Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Тондо, Алгебры Хаантьеса волчка Лагранжа, *ТМФ*,
2018, том 196, номер 3, 487–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 08:53:08

© 2018 г.

Г. Тондо*

АЛГЕБРЫ ХААНТЬЕСА ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА

Исследованы симплектическое многообразие Хаантьеса и многообразие Пуассона–Хаантьеса для волчка Лагранжа и рассчитан набор координат Дарбу–Хаантьеса. Эти координаты представляют собой разделяющиеся переменные для соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби.

Ключевые слова: алгебры Хаантьеса, волчок Лагранжа.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9487>

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье предложен новый теоретический подход к исследованию интегрируемых механических систем, который проиллюстрирован на классическом примере волчка Лагранжа. Более конкретно, мы рассматриваем эту гамильтонову систему в рамках теории алгебр Хаантьеса, совсем недавно описанных в работе [1]. С этой целью предложено новое геометрическое определение многообразия Пуассона–Хаантьеса ($P\mathcal{H}$) как естественное расширение понятия симплектического многообразия Хаантьеса ($\omega\mathcal{H}$), данного в [2]. Основной идеей является замена симплектической структуры $\omega\mathcal{H}$ (необратимым) бивектором Пуассона, который удовлетворяет подходящему условию алгебраической совместности с алгеброй Хаантьеса операторов на касательном расслоении многообразия. Кроме того, обобщено понятие динамической цепочки Магри–Хаантьеса [2] для адаптации его к новому геометрическому понятию многообразия $P\mathcal{H}$. Данные новые структуры можно использовать для описания бигамильтоновых цепей векторных полей для многообразий Гельфанда–Захаревича [3]. Когда можно свести данные структуры к симплектическим листам бивектора Пуассона, получается структура $\omega\mathcal{H}$ и можно найти набор координат Дарбу–Хаантьеса. Такие координаты представляют собой разделяющиеся переменные для уравнения Гамильтона–Якоби гамильтоновых систем, принадлежащих цепочке Магри–Хаантьеса. Здесь мы рассматриваем в деталях волчок Лагранжа, который представляет собой систему Гельфанда–Захаревича коранга 2,

Автор статьи благодарит National Group for Mathematical Physics in National Institute of High Mathematics “F. Severi” (INDAM), Roma, Italy.

*Dipartimento di Matematica e Geoscienze, Università degli Studi di Trieste, Trieste, Italy.
E-mail: tondo@units.it

при этом обсуждение стационарных потоков иерархии Кортвега–де Фриза (система Гельфанда–Захаревича коранга 1) мы отложим до будущих публикаций.

Понятие структур $P\mathcal{H}$ инспирировано, с одной стороны, теорией структур Пуассона–Нийенхейса [4], [5], а с другой стороны, понятием многообразий Хаантьеса [6]–[9]. По нашему мнению, новая теория обеспечивает гибкий и объединяющий подход к рассмотрению интегрируемости и проблемы разделения переменных в гамильтоновых системах и завершает схему, предложенную в рамках геометрии Пуассона–Нийенхейса.

Настоящая статья организована следующим образом. Сначала в разделе 2 мы приводим обзор необходимых алгебраических структур, а затем в разделе 3 напоминаем концепцию алгебр Хаантьеса. В разделе 4 представлено новое понятие многообразий Пуассона–Хаантьеса, а также соответствующих цепочек Магри–Хаантьеса. В разделе 5 продемонстрировано применение теории к действительному и комплексному волчкам Лагранжа.

2. КРУЧЕНИЕ НИЙЕНХЕЙСА И ХААНТЬЕСА

Естественный базис $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ локальных карт $(x_1, \dots, x_n)$ на дифференцируемом многообразии, которое при этом, очевидно, интегрируемо, можно задать в тензорном виде как собственные распределения подходящего класса $(1, 1)$ -тензорных полей, иными словами, полей с нулевым тензором Хаантьеса. В данном разделе мы рассматриваем некоторые основные результаты теории этих тензоров. Более подробное описание приведено в оригинальных статьях [10], [11], а также в статьях [12], [13] и прекрасном недавнем обзоре [14].

Пусть M – дифференцируемое многообразие, а $L: TM \rightarrow TM$ – $(1, 1)$ -тензорное поле, иными словами, поле линейных операторов на касательном пространстве, заданное в каждой точке многообразия M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Кручение Нийенхейса поля L – это кососимметричное $(1, 2)$ -тензорное поле, определяющееся как

$$\mathcal{T}_L(X, Y) := L^2[X, Y] + [LX, LY] - L([X, LY] + [LX, Y]), \quad (1)$$

где $X, Y \in TM$, а $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор двух векторных полей.

В локальных координатах $x = (x_1, \dots, x_n)$ кручение Нийенхейса можно записать в виде

$$(\mathcal{T}_L)_{jk}^i = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial L_k^i}{\partial x^\alpha} L_j^\alpha - \frac{\partial L_j^i}{\partial x^\alpha} L_k^\alpha + \left(\frac{\partial L_j^\alpha}{\partial x^k} - \frac{\partial L_k^\alpha}{\partial x^j} \right) L_\alpha^i \right), \quad (2)$$

содержащем $n^2(n-1)/2$ независимых компонент.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Кручение Хаантьеса, связанное с полем L , – это $(1, 2)$ -тензорное поле, определяющееся как

$$\mathcal{H}_L(X, Y) := L^2\mathcal{T}_L(X, Y) + \mathcal{T}_L(LX, LY) - L(\mathcal{T}_L(X, LY) + \mathcal{T}_L(LX, Y)). \quad (3)$$

Кососимметричность кручения Нийенхейса влечет, что кручение Хаантьеса также является кососимметричным. Его локальное выражение имеет вид

$$(\mathcal{H}_L)_{jk}^i = \sum_{\alpha, \beta=1}^n [L_\alpha^i L_\beta^\alpha (\mathcal{T}_L)_{jk}^\beta + (\mathcal{T}_L)_{\alpha\beta}^i L_j^\alpha L_k^\beta - L_\alpha^i ((\mathcal{T}_L)_{\beta k}^\alpha L_j^\beta + (\mathcal{T}_L)_{j\beta}^\alpha L_k^\beta)]. \quad (4)$$

Рассмотрим случай, при котором расчет кручения Хаантьеса является особенно простым [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathbf{L}$ – гладкое поле операторов. Если существует локальная карта $\{U, (x_1, \dots, x_n)\}$, где $\mathbf{L}$ может быть записано в диагональном виде

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n l_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_i, \quad (5)$$

то тензор Хаантьеса $\mathbf{L}$ обращается в нуль.

