delta_m}q^{L_0-c/24}) \quad (16)$$

и налагаем требование, что они могут быть связаны с вакуумными средними киральных операторов следа. В работах [38], [57] было показано, что аналогичное соотношение выполняется в $\mathcal{N} = 2$ $SU(2)$ -калибровочной теории с $N_f = 4$ фундаментальными мультиплетами. Опираясь на эти результаты, в работе [39] мы выдвинули похожую гипотезу для чистой $SU(2)$ -калибровочной теории. В соответствии с дуальностью, предложенной в работе Гайотто [24], статистическая сумма Некрасова фактически соответствует норме конкретного состояния, лежащего в модуле Верма наибольшего веса с конформной размерностью $\Delta = Q^2/4 - a/\epsilon_1\epsilon_2$. В духе предыдущих исследований мы предположили, что киральные следы связаны с математическими ожиданиями гамильтонианов КТП в этом состоянии. Несмотря на убедительные свидетельства, подтверждающие эту общую гипотезу, ее систематическая проверка все еще отсутствует.

3.4. Предсказание универсального члена. Важно отметить, что мы можем извлечь некоторые предсказания со стороны КТП, даже если не знаем точного словаря двойственности. Вновь начнем с соотношения Матоне

$$\mathcal{T}_2 = -2\epsilon_1\epsilon_2q \partial_q \ln \mathcal{Z},$$

где теперь $\mathcal{Z}$ – полная статистическая сумма (3). Перепишем это тождество в удобном для нас виде. Положив $\mathcal{Z} = \exp(-\mathcal{U}/2\epsilon_1\epsilon_2)$, мы имеем

$$\mathcal{T}_2 = q \partial_q \mathcal{U} = -2\epsilon_1\epsilon_2\mathcal{Z}^{-1}q \partial_q \mathcal{Z}.$$

Главное наблюдение заключается в том, что нетривиальное слагаемое в (15) есть

$$-2\epsilon_1\epsilon_2\mathcal{V}^{-1}q \partial_q \mathcal{V} = -2\epsilon_1\epsilon_2 \frac{\text{Tr}_\Delta(O_{\Delta_m}\widehat{\mathcal{J}}_1q^{L_0-c/24})}{\text{Tr}_\Delta(O_{\Delta_m}q^{L_0-c/24})} = -2\epsilon_1\epsilon_2\mathcal{Z}^{-1}q \partial_q \mathcal{Z} + \dots, \quad (17)$$

где многоточие отвечает за небольшое несовпадение с (15). Смысл этого равенства становится понятным, если заметить, что $\widehat{\mathcal{J}}_1$ включает в себя генератор Вирасоро L_0 ,

который действует на корреляционную функцию как $q\partial_q$. Далее мы замечаем, что высшие гамильтонианы КТП содержат степени L_0^n генераторов Вирасоро, поэтому разумно ожидать, что они ассоциированы с членами в киральных следовых соотношениях вида $\mathcal{T}_{2n} \sim 2\mathcal{Z}^{-1}(-\epsilon_1\epsilon_2 q \partial_q)^n \mathcal{Z}$, где $\sim$ означает, что мы пренебрегаем вкладом от остальных операторов в интегралах движения. Собирая вместе все эти результаты, можно получить отдельные члены в киральных соотношениях:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_4 &\sim \frac{1}{2}\mathcal{T}_2^2 - \epsilon_1\epsilon_2\mathcal{T}_2', \\ \mathcal{T}_6 &\sim \frac{1}{4}\mathcal{T}_2^3 - \frac{3}{2}\epsilon_1\epsilon_2\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2' + \epsilon_1^2\epsilon_2^2\mathcal{T}_2'', \\ \mathcal{T}_8 &\sim \frac{1}{8}\mathcal{T}_2^4 - \frac{3}{2}\epsilon_1\epsilon_2\mathcal{T}_2^2\mathcal{T}_2' + \frac{3}{2}\epsilon_1^2\epsilon_2^2(\mathcal{T}_2')^2 + 2\epsilon_1^2\epsilon_2^2\mathcal{T}_2\mathcal{T}_2'' - \epsilon_1^3\epsilon_2^3\mathcal{T}_2'''\end{aligned}$$

