Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. Х. Закирова, О структуре проективной группы в псевдоримановом пространстве, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 1, 30–41

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:34:34

© 2018 г.

З. Х. Закирова*

О СТРУКТУРЕ ПРОЕКТИВНОЙ ГРУППЫ В ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Проведено исследование n -мерных псевдоримановых пространств $V^n(g_{ij})$ с произвольной сигнатурой, которые допускают проективные движения, т. е. группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. В частности, найдена метрика псевдориманова пространства специального типа и установлены важные проективно-групповые свойства этого пространства.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, общая теория относительности, псевдоримановы многообразия, системы дифференциальных уравнений с частными производными.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9492>

1. ВВЕДЕНИЕ

Преобразование f псевдориманова многообразия M на себя называется *проективным преобразованием*, если оно переводит геодезические линии в геодезические линии.

Линия $x^i(t)$ называется *геодезической*, если ее вектор скорости $T^i = dx^i/dt$ остается параллельным самому себе при переносе вдоль кривой (см. книгу [1]): $\nabla_t T = 0$. Уравнение геодезических в локальных координатах имеет вид

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0,$$

где Γ_{jk}^i – компоненты связности псевдориманова многообразия (M, g) . Отметим, что здесь и далее по повторяющимся индексам идет суммирование.

Векторное поле X называется *инфинитезимальным проективным преобразованием* или *проективным движением*, если локальная однопараметрическая группа преобразований, порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$, состоит из локальных проективных преобразований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00291_а).

*Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия.
E-mail: zolya_zakirova@mail.ru

Векторное поле X является инфинитезимальным проективным преобразованием на многообразии M с аффинной связностью ∇ тогда и только тогда, когда [2]

$$\nabla_Y(L_X Z - \nabla_X Z) - (L_X - \nabla_X)\nabla_Y Z = R(X, Y)Z - \varphi(Y)Z - Y\varphi(Z) \quad (1)$$

для поля 1-формы φ и всех векторных полей Y, Z на M , где R – тензор кривизны.

Если M – псевдориманово многообразие с метрикой g и римановой связностью ∇ , то условие (1) эквивалентно уравнениям (см. работу [2])

$$L_X g = h, \quad (2)$$

$$\nabla h(Y, Z, W) = 2g(Y, Z)W\varphi + g(Y, W)Z\varphi + g(Z, W)Y\varphi, \quad (3)$$

где $(Y, Z, W) \in T(M)$, $\varphi = \operatorname{div} X / (n + 1)$. Уравнение (2) называется *обобщенным уравнением Киллинга*, уравнение (3) называется *уравнением Эйзенхарта*.

В последние годы значительно возрос интерес к геометрическим свойствам многомерных пространств с нестандартными сигнатурами. В основном он связан с теорией струн, где временное(ые) направление(ия) в пространстве-времени связано(ы) с нестандартным знаком кинетического члена в действии лиувиллевского(их) поля(ей). Множество работ посвящено исследованию многомерных космологических моделей. Цель этих работ – установить, насколько далеко можно продвинуться в объяснении свойств четырехмерной Вселенной с помощью геометрических величин дополнительных измерений. Стоит отметить, что пространственно-временные симметрии порождают законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. В частности, инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования приводят к фундаментальным полевым и механическим законам сохранения в форме квадратичных первых интегралов уравнений геодезических.

Впервые проблема определения двумерных римановых многообразий, которые допускают проективные движения или инфинитезимальные проективные преобразования, т. е. непрерывные группы преобразований, сохраняющих геодезические, рассматривались Ли и Кенигсом (см. книгу [3]). Другие важные результаты были получены Петровым в работе [4], где он классифицировал геодезически эквивалентные псевдоримановы пространства V^3 . Для риманова многообразия с размерностью, большей двух, похожая проблема была решена Фубини в статье [5] и Солодовниковым в работе [6].

В работе [7] Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности не меньше трех, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования. В каждом случае были определены соответствующие максимальные проективные и аффинные алгебры Ли. Автором настоящей статьи в кандидатской диссертации [8] были исследованы шестимерные псевдоримановы пространства с сигнатурой $[+ + - - -]$. Частично результаты были опубликованы в работах [9]–[13]. Данная проблема не решена для n -мерного псевдориманова пространства с произвольной сигнатурой.

Для того чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта (3). Задача определения таких пространств зависит от типа h -пространств, т. е. от типа билинейной формы $L_X g$, которая определяется характеристикой Сегре λ -матрицы $h - \lambda g$ (см. статью [7]). Если характеристика тензора $L_X g$

есть $[abc \dots]$, то мы будем называть соответствующее пространство h -пространством типа $[abc \dots]$. Таким образом, псевдориманово пространство, для которого существует нетривиальное решение $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта, называется h -пространством.

