Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Мирза, М. Хассан, О свойствах интегрируемости суперсимметричной бездисперсионной интегрируемой системы со взаимодействием, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 3, 381–390

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 03:48:34

© 2018 г.

А. Мирза*, М. Хасан*

О СВОЙСТВАХ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ БЕЗДИСПЕРСИОННОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Детально изучается проблема интегрируемости $N = 1$ суперсимметричной бездисперсионной интегрируемой системы со взаимодействием. Представление Лакса для данной системы записано в виде (3×3) -матрицы пары Лакса для суперполей и показано, что условие нулевой кривизны соответствует суперсимметричной бездисперсионной системе со взаимодействием. Из фермионного суперполевого представления Лакса выведены связанные уравнения Риккати для суперполей, с помощью которых затем получается бесконечный набор суперполевых сохраняющихся токов. Исследовано преобразование Дарбу рассматриваемой системы и путем его многократного применения получены многосолитонные решения.

Ключевые слова: интегрируемые системы, суперсимметрия, преобразование Дарбу, суперсимметричная бездисперсионная система со взаимодействием.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9498>

1. ВВЕДЕНИЕ

Суперсимметричные интегрируемые системы являются предметом многочисленных исследований, поскольку поиск новых решений суперсимметричных версий классических интегрируемых систем представляет большой интерес [1]–[6]. Для изучения различных свойств интегрируемых систем, которые также можно применить к суперсимметричным интегрируемым системам, были предложены многочисленные подходы, в частности билинейный метод Хироты, методы преобразования Беклунда и преобразования Дарбу, метод обратной задачи рассеяния и т. д. (см., например, монографию [7]). Преобразование Дарбу является эффективным подходом к нахождению солитонных решений различных интегрируемых систем, и в своем стандартном виде оно использовалось для многих суперсимметричных и классических интегрируемых уравнений [8]–[16].

*Department of Physics, University of the Punjab, Lahore, Punjab, Pakistan.
E-mail: arifa.mughal@gmail.com, mhassan.physics@pu.edu.pk

В недавней статье [17] мы предложили $N = 1$ суперсимметричное обобщение интегрируемой бездисперсионной системы со взаимодействием (далее мы называем ее SUSY-CD-системой, т.е. supersymmetric coupled dispersionless system). Мы получили уравнения для компонент поля, сводящиеся в бозонном пределе к обычной бездисперсионной системе. Мы также использовали билинейный метод Хироты для суперполя, чтобы получить мультисолитонные решения системы. Бездисперсионные системы со взаимодействием [18]–[27] составляют важный класс нелинейных интегрируемых систем, которые обладают многими интересными свойствами и имеют разнообразные применения в математике и физике (см., например, статью [17] и ссылки в ней).

Прежде чем двигаться дальше, напомним обозначения работы [17]. Мы определяем $N = 1$ SUSY-CD-систему в терминах фермионных (грассманово-нечетных) суперполей $Q(x, t, \theta, \zeta)$ и $R(x, t, \theta, \zeta)$:

$$D_x D_t Q + R D_x R = 0, \quad D_x D_t R - R D_x Q = 0, \quad (1)$$

где θ и ζ – антикоммутирующие грассмановы переменные ($\theta^2 = 0, \zeta^2 = 0$). Ковариантные производные в суперпространстве определяются как $D_x = \partial_\theta + \theta \partial_x$, $D_t = \partial_\zeta + \zeta \partial_t$, при этом $D_x^2 = \partial_x$, $D_t^2 = \partial_t$ и оператор D_x антикоммутирует с оператором D_t . Преобразования суперсимметрии порождаются операторами $Q_1 = \partial_\theta - \theta \partial_x$ и $Q_2 = \partial_\zeta - \zeta \partial_t$. Операторы Q_1 и Q_2 антикоммутируют с операторами ковариантного дифференцирования D_x и D_t соответственно.

Цель настоящей работы – изучить различные свойства интегрируемости интегрируемой SUSY-CD-системы. Следуя работе [28], мы записываем (3×3) -матрицу представления Лакса для суперполей SUSY-CD-системы. Это представление Лакса приводит к двум парам суперполевых уравнений Риккати, которые затем используются для расчета бесконечного числа локальных сохраняющихся токов. В нашем анализе мы получаем преобразование Дарбу суперполей SUSY-CD-системы и строим мультисолитонные решения.