и т. д. Сравнение с (11) показывает, что эти предсказания согласуются с нашими расчетами на основе формул локализации. Кроме того, если посмотреть на чистую калибровочную теорию [39], мы обнаруживаем, что данные предсказания являются универсальными, поскольку они не зависят от конкретной рассматриваемой модели (т. е. от масс полей материи и представлений). Универсальные члены выделяются путем перехода к пределу $C = 0$, и этот результат можно интерпретировать как Ω -деформированные матричные тождества в калибровочной группе. В самом деле, положив $C = 0$, мы видим, что в киральных следовых соотношениях уже нет зависимости от присоединенной массы m и от рядов Эйзенштейна.

3.5. Новые перспективы и дальнейшее развитие. Завершим нашу статью некоторыми комментариями об открытых проблемах. Как было ясно из нашего обсуждения, для предсказания соотношений между вакуумными средними $\mathcal{T}_n$ недостаточно знать все операторы $\hat{\mathcal{J}}_n$. Поэтому самая насущная проблема, которая требует решения, состоит в создании точного словаря для перевода с языка киральных колец на язык гамильтонианов КТП. Наше обсуждение касается только суперсимметричных $SU(2)$ -калибровочных теорий. Для высших калибровочных групп естественное обобщение соответствия АГТ может включать $SU(N)$ -колчаны и $\mathcal{W}_N$ -КТП Тоды на римановых поверхностях [25]. Поэтому естественное развитие представленной работы заключается в распространении полученных результатов на калибровочную группу более высокого ранга. Например, случай $SU(3)$ связан с $\mathcal{W}_3$ -КТП Тоды. Некоторый прогресс в изучении свойств интегрируемости этой модели был достигнут некоторое время назад в работе [58]. Помимо обычного тензора энергии-импульса $T(z)$, в этом случае существует также спинное 3-поле $W(z)$, преобразование Фурье которого

$$T(z) = -\frac{c}{24} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_{-n} e^{inz}, \quad W(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} W_{-n} e^{inz}$$

порождает всю алгебру симметрий $\mathcal{W}_3$. В работе [58] интегралы движения выписаны в явном виде:

$$\hat{\mathcal{J}}_1 = L_0 - \frac{c}{24}, \quad \hat{\mathcal{J}}_2 = W_0, \quad \hat{\mathcal{J}}_4 = \sum_{n=1}^{\infty} (L_{-n}W_n + W_{-n}L_n) + W_0L_0 - \frac{c+6}{24}W_0,$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{J}}_5 = & \sum_{n_1+n_2+n_3=0} :L_{n_1}L_{n_2}L_{n_3}: + \sum_n \left(\frac{c+14}{16}n^2 - 2 - \frac{c}{4} \right) L_{-n}L_n + \\ & + \frac{3}{2} \sum_n L_{1-2r}L_{2r-1} + 18 \sum_{n=1}^{\infty} W_{-n}W_n + 9W_0^2 - \\ & - \frac{c+8}{8}L_0^2 + \frac{(c+15)(c+2)}{192}L_0 - \frac{c(c+23)(7c+30)}{96768}\end{aligned}$$

и т. д. Руководствуясь нашими предыдущими результатами, можно установить связь между вакуумными средними киральных операторов для $SU(3)$ -калибровочной теории (для которой мы уже получили следовые тождества) и корреляционными функциями со вставками гамильтонианов в $\mathcal{W}_3$ -КТП. Исследование в этом направлении было бы интересным продолжением представленной работы.

