Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Талалаев, А. В. Червов, Система Хитчина на особых кривых, *ТМФ*, 2004, том 140, номер 2, 179–215

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 09:34:02

© 2004 г.

Д. В. Талалаев*, А. В. Червов*

СИСТЕМА ХИТЧИНА НА ОСОБЫХ КРИВЫХ

Изучается система Хитчина на особых кривых. Рассмотрены кривые, полученные из проективной прямой путем склейки нескольких точек или вставки нескольких особенностей типа каспа. Оказывается, что для таких особых кривых основные ингредиенты конструкции Хитчина (пространство модулей векторных расслоений, дуализующий пучок, поле Хиггса и т.д.) могут быть описаны явно, что, возможно, представляет самостоятельный интерес. Основной результат представляют явные выражения для гамильтонианов Хитчина. Также показано, как получить интегрируемую систему Хитчина на таких кривых процедурой гамильтоновой редукции из значительно более простой системы на конечномерном пространстве. Особое внимание уделено случаю вырожденной кривой рода 2. Для него найден аналог параметризации Нарасимхана–Раманана пространства модулей SL_2 -расслоений и получены явные выражения для симплектической структуры и гамильтонианов системы Хитчина в этих координатах. В качестве демонстрации эффективности предлагаемого подхода рассмотрены рациональная и тригонометрическая системы Калоджеро–Мозера, получающиеся как система Хитчина на кривых с каспом и двойной точкой, соответственно, и одной отмеченной точкой.

Ключевые слова: интегрируемые системы, системы Хитчина, особые кривые, система Калоджеро–Мозера, параметризация Нарасимхана–Раманана.

1. ВВЕДЕНИЕ

Система Хитчина была построена в работе [1] и является интегрируемой системой на кокасательном пространстве к пространству модулей $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ стабильных голоморфных расслоений на алгебраической кривой Σ . Данное фазовое пространство может быть получено процедурой гамильтоновой редукции по действию калибровочной группы из пространства пар d_A'', Φ , где d_A'' – оператор, определяющий голоморфную структуру на расслоении V ; Φ – эндоморфизм данного расслоения, точнее $\Phi \in \Omega^{0,1}(\Sigma, \text{End}(V))$. Под калибровочной группой имеется в виду группа GL_N -значных функций на Σ . Инвариантная симплектическая структура на первоначальном пространстве представляется формой

$$\omega = \int_{\Sigma} \text{Tr}(\delta\Phi \wedge \delta d_A''). \quad (1)$$

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.
E-mail: talalaev@gate.itep.ru; chervov@itep.ru

Нулевой уровень отображения моментов описывается условием $d_A'' \Phi = 0$, которое эквивалентно голоморфности Φ по отношению к индуцированной голоморфной структуре на расслоении эндоморфизмов $\text{End}(V)$. Оказывается, что выражения $\text{Tr}(\Phi^k)$, рассматриваемые как вектор-функции на фазовом пространстве, находятся в инволюции и их количество совпадает с половиной размерности фазового пространства.

Важность системы Хитчина и ее обобщений [2]–[4] в современной математической физике не может быть переоценена. Многие известные интегрируемые системы являются частными случаями системы Хитчина. Данная область также связана с такими важнейшими проблемами математической физики, как геометрическое соответствие Лэнглендса [5]–[7], конформная теория поля [6], [8] (в определенном смысле система Хитчина – это уравнение Книжника–Замолотчикова–Бернара на критическом уровне), нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, таких как уравнение Кадомцева–Петвиашвили [9], уравнение Дэви–Стюартсона [10], уравнение Нама для монополей [11], и многие другие проблемы (см., например, [12], [13]).

Несмотря на важность системы Хитчина, она далеко не полностью изучена. Одной из причин этого является тот факт, что пространство модулей векторных расслоений – достаточно сложное многообразие, на котором нет естественных “хороших” координат, для того чтобы выразить гамильтонианы Хитчина явно. Некоторые попытки строить явное описание предпринимались в работах [2] и [14]. Тем не менее эти описания иногда представляются слишком сложными и не дают ответов на многие вопросы (во всяком случае, пока). Таким образом, крайне важной задачей является изучение примеров системы Хитчина, которые, с одной стороны, являются достаточно простыми, а с другой – достаточно содержательными для нахождения общих методов решения системы Хитчина и объяснения таких феноменов, как разделение переменных и геометрическое соответствие Лэнглендса.

Подход, разработанный в данной работе, может быть применен в достаточно специфической ситуации, а именно когда базовая алгебраическая кривая особая и ее нормализация является рациональной кривой. Содержательность выбранных ограничений оправдана большим количеством нетривиальных примеров интегрируемых систем, получаемых таким способом. Для таких кривых основные объекты конструкции Хитчина (векторные расслоения, их эндоморфизмы, пространство модулей векторных расслоений, дуализирующий пучок и поле Хиггса) могут быть описаны явно и достаточно просто. Мы надеемся, что рассмотрение таких кривых может быть полезным для изучения общей системы Хитчина.

1.1. Конструкция системы Хитчина. Сформулируем основные результаты данной работы. Рассмотрим кривую Σ^{proj} , которая является результатом склейки N различных точек P_i на $\mathbb{CP}^1$ (т.е. кривую, полученную добавлением одной гладкой точки ∞ к кривой $\Sigma^{\text{aff}} = \text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: \forall i, j \ f(P_i) = f(P_j)\}$).

1. Векторному расслоению ранга r на такой кривой отвечает модуль M_Λ ранга r на аффинной части кривой, задаваемый как подмножество векторнозначных функций $s(z) \in \mathbb{C}^r[z]$, удовлетворяющих условию $s(P_1) = \Lambda_i s(P_i)$. Пространство модулей векторных расслоений на Σ^{proj} совпадает с факторпространством пространства наборов

обратимых матриц $\Lambda_i \ \forall i = 2, \dots, N$ по действию GL_r сопряжением на каждую матрицу из набора (см. п. 2.3.2, теорема 1).

2. Базис глобальных сечений дуализирующего пучка на Σ^{proj} может быть отождествлен с мероморфными дифференциалами $dz/(z - P_1) - dz/(z - P_i) \ \forall i = 2, \dots, N$ на $\mathbb{C}$ (см. п. 2.2.1, пример 3).