Статья организована следующим образом: В разделе 2 мы записываем представление Лакса для суперполей в виде матрицы размера 3×3 . Известно, что условие нулевой кривизны для суперполевых операторов Лакса приводит к SUSY-CD-системе. В разделе 3 приводятся две пары уравнений Риккати для суперполей, которые получаются из линейной спектральной задачи. Эти уравнения используются для построения бесконечного числа суперполевых сохраняющихся токов. В разделе 4 мы изучаем преобразования Дарбу суперполей линейной спектральной задачи и суперполей SUSY-CD-системы и с его помощью рассчитываем N -солитонное решение SUSY-CD-системы. Раздел 5 содержит заключительные замечания.

2. СУПЕРПОЛЕВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА ДЛЯ SUSY-CD-СИСТЕМЫ

Чтобы линеаризовать SUSY-CD-систему, рассмотрим следующую линейную систему относительно суперполевой волновой функции Ψ :

$$\begin{aligned} D_x \Psi &= (\mathcal{J}\{D_x Q(x, t, \theta, \zeta) - i D_x R(x, t, \theta, \zeta)\} + \\ &\quad + \mathcal{K}\{D_x Q(x, t, \theta, \zeta) + i D_x R(x, t, \theta, \zeta)\}) \Psi, \\ D_t \Psi &= (\mathcal{M}R(x, t, \theta, \zeta) + \mathcal{N}) \Psi, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ суть комплекснозначные матрицы. Условие совместности уравнений (2) эквивалентно SUSY-CD-системе (1). Алгебраические связи между матрицами $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ задаются как

$$i\mathcal{J} = [\mathcal{M}, \mathcal{J}], \quad i\mathcal{K} = [\mathcal{K}, \mathcal{M}], \quad \frac{i}{2}\mathcal{M} = \{\mathcal{K}, \mathcal{N}\}, \quad -\frac{i}{2}\mathcal{M} = \{\mathcal{J}, \mathcal{N}\}, \quad (3)$$

где $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор и $\{\cdot, \cdot\}$ – антикоммутатор. Решение этих уравнений в алгебре Ли $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{M} &= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathcal{N} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Непараметрическую линейную задачу (2) можно привести к спектральной задаче, зависящей от спектрального параметра λ . Для этого применяется точечная симметрия Ли, как это сделано в работе [29]. Введем преобразование

$$\tilde{x} = \lambda x, \quad \tilde{t} = \lambda^{-1}t, \quad \tilde{\theta} = \lambda^{1/2}\theta, \quad \tilde{\zeta} = \lambda^{-1/2}\zeta, \quad \lambda = \pm e^\mu, \quad (5)$$

где μ – произвольная бозонная постоянная в алгебре Грассмана. Уравнения (2) неинвариантны относительно преобразования (5), следовательно, линейная спектральная задача для SUSY-CD-системы (1) принимает вид

$$D_x \Psi = A(x, t, \theta, \zeta; \lambda) \Psi, \quad D_t \Psi = B(x, t, \theta, \zeta; \lambda) \Psi, \quad (6)$$

где $A(x, t, \theta, \zeta; \lambda)$ и $B(x, t, \theta, \zeta; \lambda)$ – суперполевые (3×3) -матрицы, принимающие значения в супералгебре $\mathfrak{sl}(2|1, \mathcal{G})$, которые задаются как

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(D_x Q - iD_x R) \\ 0 & 0 & (D_x Q + iD_x R) \\ (D_x Q + iD_x R) & -(D_x Q - iD_x R) & 0 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} iR & 0 & -\sqrt{\lambda} \\ 0 & -iR & \sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Условие совместности эквивалентно условию нулевой кривизны в суперпространстве

$$D_t A + D_x B - \{A, B\} = 0, \quad (8)$$

которое, в свою очередь, эквивалентно SUSY-CD-системе (1). Чтобы сохранить градуировку, запишем суперполе $\Psi(x, t, \theta, \zeta)$ как трехкомпонентный вектор-столбец, содержащий грассманово-нечетные и четные функции. При этом $(2|1)$ -супервектор Ψ можно выразить как $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \\ \chi \end{pmatrix}$, где ψ и ϕ – бозонные суперполя, а χ – фермионное суперполе.