В силу важности условия обращения в нуль тензора Хаантьеса (Нийенхейса) мы предлагаем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор Хаантьеса (Нийенхейса) – это поле операторов, где тензор Хаантьеса (Нийенхейса) тождественно равен нулю.

В следующем предложении было доказано, что единственный оператор Хаантьеса порождает алгебру операторов Хаантьеса над кольцом гладких функций на многообразии M . Это не так для оператора Нийенхейса $\mathbf{N}$, поскольку полином от $\mathbf{N}$ с коэффициентами $a_j \in C^\infty(M)$ не обязательно является оператором Нийенхейса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [15]. Пусть $\mathbf{L}$ – оператором Хаантьеса на многообразии M . Тогда для любого полинома от $\mathbf{L}$ с коэффициентами $a_j \in C^\infty(M)$ соответствующий тензор Хаантьеса обращается в нуль,

$$\mathcal{H}_{\mathbf{L}}(X, Y) = 0 \implies \mathcal{H}_{(\sum_j a_j(\mathbf{x}) \mathbf{L}^j)}(X, Y) = 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО содержится в следствии 3.3 из работы [15].

3. АЛГЕБРЫ ХААНТЬЕСА

В данном разделе мы напоминаем понятие алгебры Хаантьеса и класс циклических алгебр Хаантьеса, недавно введенных в работе [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Алгебра Хаантьеса ранга t – это пара $(M, \mathcal{H})$, которая удовлетворяет следующим условиям:

- M является дифференцируемым многообразием размерности n ;
- $\mathcal{H}$ – набор операторов Хаантьеса $\mathbf{K}_i: TM \rightarrow TM$, которые порождают – свободный модуль ранга t над кольцом гладких функций на M ,

$$\mathcal{H}_{(f\mathbf{K}_i + g\mathbf{K}_j)}(X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in TM, \quad \forall f, g \in C^\infty(M); \quad (7)$$

– кольцо по отношению к оператору композиции,

$$\mathcal{H}_{(\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j)}(X, Y) = \mathcal{H}_{(\mathbf{K}_j \mathbf{K}_i)}(X, Y) = 0 \quad \forall \mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j \in \mathcal{H}, \quad \forall X, Y \in TM. \quad (8)$$

Предположения (7), (8) обеспечивают, что набор $\mathcal{H}$ является ассоциативной алгеброй операторов Хаантьеса. Кроме того, если

$$\mathbf{K}_i \mathbf{K}_j = \mathbf{K}_j \mathbf{K}_i \quad \forall \mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j \in \mathcal{H}, \quad (9)$$

алгебра $\mathcal{H}$ – абелева алгеброй Хаантьеса.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия определения 4 являются очень жесткими и сложными для проверки. Однако можно задать класс естественных решений в локальной карте $\{U, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)\}$ с помощью любого оператора вида

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n l_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_i. \quad (10)$$

Диагональные операторы $\mathbf{K}$ имеют нулевые тензоры Хаантьеса и удовлетворяют дифференциальному условию совместности (7) в силу предложения 1. Более того, они образуют коммутативное кольцо, а следовательно, удовлетворяют уравнениям (8). Фактически такие операторы порождают алгебраическую структуру, которую мы будем называть *диагональной алгеброй Хаантьеса*.

Особый, но важный для нашей работы класс алгебр Хаантьеса – это алгебра, порождающаяся единственным оператором Хаантьеса $\mathbf{L}: TM \mapsto TM$. Можно напрямую построить алгебру Хаантьеса $\mathcal{L}$ ранга, меньшего или равного $n = \dim(M)$, выбирая набор генераторов в виде первых $n - 1$ степеней оператора $\mathbf{L}$ вместе с $\mathbf{L}^0 := \mathbf{I}$:

$$\mathcal{L}(\mathbf{L}) := \text{Span}\{\mathbf{I}, \mathbf{L}, \mathbf{L}^2, \mathbf{L}^{n-1}\}.$$

Будем называть такие алгебры *циклическими алгебрами Хаантьеса*. Их ранг равен степени минимального полинома $\mathbf{L}$.

Возникает естественный вопрос: когда заданная алгебра Хаантьеса может порождаться единственным оператором Хаантьеса, давая циклическую алгебру Хаантьеса? Эта задача изучалась в работе [1], при этом сначала вводилось следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $(M, \mathcal{H})$ – алгебра Хаантьеса ранга m . Оператор $\mathbf{L}$ называется *циклическим генератором множества $\mathcal{H}$* , если $\mathcal{H} \equiv \mathcal{L}(\mathbf{L})$. При этом базис $\mathcal{B}_{\text{сус}} = \{\mathbf{I}, \mathbf{L}, \mathbf{L}^2, \dots, \mathbf{L}^{m-1}\}$ называется *циклическим базисом множества $\mathcal{H}$* и позволяет представить каждый оператор Хаантьеса $\mathbf{K} \in \mathcal{H}$ как полиномиальное поле по $\mathbf{L}$ максимальной степени $m - 1$, иными словами

$$\mathbf{K} = p_{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{L}) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(\mathbf{x}) \mathbf{L}^i, \quad (11)$$

где $a_i(\mathbf{x})$ – гладкие функции на M .