Число возможных типов зависит от размерности и сигнатуры псевдориманова пространства. В частности, в случае лоренцевых многообразий возможны h -пространства типов $[11 \dots 1]$, $[21 \dots 1]$, $[31 \dots 1]$. Первый тип был исследован Фубини в работе [5] и Солодовниковым в статье [6], другие два были исследованы Аминовой в работе [7]. Целью настоящей работы является исследование n -мерного псевдориманова пространства $V^n(g_{ij})$ типа $[41 \dots 1]$.

Основной метод определения псевдоримановых многообразий, допускающих негомомететическую проективную группу G_r , был развит Аминовой (см. статью [7]). Используя в настоящей работе технику интегрирования в косономальном (подвижном) репере, мы находим метрику рассматриваемого h -пространства.

Уравнение Эйзенхарта в косономальном репере имеет вид [7]

$$X_r \bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^n e_h (\bar{a}_{hq} \gamma_{hpr} + \bar{a}_{ph} \gamma_{hqr}) = \bar{g}_{pr} X_q \varphi + \bar{g}_{qr} X_p \varphi, \quad p, q, r = 1, \dots, n, \quad (4)$$

где

$$X_r \varphi \equiv \xi_r^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \quad \gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \xi_{i,j}^p \xi_r^j, \quad a_{ij} = h_{ij} - 2\varphi g_{ij},$$

ξ_i^j – компоненты косономального репера, $\bar{g}_{pr} = e_p \delta_p^r$ и $\bar{a}_{pq}$ – канонические формы тензоров g_{pr} , a_{pq} соответственно, $\gamma_{lk}^p = e_p \gamma_{l\bar{p}k}$ – компоненты связности в косономальном репере X .

Коммутаторы векторных полей X_k и X_h определяются по формуле [7]

$$[X_k, X_h] = \sum_{l=1}^n e_l (\gamma_{lk}^h - \gamma_{lh}^k) X_{\bar{l}}. \quad (5)$$

Отображение $\sim$, которое переводит одни индексы в другие, было введено в определении косономального репера. Опуская громоздкое определение косономального (подвижного) репера, достаточно привести несколько примеров, и читателям станет понятно действие отображения $\sim$. Например, для h -пространства типа $[221 \dots 1]$ $\tilde{1} = 2$, $\tilde{2} = 1$, $\tilde{3} = 4$, $\tilde{4} = 3$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 6$ и т.д.; для h -пространства типа $[321 \dots 1]$ $\tilde{1} = 3$, $\tilde{2} = 2$, $\tilde{3} = 1$, $\tilde{4} = 5$, $\tilde{5} = 4$, $\tilde{6} = 6$ и т.д. Для h -пространства типа $[41 \dots 1]$ $\tilde{1} = 4$, $\tilde{2} = 3$, $\tilde{3} = 2$, $\tilde{4} = 1$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 6$ и т.д.

Для n -мерного h -пространства типа $[41 \dots 1]$ канонические формы $\bar{g}_{pr}$ и $\bar{a}_{pq}$ имеют вид (см. работу [4])

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} dx^i dx^j &= e(2 dx^1 dx^4 + 2 dx^2 dx^3) + \sum_{\sigma=5}^n e_{\sigma} dx^{\sigma^2}, \\ \bar{a}_{ij} dx^i dx^j &= e\lambda(2 dx^1 dx^4 + 2 dx^2 dx^3) + 2e dx^2 dx^4 + e dx^3^2 + \sum_{\sigma=5}^n e_{\sigma} \lambda_{\sigma} dx^{\sigma^2}, \end{aligned}$$

где $\sigma = 5, 6, \dots, n$, $e, e_{\sigma} = \pm 1$, $\lambda, \lambda_{\sigma}$ являются корнями характеристического уравнения $\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$, причем $\lambda \neq \lambda_{\sigma}$, $\lambda_{\sigma} \neq \lambda_{\tau}$ при $\sigma \neq \tau$.

2. МЕТРИКА h -ПРОСТРАНСТВА ТИПА [41...1]

Подставляя канонические формы $\bar{g}_{pr}$ и $\bar{a}_{pq}$ в уравнение (4) и учитывая, что $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e$ (см. статью [7]), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} X_r \lambda &= 0 \quad (r \neq 4), & X_r \lambda_\sigma &= 0 \quad (r \neq \sigma), & X_4(2\lambda - \phi) &= X_\sigma(\lambda_\sigma - 2\phi) = 0, \\ \gamma_{314} &= \frac{1}{2}eX_4\phi, & \gamma_{413} &= \gamma_{431} = \gamma_{422} = -eX_4\phi, \\ \gamma_{1\sigma 4} &= \gamma_{2\sigma 3} = \gamma_{3\sigma 2} = \gamma_{4\sigma 1} = \frac{eX_\sigma\phi}{\lambda - \lambda_\sigma}, & \gamma_{2\sigma 4} &= \gamma_{3\sigma 3} = \gamma_{4\sigma 2} = -\frac{eX_\sigma\phi}{(\lambda - \lambda_\sigma)^2}, \\ \gamma_{3\sigma 4} &= \gamma_{4\sigma 3} = \frac{eX_\sigma\phi}{(\lambda - \lambda_\sigma)^3}, & \gamma_{4\sigma 4} &= -\frac{eX_\sigma\phi}{(\lambda - \lambda_\sigma)^4}, \\ \gamma_{4\sigma\sigma} &= \frac{e_\sigma X_4\phi}{\lambda - \lambda_\sigma}, & \gamma_{\sigma\tau\sigma} &= \frac{e_\sigma X_\tau\phi}{\lambda_\sigma - \lambda_\tau}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\sigma, \tau = 5, 6, \dots, n$, $\sigma \neq \tau$, остальные инварианты γ_{pqr} равны нулю. Для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$X_q \theta = \xi_q^i \partial_i \theta = 0, \quad q = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n, \quad m < n, \quad (7)$$