Мы также можем описать линейную спектральную задачу в ее бозонной версии. Используем свойства ковариантных производных D_x и D_t и запишем представление Лакса для SUSY-CD-системы:

$$\begin{aligned}\partial_x \Psi &= i(D_x A(x, t, \theta, \zeta; \lambda) - (EA)^2) \Psi = U \Psi, \\ \partial_t \Psi &= i(D_t B(x, t, \theta, \zeta; \lambda) - (EB)^2) \Psi = V \Psi,\end{aligned}\quad (9)$$

где $E = \text{diag}(1, 1, -1)$ и суперматрицы U, V имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{i}{4\lambda}\{(D_x Q)^2 - (iD_x R)^2\} & \frac{i}{4\lambda}(D_x Q - iD_x R)^2 & -\frac{i}{2\sqrt{\lambda}}(\partial_x Q - i\partial_x R) \\ \frac{i}{4\lambda}(D_x Q + iD_x R)^2 & -\frac{i}{4\lambda}\{(D_x Q)^2 - (iD_x R)^2\} & \frac{i}{2\sqrt{\lambda}}(\partial_x Q + i\partial_x R) \\ \frac{i}{2\sqrt{\lambda}}(\partial_x Q + i\partial_x R) & -\frac{i}{2\sqrt{\lambda}}(\partial_x Q - i\partial_x R) & \frac{i}{2\lambda}\{(D_x Q)^2 - (iD_x R)^2\} \end{pmatrix},$$

$$V = i \begin{pmatrix} iD_t R + \lambda & -\lambda & i\sqrt{\lambda}R \\ -\lambda & -iD_t R + \lambda & i\sqrt{\lambda}R \\ -i\sqrt{\lambda}R & -i\sqrt{\lambda}R & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Условие совместности уравнений (9) эквивалентно классическому варианту условия нулевой кривизны в суперпространстве

$$\partial_t U - \partial_x V + [U, V] = 0, \quad (10)$$

которое дает SUSY-CD-систему (1).

Теперь введем калибровочное преобразование волновой функции и операторов Лакса, чтобы получить эквивалентное выражение для суперполевого пары Лакса. Это преобразование может оказаться полезным при выводе законов сохранения SUSY-CD-системы. Калибровочное преобразование собственной функции Ψ определим как $\tilde{\Psi} = G\Psi$, где калибровочная матрица имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} -i & i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Соответствующее преобразование операторов Лакса задается как

$$\tilde{A} = GAG^{-1}, \quad \tilde{B} = GBG^{-1}. \quad (11)$$

Таким образом, линейная система (7) становится калибровочно-эквивалентной следующей линейной системе:

$$D_x \tilde{\Psi} = \tilde{A} \tilde{\Psi}, \quad D_t \tilde{\Psi} = \tilde{B} \tilde{\Psi}, \quad (12)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} D_x Q \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} D_x R \\ \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} D_x Q & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} D_x R & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & R & -2\sqrt{\lambda} \\ -R & 0 & 0 \\ -\sqrt{\lambda} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Условие $D_t \tilde{A} + D_x \tilde{B} - \{\tilde{A}, \tilde{B}\} = 0$ эквивалентно уравнениям (1) для суперполей.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ SUSY-CD-СИСТЕМЫ

Следуя работам [30]–[32], получим бесконечный набор суперполевых сохраняющихся токов для SUSY-CD-системы. Законы сохранения выводятся путем задания анзаца, в результате которого суперполевое уравнение непрерывности вытекает из уравнений Риккати для суперполей. Проведем следующие рассуждения.