3. Эндоморфизмы модуля M_Λ представляются матрично-значными полиномами $\Phi(z)$ такими, что $\Phi(P_1) = \Lambda_i \Phi(P_i) \Lambda_i^{-1} \ \forall i = 2, \dots, N$ (см. п. 2.4.1, утверждение 6). Действие $\Phi(z)$ на $s(z)$ задается как $s(z) \mapsto \Phi(z)s(z)$. Пространство $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ описывается как факторпространство матрично-значных полиномов $gl[z]$ по двум его подпространствам:

$$\begin{aligned} \text{End}_{\text{out}} &= \{\chi(z) \in gl[z] | \chi(z) = \text{const}\}, \\ \text{End}_{\text{in}} &= \{\chi(z) \in gl[z] | \chi(P_1) = \Lambda_i \chi(P_i) \Lambda_i^{-1} \ \forall i = 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Элементы $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ отождествляются с касательными векторами к Λ_i , элемент $\chi(z)$ задает следующий касательный вектор к Λ_i :

$$\delta_{\chi(z)} \Lambda_i = \chi(P_1) \Lambda_i - \Lambda_i \chi(P_i). \quad (2)$$

4. Глобальные сечения $H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ (поля Хиггса) задаются выражениями

$$\Phi(z) = \frac{\sum_{i=2}^N -\Lambda_i \Phi_i \Lambda_i^{-1}}{z - P_1} dz + \sum_{i=2}^N \frac{\Phi_i}{z - P_i} dz, \quad (3)$$

где $\sum_{i=2}^N -\Lambda_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} + \Phi_i = 0$ (см. п. 2.5.2, утверждение 9). Напомним, что именно это условие возникает как уравнение нулевого уровня момента (см. п. 2.7, формула (22)). Симплектическая форма на кокасательном расслоении к пространству модулей совпадает с формой, полученной методом гамильтоновой редукции из формы

$$-\sum_{i=2}^N \text{Tr}(\Phi_i \Lambda_i^{-1}) \wedge d\Lambda_i \quad (4)$$

на пространстве $\Lambda_i, \Phi_i \ \forall i = 2, \dots, N$ (см. п. 2.7, утверждение 15).

РЕЗУЛЬТАТ 1. Система Хитчина на кривой Σ^{proj} является системой с фазовым пространством, полученным гамильтоновой редукцией из пространства Λ_i, Φ_i с симплектической формой (4) (рассматривается редукция по действию группы GL_r сопряжением); оператор Лакса в этом случае задается выражением (3).

Для случая склейки двух точек аналогичное выражение для оператора Лакса было получено Некрасовым [2], тем не менее в его работе отсутствует явное описание расслоений, дуализирующего пучка, эндоморфизмов и т.д.

В случае склейки нескольких групп точек $P_i = P_j$, $Q_i = Q_j$, ... предложения, сформулированные выше, претерпевают очевидные модификации. Оператор Лакса, например, имеет вид

$$\frac{1}{z - P_1} \sum_{i=2}^N -\Lambda_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} dz + \sum_{i=2}^N \frac{\Phi_i}{z - P_i} dz + \frac{1}{z - Q_1} \sum_{i=2}^N -\tilde{\Lambda}_i \tilde{\Phi}_i \tilde{\Lambda}_i^{-1} dz + \sum_{i=2}^N \frac{\tilde{\Phi}_i}{z - Q_i} dz.$$

Данное выражение может быть получено из оператора Лакса для двойных точек: необходимо сначала рассмотреть $N - 1$ пару склеенных точек $P_2 = R_2$, $P_3 = R_3$, ..., затем положить $R_k = P_1$.

Для случая нескольких особенностей типа каспа в точках P_i на $\mathbb{CP}^1$ получены следующие аналоги предложений, сформулированных выше:

- 1) кривая: $\Sigma^{\text{aff}} = \text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: \forall i f'(P_i) = 0\}$;
- 2) проективные модули: $s(z) \in \mathbb{C}^r[z]: s'(P_i) = \Lambda_i s(P_i)$;
- 3) базис глобальных сечений дуализирующего пучка: $dz/(z - P_i)^2$;
- 4) эндоморфизмы модуля M_Λ : операторы $\Phi(z)$, удовлетворяющие условию $\Phi'(P_i) = [\Lambda_i, \Phi(P_i)]$;
- 5) глобальные сечения $H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ (поля Хиггса):

$$\Phi(z) = \sum_i \left(\frac{\Phi_i dz}{(z - P_i)^2} + \frac{[\Lambda_i, \Phi_i] dz}{z - P_i} \right), \quad (5)$$

где $\sum_{i=1}^N [\Lambda_i, \Phi_i] = 0$;

- 6) симплектическая форма:

$$- \sum_{i=1}^N \text{Tr}(d\Phi_i \wedge d\Lambda_i). \quad (6)$$

1.2. Параметризация Нарасимхана–Раманана. Известно [15], что пространство модулей SL_2 -расслоений на кривой рода 2 есть $\mathbb{CP}^3$. В настоящей работе мы строим аналог параметров Нарасимхана–Раманана для SL_2 -расслоений на особой кривой рода 2 – кривой с двумя особенностями типа каспа в точках P_1 , P_2 . Расслоениям на такой кривой отвечают проективные модули M_Λ , определяемые условием $s(z) \in \mathbb{C}^2[z]: s'(P_i) = \Lambda_i s(P_i)$, где $\Lambda_i \in sl_2$. Одной из целей нашей работы является выражение вырожденных параметров Нарасимхана–Раманана через Λ_1, Λ_2 .

РЕЗУЛЬТАТ 2. *Координатами Нарасимхана–Раманана на особой кривой являются выражения*

$$\tau_1 = \text{Tr}(\Lambda_1^2), \quad \tau_3 = \text{Tr}(\Lambda_3^2), \quad \tau_2 = \text{Tr}(\Lambda_1 \Lambda_2) + \tau_1 \tau_3 \frac{(P_1 - P_2)^2}{4}. \quad (7)$$

Гамильтонианы Хитчина в этих координатах представляются в виде

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{Tr}(\Phi_1^2) = 4p_1^2 t_1 + p_2^2 t_3 + 4p_1 p_2 t_2, \\ H_2 &= 2 \text{Tr}(\Phi_1 \Phi_2) + (z_1 - z_2)^2 \text{Tr}[\Lambda_1, \Phi_1]^2 = \\ &= 4p_1 p_2 t_1 + 4p_2 p_3 t_3 + (8p_1 p_3 + 2p_2^2) t_2 - 2(z_1 - z_2)^2 p_2^2 (t_1 t_3 - t_2^2), \\ H_3 &= \text{Tr}(\Phi_2^2) = 4p_3^2 t_3 + p_2^2 t_1 + 4p_2 p_3 t_2, \end{aligned}$$

где

$$t_1 = \text{Tr}(\Lambda_1^2), \quad t_2 = \text{Tr}(\Lambda_1 \Lambda_2), \quad t_3 = \text{Tr}(\Lambda_2^2)$$

и p_i – соответствующие сопряженные переменные.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 содержится подготовительный алгебро-геометрический материал. Случай рациональной кривой с двойной точкой и с особенностью типа каспа изучается в разделе 3, где показано, что системы, возникающие в результате применения общей конструкции, представляют собой тригонометрическую и рациональную системы Калоджеро–Мозера со спином. В разделе 4 рассматривается рациональная кривая с двумя особенностями типа каспа. Для данной кривой строится пространство модулей SL_2 -расслоений, аналог параметризации Нарасимхана–Раманана. В разделе 5 мы формулируем наиболее важные на наш взгляд нерешенные проблемы данной области.

2. АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Кривые, определенные склейкой точек с кратностями. Рассмотрим кривую Σ и эффективный дивизор $D = \sum_i n_i P_i$, $n_i > 0$, такой, что $\deg D > 1$. Определим новую кривую Σ_D с помощью склейки всех точек P_i с кратностями n_i в одну точку P ; формально эта кривая определяется структурным пучком $\mathcal{O}(\Sigma_D)$, который является подпучком в $\mathcal{O}(\Sigma)$, его элементы удовлетворяют условию $f(P_i) = f(P_j)$, $f^k(P_i) = 0$, $k = 1, \dots, n_i - 1$. В терминологии Серра (см. [16], гл. 4, раздел 4) это в точности “кривая, определенная модулем D ”. Новая кривая Σ_D , очевидно, имеет одну дополнительную особую точку P , нормализация Σ_D совпадает с Σ (если Σ является гладкой).

ПРИМЕР 1 (основной модельный пример). Рассмотрим кривую $\Sigma = \mathbb{C}^1$ и дивизор $D = P_1 + P_2$. Полученная особая кривая $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: f(P_1) = f(P_2)\}$ называется кривой с двойной точкой и является аффинной кривой, которая может быть определена уравнением $y^2 = x^2(x + a)$, $z = y/x$, $P_1 = \sqrt{a}$, $P_2 = -\sqrt{a}$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим кривую $\Sigma = \mathbb{C}^1$ и дивизор $D = 2P$. Особенность данной кривой $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: f'(P) = 0\}$ называется каспом, кривая является аффинной и может быть определена уравнением $y^2 = (x - a)^3$, $z = y/(x - a)$, $P = a$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Рассмотрим кривую $\mathbb{C}P^1$ и эффективный дивизор $D = \sum_i n_i P_i$ на ней, а также кривую Σ_D , полученную склейкой точек P_i с кратностями n_i . Род (т.е. $\dim H^1(\mathcal{O}_{\Sigma_D})$) особой кривой Σ_D в этом случае равен $(\sum_i n_i) - 1$.

Данное утверждение является очевидным, достаточно покрыть кривую двумя картами, одна из которых содержит особую точку и не содержит бесконечности, а вторая не содержит особенностей, и посчитать когомологии Чеха для $\mathcal{O}$ (на данной кривой выбранное покрытие является ациклическим, так как состоит из аффинных многообразий).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Кривые с двойной точкой и с особенностью типа каспа являются кривыми рода 1, как и эллиптическая кривая. Это не удивительно, поскольку данные

кривые являются вырождениями эллиптической кривой, а род не меняется при деформациях.

2.2. Канонический (дуализирующий) пучок на кривых, определенных склейкой точек.

2.2.1. *Описание дуализирующего пучка.* Напомним, что дуализирующий пучок на кривой Σ – это пучок $\mathcal{K}$ такой, что для произвольного когерентного пучка F существует канонический изоморфизм $\text{Hom}(F, \mathcal{K}) \cong H^1(F)^*$. На неособых кривых дуализирующий пучок совпадает с пучком 1-форм, для особой кривой само понятие 1-формы должно быть определено, наивное определение кэлеровых дифференциалов ([17], гл. 2, раздел 8) не дает дуализирующего пучка. Общий рецепт построения дуализирующего пучка на особых кривых (см. [16], [18]) заключается в следующем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть Σ_{norm} – нормализация Σ , $\pi: \Sigma_{\text{norm}} \rightarrow \Sigma$ – соответствующая проекция. Дуализирующий пучок $\mathcal{K}$ на особой кривой Σ может быть отождествлен с пучком мероморфных 1-форм α на Σ_{norm} таких, что $\forall f \in \mathcal{O}(\Sigma)$ и $\forall P \in \Sigma$ верно следующее равенство:

$$\sum_{P_i \in \Sigma_{\text{norm}}: \pi(P_i)=P} \text{Res}_{P_i} \tilde{f} \alpha = 0, \quad (8)$$

где $\tilde{f} \in \mathcal{O}(\Sigma_{\text{norm}})$ – подъем функции f с особой кривой на ее нормализацию, P_i – точки на нормализации из прообраза точки P на особой кривой при проекции π .

Опишем явно канонический (дуализирующий) пучок на особых кривых, полученных склейкой точек P_i неособой кривой Σ с кратностями $n_i > 0$. Пусть D – дивизор рассматриваемых точек с кратностями, $D = \sum_i n_i P_i$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Дуализирующий пучок $\mathcal{K}_{\Sigma_D}$ – это подпучок дифференциальных форм w на Σ , имеющих полюсы в точках P_i порядка $\text{ord}_{P_i} w \geq -n_i$ (т.е. подпучок в $\mathcal{K}_{\Sigma(D)}$), удовлетворяющих условию $\sum_i \text{Res}_{P_i} w = 0$. Под порядком полюса понимается $\text{ord}_0 z^n = n$.

Очевидно, что $\mathcal{K}_{\Sigma_D}$ является когерентным пучком. Кроме того, для такого типа кривых он является локально-свободным (см. [16], гл. 4, раздел 11), т.е. линейным расслоением на особой кривой. (Дуализирующий пучок не всегда является локально свободным, это верно для полных пересечений и произвольных плоских кривых (см. [16]).)

ПРИМЕР 3. Рассмотрим кривую Σ с двойной точкой, т.е. $\mathbb{C}P^1$ со склеенными точками P_1, P_2 , аффинная карта для данной кривой определяется кольцом $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: f(P_1) = f(P_2)\}$. Сечения пучка $\mathcal{K}_{\text{node}}$ на карте без бесконечности задаются выражениями $c dz/(z - P_1) - c dz/(z - P_2) + f(z) dz$, где $f(z)$ – голоморфная функция. Сечения $\mathcal{K}_{\text{node}}$ на карте без особой точки – это обычные голоморфные 1-формы, на остальных картах сечения получают процедурой локализации. Таким образом, единственным глобальным сечением $\mathcal{K}_{\text{node}}$ является $c dz/(z - P_1) - c dz/(z - P_2)$.