где ξ_q^i – компоненты косономального репера, была вполне интегрируемой, т. е. чтобы она допускала $n - m$ независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы операторов системы (см. работу [2])

$$[X_q, X_r] = X_q X_r - X_r X_q = \sum_{p=1}^n e_p (\gamma_{pqr} - \gamma_{prq}) X_{\bar{p}} \quad (8)$$

линейно выражались через операторы X_q .

Используя формулы (6) и (8), выпишем коммутаторы операторов X_i , $i = 1, \dots, n$, в рассматриваемом h -пространстве:

$$\begin{aligned} (X_1, X_2) &= 0, & (X_1, X_3) &= 0, & (X_2, X_3) &= 0, & (X_1, X_4) &= e(\gamma_{314} - \gamma_{341})X_2, \\ (X_2, X_4) &= -e\gamma_{242}X_3, & (X_3, X_4) &= e(\gamma_{134} - \gamma_{143})X_4, \\ (X_1, X_\sigma) &= -e\gamma_{4\sigma 1}X_1, & (X_2, X_\sigma) &= -e\gamma_{4\sigma 2}X_1 - e\gamma_{3\sigma 2}X_2, \\ (X_3, X_\sigma) &= -e\gamma_{4\sigma 3}X_1 - e\gamma_{3\sigma 3}X_2 - e\gamma_{2\sigma 3}X_3, \\ (X_4, X_\sigma) &= -e\gamma_{4\sigma 4}X_1 - e\gamma_{3\sigma 4}X_2 - e\gamma_{2\sigma 4}X_3 - e\gamma_{1\sigma 4}X_4 + e_\sigma\gamma_{4\sigma\sigma}X_\sigma, \\ (X_\sigma, X_\tau) &= -e_\sigma\gamma_{\sigma\tau\sigma}X_\sigma + e_\tau\gamma_{\tau\sigma\tau}X_\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, составляя вполне интегрируемые системы (7) из (9), мы определяем допускаемые этими системами независимые решения, которые обозначим через θ^i . После чего с помощью преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$ мы можем обратить в нуль некоторые компоненты ξ_q^i введенного выше косономального репера. В частности,

вполне интегрируемыми системами являются системы $X_p \theta = 0$ ($p \neq 4$), $X_q \theta^\sigma = 0$ ($q \neq \sigma$), $X_1 \theta = X_\sigma \theta = 0$, $X_1 \theta = X_2 \theta = X_\sigma \theta = 0$ и $X_\sigma \theta = 0$. Легко заметить, что первая система имеет решение θ^4 , вторая система – решение θ^σ , третья система – решения $\theta^2, \theta^3, \theta^4$, четвертая – θ^3, θ^4 , пятая – $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ и θ^4 .

После преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$ в новой системе координат, опуская штрихи, находим

$$\xi_1^i = P(x)\delta_1^i, \quad \xi_\sigma^i = Q_\sigma(x)\delta_\sigma^i, \quad \xi_2^3 = \xi_2^4 = \xi_3^4 = \xi_2^\sigma = \xi_3^\sigma = \xi_4^\sigma. \quad (10)$$

С помощью полученных равенств можно легко проинтегрировать уравнения (6), не содержащие γ_{pqr} , и найти функцию φ . Она имеет вид

$$2\varphi = \sum_{i=1}^n f_i + c, \quad \lambda_i = f_i, \quad (11)$$

где $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4(x^4)$, $f_\sigma(x^\sigma)$ – произвольные функции указанных переменных, $c = \text{const}$.

Приравнявая коэффициенты при одинаковых производных $\partial/\partial x^i$ в правых и левых частях равенств (9), с помощью формул (6), (10) и (11) получаем довольно громоздкую систему дифференциальных уравнений в частных производных на компоненты ξ^i косономального репера. Интегрируя эту систему уравнений с удачно подобранными преобразованиями координат (подобные выкладки можно найти в статье [11]), а затем применяя формулы (см. работу [7])

$$g^{ij} = \sum_{h=1}^n e_h \xi_h^i \xi_h^j, \quad \xi_h^i = g_{ij} \xi_h^j, \quad a_{ij} = \sum_{h,l=1}^n e_h e_l \bar{a}_{hl} \xi_h^i \xi_l^j,$$

мы в конечном итоге находим компоненты тензоров g_{ij} и a_{ij} .