Начнем с суперполевой собственной функции для пары Лакса (12): $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}$, где Ψ_1, Ψ_2 – бозонные суперполя, а Ψ_3 – фермионное суперполе. Зададим новое бозонное суперполе N и фермионное суперполе h , зависящие от Ψ_1, Ψ_2 и Ψ_3 :

$$N = \frac{\Psi_1}{\Psi_2}, \quad h = \frac{\Psi_3}{\Psi_2}. \quad (14)$$

Теперь можно записать пару Лакса (12) как пару уравнений Риккати для суперполей

$$D_x N = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} h(-D_x Q + N D_x R), \quad D_t N = (1 + N^2)R - 2\sqrt{\lambda}h, \quad (15)$$

$$D_x h = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}(D_x Q N + D_x R), \quad D_t h = -h R N - \sqrt{\lambda}N. \quad (16)$$

Эти соотношения далее используются как генераторы бесконечной последовательности уравнений непрерывности для суперполей. Введем суперполе

$$W = \ln \Psi_2. \quad (17)$$

Поддействовав оператором D_x на обе части этого равенства, с учетом пары Лакса (12) получим уравнение $D_x W = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} D_x R h$. Затем подействуем оператором D_t и получим уравнение $D_t W = -R N$.

Условие совместности $D_x D_t W = -D_t D_x W$ теперь принимает вид закона сохранения для суперполей (уравнения непрерывности)

$$D_x J(x, t, \theta, \zeta; \lambda) = D_t K(x, t, \theta, \zeta; \lambda), \quad (18)$$

где суперполевые токи задаются как

$$J(x, t, \theta, \zeta; \lambda) = R N, \quad K(x, t, \theta, \zeta; \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} D_x R h.$$

Из второго уравнения в (15) мы можем записать

$$2\sqrt{\lambda}h = -D_t N + (1 + N^2)R, \quad \sqrt{\lambda}h = \frac{R}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \partial_t h + \frac{1}{2\lambda} D_t R D_t h \cdot h. \quad (19)$$

Разлагая суперполе h в ряд по λ , мы приходим к бесконечному набору уравнений непрерывности. Пусть

$$h = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n+1/2)}}{\lambda^n}. \quad (20)$$

Подставим это разложение в (19), получим рекуррентные уравнения

$$h^{(1/2)} = \frac{R}{2}, \quad h^{(n+1/2)} = \frac{1}{2} \partial_t h^{(n-1/2)} + \frac{1}{2} D_t R \sum_{l=1}^{n-1} (D_t h^{(l-1/2)}) h^{(n-l-1/2)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поскольку $N = -D_t h / \sqrt{\lambda}$, теперь можно записать (18) как $D_x(RD_t h) = D_t(D_x R h)$; используя в получившемся уравнении разложение (20), получаем следующие рекуррентные законы сохранения для суперполей:

$$D_x J^{(n+1/2)} = D_t K^{(n+1/2)},$$

где суперполевые токи $J^{(n+1/2)}$ и $K^{(n+1/2)}$ задаются как

$$J^{(n+1/2)} = RD_t h^{(n-1/2)}, \quad K^{(n+1/2)} = D_x R h^{(n-1/2)}.$$

Несколько первых токов имеют вид

$$\begin{aligned} D_x(RD_t R) &= D_t(D_x R \cdot R), & D_x(RD_t \partial_t R) &= D_t(D_x R \partial_t R), \\ D_x(RD_t[\partial_t^2 R + \frac{1}{2}(D_t R)^2 R]) &= D_t\left(D_x R\left[\partial_t^2 R + \frac{1}{2}(D_t R)^2 R\right]\right). \end{aligned}$$

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ SUSY-CD-СИСТЕМЫ

Преобразование Дарбу применяется для расчета мультисолитонных решений интегрируемых систем. Если заданы уравнения (1) для суперполей и их пара Лакса (6), можно получить такие мультисолитонные решения, как суперполя ψ , ϕ и χ пары Лакса (6) и суперполя R и $D_x Q$ SUSY-CD-системы (1). Однократное преобразование Дарбу для суперполей пары Лакса (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi[1] &= \lambda\phi - \lambda_1 \frac{\phi_1}{\psi_1} \psi - \sqrt{\lambda\lambda_1} \frac{\chi_1}{\psi_1} \chi, & \phi[1] &= \lambda\psi - \lambda_1 \frac{\psi_1}{\phi_1} \phi - \sqrt{\lambda\lambda_1} \frac{\chi_1}{\phi_1} \chi, \\ \chi[1] &= -(\lambda + \lambda_1)\chi - \sqrt{\lambda\lambda_1} \frac{\chi_1}{\psi_1} \psi - \sqrt{\lambda\lambda_1} \frac{\chi_1}{\phi_1} \phi, \end{aligned} \quad (21)$$