4. МНОГООБРАЗИЯ ПУАССОНА–ХААНТЬЕСА

Чтобы работать с системами Гельфанда–Захаревича, необходимо расширить понятие симплектического многообразия Хаантьеса $(\omega\mathcal{H})$, ранее представленного в работе [2]. В настоящей работе предлагается новое определение многообразия Пуассона–Хаантьеса $(P\mathcal{H})$.

Как обычно, транспонированный оператор $\mathbf{K}^T: T^*M \rightarrow T^*M$ определяется как транспонированное линейное отображение $\mathbf{K}: TM \rightarrow TM$ относительно естественного спаривания между векторным пространством и двойственным к нему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Многообразие Пуассона–Хаантьеса* – это тройка $(M, P, \mathcal{H})$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) M – дифференцируемое многообразие;
- 2) $P: TM^* \rightarrow TM$ является бивектором Пуассона на M ;
- 3) $\mathcal{H}$ – абелева алгебра Хаантьеса;
- 4) $(P, \mathcal{H})$ алгебраически совместны в смысле, что $KP = PK^T \quad \forall K \in \mathcal{H}$.

Как следствие вышеперечисленных условий получаем следующее простое предложение, которое является важным для многих результатов данной теории.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *На заданном многообразии Пуассона–Хаантьеса любой составной оператор $K_i P$, $K_i P K_j^T$, $(K_\alpha - f(x)I)^T P$, $r \in \mathbb{N}$, является кососимметричным.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Класс многообразий $\omega\mathcal{H}$ совпадает с классом многообразий $P\mathcal{H}$ четной размерности с обратимым бивектором Пуассона. Действительно, так как в данном случае $\Omega = P^{-1}$ является симплектическим оператором, условие совместности $KP = PK^T$ эквивалентно условию совместности $\Omega K = K^T \Omega$, которое налагается в многообразиях $\omega\mathcal{H}$.

Приведем известный пример многообразия $P\mathcal{H}$ с циклической алгеброй Хаантьеса, который ниже используется для описания алгебры Хаантьеса волчка Лагранжа.

ПРИМЕР 1. Пусть (M, P, N) – многообразие Пуассона–Нийенхейса, т. е. многообразие, оснащенное бивектором Пуассона P и оператором Нийенхейса N , которые удовлетворяют следующим условиям совместности:

$$NP - PN^T = 0, \quad (12)$$

$$R(P, N)(\alpha, Y) = 0 \quad \forall \alpha \in T^*M, \quad \forall Y \in TM, \quad (13)$$

где $R(P, N)$ – это $(2 + 1)$ -тензорное поле, определенное в [4] как

$$R(P, N)(\alpha, Y) = \mathcal{L}_{P\alpha}(N)Y - P(\mathcal{L}_Y(N^T\alpha) - \mathcal{L}_{NY}\alpha) \quad (14)$$

(через $\mathcal{L}_Y$ обозначена производная Ли по векторному полю Y). Предположим, что оператор Нийенхейса N имеет минимальный полином степени m . Тогда многообразие Пуассона–Нийенхейса обладает стандартной структурой многообразия Пуассона–Нийенхейса, заданной как

$$(M, P, K_1 = I, K_2 = N, \dots, K_m = N^{m-1}),$$

с алгеброй Хаантьеса ранга $m \leq \dim(M)$. На самом деле каждый оператор Нийенхейса N также является оператором Хаантьеса, а значит, порождает циклическую алгебру Хаантьеса $\mathcal{L}(N)$. Более того, условие алгебраической совместности (12) обеспечивает, что для всех операторов Хаантьеса

$$K = p_K(x, N) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(x) N^i$$

условие 4 определения 6 выполнено.

Кроме того, дифференциальное условие (13) влечет, что

$$R(P, \mathbf{K})(\alpha, Y) - \left(\sum_{i=0}^{m-1} ((X_i \wedge N^i Y) - Y(a_i) N^i P) \right) \alpha = 0 \quad (15)$$

для всех $j \in \mathbb{N}$, всех $\alpha \in T^*M$ и всех $Y \in TM$, где $X_i := Pda_i$ – гамильтоновы векторные поля с гамильтонианами a_i .

Мы также обобщаем понятие цепочки Магри–Хаантьеса, введенное в работе [2] под названием цепочки Ленарда–Хаантьеса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $(M, P, \mathcal{H})$ – многообразие Пуассона–Хаантьеса. Говорят, что функция $H \in C^\infty(M)$ порождает цепочку Магри–Хаантьеса 1-форм, если

$$d(\mathbf{K}_i^T dH) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

для некоторого базиса $\{\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_m\}$ в $\mathcal{H}$. (Локально) точные 1-формы dH_i такие, что

$$dH_i = \mathbf{K}_i^T dH, \quad i = 1, \dots, m,$$

называются элементами цепочки Магри–Хаантьеса длины m , порожденной H .

Важность цепочек Магри–Хаантьеса вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $(M, P, \mathcal{H})$ – многообразие Пуассона–Хаантьеса. Функции H_i , дифференциалы которых принадлежат всем цепочкам Магри–Хаантьеса, порожденным одной и той же функцией H , находятся в инволюции по отношению к скобке Пуассона, определенной с помощью P .

Действительно,

$$\{H_i, H_j\} = \langle dH_i, P dH_j \rangle = \langle \mathbf{K}_i^T dH, P \mathbf{K}_j^T dH \rangle = \langle dH, \mathbf{K}_i P \mathbf{K}_j^T dH \rangle = 0, \quad (16)$$

где последнее равенство следует из предложения 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $(M, P, \mathcal{H})$ – многообразие Пуассона–Хаантьеса. Говорят, что векторное поле Y порождает цепочку Магри–Хаантьеса векторных полей, если векторные поля, определяющиеся как

$$Y_i := \mathbf{K}_i Y, \quad i = 1, \dots, m,$$

в некотором базисе $\{\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_m\}$, взаимно коммутируют.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Благодаря условию совместности 4 определения 6 каждой цепочке Магри–Хаантьеса 1-форм, порожденной функцией H , соответствует цепочка Магри–Хаантьеса гамильтоновых векторных полей $X_{H_i} = P dH_i$, порожденная $X_H = P dH$. Кроме того, гамильтоновы векторные поля, принадлежащие различным цепочкам, порожденным одним и тем же гамильтоновым векторным полем X_H , коммутируют между собой.