Случай склейки n точек $P_1, \dots, P_n$ на $\mathbb{C}P^1$ отличается немногим: например, базис глобальных сечений задается выражениями $dz/(z - P_1) - dz/(z - P_i)$, $i = 2, \dots, n$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим кривую Σ с особенностью типа каспа, т.е. $\mathbb{CP}^1$ с точкой P , склеенной с кратностью 2. Аффинная карта данной кривой определяется как $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: f'(P) = 0\}$. Сечения пучка $\mathcal{K}_{\text{cusp}}$ на карте без бесконечности представляются в виде $c dz/(z-P)^2 + f(z) dz$, где $f(z)$ – голоморфная функция. Очевидно, что $c dz/(z-P)^2$ является единственным глобальным сечением $\mathcal{K}_{\text{cusp}}$.

Описание канонического класса на кривой с особенностью типа n -каска, т.е. когда точка P на $\mathbb{CP}^1$ склеивается с собой с кратностью n , производится аналогично. Приведем выражения для глобальных голоморфных дифференциалов: $dz/(z-P)^i$, $i = 2, \dots, n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Описание Серра для дуализирующего пучка вполне согласовано с наивными аргументами для кривых с двойной точкой и с особенностью типа каспа. Рассмотрим кривую с двойной точкой $y^2 = x^2(x+a)$, $z = y/x$ является координатой на нормализации данной кривой. Голоморфный дифференциал на эллиптической кривой задается формулой

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz^2}{z(z^2-a)} = \frac{2 dz}{z-\sqrt{a}} - \frac{2 dz}{z+\sqrt{a}}.$$

Таким образом, при вырождении мы получаем дифференциал, удовлетворяющий условию Серра: порядки полюсов равны единице и сумма вычетов равна нулю. Если положить $a = 0$, что соответствует кривой с особенностью типа каспа, то в качестве предела мы получим дифференциал $2 dz/z^2$. Он имеет полюс второго порядка и нулевой вычет, что также находится в полном соответствии с правилом Серра для данной кривой.

2.2.2. *Спаривание Серра в описании Чеха на особой кривой.* Опишем спаривание (двойственность Серра) между $H^1(\mathcal{F})$ и $H^0(\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{K}_{\Sigma_D})$, где $\mathcal{F}$ – плоский когерентный пучок на кривой Σ_D . Напомним, что Σ – гладкая кривая, а Σ_D – особая кривая, полученная склейкой точек P_i с кратностями n_i , $D = \sum_i n_i P_i$. В книге [16] двойственность представлена для более общего случая в терминах распределений (аделей). Для большего удобства выразим двойственность явно для рассматриваемого случая особых кривых.

Для гладкой кривой элементы $H^1(\mathcal{F})$ в представлении Дольбо соответствуют “ $d\bar{z}$ -формам со значениями в $\mathcal{F}$ ”. Элементы $\mathcal{K}$ могут быть представлены как голоморфные 1-формы, спаривание в этом случае определяется выражением $\int_{\Sigma} \langle f, f^* \rangle dz d\bar{z}$. Для особых кривых описание Дольбо не применимо, во всяком случае непосредственно, поэтому в данной работе используется описание Чеха для $H^1(\mathcal{F})$ на особых кривых.

Покроем кривую Σ_D двумя картами $U_P = \Sigma_D \setminus \infty$ и $U_{\infty} = \Sigma_D \setminus P$, где ∞ – некоторая точка на Σ_D , отличная от P (напомним, что P – единственная особая точка кривой, полученная склейкой точек P_i). Данный выбор покрытия наиболее удобен для наших вычислений и будет подразумеваться далее без отдельного описания. Известно, что кривая без одной точки является аффинной, поэтому данный выбор покрытия является достаточным для вычисления когомологий когерентных пучков: $H^1(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(U_{\infty} \cap U_P) / (\mathcal{F}(U_P) \oplus \mathcal{F}(U_{\infty}))$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Спаривание Серра между $f \in H^1(\mathcal{F})$ и $h \otimes w \in H^0(\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{K}_{\Sigma_D})$ определяется следующим образом: рассмотрим $\tilde{f} \in \mathcal{F}(U_{\infty} \cap U_P)$ – представитель*

элемента f , тогда спаривание задается выражением

$$\langle f, h \otimes w \rangle = \sum_i \text{Res}_{|P_i} \langle \tilde{f}, h \rangle w. \quad (9)$$

Это спаривание корректно определено на когомологиях (т.е. не зависит от выбора представителя $\tilde{f}$) и является невырожденным.

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедливы равенства

$$\dim H^1(\mathcal{O}_{\Sigma_D}) = \dim H^0(\mathcal{K}_{\Sigma_D}) = \dim H^1(\mathcal{O}_{\Sigma}) + \deg D - 1.$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЯ 3. Сформулируем основные этапы доказательства того, что спаривание корректно определено и невырожденно. Для того чтобы показать корректность определения спаривания, достаточно проверить обращение его в нуль для $\tilde{f} \in \mathcal{F}(U_P)$ и $\tilde{f} \in \mathcal{F}(U_{\infty})$. Действительно, если $\tilde{f} \in \mathcal{F}(U_P)$, то $g = \langle \tilde{f}, h \rangle$ принадлежит $\mathcal{O}_{\Sigma_D}(U_P)$, а следовательно, поднятие $\tilde{g}$ имеет одинаковые значения во всех прообразах точки P , $\tilde{g}(P_i) = \tilde{g}(P_j) =: g(P)$, и удовлетворяет условию $\tilde{g}^{(k)}(P_i) = 0 \ \forall i, k = 1, \dots, n_i - 1$. Таким образом,

$$\langle \tilde{f}, h \otimes w \rangle = \sum_i \text{Res}_{|P_i} (\tilde{g} \otimes w) = g(P) \sum_i \text{Res}_{|P_i} w = 0,$$

где в последнем равенстве мы использовали факт, что сумма вычетов мероморфного дифференциала равна нулю.

Для элемента $\tilde{f} \in \mathcal{F}(U_{\infty})$ имеем

$$\langle \tilde{f}, h \otimes w \rangle = \sum_i \text{Res}_{|P_i} (\tilde{g} \otimes w) = -\text{Res}_{|\infty} (\tilde{g} \otimes w) = 0,$$

так как w и $\tilde{g}$ регулярны в бесконечности.