Запишем итоговый результат в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если симметрический тензор h_{ij} типа $[41 \dots 1]$ и скаляр φ удовлетворяют в $V^n(g_{ij})$ уравнениям (3), то существует голономная система координат, в которой φ , g_{ij} и h_{ij} определяются формулами

$$\begin{aligned} g_{ij} dx^i dx^j &= e\Pi_\sigma(f_\sigma - \epsilon x^4) \left(6A dx^1 dx^4 + 2 dx^2 dx^3 + \right. \\ &\quad + 2(2\epsilon x^2 - 3A\Sigma) dx^2 dx^4 - \Sigma (dx^3)^2 + 2(\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2 \Sigma) dx^3 dx^4 + \\ &\quad + 4 \left((\epsilon x^2)^2 \Sigma + \epsilon^2 x^1 x^2 - \frac{3}{2} \epsilon x^1 A \Sigma \right) (dx^4)^2 \Big) + \\ &\quad + 3A dx^3 dx^4 + 12\epsilon x^2 A (dx^4)^2 + \sum_{\sigma} e_\sigma \Pi'_i(f_i - f_\sigma) (dx^\sigma)^2, \\ a_{ij} dx^i dx^j &= \epsilon x^4 g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + 2g_{14} dx^2 dx^4 + 2g_{24} dx^3 dx^4 + \\ &\quad + g_{23} (dx^3)^2 + 3g_{23} \left(2\epsilon x^1 A - 4\epsilon x^2 A \Sigma + \frac{4}{3} (\epsilon x^2)^2 \right) (dx^4)^2 + \\ &\quad + 9A^2 (dx^4)^2 + \sum_{\sigma} f_\sigma g_{\sigma\sigma} (dx^\sigma)^2, \\ h_{ij} &= a_{ij} + 2\varphi g_{ij}, \quad 2\varphi = 4\epsilon x^4 + \sum_{\sigma} f_\sigma + c, \\ A &= \epsilon x^3 + \theta(x^4), \quad \Sigma = \sum_{\sigma} (f_\sigma - \epsilon x^4)^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$, $\sigma = 5, 6, \dots, n$, $i_1, j_1 = 1, \dots, 4$, $e, e_\sigma = \pm 1$, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \epsilon x^4$, f_σ – функция переменной x^σ , f_4, f_σ – не равные тождественно друг другу функции, ϵ равно нулю или единице, θ – функция переменной x^4 , отличная от нуля при $\epsilon = 0$, Π_σ означает произведение по σ , Π'_i означает произведение для всех $i = 1, \dots, n$, кроме $i = \sigma$.

В данной теореме сформулированы необходимые условия. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что справедливо и обратное утверждение, поэтому найденные условия являются достаточными. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы псевдориманово пространство $V^n(g_{ij})$ было h -пространством типа $[41 \dots 1]$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой голономной системе координат его метрика определялась формулой (12).*

Напомним, что проективное движение ξ является проективным движением типа χ , если производная Ли $L_\xi g_{ij}$ метрического тензора g_{ij} принадлежит к типу χ (см. статью [7]). В нашем случае $\chi = [41 \dots 1]$. Движение ξ есть проективное движение в $V^n(g_{ij})$ тогда и только тогда, когда выполняются обобщенные уравнения Киллинга $L_\xi g_{ij} = h_{ij}$. Поэтому справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы бесконечно малое преобразование $x^{i'} \rightarrow x^i + \xi^i \delta t$ было проективным движением типа $[41 \dots 1]$ в n -мерном псевдоримановом пространстве $V^n(g_{ij})$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой системе координат*

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad L_\xi g_{ij} = h_{ij},$$

где соответствующие пары g_{ij} и h_{ij} , а также отвечающая им определяющая функция φ определены в теореме 1.

3. УСЛОВИЯ ПОСТОЯНСТВА КРИВИЗНЫ h -ПРОСТРАНСТВА ТИПА $[41 \dots 1]$

Для дальнейшего исследования нам понадобятся необходимые и достаточные условия постоянства кривизны рассматриваемого h -пространства.

Как известно, это условие выражается равенством

$$R_{jkl}^i = K(\delta_{kl}^i g_{jl} - \delta_l^i g_{jk}), \quad K = \text{const.} \quad (13)$$

Отличные от нуля компоненты тензора кривизны заданного h -пространства имеют вид $R_{\nu i \mu}^i$, $i \neq \mu$, $R_{\nu b_1 \mu}^{a_1}$, $b_1 \neq \mu$, $a_1 < b_1$. Здесь $i = 1, 2, \dots, n$, $a_1, b_1 = 1, \dots, 4$, ν, μ являются индексами ненулевых компонент метрики $g_{\nu\mu}$ (12).