Список литературы

- [1] M. F. Sohnius, C. P. West, “Conformal invariance in $N = 4$ supersymmetric Yang–Mills theory”, *Phys. Lett. B*, **100**:3 (1981), 245–250.
- [2] S. Mandelstam, “Light-cone superspace and the ultraviolet finiteness of the $N = 4$ model”, *Nucl. Phys. B*, **213**:1 (1983), 149–168.
- [3] N. Seiberg, “Supersymmetry and nonperturbative beta functions”, *Phys. Lett. B*, **206**:1 (1988), 75–80.
- [4] N. Seiberg, E. Witten, “Electric–magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang–Mills theory”, *Nucl. Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52, arXiv: hep-th/9407087; Erratum, **430**:2 (1994), 485–486.
- [5] N. Seiberg, E. Witten, “Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD”, *Nucl. Phys. B*, **431**:3 (1994), 484–550, arXiv: hep-th/9408099.
- [6] C. Montonen, D. Olive, “Magnetic monopoles as gauge particles?”, *Phys. Lett. B*, **72**:1 (1977), 117–120.
- [7] N. Seiberg, “Electric–magnetic duality in supersymmetric non-Abelian gauge theories”, *Nucl. Phys. B*, **435**:1–2 (1995), 129–146, arXiv: hep-th/9411149.
- [8] R. Donagi, E. Witten, “Supersymmetric Yang–Mills theory and integrable systems”, *Nucl. Phys. B*, **460**:2 (1996), 299–334, arXiv: hep-th/9510101.
- [9] E. J. Martinec, “Integrable structures in supersymmetric gauge and string theory”, *Phys. Lett. B*, **367**:1–4 (1996), 91–96, arXiv: hep-th/9510204.
- [10] A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, “Integrability and Seiberg–Witten exact solution”, *Phys. Lett. B*, **355**:3–4 (1995), 466–474, arXiv: hep-th/9505035.
- [11] E. D’Hoker, D. H. Phong, “Calogero–Moser systems in $SU(N)$ Seiberg–Witten theory”, *Nucl. Phys. B*, **513**:1–2 (1998), 405–444, arXiv: hep-th/9709053.
- [12] N. A. Nekrasov, “Seiberg–Witten prepotential from instanton counting”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:5 (2003), 831–864, arXiv: hep-th/0206161.
- [13] G. W. Moore, N. Nekrasov, S. Shatashvili, “Integrating over Higgs branches”, *Commun. Math. Phys.*, **209**:1 (2000), 97–121, arXiv: hep-th/9712241.
- [14] N. Nekrasov, A. Okounkov, “Seiberg–Witten theory and random partitions”, *The Unity of Mathematics. In Honor of the Ninetieth Birthday of I. M. Gelfand*, Progress in Mathematics, **244**, eds. P. Etingof, V. Retakh, I. M. Singer, Birkhäuser, Boston, 2006, 525–596, arXiv: hep-th/0306238.
- [15] A. Losev, N. Nekrasov, S. L. Shatashvili, “Testing Seiberg–Witten solution”, *Strings, Branes and Dualities* (Advanced Study Institute, Cargèse, France, May 26–June 14, 1997),