Для того чтобы доказать невырожденность спаривания, достаточно показать, что не существует мероморфного дифференциала w предписанного вида такого, что

$$\langle f, w \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{O}(U_{\infty} \cap U_P).$$

Для этого можно предъявить $n - 1$ функций f_i на нормализации с полюсами достаточно высокого порядка в бесконечности и с невырожденной матрицей их производных до $(n_i - 1)$ -го порядка в точках P_i . Условие ортогональности

$$\langle f_i, \omega \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

является системой линейных однородных уравнений на отрицательные коэффициенты разложения ω в точках P_i . Единственное решение такой системы — нулевой вектор. Получаем, что спаривание невырожденно вследствие того факта, что на $\mathbb{CP}^1$ не существует голоморфных дифференциалов.

2.3. Голоморфные расслоения на особых кривых.

2.3.1. *Проективные модули на аффинной карте.* Существует соответствие между голоморфными расслоениями на неособых многообразиях и пучками их сечений. Такие пучки являются локально-свободными или, что эквивалентно (в силу общей теории), являются пучками проективных модулей над структурным пучком. Геометрическое описание голоморфных расслоений на особых многообразиях не может применяться буквально, при этом соответствующие алгебраические объекты существуют вне зависимости от того, является многообразие особым или нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Голоморфное расслоение на особой кривой Σ — это пучок проективных модулей над $\mathcal{O}(\Sigma)$.

(Известно, что проективный модуль на особом многообразии также является локально-свободным в топологии Зарисского, т.е. можно говорить о локально-свободных модулях.)

Сначала опишем проективные модули на аффинной кривой Σ_D^{aff} , полученной склейкой точек P_i на $\mathbb{C}$ с кратностями n_i . Как обычно, D обозначает эффективный дивизор $\sum_i n_i P_i$. Опишем проективные модули как подмодули тривиального модуля на нормализации.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Рассмотрим кривую Σ_D^{aff} , заданную как

$$\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: \forall i, j \ f(P_i) = f(P_j); f'(P_i) = \dots = f^{n_i-1}(P_i) = 0\}.$$

Рассмотрим следующий набор матриц: обратимые матрицы $\Lambda_2, \dots, \Lambda_N$ и произвольные матрицы $\Lambda_i^l \in \text{Mat}(r)$, где $i = 1, \dots, N$; $l = 1, \dots, n_i - 1$. Подмножество векторнозначных полиномов $s(z)$ на $\mathbb{C}$, т.е. $s(z) \in \mathbb{C}^r[z]$, удовлетворяющих условиям $s(P_1) = \Lambda_1 s(P_i)$, $s^{(l)}(P_i) = \Lambda_i^l s(P_i)$, определяет проективный модуль ранга r над кольцом $\{f \in \mathbb{C}[z]: \forall i, j \ f(P_i) = f(P_j); f'(P_i) = \dots = f^{n_i-1}(P_i) = 0\}$. Кроме того, все проективные модули могут быть получены таким способом.

Обозначим через M_Λ модуль и расслоение, описанное выше (мы используем далее то же обозначение M_Λ для векторного расслоения на проективизации Σ_D^{proj} кривой Σ_D^{aff}).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Легко увидеть (например, если найти дивизор), что для случая ранга $r = 1$ данные модули не изоморфны для разных Λ . Для ранга $r > 1$ это определенно не так, но ниже будет показано, что векторные расслоения на проективизации Σ_D^{proj} кривой Σ_D^{aff} изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие модули определяются наборами матриц Λ , сопряженных с помощью одной и той же постоянной матрицы C .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Заметим, что даже для случая $r = 1$ при рассмотрении аналитической топологии все расслоения M_Λ на аффинной кривой становятся изоморфными. Действительно, из экспоненциальной последовательности легко увидеть, что $H^1(\mathcal{O}^*) = H^1(\mathcal{O})$ и $H^1(\mathcal{O}) = 0$ на любой аффинной кривой. Для проективных кривых принцип ГА-ГА [19] гарантирует совпадение результатов, полученных как в аналитической, так и в алгебраической топологии. Окончательный интерес для нас представляют проективные кривые, поэтому предыдущему и этому замечаниям можно не придавать особого значения.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЯ 4. Утверждение представляется достаточно простым, поэтому только отметим основные этапы доказательства. Пусть $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \Sigma_D^{\text{aff}}$ — отображение нормализации. Рассмотрим модуль без кручения $\mathcal{F}$ ранга r . Обратный образ $\pi^*\mathcal{F}$ также является модулем без кручения ранга r . Все такие модули над $\mathbb{C}[z]$ тривиальны, т.е. $\pi^*\mathcal{F} = \mathbb{C}^r[z]$. Рассмотрим теперь образ $\pi_*\pi^*\mathcal{F}$. Он изоморфен $\mathbb{C}^r[z]$ как модуль над $\mathcal{O}(\Sigma_D) = \{f \in \mathbb{C}[z]: \forall i, j \ f(P_i) = f(P_j); f'(P_i) = \dots = f^{n_i-1}(P_i) = 0\}$, он также без кручения, но не является проективным модулем (слой в особой точке P подсказывает). Имеется точная последовательность $\mathcal{F} \rightarrow \pi_*\pi^*\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}^{rg}$, где $\mathbb{C}^{rg}$ — пучок-небоскреб в точке P , r — ранг и $g = \deg D - 1$.

Таким образом, каждый модуль без кручения $\mathcal{F}$ может быть представлен в виде ядра отображения $\phi: \mathbb{C}^r[z] \rightarrow \text{небоскреб в } P$. Отображения ϕ биективно соответствуют отображениям $\tilde{\phi}: \text{слой в } P \text{ модуля } \mathbb{C}^r[z] \rightarrow \mathbb{C}^{rg}$. Конечномерное линейное пространство — “слой в точке P модуля $\mathbb{C}^r[z]$ ” в нашем случае — это пространство $\bigoplus_{P_i} \mathbb{C}^{r(n_i+1)}$. В ситуации общего положения ядро такого отображения описывается набором отображений: $\Lambda_i: \mathbb{C}_{P_i}^r \rightarrow \mathbb{C}_{P_{i+1}}^r$ и $\Lambda_i^j: \mathbb{C}_{0, P_i}^r \rightarrow \mathbb{C}_{j, P_i}^r$. Легко заметить, что вне ситуации общего положения или если Λ_i не обратимы, получаемые модули не будут проективными.

Напомним, что слой модуля M над кольцом R в точке P определяется как $M^{\text{loc}}/I^{\text{loc}}M^{\text{loc}}$, где I — максимальный идеал точки P , индекс loc означает локализацию в точке P .