Из формулы (13) в частности получаем, что

$$R_{114}^1 = R_{1\sigma 4}^\sigma, \quad R_{214}^1 = R_{2\sigma 4}^\sigma, \quad R_{224}^1 = 0. \quad (14)$$

Для h -пространства типа $[41 \dots 1]$

$$\begin{aligned} R_{114}^1 &= \rho g_{14}, & R_{214}^1 &= \rho g_{24}, & R_{1\sigma 4}^\sigma &= \rho_\sigma g_{14}, & R_{2\sigma 4}^\sigma &= \rho_\sigma g_{24}, \\ R_{224}^1 &= \gamma_1 g_{24} + \gamma_2 g_{14} + \frac{2\epsilon}{3A^2} \left(\theta'(x^4) - \frac{4}{3} \epsilon^2 x^2 \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - \epsilon x^4)^3 g_{\sigma\sigma}}, & \gamma_2 &= -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - \epsilon x^4)^4 g_{\sigma\sigma}}, \\ \rho &= -\frac{1}{4} \sum_{\sigma} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - \epsilon x^4)^2 g_{\sigma\sigma}}, \\ \rho_{\sigma} &= -\frac{1}{4} \frac{(f'_{\sigma})^2}{(f_{\sigma} - \epsilon x^4) g_{\sigma\sigma}} \left(\frac{2f''_{\sigma}}{(f'_{\sigma})^2} - \frac{1}{f_{\sigma} - \epsilon x^4} + \sum_{i, i \neq \sigma} (f_i - f_{\sigma})^{-1} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\gamma, \gamma \neq \sigma} \frac{(f'_{\gamma})^2}{(f_{\gamma} - \epsilon x^4)(f_{\gamma} - f_{\sigma}) g_{\gamma\gamma}},\end{aligned}$$

а индексы $\sigma, \gamma = 5, 6, \dots, n$.

Следовательно, из первых двух равенств (14) находим, что

$$\rho - \rho_{\sigma} = 0, \quad \gamma_1 g_{14} + \frac{2\epsilon^2}{3A} = 0.$$

Дифференцируя последнее соотношение по x^3 , получаем равенство $\epsilon = 0$, откуда $\gamma_1 = 0$. Тогда из последнего равенства (14) следует, что $\gamma_2 = 0$.

Покажем, что необходимые условия постоянства кривизны h -пространства типа $[41 \dots 1]$

$$\rho - \rho_{\sigma} = \epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad (15)$$

являются достаточными. Имеем

$$\begin{aligned}\partial_1 \rho &= \partial_2 \rho = \partial_3 \rho = 0, \\ \partial_4 \rho &= 6\epsilon \gamma_1, \quad \partial_{\sigma} \rho = -f'_{\sigma} \frac{\rho - \rho_{\sigma}}{f_{\sigma} - \epsilon x^4}.\end{aligned}$$

Отсюда в силу условия (15) получаем, что $\rho = \rho_{\sigma} = \text{const}$. Нетрудно убедиться, что при выполнении последнего равенства и условий $\epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ тензор кривизны рассматриваемого пространства удовлетворяет соотношениям (13) с $K = \rho = \text{const}$.

Сформулируем результат, полученный в настоящем разделе, в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы h -пространство $V^n(g_{ij})$ типа $[41 \dots 1]$ имело постоянную кривизну, необходимо и достаточно выполнение условий (15).*

4. ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ПРОЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ В h -ПРОСТРАНСТВЕ ТИПА $[41 \dots 1]$

Здесь доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Всякая определяющая функция проективного движения в h -пространстве непостоянной кривизны типа $[41 \dots 1]$ есть $\phi = a_1 \varphi$, где $a_1 = \text{const}$, φ — функция, определенная в теореме 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть векторное поле ξ^i задает проективное движение с определяющей функцией ϕ в рассматриваемом h -пространстве $V^n(g_{ij})$. Тогда для тензора $b_{ij} = L_{\xi}g_{ij}$ выполняются уравнения Эйзенхарта

$$b_{ij,k} = 2g_{ij}\phi_{,k} + g_{ik}\phi_{,j} + g_{jk}\phi_{,i}. \quad (16)$$

Условия их интегрируемости имеют вид

$$b_{mi}R_{jkl}^m + b_{mj}R_{ikl}^m = g_{ik}\phi_{,jl} + g_{jk}\phi_{,il} - g_{li}\phi_{,jk} - g_{lj}\phi_{,ik}. \quad (17)$$

Покажем, что для любого проективного движения в рассматриваемом h -пространстве выполняются условия

$$b_{\alpha\beta} = 0, \quad \phi_{,\alpha\beta} = 0, \quad (18)$$

где α, β являются индексами нулевых компонент $g_{\alpha\beta}$ соответствующего метрического тензора.