В работе [2] показано, что если заданы многообразие $\omega\mathcal{H}$ и функции H , то существование цепочки Магри–Хаантьеса, порожденной векторным полем H , эквивалентно интегрируемости по Фробениусу кораспределения $\mathbf{K}_i^T dH$, $i = 1, \dots, m$. В настоящей работе мы ограничимся примером цепочки Магри–Хаантьеса для волчка Лагранжа и оставим вопрос об условиях, которые обеспечивают существование цепочек Магри–Хаантьеса на многообразиях $P\mathcal{H}$, для будущих исследований.

Рис. 1. Волчок Лагранжа.

5. ВОЛЧОК ЛАГРАНЖА

Классический волчок Лагранжа – это тяжелый симметричный волчок, т. е. симметричное жесткое тело с неподвижной точкой O , помещенное в однородное гравитационное поле $\vec{\gamma}$ (см. рис. 1). Он допускает различные геометрические формулировки в рамках бигамильтоновой теории [16]–[18].

5.1. Углы Эйлера. В фазовом пространстве $M = T^*(SO(3))$ в качестве локальных координат можно выбрать классические углы Эйлера и сопряженные импульсы $(\varphi, \theta, \psi, p_\varphi, p_\theta, p_\psi)$. В такой карте гамильтонианы волчка Лагранжа принимают вид

$$H = \frac{1}{2\mathcal{A}} \left(p_\theta^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{c} p_\psi^2 \right) + \mu g a \cos \theta, \quad (17)$$

а гамильтоновы уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{\sin^2 \theta}, & \dot{\theta} &= \frac{1}{\mathcal{A}} p_\theta, & \dot{\psi} &= \frac{1}{c\mathcal{A}} p_\psi, \\ \dot{p}_\varphi &= 0, & \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \mu g a \sin \theta, & \dot{p}_\psi &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathcal{A}$ и $c\mathcal{A}$ – соответственно момент инерции относительно каждой оси в плоскости экватора и оси симметрии, μ – масса волчка, g – ускорение свободного падения, a – координата центра масс G , отсчитываемая вдоль оси симметрии. Из выражения для гамильтониана и уравнений движения очевидно, что волчок Лагранжа допускает три интеграла движения

$$H_1 = H, \quad H_2 = p_\varphi, \quad H_3 = p_\psi, \quad (18)$$

которые представляют собой энергию и компоненты момента импульса вдоль вертикальной оси и оси симметрии соответственно. Кроме того, хорошо известно, что координаты $(\varphi, \theta, \psi, p_\varphi, p_\theta, p_\psi)$ являются разделяющимися переменными для уравнения Гамильтона–Якоби, связанного с H . Нам кажется интересным показать, что

даже такая классическая система, а также любая гамильтонова система, допускающая разделение переменных, могут быть описаны в рамках многообразий Хаантьеса $\omega\mathcal{H}$ согласно теореме 57 из работы [2]. Нетрудно найти алгебру Хаантьеса волчка Лагранжа, ее базис имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{K}_2 &= \frac{\mathcal{A} \sin^2 \theta}{p_\varphi - p_\psi \cos \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \otimes d\varphi + \frac{\partial}{\partial p_\varphi} \otimes dp_\varphi \right), \\ \mathbf{K}_3 &= -\frac{\mathcal{A} \sin^2 \theta}{\cos \theta (p_\varphi - p_\psi \cos \theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \otimes d\theta + \frac{\partial}{\partial p_\theta} \otimes dp_\theta \right). \end{aligned}$$

Действительно, действие (транспонированных) операторов Хаантьеса $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$ на градиент гамильтониана (17) порождает цепочку Магри–Хаантьеса (градиентов) трех интегралов движения

$$\mathbf{K}_1^T dH = dH_1, \quad \mathbf{K}_2^T dH = dH_2, \quad \mathbf{K}_3^T dH = dH_3.$$

Тот факт, что операторы Хаантьеса в карте Эйлера $(\varphi, \theta, \psi, p_\varphi, p_\theta, p_\psi)$ принимают диагональный вид, означает, что алгебра Хаантьеса диагональна, а координаты Эйлера являются ее координатами Дарбу–Хаантьеса.

Более интересная и трудная задача состоит в построении алгебры Хаантьеса непосредственно из физических координат с последующим определением набора координат Дарбу–Хаантьеса, которые являются разделяющимися переменными согласно теореме 59 из работы [2]. В следующем разделе мы покажем, как поступать с этим примером, для чего начнем с тригамильтоновой формулировки волчка Лагранжа и далее сведем ее к симплектическим листам одного из бивекторов Пуассона.

5.2. Координаты Эйлера–Пуассона. Альтернативная формулировка волчка Лагранжа основана на уравнении Эйлера–Пуассона, которое, строго говоря, является проекцией уравнения движения на сопутствующую систему отсчета $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Рассмотрим фазовое пространство $M := \{m | m = (\vec{\omega}, \vec{\gamma})\}$, где $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3$ – угловая скорость волчка, $\vec{\gamma} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + \gamma_3 \vec{e}_3$ – вертикальный единичный вектор (вектор Пуассона), $G - O = a\vec{e}_3$ – вектор центра массы, а $J = \text{diag}(\mathcal{A}, \mathcal{A}, c\mathcal{A})$ – матрица главных моментов инерции. В такой формулировке уравнения движения $\dot{m} = X_L(m)$ – это уравнения Эйлера, спаренные с уравнениями Пуассона, поэтому векторное поле Лагранжа задано как

$$X_L(m) = \begin{pmatrix} (1-c)\omega_2\omega_3 - \gamma_2 \\ -(1-c)\omega_3\omega_1 + \gamma_1 \\ 0 \\ \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2 \\ \gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3 \\ \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где выбрана нормировка $\mu ga/\mathcal{A} = 1$.