ПРИМЕР 5. Рассмотрим кривую с двойной точкой: $\Sigma = \text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: f(P_1) = f(P_2)\}$. Модули ранга $r = 1$ (линейные расслоения или пучки без кручения ранга $r = 1$) параметризуются одним комплексным числом $\lambda \in \mathbb{C}$. Они определяются условием $\{s(z) \in \mathbb{C}[z]: s(P_1) = \lambda s(P_2)\}$. Очевидно, M_λ — пучок без кручения. В случае $\lambda = 0$ модуль не является проективным, так как слой в особой точке подсказывает, т.е. становится двумерным, что невозможно для локально-свободных модулей. Полезным упражнением представляется вычисление дивизора линейного расслоения M_λ . При $\lambda \neq 0$ легко заметить, что модуль локально-свободен (следовательно, проективен).

(Проективный модуль ранга $r = 1$ становится свободным на любом открытом множестве, не содержащем любого представителя его дивизора.) Данный пример иллюстрирует наблюдение, что пространство модулей линейных расслоений (так называемый обобщенный якобиан) не является компактным для особых кривых. В рассматриваемом примере кривой с двойной точкой $\text{Jас} \cong \mathbb{C}^*$, данный изоморфизм является также изоморфизмом групп, подгрупповой операцией на пространстве линейных расслоений подразумевается тензорное умножение расслоений. Jас может быть компактифицирован модулями без кручения. В рассматриваемом случае необходимо добавить единственный модуль, соответствующий $\lambda = 0$ (он совпадает с модулем, соответствующим $\lambda = \infty$, т.е. модулем $\{s \in \mathbb{C}[z]: 0 = s(P_2)\}$). Можно показать, что корректно построенная алгебраическая структура на множестве пучков без кручения ранга $r = 1$ превращает это множество в саму кривую Σ^{proj} . Этот результат связан с существованием изоморфизма между эллиптической кривой и ее якобианом. Это может быть показано, например, с помощью расслоения Пуанкаре на квадрате кривой.

По дивизору $D = P_1 + P_2 + \dots + P_N$ построим кривую $\Sigma_D = \text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: f(P_1) =$

$f(P_2) = \dots = f(P_N)\}$. Модули ранга r описываются как подпространства векторно-значных полиномов $s(z)$ на $\mathbb{C}$, т.е. $s(z) \in \mathbb{C}^r[z]$, удовлетворяющих условиям $s(P_1) = \Lambda_i s(P_i)$, $i = 2, \dots, N$, где Λ_i – произвольные обратимые матрицы.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим кривую с особенностью типа каспа: $\Sigma = \text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: f'(P) = 0\}$. Напомним, что это эквивалентно склейке точки P с самой собой с кратностью 2. Модули в данном случае описываются подпространствами $\{s(z) \in \mathbb{C}[z]: s'(P) = \lambda_1 s(P)\}$. Эти модули являются проективными для любого числа $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Таким образом, $\mathbb{C}$ представляет собой пространство модулей линейных расслоений. Оно может быть компактифицировано добавлением одной точки $\lambda_1 = \infty$ (т.е. модулем $\{s \in \mathbb{C}[z]: 0 = s(0)\}$, который является максимальным идеалом особой точки $z = 0$ и совпадает с прямым образом $\mathcal{O}_{\text{norm}}$, т.е. с модулем $\mathbb{C}[z]$, рассматриваемым над нашим структурным кольцом). Корректная алгебраическая структура на компактификации пространства модулей превращает его в нашу кривую Σ^{proj} , а не $\mathbb{CP}^1$.

По аналогии с вышесказанным модули ранга r на кривой $\Sigma_D = \text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: f'(P) = f''(P) = \dots = f^N(P) = 0\}$, соответствующей дивизору $D = NP$, описываются подпространствами векторнозначных полиномов $s(z)$ на $\mathbb{C}$, т.е. $s(z) \in \mathbb{C}^r[z]$, удовлетворяющих условиям $s^{(i)}(P) = \Lambda_i s(P)$, $i = 1, \dots, N$, где Λ_i – произвольные матрицы.

2.3.2. Векторные расслоения на проективизации. Модули M_Λ и $M_{\tilde{\Lambda}}$ эквивалентны, если существует обратимый гомоморфизм модулей $K(z): M_\Lambda \rightarrow M_{\tilde{\Lambda}}$.

Напомним, что под Σ_D^{proj} подразумевается проективная кривая, полученная из аффинной кривой $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: \forall i, j \ f(P_i) = f(P_j), \ f^k(P_i) = 0, \ k = 1, \dots, n_i - 1\}$ добавлением одной гладкой точки в бесконечности. Модули M_Λ определяют векторные расслоения на Σ^{proj} следующим очевидным образом: определим пучок, который является тривиальным модулем ранга r на карте, содержащей бесконечность, и совпадает с модулем M_Λ (точнее, с его локализацией) на карте, содержащей особую точку. Обозначим это расслоение также M_Λ . Степень такого расслоения равна нулю. Векторные расслоения эквивалентны, если существует обратимый гомоморфизм модулей $K(z): M_\Lambda \mapsto M_{\tilde{\Lambda}}$ на каждой из карт. Следовательно, $K(z)$ – матрично-значный полином, регулярный и в бесконечности, и в аффинной карте Σ_D . Такая функция может быть только постоянной. Таким образом, получаем

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Векторные расслоения M_Λ на Σ^{proj} изоморфны тогда и только тогда, когда существует постоянная матрица K такая, что $\Lambda_i = K \tilde{\Lambda}_i K^{-1}$, $\Lambda_i^j = K \tilde{\Lambda}_i^j K^{-1} \ \forall i, j$.

Как следствие справедлива

ТЕОРЕМА 1. Открытое подмножество полустабильных векторных расслоений степени 0 и ранга r на кривой Σ^{proj} изоморфно

$$\mathcal{M} = \Lambda / GL_r,$$

где Λ – множество наборов матриц $\{\Lambda_i, \Lambda_k^j\}$, $i = 2, \dots, N$, $k = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_i$, с Λ_i обратимыми и Λ_k^j произвольными матрицами, действие GL_r определено как совместное сопряжение всего набора матриц.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Обратный образ расслоения M_Λ , т.е. π^*M_Λ , является тривиальным расслоением на $\mathbb{C}P^1$, где $\pi: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \Sigma^{\text{proj}}$ — отображение нормализации. Очевидно, существуют другие расслоения $\mathcal{F}$ степени 0 на Σ^{proj} такие, что $\pi^*\mathcal{F}$ не тривиально, а представляется в виде $\bigoplus_{k=1}^r \mathcal{O}(t_k)$ с условием $\sum_{k=1}^r t_k = 0$, т.е. мы не можем получить все расслоения степени 0 на Σ^{proj} как расслоения типа M_Λ для некоторых Λ . Тем не менее общие стабильные и полустабильные расслоения удовлетворяют условию, что $\pi^*\mathcal{F}$ — тривиальное расслоение на $\mathbb{C}P^1$, и, следовательно, в соответствии с изложенным выше описанием общее полустабильное расслоение может быть получено как расслоение M_Λ для некоторых Λ .