где ψ , ϕ и χ – решения пары Лакса при произвольном значении спектрального параметра λ , а ψ_1 , ϕ_1 и χ_1 – частные решения пары Лакса при значении спектрального параметра λ_1 . Новые суперполя $\psi[1]$, $\phi[1]$ и $\chi[1]$ удовлетворяют уравнениям той же пары Лакса (6) при $\lambda = \lambda_1$. Преобразование Дарбу суперполей R и $D_x Q$ в терминах частных решений ϕ_1 и ψ_1 задается как

$$\begin{aligned} R[1] &= -R - iD_t \ln \frac{\phi_1}{\psi_1}, \\ D_x Q[1] &= -\frac{1}{2}D_x Q \left(\frac{\psi_1}{\phi_1} + \frac{\phi_1}{\psi_1} \right) + \frac{i}{2}D_x R \left(\frac{\phi_1}{\psi_1} - \frac{\psi_1}{\phi_1} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где $R[1]$ и $D_x Q[1]$ – новые решения уравнения (1), выраженные через частные решения пары Лакса.

Аналогично мы получаем следующие преобразования суперполя R и производной $D_x Q$:

$$\begin{aligned} R[1] &= R + i\sqrt{\lambda_1} \left(\frac{\chi_1}{\psi_1} + \frac{\chi_1}{\phi_1} \right), \\ D_x R[1] &= \frac{i}{2}D_x Q \left(\frac{\psi_1}{\phi_1} - \frac{\phi_1}{\psi_1} \right) - \frac{1}{2}D_x R \left(\frac{\phi_1}{\psi_1} + \frac{\psi_1}{\phi_1} \right). \end{aligned}$$

Двукратные преобразования Дарбу для решений R и $D_x Q$ выводятся путем повторного применения преобразования Дарбу, что дает следующий результат:

$$\begin{aligned} R[2] &= -R - iD_t \ln \frac{\Delta_{12}^2[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}}{\Delta_{12}^1[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}}, \\ D_x Q[2] &= -\frac{1}{2} D_x Q \left(\frac{\Delta_{12}^1[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}}{\Delta_{12}^2[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}} + \frac{\Delta_{12}^2[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}}{\Delta_{12}^1[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}} \right) + \\ &\quad + \frac{i}{2} D_x R \left(\frac{\Delta_{12}^2[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}}{\Delta_{12}^1[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}} - \frac{\Delta_{12}^1[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}}{\Delta_{12}^2[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}} \right). \end{aligned}$$

Поле производной $D_x R$ преобразуется как

$$\begin{aligned} D_x R[2] &= \frac{i}{2} D_x Q \left(\frac{\Delta_{12}^1[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}}{\Delta_{12}^2[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}} - \frac{\Delta_{12}^2[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}}{\Delta_{12}^1[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} D_x R \left(\frac{\Delta_{12}^2[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}}{\Delta_{12}^1[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}} + \frac{\Delta_{12}^1[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}}{\Delta_{12}^2[2] + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} X_{12}} \right). \end{aligned}$$

В этих формулах

$$\Delta_{12}^1[2] = \begin{vmatrix} \lambda_1 \phi_1 & \lambda_2 \phi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{12}^2[2] = \begin{vmatrix} \lambda_1 \psi_1 & \lambda_2 \psi_2 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{vmatrix}, \quad X_{12} = \chi_1 \chi_2.$$

Чтобы объяснить детерминантную структуру мультисолитонных решений, рассмотрим пример трехкратного преобразования Дарбу. Решения R и $D_x Q$, получающиеся после применения этого преобразования, имеют вид