- NATO ASI Series, **520**, eds. L. Baulieu, P. Di Francesco, M. Douglas, V. Kazakov, M. Picco, P. Windey, Kluwer, Springer, 1999, 359–372, arXiv: hep-th/9801061.
- [16] L. F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, “Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories”, *Lett. Math. Phys.*, **91**:2 (2010), 167–197, arXiv: 0906.3219.
 - [17] I. Antoniadis, S. Hohenegger, K. S. Narain, T. R. Taylor, “Deformed topological partition function and Nekrasov backgrounds”, *Nucl. Phys. B*, **838**:3 (2010), 253–265, arXiv: 1003.2832.
 - [18] D. Kreff, J. Walcher, “Extended holomorphic anomaly in gauge theory”, *Lett. Math. Phys.*, **95**:1 (2011), 67–88, arXiv: 1007.0263.
 - [19] A.-K. Kashani-Poor, J. Troost, “The toroidal block and the genus expansion”, *JHEP*, **03** (2013), 133, 31 pp., arXiv: 1212.0722.
 - [20] M. Beccaria, A. Fachechi, G. Macorini, L. Martina, “Exact partition functions for deformed $\mathcal{N} = 2$ theories with $N_f = 4$ flavours”, *JHEP*, **12** (2016), 029, 41 pp., arXiv: 1609.01189.
 - [21] M. Beccaria, G. Macorini, “Exact partition functions for the Ω -deformed $\mathcal{N} = 2^*$ SU(2) gauge theory”, *JHEP*, **07** (2016), 066, 24 pp., arXiv: 1606.00179.
 - [22] E. Witten, “Solutions of four-dimensional field theories via M theory”, *Nucl. Phys. B*, **500**:1–3 (1997), 3–42, arXiv: hep-th/9703166.
 - [23] D. Gaiotto, “ $N = 2$ dualities”, *JHEP*, **08** (2012), 034, 58 pp., arXiv: 0904.2715.
 - [24] D. Gaiotto, “Asymptotically free $\mathcal{N} = 2$ theories and irregular conformal blocks”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **462**:1 (2013), 012014, 5 pp., arXiv: 0908.0307.
 - [25] N. Wyllard, “A $(N - 1)$ conformal Toda field theory correlation functions from conformal $N = 2$ SU(N) quiver gauge theories”, *JHEP*, **11** (2009), 002, 22 pp., arXiv: 0907.2189.
 - [26] R. Schiappa, N. Wyllard, “An A_r threesome: matrix models, $2d$ CFTs and $4d$ $\mathcal{N} = 2$ gauge theories”, *J. Math. Phys.*, **51**:8 (2009), 082304, 35 pp.
 - [27] A. Mironov, A. Morozov, “On AGT relation in the case of $U(3)$ ”, *Nucl. Phys. B*, **825**:1–2 (2010), 1–37, arXiv: 0908.2569.
 - [28] S. Kanno, Y. Matsuo, S. Shiba, “Analysis of correlation functions in Toda theory and AGT–W relation for $SU(3)$ quiver”, *Phys. Rev. D*, **82**:6 (2010), 066009, 18 pp., arXiv: 1007.0601.
 - [29] M. Taki, “On AGT Conjecture for pure super Yang–Mills and W-algebra”, *JHEP*, **05** (2011), 038, 20 pp., arXiv: 0912.4789.
 - [30] J. A. Minahan, K. Zarembo, “The Bethe ansatz for $N = 4$ superYang–Mills”, *JHEP*, **03** (2003), 013, 29 pp., arXiv: hep-th/0212208.
 - [31] N. A. Nekrasov, S. L. Shatashvili, “Quantization of integrable systems and four dimensional gauge theories”, *Proceedings of the 16th International Congress on Mathematical Physics (ICMP09)* (Prague, Czech Republic, August 3–8, 2009), ed. P. Exner, 2009, 265–289, arXiv: 0908.4052.
 - [32] S. Gukov, “Surface operators”, *New Dualities of Supersymmetric Gauge Theories*, ed. J. Teschner, Springer, Cham, 2016, 223–259, arXiv: 1412.7127.
 - [33] S. Gukov, E. Witten, *Gauge theory, ramification, and the geometric Langlands program*, arXiv: hep-th/0612073.
 - [34] D. Gaiotto, S. Gukov, N. Seiberg, “Surface defects and resolvents”, *JHEP*, **09** (2013), 070, 53 pp., arXiv: 1307.2578.
 - [35] C. Cordova, D. Gaiotto, S.-H. Shao, “Surface defects and chiral algebras”, *JHEP*, **05** (2017), 140, 42 pp., arXiv: 1704.01955.
 - [36] S. K. Ashok, M. Billo, E. Dell’Aquila, M. Frau, R. R. John, A. Lerda, “Modular and duality properties of surface operators in $\mathcal{N} = 2^*$ gauge theories”, *JHEP*, **07** (2017), 068, 51 pp., arXiv: 1702.02833.
 - [37] S. K. Ashok, M. Billo, E. Dell’Aquila, M. Frau, V. Gupta, R. R. John, A. Lerda, “Surface operators, chiral rings, and localization in $\mathcal{N} = 2$ gauge theories”, *JHEP*, **11** (2017), 40 pp., arXiv: 1707.08922.