При $(ijkl) = (1213), (1313), (1\sigma1\sigma), (3312), (1314)$ получаем равенства

$$b_{11}R_{213}^1 = -g_{23}\phi_{,11}, \quad b_{11}R_{313}^1 = -g_{33}\phi_{,11}, \quad (19)$$

$$b_{11}R_{\sigma1\sigma}^1 = -g_{\sigma\sigma}\phi_{,11}, \quad (20)$$

$$b_{13}R_{312}^1 = -g_{23}\phi_{,13}, \quad b_{11}R_{314}^1 + b_{13}R_{114}^1 = -g_{14}\phi_{,13} - g_{34}\phi_{,11}. \quad (21)$$

Так как

$$\begin{aligned} R_{213}^1 &= R_{312}^1 = g_{23}\rho, & R_{114}^1 &= g_{14}\rho, \\ R_{313}^1 &= g_{33}\rho + \gamma_1 g_{23} + \frac{2\epsilon^2}{9A^2}, & R_{\sigma1\sigma}^1 &= g_{\sigma\sigma}\rho_{\sigma}, \\ R_{314}^1 &= g_{34}\rho + \gamma_1 g_{24} + \gamma_2 g_{14} + \frac{2\epsilon}{3A^2} \left(\theta' - \frac{4\epsilon^2 x^2}{3} \right), \end{aligned}$$

то из уравнений (19) и (20) вытекает, что

$$b_{11}(\rho - \rho_{\sigma}) = b_{11} \left(\rho - \rho_{\sigma} + \gamma_1 \frac{g_{23}}{g_{33}} + \frac{2\epsilon^2}{9A^2 g_{33}} \right) = 0.$$

Из уравнений (20) и (21) следует, что

$$b_{11} \left(\rho - \rho_{\sigma} + \gamma_1 \frac{g_{24}}{g_{34}} + \gamma_2 \frac{g_{14}}{g_{34}} + \frac{2\epsilon}{3A^2 g_{34}} \left(\theta' - \frac{4\epsilon^2 x^2}{3} \right) \right) = 0.$$

Предположим, что $b_{11} \neq 0$. Тогда из последних соотношений легко получить равенства $\rho - \rho_{\sigma} = \epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, которые согласно теореме 4 являются необходимыми и достаточными условиями постоянства кривизны, т. е. рассматриваемое пространство имеет постоянную кривизну, что противоречит доказываемой теореме. Таким образом, $b_{11} = 0$ и, следовательно, $\phi_{,11} = 0$. Подобным образом доказываются остальные соотношения (18).

С помощью доказанных соотношений (18) из уравнений (16), полагая поочередно $(ijk) = (1\tau\tau), (2\tau\tau), (3\tau\tau)$, $\tau = 5, 6, \dots, n$, получаем соотношения

$$\phi_{,1} = \phi_{,2} = \phi_{,3} = 0,$$

$$\phi_{,\sigma} = f'_\sigma P_{\sigma\tau}, \quad \phi_{,\tau} = f'_\tau P_{\sigma\tau}, \quad P_{\sigma\tau} \equiv \frac{1}{2} \frac{b_{\tau\tau} g_{\tau\tau}^{-1} - b_{\sigma\sigma} g_{\sigma\sigma}^{-1}}{f_\tau - f_\sigma}, \quad \sigma \neq \tau.$$

Из последних равенств следует равенство $\partial_{\sigma\tau}\phi = 0$, $\sigma, \tau = 5, 6, \dots, n$, $\sigma \neq \tau$. Используя полученные результаты, из уравнений (16) при $(ijk) = (1\tau 4), (4\tau\tau), (\tau\tau\tau)$ находим

$$\begin{aligned} \phi_{,\tau} &= \frac{1}{2} \frac{f'_\tau}{f_\tau - \epsilon x^4} \left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{14}}{g_{14}} \right), & \phi_{,4} &= 2 \frac{\epsilon}{f_\tau - \epsilon x^4} \left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{14}}{g_{14}} \right), \\ \frac{\partial_\tau b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} &= -f'_\tau \sum_{i,j \neq \tau} (f_i - f_\tau)^{-1} \frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} + 4\phi_{,\tau}, & i, j &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

откуда несложно вывести уравнения

$$f'_\tau \partial_\tau \phi_{,\tau} = f''_\tau \phi_{,\tau}, \quad 4\epsilon \phi_{,\tau} = f'_\tau \phi_{,4}.$$

Из условия $\phi_{,4\tau} = 0$ и соотношения $4\epsilon \phi_{,\tau} = f'_\tau \phi_{,4}$ следует равенство $\partial_{4\tau}\phi = 0$. Если не все $f'_\tau = 0$, то из полученных формул вытекает нужный результат

$$\phi = \frac{1}{2} a_1 \sum_{i=1}^n f_i = a_1 \varphi,$$

где φ определяется формулой (11). В противном случае, когда все $f'_\tau = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \phi_{,\tau} = \phi_{,14} = \phi_{,23} = \phi_{,24} = \phi_{,\tau\tau} &= 0, & \phi_{,34} &= -\frac{2\epsilon^2}{3A(f_\tau - \epsilon x^4)} \left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{14}}{g_{14}} \right), \\ \phi_{,44} = \partial_{44}\phi - \frac{2\epsilon(3\theta' - 2\epsilon^2 x^2)}{3A(f_\tau - \epsilon x^4)} &\left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{14}}{g_{14}} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\epsilon = 1$, так как при $\epsilon = f'_\tau = 0$ пространство имеет нулевую кривизну.