5.2.1. *Тригамильтонова формулировка волчка Лагранжа.* Векторное поле (19) допускает тригамильтонову формулировку (см. [16] и ссылки в этой работе) относительно трех необратимых бивекторов Пуассона

$$P_0 = \begin{vmatrix} 0 & B \\ B & C \end{vmatrix}, \quad P_1 = \begin{vmatrix} -B & 0 \\ 0 & \Gamma \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} T & R \\ -R^T & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$B = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 0 & c\omega_3 & -\omega_2 \\ -c\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{vmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$R = \begin{vmatrix} 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -\frac{\gamma_2}{c} & \frac{\gamma_1}{c} & 0 \end{vmatrix}, \quad T = \begin{vmatrix} 0 & -c\omega_3 & \frac{\omega_2}{c} \\ c\omega_3 & 0 & -\frac{\omega_1}{c} \\ -\frac{\omega_2}{c} & \frac{\omega_1}{c} & 0 \end{vmatrix},$$

и гамильтонианы (h_0, h_1, h_2) ,

$$\begin{array}{ccc} dh_0 & & dh_1 \\ & \searrow P_0 & \downarrow P_1 \\ & & X_L \\ & \swarrow P_2 & \nearrow dh_2 \end{array},$$

определены формулами

$$h_0 = \frac{1}{2}F_4 + (c-1)F_1F_3, \quad h_1 = -F_3 - (c-1)F_1F_2, \quad h_2 = F_2.$$

Функции F_1, F_2, F_3, F_4 представляют собой интегралы движения, заданные как

$$F_1 = \omega_3, \quad F_2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + c\omega_3^2) - \gamma_3,$$

$$F_3 = \omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 + c\omega_3\gamma_3, \quad F_4 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2.$$

Три бивектора Пуассона (P_0, P_1, P_2) порождают три пуассоновых пучка

$$P_0 - \lambda P_1, \quad P_1 - \lambda P_2, \quad P_0 - \lambda P_2,$$

каждый из которых обладает двумя полиномиальными функциями Казимира [17]. Далее мы сосредоточим внимание на функции Казимира пуассонова пучка $P_0 - \lambda P_1$.

5.2.2. *Система Гельфанда–Захаревича коранга 2.* Пуассонов пучок $P_0 - \lambda P_1$ обладает двумя функциями Казимира $H(\lambda)^{(1)} = H_0^{(1)} = F_1$ и $H(\lambda)^{(2)} = H_0^{(2)}\lambda^2 + H_1^{(2)}\lambda +$

$H_2 = (F_4/2)\lambda^2 - F_3\lambda + F_2$ длины 1 и 3 соответственно. Их можно графически представить следующим образом:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & dF_1 & & \\
 & P_0 \swarrow & & \searrow P_1 & \\
 & 0 & & & 0 \\
 & & dF_4/2 & d(-F_3) & d(F_2) \\
 P_1 \swarrow & & P_0 \searrow & P_1 \swarrow & P_0 \searrow & P_1 \swarrow & P_0 \searrow \\
 0 & & X_1 & & X_2 & & 0
 \end{array} \quad (20)$$

Векторные поля X_1, X_2 бигамильтоновы, так как

$$X_i = P_0 dH_{i-1}^{(2)} = P_1 dH_i^{(2)}, \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

При этом векторное поле (19) волчка Лагранжа мы можем переписать как

$$X_L = X_1 - (c-1)F_1X_2, \quad (22)$$

определяя таким образом систему типа Гельфанда–Захаревича коранга 2.

5.2.3. Редукция пуассонова пучка. Без потери общности зафиксируем бивектор Пуассона внутри пуассонова пучка, например P_1 , и, чтобы избавиться от функций Казимира, проведем редукцию на симплектические листы

$$S_1 := \{F_1 = C_1, F_4 = C_4\}. \quad (23)$$

Для этого удобно ввести комплексные координаты на многообразии M , подходящие для такой редукции [16]:

$$x_1 = -c\omega_3 + i\omega_2, \quad x_2 = \gamma_3 - i\gamma_2, \quad y_1 = \omega_1, \quad y_2 = -\gamma_1, \quad F_1, \quad F_4,$$

где бивекторы Пуассона принимают следующий простой вид:

$$P_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \check{P}_0 & \begin{array}{c} 2X_1^1 \\ 2X_1^2 \\ 2X_1^3 \\ 2X_1^4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2X_1^1 & -2X_1^2 & -2X_1^3 & -2X_1^4 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ -2X_1^5 \end{array} & \begin{array}{c} 2X_1^5 \\ 0 \end{array} \end{array} \right),$$

$$\check{P}_0 = -i \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -x_1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & x_1 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline & \check{P}_1 & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \right), \quad \check{P}_1 = -i \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Очевидно, что бивектор Пуассона P_0 нельзя ограничить на S_1 , в отличие от бивектора P_1 . Поэтому проведем процедуру редукции, введенную в работе [19]. Она является крайне нетривиальным обобщением метода Марсдена–Ратиу [20] и состоит в остроумной деформации бивектора Пуассона P_0 с помощью подходящего семейства векторных полей, трансверсальных по отношению к симплектическим листам P_1 . В результате такой деформации новый пуассонов пучок имеет общую ось с исходным пучком и может быть ограничен на S_1 .