$$\begin{aligned} R[3] &= -R - iD_t \ln \frac{\Delta^1}{\Delta^2}, \\ D_x Q[3] &= -\frac{1}{2} D_x Q \left(\frac{\Delta^1}{\Delta^2} + \frac{\Delta^2}{\Delta^1} \right) + \frac{i}{2} D_x R \left(\frac{\Delta^1}{\Delta^2} - \frac{\Delta^2}{\Delta^1} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^k &= \Delta_{123}^k[3] + i\sqrt{\lambda_2 \lambda_3} (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 + \lambda_3) \Delta_1^k[1] X_{23} + \\ &\quad + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_3} (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_2 + \lambda_3) \Delta_2^k[1] X_{13} + \\ &\quad + i\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} (\lambda_1 + \lambda_3) (\lambda_2 + \lambda_3) \Delta_3^k[1] X_{12}, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \Delta_{123}^1[3] &= \begin{vmatrix} \lambda_1^2 \psi_1 & \lambda_2^2 \psi_2 & \lambda_3^2 \psi_3 \\ \lambda_1 \phi_1 & \lambda_2 \phi_2 & \lambda_3 \phi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{123}^2[3] = \begin{vmatrix} \lambda_1^2 \phi_1 & \lambda_2^2 \phi_2 & \lambda_3^2 \phi_3 \\ \lambda_1 \psi_1 & \lambda_2 \psi_2 & \lambda_3 \psi_3 \\ \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{vmatrix}, \\ \Delta_j^1[1] &= \psi_j, \quad \Delta_j^2[1] = \phi_j, \quad X_{\ell j} = \chi_\ell \chi_j, \quad \ell, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Если N раз применить преобразование Дарбу, получается N -солитонное решение. При нечетных N оно имеет вид

$$R[N] = -R - iD_t \ln \frac{\sum_{m=0}^{(n+1)/2} i^m P(\lambda_{k_j}; \lambda_{k_v}) \Delta_{k_j}^1 X_{k_v}}{\sum_{m=0}^{(n+1)/2} i^m P(\lambda_{k_j}; \lambda_{k_v}) \Delta_{k_j}^2 X_{k_v}},$$

а при четных N записывается как

$$R[N] = -R - iD_t \ln \frac{\sum_{m=0}^{n/2} i^m P(\lambda_{k_j}; \lambda_{k_v}) \Delta_{k_j}^1 X_{k_v} + \sum_{m=1}^{n/2-1} P(\lambda_{k_j}; \lambda_{k_v}) \frac{(-1)^m}{m!} X_{k_j} X_{k_v}}{\sum_{m=0}^{n/2} i^m P(\lambda_{k_j}; \lambda_{k_v}) \Delta_{k_j}^2 X_{k_v} + \sum_{m=1}^{n/2-1} P(\lambda_{k_j}; \lambda_{k_v}) \frac{(-1)^m}{m!} X_{k_j} X_{k_v}},$$

где k_j обозначает набор из $n - 2m$ упорядоченных индексов, k_v обозначает набор остальных $2m$ упорядоченных индексов из $\{1, \dots, n\}$ и введены обозначения

$$\Delta_{abc\dots}^1 = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \lambda_a^2 \psi_a & \lambda_b^2 \psi_b & \lambda_c^2 \psi_c & \dots \\ \lambda_a \phi_a & \lambda_b \phi_b & \lambda_c \phi_c & \dots \\ \psi_a & \psi_b & \psi_c & \dots \end{vmatrix}, \quad \Delta_{abc\dots}^2 = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \lambda_a^2 \phi_a & \lambda_b^2 \phi_b & \lambda_c^2 \phi_c & \dots \\ \lambda_a \psi_a & \lambda_b \psi_b & \lambda_c \psi_c & \dots \\ \phi_a & \phi_b & \phi_c & \dots \end{vmatrix}$$

и

$$X_{abc\dots} = \sqrt{\lambda_a \lambda_b \lambda_c \dots} \chi_a \chi_b \chi_c \dots,$$

$$P(\lambda_a, \lambda_b, \dots; \lambda_c, \lambda_d, \dots) = (-1)^{N+\alpha} (\lambda_a + \lambda_c)(\lambda_a + \lambda_d) \dots (\lambda_b + \lambda_c)(\lambda_b + \lambda_d) \dots$$

Здесь $P(\lambda_{k_j}; \emptyset) = P(\emptyset; \lambda_{k_v}) = 1$ (т. е. $P = 1$, если слева или справа от точки с запятой в аргументе функции нет λ_k) и α – бинарная функция, которая равна нулю, если $ab\dots cd\dots$ – четная циклическая перестановка индексов $1, \dots, n$, и равна единице в случае нечетной перестановки.