Из уравнений (17) при $(ijkl) = (4413), (4\tau 4\tau)$ получаем два равенства

$$\begin{aligned} b_{14} R_{413}^1 + b_{24} R_{413}^2 &= g_{14} \phi_{,34}, \\ b_{14} R_{\tau 4\tau}^1 + b_{24} R_{\tau 4\tau}^2 + b_{\tau\tau} R_{44\tau}^\tau &= -g_{\tau\tau} \phi_{,44}. \end{aligned}$$

Выражая b_{24} из первого равенства и подставляя результат во второе равенство, с учетом формулы (22) получаем равенство $\partial_{44}\phi = 0$, откуда и следует нужный результат. Итак, теорема доказана.

5. О КОВАРИАНТНО ПОСТОЯННОМ СИММЕТРИЧЕСКОМ ТЕНЗОРЕ В h -ПРОСТРАНСТВЕ ТИПА $[41 \dots 1]$

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6. *Любой ковариантно постоянный симметрический тензор b_{ij} в h -пространстве непостоянной кривизны типа $[41 \dots 1]$ пропорционален фундаментальному тензору:*

$$b_{ij} = a_2 g_{ij}, \quad a_2 = \text{const}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b_{ij} удовлетворяет в $V^n(g_{ij})$ уравнениям

$$b_{ij,k} = 0, \quad (24)$$

которые получаются из уравнений (16) при $\phi = \text{const}$. Следовательно, условия интегрируемости уравнений (24) определяются равенствами (17) при $\phi = \text{const}$. Тогда из условий (18) получаем равенство $b_{\alpha\beta} = 0$. Напомним, что индексы α, β соответствуют индексам нулевых компонент метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ рассматриваемого h -пространства. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $b_{ij} = a_2 g_{ij}$, где a_2 – некоторый коэффициент пропорциональности, постоянство которого следует из уравнений $b_{ij,k} = 0$ и параллельности метрического тензора [7].

Из уравнения (24) с $(ijk) = (\mu\tau\nu), (\sigma\tau\sigma)$, $\sigma, \tau = 5, 6, \dots, n$, $\sigma \neq \tau$, получаем соотношения

$$f'_\tau \left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{\mu\nu}}{g_{\mu\nu}} \right) = 0,$$

где μ, ν являются индексами ненулевых компонент метрического тензора (12). Если не все $f'_\tau = 0$, то выполняется равенство

$$\frac{b_{\mu\nu}}{g_{\mu\nu}} = \frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}},$$

которое вместе с условием $b_{\alpha\beta} = 0$ дает нужный результат (23).

В случае $f'_\tau = 0$ последнее равенство следует из уравнений (24) с $(ijk) = (\tau 4\tau)$ и из (17) с $(ijkl) = (3324), (4413), (2343), (4432), (4442)$:

$$\begin{aligned} \epsilon \left(\frac{b_{\tau\tau}}{g_{\tau\tau}} - \frac{b_{14}}{g_{14}} \right) &= 0, \\ b_{23}R_{324}^2 - b_{33}R_{342}^3 &= 0, \quad b_{14}R_{413}^1 - b_{24}R_{431}^2 = 0, \\ b_{23}R_{343}^3 + b_{24}R_{343}^4 + b_{23}R_{243}^2 &= 0, \quad b_{14}R_{432}^1 + b_{34}R_{432}^3 = 0, \\ b_{14}R_{442}^1 + b_{24}R_{442}^2 + b_{34}R_{442}^3 + b_{44}R_{442}^4 &= 0, \end{aligned}$$

где $\epsilon = 1$ в силу непостоянства кривизны пространства, а компоненты тензора кривизны имеют вид

$$\begin{aligned} R_{431}^2 &= R_{342}^3 = R_{432}^3 = 3AR_{343}^4 = \frac{R_{342}^2}{\Sigma} = \frac{R_{243}^2}{\Sigma} = \frac{2\epsilon^2}{3A}, \\ R_{343}^3 &= -\frac{4\epsilon^3 x^2}{9A^2}, \quad R_{424}^2 = 3AR_{423}^1 = \frac{2\epsilon^2}{3A}(2\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2 \Sigma + 3A\Sigma_1), \\ R_{442}^1 &= -\frac{2\epsilon\theta' g_{34}}{3A^2 g_{23}} + \frac{4\epsilon}{3A} \left(\epsilon^2 x^2 \Sigma_1 + \epsilon^2 x^2 \Sigma^2 + \frac{2\epsilon}{3A} \epsilon^2 x^1 x^2 - \frac{4\epsilon}{3A} (\epsilon x^2)^2 \Sigma + \frac{3A\epsilon\Sigma}{g_{23}} \right), \\ \Sigma_1 &= \sum_{\sigma} (f_{\sigma} - \epsilon x^4)^{-4}. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана.