5.2.4. *Деформация.* Выберем два векторных поля

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial F_1}, \quad Z_2 = 2 \frac{\partial}{\partial F_4},$$

нормированных как $Z_i(H_0^{(j)}) = \delta_i^j$, $i, j = 1, 2$. Так как они удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{L}_{Z_i}(P_1) = 0, \quad \mathcal{L}_{Z_i}(P_0) = [Z_i, X_1] \wedge Z_2, \quad i = 1, 2,$$

они могут деформировать бивектор Пуассона P_0 в новый бивектор Пуассона

$$Q := P_0 - X_1 \wedge Z_2, \quad Q = \left(\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (24)$$

который может быть ограничен на S_1 , и его ограничение – это $\check{Q} = \check{P}_0$.

5.2.5. *Алгебра Хаантьеса.* Существуют различные способы снабдить многообразие M алгеброй Хаантьеса, согласованной с бивектором P_1 . Здесь мы ограничимся описанием одного из них, оставив более общее обсуждение для дальнейших исследований. Чтобы построить алгебру Хаантьеса для бигамильтоновой цепочки (20), сохраняющейся после сужения на S_1 , найдем оператор Нийенхейса N , который играет роль циклического генератора алгебры Хаантьеса низкого ранга, а именно $2 \leq m \leq 3$. Более точно, требуется, чтобы оператор N :

1) факторизовал деформированный бивектор Пуассона как

$$Q = NP_1; \quad (25)$$

2) имел ограничение $\check{N}$ на S_1 , равное

$$\check{N} = \check{Q}\check{P}_1^{-1} = \check{P}_0\check{P}_1^{-1}; \quad (26)$$

3) был циклическим генератором алгебры Хаантьеса, который дает следующую цепочку Магри–Хаантьеса векторных полей, порожденную X_1 :

$$K_i X_1 = X_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (27)$$

где $X_3 = 0$.

Иными словами, обозначим через Φ включение S_1 в M , а через Φ_* и Φ^* – обратный и прямой образы соответственно. Найдем оператор $N: TM \rightarrow TM$, который является решением системы

$$NP_1 = P_0 - X_1 \wedge Z_2, \quad (28)$$

$$\Phi_* N \Phi^* = \check{P}_0 \check{P}_1^{-1}, \quad (29)$$

$$(d_1 I + e_1 N + f_1 N^2) X_1 = X_1, \quad (30)$$

$$(d_2 I + e_2 N + f_2 N^2) X_1 = X_2, \quad (31)$$

$$(d_3 I + e_3 N + f_3 N^2) X_1 = X_3, \quad (32)$$

$$\tau(N) = 0 \quad (33)$$

вместе с неизвестными функций (d_i, e_i, f_i) , $i = 1, 2, 3$. Такую систему можно сделать несвязанной, чтобы сначала найти неизвестные функции (d_i, e_i, f_i) . В самом деле, действуя операторами из левой и правой частей уравнения (28) на градиенты бигамильтоновой цепочки (20) и приняв во внимание то, что гамильтонианы H_j являются интегралами движения для X_1 , находим, что бигамильтоновы векторные поля (21) должны удовлетворять системе

$$NX_j = X_{j+1} + \underline{X_1(H_j)} Z_2 - Z_2(H_j^{(2)}) X_1, \quad X_0 := 0, \quad j = 0, 1, 2. \quad (34)$$

Решая рекуррентно такую систему относительно X_{j+1} , только в терминах векторного поля X_1 , находим единственное решение для неизвестных функций (d_i, e_i, f_i) в уравнениях (30)–(32). Это решение можно компактно записать как

$$\begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Z_2(-F_3) & 1 & 0 \\ Z_2(F_2) & Z_2(-F_3) & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I \\ N \\ N^2 \end{vmatrix}. \quad (35)$$

В итоге операторы (35) являются операторами Хаантьеса, которые дают цепочку Магри–Хаантьеса (27) для любого решения N уравнений (28), (29) и (33). Простое решение уравнений (28) и (29), оставляющее инвариантными TS_1 и $\text{Span}\{Z_1, Z_2\}$, имеет вид

$$N = \left(\begin{array}{c|cc} \check{N} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} N_5^5 & N_6^5 \\ N_5^6 & N_6^6 \end{matrix} \end{array} \right), \quad \check{N} = \check{P}_0 \check{P}_1^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} \begin{matrix} 0 & \frac{1}{x_2} \\ 1 & -\frac{x_1}{x_2} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \frac{1}{x_2} \\ 1 & -\frac{x_1}{x_2} \end{matrix} \end{array} \right), \quad (36)$$

где $(N_5^5, N_6^5, N_5^6, N_6^6)$ – произвольные функции, которые можно найти, требуя тождественного равенства нулю для кручения Нийенхейса N . Тем не менее можно отложить решение уравнения в частных производных (33), добавив к системе (28)–(33) еще одно алгебраическое требование: пусть N удовлетворяет следующей цепочке Магри–Хаантьеса 1-форм:

$$(Z_2(-F_3)I + N)^T d(-F_3) = dF_2, \quad (Z_2(F_2) + Z_2(-F_3)N + N^2)^T d(-F_3) = 0. \quad (37)$$

Уравнения (37) не зависят от уравнений (30)–(32), так как в силу наличия ядра у оператора Пуассона уравнения цепочки Магри–Хаантьеса гамильтоновых векторных полей не влекут справедливость уравнений для цепочки Магри–Хаантьеса градиентов их гамильтонианов. Таким образом, подставив (36) в уравнения (37), находим единственное решение

$$\begin{aligned} N_5^5 &= \frac{(c-1)F_1 + x_1}{\Delta}, & N_6^5 &= \frac{1}{2cx_2\Delta}, \\ N_5^6 &= -\frac{2cx_2((c-1)(F_1^2 + F_1x_1) - x_2)}{\Delta}, \\ N_6^6 &= -\frac{x_1^3 + (c-1)F_1x_1^2 + 2x_1x_2 + (c-1)F_1x_2}{x_2\Delta}, \end{aligned}$$

где $\Delta = x_1^2 + (c-1)F_1x_1 + x_2$. Теперь можно убедиться, что оно также удовлетворяет уравнению (33), следовательно, мы получили решение задачи (25)–(27), которое также является решением уравнений (37). Его минимальный полином имеет степень 2,

$$m_N(\lambda, \mathbf{x}) = \lambda^2 + \frac{x_1}{x_2}\lambda - \frac{1}{x_2} = \lambda^2 + Z_2(-F_3)\lambda + Z_2(F_2), \quad (38)$$

следовательно, он является циклическим генератором алгебры Хаантьеса ранга 2. Кроме того, коэффициенты (38) совпадают с элементами последней строки матрицы (35), поэтому $\mathbf{K}_3 = 0$.