2.4. Эндоморфизмы модуля M_Λ .

2.4.1. *Эндоморфизмы модуля M_Λ на аффинной карте.* Опишем эндоморфизмы расслоений на кривых, полученных склейкой точек P_i , а также для кривых с особенностями типа каспа; случай склейки точек с кратностями представляется более сложным, он рассмотрен в работе [20].

Напомним, что модуль M_Λ над кольцом $\{f \in \mathbb{C}[z]: \forall i, j, f(P_i) = f(P_j)\}$ определяется подпространством векторнозначных полиномов $s(z)$ на $\mathbb{C}$, т.е. $s(z) \in \mathbb{C}^r[z]$, удовлетворяющих условиям $s(P_1) = \Lambda_i s(P_i)$, $i = 2, \dots, N$. Естественно искать эндоморфизмы модуля M_Λ как эндоморфизмы $\mathbb{C}^r[z]$, сохраняющие подмодуль M_Λ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Эндоморфизм модуля M_Λ может быть представлен матрично-значным полиномом $\Phi(z): s(z) \mapsto \Phi(z)s(z)$, удовлетворяющим условию*

$$\Phi(P_1) = \Lambda_i \Phi(P_i) \Lambda_i^{-1} \quad \forall i. \quad (10)$$

Данное условие означает, что $\Phi(z)s(z)$ удовлетворяет равенству

$$\Phi(P_1)s(P_1) = \Lambda_i \Phi(P_i)s(P_i),$$

т.е. $\Phi(z)s(z)$ также является элементом M_Λ , т.е. $\Phi(z): s(z) \mapsto \Phi(z)s(z)$ действительно эндоморфизм M_Λ .

ПРИМЕР 7. В абелевом случае (т.е. для модулей ранга $r = 1$ на многообразии) условие на эндоморфизм является пустым, каждый элемент $\Phi(z)$ определяет эндоморфизм, т.е. пучок эндоморфизмов любого когерентного пучка ранга $r = 1$ — это в точности $\mathcal{O}$, как и в случае кривой без особенностей.

ПРИМЕР 8. Рассмотрим кривую с двойной точкой $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z], f(1) = f(0)\}$. Эндоморфизм модуля M_Λ , определенного как $\{s \in \mathbb{C}^r[z], s(1) = \Lambda s(0)\}$ для некоторой матрицы Λ , задается матрично-значным полиномом $\Phi(z) = \Phi_0 + \Phi_1 z + \Phi_2 z^2 + \dots$ таким, что $\Phi(1) = \Lambda \Phi(0) \Lambda^{-1}$. Таким образом,

$$\Phi(z) = \Phi_0 + (\Lambda \Phi_0 \Lambda^{-1} - \Phi_0)z + z(z-1)\tilde{\Phi}(z),$$

где $\tilde{\Phi}(z)$ — произвольное выражение. При рассмотрении проективизации нашей кривой и расслоения M_Λ на ней заметим, что только постоянные эндоморфизмы $\Phi(z) = \Phi_0$ регулярны в бесконечности, т.е. для того чтобы удовлетворить условию $\Phi(1) = \Lambda \Phi(0) \Lambda^{-1}$,

необходимо потребовать, чтобы матрица Φ_0 коммутировала с Λ . Как следствие получаем, что для общего модуля M_Λ пространство глобальных эндоморфизмов имеет размерность r .

ПРИМЕР 9. Рассмотрим кривую с двойной точкой $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z], f(A) = f(B)\}$. Эндоморфизм модуля M_Λ задается матрично-значным полиномом $\Phi(z) = \Phi_0 + \Phi_1 z + \Phi_2 z^2 + \dots$ таким, что $\Phi(A) = \Lambda \Phi(B) \Lambda^{-1}$. Таким образом,

$$\Phi(z) = \Phi_0 + \Phi_1 z + (z - A)(z - B)\tilde{\Phi}(z),$$

где Φ_0, Φ_1 удовлетворяют $\Phi_0 + A\Phi_1 = \Lambda(\Phi_0 + B\Phi_1)\Lambda^{-1}$, а $\tilde{\Phi}(z)$ — произвольное выражение. Более удобно представить это выражение следующим образом:

$$\Phi(z) = \Theta(z - A) - \Lambda\Theta\Lambda^{-1}(z - B) + (z - A)(z - B)\tilde{\Theta}(z), \quad (11)$$

где Θ — произвольная постоянная матрица, $\tilde{\Theta}$ — произвольный матрично-значный многочлен. Глобальные эндоморфизмы задаются как $\Phi(z) = \Theta(B - A)$, где Θ коммутирует с Λ .

ПРИМЕР 10. Рассмотрим кривую с тройной точкой $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z], f(P_1) = f(P_2) = f(P_3)\}$. Эндоморфизмы модуля M_Λ определяются матрично-значными полиномами $\Phi(z) = \Phi_0 + \Phi_1 z + \Phi_2 z^2 + \dots$ такими, что $\Phi(P_1) = \Lambda_2 \Phi(P_2) \Lambda_2^{-1}$, $\Phi(P_1) = \Lambda_3 \Phi(P_3) \Lambda_3^{-1}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \Phi(P_1) \frac{(z - P_2)(z - P_3)}{(P_1 - P_2)(P_1 - P_3)} + \Lambda_2^{-1} \Phi(P_1) \Lambda_2 \frac{(z - P_1)(z - P_3)}{(P_2 - P_1)(P_2 - P_3)} + \\ & + \Lambda_3^{-1} \Phi(P_1) \Lambda_3 \frac{(z - P_1)(z - P_2)}{(P_3 - P_1)(P_3 - P_2)} + (z - P_1)(z - P_2)(z - P_3)\tilde{\Phi}(z). \end{aligned}$$

Рассмотрим кривую с особенностью типа каспа $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: f'(P) = 0\}$. Напомним, что модуль M_Λ определяется подмножеством векторнозначных полиномов, т.е. $s(z) \in \mathbb{C}^r[z]$, удовлетворяющих условию $s'(P) = \Lambda s(P)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Эндоморфизмы модуля M_Λ на кривой с особенностью типа каспа представляются матрично-значными полиномами $\Phi(z): s(z) \mapsto \Phi(z)s(z)$, удовлетворяющими условию

$$\Phi'(P) = [\Lambda, \Phi(P)]. \quad (12)$$

Условие (12) эквивалентно следующему: $(\Phi(P)s(P))' = \Lambda\Phi(P)s(P)$, которое означает, что Φ переводит сечение в сечение.