На следующем шаге мы получаем явные решения SUSY-CD-системы. Начнем с затравочного решения $D_x Q = 1$, $R = 0$. Уравнения (22) в этом случае принимают вид

$$R[1] = iD_t \ln \frac{\psi_1}{\phi_1}, \quad D_x Q[1] = -\frac{1}{2} \left(\frac{\psi_1}{\phi_1} + \frac{\phi_1}{\psi_1} \right). \quad (23)$$

Выберем ψ_1 и ϕ_1 как

$$\psi_1 = e^{\zeta\theta/2} - e^{(kx+wt)-(\xi+\zeta)(\theta+\lambda)/2}, \quad \phi_1 = e^{\zeta\theta/2} + e^{(kx+wt)-(\xi+\zeta)(\theta+\lambda)/2}. \quad (24)$$

Оказывается, что они являются решениями уравнений (23), если выполнены бозонное дисперсионное соотношение $w = -1/k$ и фермионное дисперсионное соотношение $\lambda = k\xi$. Подставляя функции (24) в уравнения (23), мы получаем решения SUSY-CD-системы

$$R[1] = -i\vartheta \operatorname{csch} 2\beta, \quad D_x Q[1] = -\operatorname{cth} 2\beta, \quad (25)$$

где

$$2\beta = \frac{\zeta\theta}{2} + \frac{(\xi+\zeta)(\theta+\lambda)}{2} - (kx+wt), \quad \vartheta = \zeta w - \theta - \frac{\lambda}{2}.$$

Фермионный вклад в β появился благодаря суперсимметрии.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В представленной статье мы рассмотрели различные свойства интегрируемости, связанные с $N = 1$ SUSY-CD-системой. Для этой системы мы ввели суперполя, выраженные в терминах суперматриц из супералгебры $\mathfrak{sl}(2|1, \mathcal{G})$, и показали, что условие нулевой кривизны эквивалентно SUSY-CD-системе. Из пары Лакса для суперполей мы получили связанные пары суперполевых уравнений Риккати, которые затем использовали для построения бесконечного набора сохраняющихся суперполевых токов. Также было исследовано преобразование Дарбу для SUSY-CD-системы, которое мы применили для получения N -суперсолитонного решения системы в терминах вронскианов.

Список литературы

- [1] Ю. Весс, Дж. Бергер, *Суперсимметрия и супергравитация*, Мир, М., 1986.
- [2] J. Wess, B. Zumino, “Supergauge transformations in four dimensions”, *Nucl. Phys. B*, **70**:1 (1974), 39–50.
- [3] A. Salam, J. Strathdee, “Super-gauge transformations”, *Nucl. Phys. B*, **76**:3 (1974), 477–482.
- [4] P. Mathieu, “Supersymmetric extension of the Korteweg–de Vries equation”, *J. Math. Phys.*, **29**:11 (1988), 2499–2506.
- [5] Yu. I. Manin, A. O. Radul, “A supersymmetric extension of the Kadomtsev–Petviashvili hierarchy”, *Commun. Math. Phys.*, **98**:1 (1985), 65–77.
- [6] G. H. M. Roelofs, P. H. M. Kersten, “Supersymmetric extensions of the nonlinear Schrödinger equation: symmetries and coverings”, *J. Math. Phys.*, **33**:6 (1992), 2185–2206.
- [7] P. G. Drazin, R. S. Johnson, *Solitons: An Introduction*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
- [8] Q. P. Liu, “Darboux transformations for supersymmetric Korteweg–de Vries equations”, *Lett. Math. Phys.*, **35**:2 (1995), 115–122.
- [9] Q. P. Liu, M. Mañas, “Darboux transformation for the Manin–Radul supersymmetric KdV equation”, *Phys. Lett. B*, **394**:3–4 (1997), 337–342.
- [10] Q. P. Liu, M. Mañas, “Crum transformation and Wronskian type solutions for supersymmetric KdV equation”, *Phys. Lett. B*, **396**:1–4 (1997), 133–140.
- [11] Q. P. Liu, M. Mañas, “Pfaffian solutions for the Manin–Radul–Mathieu SUSY KdV and SUSY sine-Gordon equations”, *Phys. Lett. B*, **436**:3–4 (1998), 306–310.
- [12] C. Gu, H. Hu, Z. Zhou, *Darboux Transformations in Integrable Systems. Theory and their Applications to Geometry*, Mathematical Physics Studies, **26**, Springer, Dordrecht, 2005.
- [13] M. Siddiq, M. Hassan, U. Saleem, “On Darboux transformation of the supersymmetric sine-Gordon equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:23 (2006), 7313–7318.
- [14] M. Hassan, “Darboux transformation of the generalized coupled dispersionless integrable system”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:6 (2009), 065203, 11 pp.
- [15] U. Saleem, M. Hassan, “Darboux transformation and exact multisolitons of $\mathbb{CP}^N$ nonlinear sigma model”, *J. Math. Anal. Appl.*, **447**:2 (2017), 1080–1101.
- [16] N. Mushahid, M. ul Hassan, “A noncommutative coupled dispersionless system. Darboux transformation and explicit solutions”, *Modern. Phys. Lett. A*, **29**:39 (2014), 1450206, 20 pp.
- [17] A. Mirza, M. ul Hassan, “Bilinearization and soliton solutions of the $N = 1$ supersymmetric coupled dispersionless integrable system”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **24**:1 (2017), 107–115.
- [18] K. Konno, H. Oono, “New coupled integrable dispersionless equations”, *J. Phys. Soc. Japan*, **63**:2 (1994), 377–378.
- [19] R. Hirota, S. Tsujimoto, “Note on ‘New coupled integrable dispersionless equations’”, *J. Phys. Soc. Japan*, **63**:9 (1994), 3533.