5.2.6. Ограничение на симплектические листы $\$P_-1\$$. Ограничение на симплектические листы P_1 Из предыдущих шагов вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Деформированный пуассонов пучок $Q - \lambda P_1$ может быть ограничен на симплектические листы P_1 . Более того, гамильтонианы $\mathbf{N}$, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ и гамильтоновы векторные поля (X_1, X_2) также могут быть ограничены. В силу (37) они наделяют симплектические листы P_1 структурой $\omega\mathcal{H}$ и цепочкой Магри–Хаантьеса точных форм, заданных как*

$$\check{\mathbf{K}}_1^T d(-F_3)|_{S_1} = d(-F_3)|_{S_1}, \quad \check{\mathbf{K}}_2^T d(-F_3)|_{S_1} = dF_2|_{S_1}. \quad (39)$$

В частности, соотношения (35) сводятся к соотношениям Бененти

$$\check{\mathbf{K}}_1 = \check{\mathbf{I}}, \quad \check{\mathbf{K}}_2 = \frac{x_1}{x_2}\check{\mathbf{I}} + \check{\mathbf{N}},$$

в чем можно немедленно убедиться, анализируя минимальный полином $\check{\mathbf{N}}$, который по-прежнему задается формулой (38). Подобные соотношения верны для так называемых $\mathbf{L}$ -систем [21]–[23], которые являются проекциями квазибигамильтоновых систем [24]–[26], построенных на римановых многообразиях [27].

5.2.7. Разделение переменных. Построим на S_1 набор координат Дарбу–Хаантьеса для $\omega\mathcal{H}$ -многообразия $(S_1, P_1, \check{\mathbf{K}}_1, \check{\mathbf{K}}_2)$. Так как структура многообразия $\omega\mathcal{H}$ в данном случае эквивалентна структуре многообразия ωN , в качестве координат Дарбу–Хаантьеса можно просто взять набор координат Дарбу–Нийенхейса [28]. Для этого будем действовать согласно замечанию 70 из раздела 8 работы [2]. Сначала

в качестве первых двух координат (λ_1, λ_2) выберем просто два (двойных) собственных значения оператора Хаантьеса $\check{\mathbf{K}}_2$

$$\lambda_1 = \frac{x_1 - \sqrt{x_1^2 + 4x_2}}{2x_2}, \quad \lambda_2 = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4x_2}}{2x_2},$$

поскольку их градиенты – собственные формы оператора $\check{\mathbf{K}}_2^T$,

$$\check{\mathbf{K}}_2^T d\lambda_1 = \lambda_2 d\lambda_1, \quad \check{\mathbf{K}}_2^T d\lambda_2 = \lambda_1 d\lambda_2.$$

Заметим также, что (λ_1, λ_2) являются единственными собственными значениями оператора $\mathbf{K}_2 = Z_2(-F_3)\mathbf{I} + \mathbf{N}$, которые, таким образом, могут быть использованы для поиска половины разделяющихся переменных.

Далее, дополним набор парой сопряженных импульсов

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 y_1 + y_2), \quad \mu_2 = \frac{1}{\lambda_2}(\lambda_1 y_1 + y_2),$$

градиенты которых также являются собственными формами оператора $\check{\mathbf{K}}_2$:

$$\check{\mathbf{K}}_2^T d\mu_1 = \lambda_2 d\mu_1, \quad \check{\mathbf{K}}_2^T d\mu_2 = \lambda_1 d\mu_2.$$

Построенная локальная карта $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ – это карта Дарбу для оператора Пуассона $\check{P}_1$ и карта Хаантьеса для оператора Хаантьеса $\check{\mathbf{K}}_2$. Действительно, в такой карте они могут принимать вид

$$\check{P}_1 = i \left| \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right|, \quad \check{\mathbf{K}}_2 = \left| \begin{array}{cc|cc} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array} \right|.$$

(Более точно, чтобы построить карту Дарбу–Хаантьеса, необходимо избавиться от множителя i в выражении для $\check{P}_1$ с помощью отображения $\lambda \mapsto i\lambda$, $\mu \mapsto \mu$.)

Как следует из теоремы 59 работы [2], координаты $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ являются разделяющимися переменными для функций F_2 и F_3 . Более того, они также являются разделяющимися переменными для (ограничения на S_1) гамильтониана волчка Лагранжа

$$h_{1|S_1} = -F_{3|S_1} - (c-1)C_1 F_{2|S_1}. \quad (40)$$

Это можно доказать при помощи теста Бененти [29] или просто заметив, что благодаря соотношению (39)

$$dh_{1|S_1} = (-\check{\mathbf{I}} + (c-1)C_1 \check{\mathbf{K}}_2^T) dF_{3|S_1}.$$

Тогда функция $h_{1|S_1}$ принадлежит цепочке Магри–Хаантьеса, порожденной $F_{3|S_1}$. Следовательно, согласно теореме 59 из работы [2] $h_{1|S_1}$ допускает разделение переменных в любой локальной карте Дарбу–Хаантьеса.