- [38] F. Fucito, J. F. Morales, R. Poghossian, “Wilson loops and chiral correlators on squashed spheres”, *J. Geom. Phys.*, **118** (2017), 169–180, arXiv: 1603.02586.
- [39] M. Beccaria, A. Fachechi, G. Macorini, “Chiral trace relations in Ω -deformed $\mathcal{N} = 2$ theories”, *JHEP*, **05** (2017), 023, 36 pp., arXiv: 1702.01254.
- [40] F. Cachazo, M. R. Douglas, N. Seiberg, E. Witten, “Chiral rings and anomalies in supersymmetric gauge theory”, *JHEP*, **12** (2002), 071, 56 pp., arXiv: hep-th/0211170.
- [41] F. Fucito, J. F. Morales, R. Poghossian, A. Tanzini, “ $\mathcal{N} = 1$ superpotentials from multi-instanton calculus”, *JHEP*, **01** (2006), 031, 26 pp., arXiv: hep-th/0510173.
- [42] A. Karch, D. Lüst, A. Miemiec, “New $N = 1$ superconformal field theories and their supergravity description”, *Phys. Lett. B*, **454**:3–4 (1999), 265–269, arXiv: hep-th/9901041.
- [43] J. A. Minahan, D. Nemeschansky, N. P. Warner, “Instanton expansions for mass deformed $N = 4$ super Yang–Mills theories”, *Nucl. Phys. B*, **528**:1–2 (1998), 109–132, arXiv: hep-th/9710146.
- [44] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov, “Integrable structure of conformal field theory, quantum KdV theory and thermodynamic Bethe ansatz”, *Commun. Math. Phys.*, **177**:2 (1996), 381–398, arXiv: hep-th/9412229.
- [45] R. Flume, F. Fucito, J. F. Morales, R. Poghossian, “Matone’s relation in the presence of gravitational couplings”, *JHEP*, **04** (2004), 008, 17 pp., arXiv: hep-th/0403057.
- [46] R. Poghossian, “Deforming SW curve”, *JHEP*, **04** (2011), 033, 12 pp., arXiv: 1006.4822.
- [47] F. Fucito, J. F. Morales, D. R. Pacifici, R. Poghossian, “Gauge theories on Ω -backgrounds from non commutative Seiberg–Witten curves”, *JHEP*, **05** (2011), 098, 27 pp., arXiv: 1103.4495.
- [48] M. Billo, M. Frau, F. Fucito, L. Giacone, A. Lerda, J. F. Morales, D. R. Pacifici, “Non-perturbative gauge/gravity correspondence in $\mathcal{N} = 2$ theories”, *JHEP*, **08** (2012), 166, 43 pp., arXiv: 1206.3914.
- [49] A.-H. Kashani-Poor, J. Troost, “Quantum geometry from the toroidal block”, *JHEP*, **08** (2014), 117, 27 pp., arXiv: 1404.7378.
- [50] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov, “Integrable structure of conformal field theory. 2. Q operator and DDV equation”, *Commun. Math. Phys.*, **190**:2 (1997), 247–278, arXiv: hep-th/9604044.
- [51] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov, “Integrable structure of conformal field theory. 3. The Yang–Baxter relation”, *Commun. Math. Phys.*, **200**:2 (1999), 297–324, arXiv: hep-th/9805008.
- [52] R. Sasaki, I. Yamanaka, “Virasoro algebra, vertex operators, quantum Sine-Gordon and solvable quantum field theories”, *Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models* (Kyoto University, Kyoto, May 1986), Advanced Studies in Pure Mathematics, **16**, eds. M. Jimbo, T. Miwa, A. Tsuchiya, Academic Press, Boston, MA, 1988, 271–296.
- [53] Ал. Б. Замолодчиков, “Конформная симметрия в двумерном пространстве: о рекуррентном представлении конформного блока”, *ТМФ*, **73**:1 (1987), 103–110.
- [54] R. Poghossian, “Recursion relations in CFT and $N = 2$ SYM theory”, *JHEP*, **12** (2009), 038, 13 pp., arXiv: 0909.3412.
- [55] E. Perlmutter, “Virasoro conformal blocks in closed form”, *JHEP*, **08** (2015), 088, 29 pp., arXiv: 1502.07742.
- [56] M. Matone, “Instantons and recursion relations in $N = 2$ SUSY gauge theory”, *Phys. Lett. B*, **357**:3 (1995), 342–348, arXiv: hep-th/9506102.
- [57] F. Fucito, J. F. Morales, R. Poghossian, “Wilson loops and chiral correlators on squashed spheres”, *JHEP*, **11** (2015), 064, 32 pp., arXiv: 1507.05426.
- [58] V. V. Bazhanov, A. N. Hibberd, S. M. Khoroshkin, “Integrable structure of $\mathcal{W}_3$ conformal field theory, quantum Boussinesq theory and boundary affine Toda theory”, *Nucl. Phys. B*, **622**:3 (2002), 475–547, arXiv: hep-th/0105177.