- [20] H. Kakuhashi, K. Konno, “A generalization of coupled integrable, dispersionless system”, *J. Phys. Soc. Japan*, **65**:2 (1996), 340–341.
- [21] H. Kakuhashi, K. Konno, “Lagrangian, Hamiltonian and conserved quantities for coupled integrable dispersionless equations”, *J. Phys. Soc. Japan*, **65**:1 (1995), 1–2.
- [22] H. Kakuhashi, K. Konno, “Canonical formulation of generalized coupled dispersionless system”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:12 (1997), L401–L408.
- [23] T. Alagesan, K. Porsezian, “Painlevé analysis and the integrability properties of coupled integrable dispersionless equations”, *Chaos, Solitons Fractals*, **7**:8 (1996), 1209–1212.
- [24] T. Alagesan, K. Porsezian, “Singularity structure analysis and Hirota’s bilinearisation of the coupled integrable dispersionless equations”, *Chaos, Solitons Fractals*, **8**:10 (1997), 1645–1650.
- [25] T. Alagesan, Y. Chung, K. Nakkeeran, “Bäcklund transformation and soliton solutions for the coupled dispersionless equations”, *Chaos, Solitons Fractals*, **21**:1 (2004), 63–67.
- [26] A. Chen, X. Li, “Soliton solutions of the coupled dispersionless equation”, *Phys. Lett. A*, **370**:3–4 (2007), 281–286.
- [27] N. Mushahid, M. ul Hassan, “On the dressing method for the generalized coupled dispersionless integrable system”, *Modern Phys. Lett. A*, **28**:20 (2013), 1350088, 20 pp.
- [28] M. Siddiq, M. Hassan, “On the linearization of the super sine-Gordon equation”, *Europhys. Lett.*, **70**:2 (2005), 149–154.
- [29] S. Bertrand, A. M. Grundland, A. J. Hariton, “On the integrability of supersymmetric versions of the structural equations for conformally parametrized surfaces”, *SIGMA*, **11** (2015), 046, 16 pp.
- [30] M. Wadati, H. Sanuki, K. Konno, “Relationship among inverse method, Bäcklund transformation and an infinite number of conservation laws”, *Progr. Theor. Phys.*, **53**:2 (1975), 419–436.
- [31] S. Ferrera, L. Girardello, S. Sciuto, “An infinite set of conservation laws of the supersymmetric sine-Gordon theory”, *Phys. Lett. B*, **76**:3 (1978), 303–306.
- [32] L. Girardello, S. Sciuto, “Inverse scattering-like problem for supersymmetric models”, *Phys. Lett. B*, **77**:3 (1978), 267–269.

Поступила в редакцию 23.10.2017,
после доработки 12.12.2017