6. ПЕРСПЕКТИВЫ НА БУДУЩЕЕ

Нам представляется интересным построить алгебру Пуассона–Хаантьеса пуассонова пучка $P_2 - \lambda P_1$ волчка Лагранжа, который, в отличие от пучка $P_0 - \lambda P_1$, имеет две полиномиальные функции Казимира одинаковой длины 2. Кроме того, хотелось бы построить и изучить алгебру Хаантьеса стационарных потоков [30] иерархии Буссинеска, которые также являются системами Гельфанда–Захаревича коранга 2.

Благодарности. Автор благодарит за плодотворное обсуждение своих коллег и друзей С. Логара и Д. Портелли. Автор выражает свою благодарность анонимному рецензенту за внимательное прочтение рукописи и за ценные замечания и интересные вопросы.

Список литературы

- [1] P. Tempesta, G. Tondo, “Haantjes algebras and diagonalization”, [arXiv:1710.04522](#).
- [2] P. Tempesta, G. Tondo, “Haantjes manifolds of classical integrable systems”, [arXiv:1405.5118](#).
- [3] I. M. Gelfand, I. Zakharevich, “Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bi-Hamiltonian Toda and Lax structures”, *Selecta Math. (N. S.)*, **6**:2 (2000), 131–183.
- [4] F. Magri, C. Morosi, *A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson–Nijenhuis manifolds*, Quaderno S19, Università di Milano, Milano, 1984.
- [5] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, “Poisson–Nijenhuis structures”, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **53**:1 (1990), 35–81.
- [6] F. Magri, “Recursion operators and Frobenius manifolds”, *SIGMA*, **8** (2012), 076, 7 pp., [arXiv:1210.5320](#).
- [7] F. Magri, “Haantjes manifolds”, *J. Phys. Conf. Ser.*, **482**:1 (2014), 012028, 10 pp.
- [8] F. Magri, “WDVV equations”, *Nuovo Cimento C*, **38** (2015), 166, 10 pp., [arXiv:1510.07950](#).
- [9] Ф. Магри, “Многообразия Хаантьеса и системы Веселова”, *ТМФ*, **189**:1 (2016), 101–114.
- [10] J. Haantjes, “On X_m -forming sets of eigenvectors”, *Indag. Math.*, **17** (1955), 158–162.
- [11] A. Nijenhuis, “ X_{n-1} -forming sets of eigenvectors”, *Indag. Math.*, **54** (1951), 200–212.
- [12] A. Nijenhuis, “Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields. I, II”, *Indag. Math.*, **17** (1955), 390–397, 398–403.
- [13] A. Frolicher, A. Nijenhuis, “Theory of vector-valued differential forms. I”, *Indag. Math.*, **18** (1956), 338–359.
- [14] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Beyond recursion operators*, [arXiv:1712.08908](#).
- [15] О. И. Богоявленский, “Общие алгебраические тождества для тензоров Нийенхейса и Хаантьеса”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:6 (2004), 71–84.
- [16] C. Morosi, G. Tondo, “The quasi-bi-Hamiltonian formulation of the Lagrange top”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **35**:7 (2002), 1741–1750.
- [17] К. Морози, Д. Тондо, “Разделение переменных в мультигамильтоновых системах. Применение к лагранжеву волчку”, *ТМФ*, **137**:2 (2003), 226–238.
- [18] A. V. Tsiganov, “On bi-Hamiltonian geometry of the Lagrange top”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41**:31 (2008), 315212, 12 pp.
- [19] G. Falqui, M. Pedroni, “On a Poisson reduction for Gelfand–Zakharevich manifolds”, *Rep. Math. Phys.*, **50**:3 (2002), 395–407.
- [20] J. E. Marsden, T. Ratiu, “Reduction of Poisson manifolds”, *Lett. Math. Phys.*, **11**:2 (1986), 161–169.
- [21] S. Benenti, “Inertia tensors and Stäckel systems in the Euclidean spaces”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **50**:4 (1992), 315–341.

- [22] S. Benenti, “Orthogonal separable dynamical systems”, *Differential Geometry and Its Applications*, Proceedings of the 5th International Conference (Opava, Czechoslovakia, August 24–28, 1992), Mathematical Publications (Opava), **1**, eds. O. Kowalski, D. Krupka, Silesian Univ., Opava, 1993, 163–184.
- [23] S. Benenti, “Special symmetric two-tensors, equivalent dynamical systems, cofactor and bi-cofactor systems”, *Acta Appl. Math.*, **87**:1–3 (2005), 33–91.
- [24] C. Morosi, G. Tondo, “Quasi-bi-Hamiltonian systems and separability”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:8 (1997), 2799–2806.
- [25] C. Morosi, G. Tondo, “On a class of dynamical systems both quasi-bi-Hamiltonian and bi-Hamiltonian”, *Phys. Lett. A*, **247**:1–2 (1998), 59–64.
- [26] G. Tondo, C. Morosi, “Bi-Hamiltonian manifolds, quasi-bi-Hamiltonian systems and separation variables”, *Rep. Math. Phys.*, **44**:1–2 (1999), 255–266.
- [27] G. Tondo, P. Tempesta, “Haantjes structures for the Jacobi–Calogero model and the Benenti systems”, *SIGMA*, **12** (2016), 023, 18 pp., arXiv:1511.00234.
- [28] G. Falqui, M. Pedroni, “Separation of variables for bi-Hamiltonian systems”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **6**:2 (2003), 139–179.
- [29] S. Benenti, “Separability structures on Riemannian manifolds”, *Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics* (Aix-en-Provence, September 3–7, 1979; Salamanca, September 10–14, 1979), Lecture Notes in Mathematics, **836**, eds. P.L. Garcia, A. Perez-Rendon, J.M. Souriau, Springer, Berlin, 1980, 512–538.
- [30] Г. Фальки, Ф. Магри, Г. Тондо, “Редукция бигамильтоновых систем и разделение переменных: пример из иерархии Буссинеска”, *ТМФ*, **122**:2 (2000), 212–230.