6. ПРОЕКТИВНО-ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА h -ПРОСТРАНСТВА $V^N(g_{ij})$ ТИПА [41...1]

Нетрудно заметить, что прямым следствием теоремы, доказанной в предыдущем разделе, является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *Аффинная группа в h -пространстве $V^n(g_{ij})$ типа $[41 \dots 1]$ непостоянной кривизны состоит из гомотетий.*

Общее решение уравнений Эйзенхарта в рассматриваемом h -пространстве непостоянной кривизны имеет вид $a_1 h_{ij} + a_2 g_{ij}$, где a_1, a_2 – произвольные постоянные,

$$h_{ij} = a_{ij} + \left(\sum_{k=1}^n f_k \right) g_{ij},$$

тензоры a_{ij}, g_{ij} определены в теореме 1. Это следует из теорем, доказанных в предыдущих разделах, линейности уравнения Эйзенхарта (3) и того факта, что любые два решения h_{ij}^1 и h_{ij}^2 этого уравнения с одинаковой правой частью могут отличаться лишь на ковариантно постоянный тензор b_{ij} [7].

Таким образом, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8. *Все проективные движения в h -пространстве $V^n(g_{ij})$ типа $[41 \dots 1]$ непостоянной кривизны получаются интегрированием уравнений*

$$L_\xi g_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = a_1 a_{ij} + \left(a_1 \sum_{k=1}^n f_k + a_2 \right) g_{ij},$$

где тензоры a_{ij} и g_{ij} определены в теореме 1, a_1, a_2 – постоянные.

Из этой теоремы вытекает важная групповая характеристика данного h -пространства.

ТЕОРЕМА 9. *Если h -пространство $V^n(g_{ij})$ типа $[41 \dots 1]$ допускает негомотетическую проективную алгебру Ли P_r , то эта алгебра содержит подалгебру H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий размерности $r - 1$.*

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы псевдоримановы пространства с произвольной сигнатурой, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные преобразования. В частности, найдена метрика h -пространства типа $[41 \dots 1]$, а затем установлены важные проективно-групповые свойства этого h -пространства. Важно отметить, что полученные проективно-групповые свойства для h -пространства типа $[41 \dots 1]$ справедливы и для пространств лоренцевой сигнатуры, а именно h -пространств типов $[11 \dots 1]$, $[21 \dots 1]$, $[31 \dots 1]$ (см. статью [7]), а также для шестимерных h -пространств типов $[2211]$, $[321]$, $[33]$, $[411]$, $[51]$ (см. работу [8]). Таким образом, можно с уверенностью предположить, что данные проективно-групповые свойства имеют место для всех n -мерных h -пространств типов $[a_1 a_2 \dots a_m]$ произвольной сигнатуры. Здесь числа $a_1, a_2, \dots, a_m$ могут принимать любое из значений $1, 2, \dots$, причем $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$.

Следует заметить, что остается открытой проблема восстановления векторного поля, определяющего инфинитезимальное проективное преобразование. Решение этой задачи сводится к интегрированию уравнения Киллинга.

Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, УРСС, М., 1998.
- [2] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, ИЛ, М., 1948.
- [3] G. Konigs, “Appl. II”: G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces. IV*, Gauthier-Villars, Paris, 1896, 368–404.
- [4] А. З. Петров, “О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики”, *Уч. зап. Казан. ун-та*, **109**:3 (1949), 7–36.
- [5] G. Fubini, “Sui gruppi trasformazioni geodetiche”, *Mem. Acc. Torino. Cl. Fisi. Mat. Nat.*, **53** (1903), 261–313.
- [6] А. С. Солодовников, “Проективные преобразования римановых пространств”, *УМН*, **11**:4(70) (1956), 45–116.
- [7] А. В. Аминова, “Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий”, *УМН*, **50**:1(301) (1995), 69–142.
- [8] З. Х. Закирова, *Проективно-групповые свойства 6-мерных теорий типа Калуцы–Клейна*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, КГУ, Казань, 2001.
- [9] З. Х. Закирова, “Первые интегралы уравнений геодезических h -пространств типа [51]”, *Межвуз. темат. сб. науч. тр., Труды геометрического семинара*, **23**, Изд-во Казан. матем. общ-ва, Казань, 1997, 57–64.
- [10] З. Х. Закирова, “Первые интегралы уравнений геодезических h -пространств типа [411]”, *Изв. вузов. Матем.*, 1999, № 9, 78–79.
- [11] З. Х. Закирова, “Жесткие шестимерные h -пространства постоянной кривизны”, *ТМФ*, **158**:3 (2009), 347–354.
- [12] З. Х. Закирова, “Метрики 6-мерных h -пространств типов $[3(21)]$, $[(32)1]$, $[(321)]$ ”, *Краткие сообщения по физике ФИАН*, **38**:9 (2011), 270–274.
- [13] З. Х. Закирова, “О некоторых специальных решениях уравнения Эйзенхарта”, *Уфимский матем. журн.*, **5**:3 (2013), 41–53.

Поступила в редакцию 17.10.2017