2.4.2. Эндоморфизмы расслоения M_Λ на проективизации. Рассмотрим проективную кривую Σ_D^{proj} , полученную добавлением одной гладкой точки в бесконечности к кривой $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z]: \forall i, j, f(P_i) = f(P_j), f'(P_i) = \dots = f^{n_i-1}(P_i) = 0\}$. Эндоморфизм расслоения M_Λ задается эндоморфизмами модулей на каждой карте. Таким образом, эндоморфизм расслоения M_Λ — это эндоморфизм модуля M_Λ на аффинной карте, регулярный в бесконечности. Такой эндоморфизм $\Phi(z)$ может быть только константой $\Phi(z) = \Phi_0$, а с другой стороны, должен удовлетворять условиям (10), (12). Отсюда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Глобальный эндоморфизм расслоения M_Λ на кривой Σ_D^{proj} задается постоянной матрицей Φ_0 , которая коммутирует со всеми матрицами Λ_i, Λ_i^j .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Очевидно, что если род кривой больше 1, эндоморфизмами общего расслоения являются только скалярные матрицы; этот факт отражает стабильность общего расслоения. Для кривой рода 1 (т.е. для кривой с особенностью типа двойной точки или каспа) общее расслоение имеет r -мерное пространство глобальных эндоморфизмов, что отражает тот факт, что на кривых рода 1 общее расслоение представляется в виде суммы линейных расслоений.

2.5. Описание $\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K}$.

2.5.1. Примеры кривых с двойной точкой и особенностью типа каспа.

ПРИМЕР 11. Рассмотрим кривую с двойной точкой $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z], f(A) = f(B)\}$. Эндоморфизм модуля M_Λ задается (см. пример 9) выражением (11), где $\Theta, \tilde{\Theta}(z)$ – произвольные матрицы. Сечения дуализирующего модуля определяются как

$$\omega = \frac{c dz}{z - A} + \frac{c dz}{z - B} + \text{голоморфные по } z \text{ члены.}$$

Следовательно, сечения $\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K}$ могут быть представлены в виде

$$\Phi(z) = (B - A) \left(\frac{\Lambda \Theta \Lambda^{-1} dz}{z - A} - \frac{\Theta dz}{z - B} \right) + \text{голоморфные по } z \text{ члены.} \quad (13)$$

Таким образом, глобальные сечения $H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ на проективизации – это сечения $\Phi(z)$, регулярные в бесконечности. Условие, что $\Phi(z)$ не имеет полюсов порядка выше второго, влечет, что в выражении (13) отсутствует голоморфный член. Условие, что вычет в бесконечности равен нулю, эквивалентно тому, что $\Lambda \Theta \Lambda^{-1} - \Theta = 0$. Иными словами, глобальные сечения – это

$$\Phi(z) = (B - A) \left(\frac{\Theta dz}{z - A} - \frac{\Theta dz}{z - B} \right),$$

где $\Lambda \Theta = \Theta \Lambda$. В данном случае видно, что

$$H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K}) = H^0(\text{End}(M_\Lambda)) \otimes H^0(\mathcal{K}). \quad (14)$$

ПРИМЕР 12. Рассмотрим кривую с особенностью типа каспа $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}[z], f'(P) = 0\}$. Эндоморфизмы модуля M_Λ задаются выражением

$$\Theta + [\Lambda_1, \Theta](z - P) + (z - P)^2 \tilde{\Theta}(z),$$

где $\Theta, \tilde{\Theta}(z)$ – произвольные матрицы. Сечения канонического модуля определяются как

$$\frac{c_1 dz}{(z - P)^2} + c(z) dz,$$

где $c(z)$ — голоморфная функция. Таким образом, сечения $\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K}$ могут быть описаны как

$$\Phi(z) = (\Theta + [\Lambda, \Theta](z - P)) \frac{dz}{(z - P)^2} + \text{голоморфные по } z \text{ члены.}$$

Глобальные сечения $H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ являются сечениями $\Phi(z)$, регулярными в бесконечности. Следовательно, имеем $[\Theta, \Lambda] = 0$, и, следовательно, глобальные сечения — это

$$\Phi(z) = (B - A) \frac{\Theta dz}{(z - P)^2},$$

где $\Lambda\Theta = \Theta\Lambda$. В данном случае, как и в случае кривой с двойной точкой, справедливо равенство (14).

2.5.2. Кривые, полученные склейкой нескольких точек без кратностей. Рассмотрим кривую Σ^{proj} , полученную склейкой N точек на $\mathbb{CP}^1$ (рассматриваем случай склейки без кратностей). Напомним, что аффинная часть Σ^{proj} определяется как $\text{Spec}\{f(z) \in \mathbb{C}[z]: \forall i, j, f(P_i) = f(P_j)\}$. Расслоениям M_Λ отвечают модули типа $\{s(z) \in \mathbb{C}^r[z]: \forall i = 2, \dots, N, s(P_1) = \Lambda_i s(P_i)\}$ над аффинной картой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Сечения $\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K}$ над картой без бесконечности описываются матрично-значными полиномами:*

$$\Phi(z) = \frac{1}{z - P_1} \sum_{i=2}^N -\Lambda_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} dz + \sum_{i=2}^N \frac{\Phi_i}{z - P_i} dz + \text{голоморфная по } z \text{ часть}, \quad (15)$$

где Φ_i — произвольные матрицы. Глобальные сечения $H^0(\Sigma^{\text{proj}}, \text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ определяются выражением

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\Phi_i}{z - P_i} dz,$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i = 0, \quad \sum_{i=2}^N (-\Lambda_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} + \Phi_i) = 0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть утверждения о сечениях над аффинной картой является тривиальной. Действительно, над аффинной картой $\Gamma(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K}) = \Gamma(\text{End}(M_\Lambda)) \otimes \Gamma(\mathcal{K})$ как следствие тривиальности $\mathcal{K}$ над аффинной картой даже в алгебраической топологии. Мы можем представить сечение в виде

$$\Phi(z) = \sum_{i=2}^N \Phi_i(z) \otimes \omega_i, \quad (17)$$

где

$$\omega_i = \frac{dz}{(z - P_1)(z - P_i)}$$

образуют базис голоморфных дифференциалов на Σ^{proj} , а $\Phi_i(z)$ — сечения $\text{End}(M_\Lambda)$ над аффинной картой, т.е. $\Phi_i(P_1) = \Lambda_k \Phi_i(P_k) \Lambda_k^{-1}$. Вычисляя вычеты выражения $\Phi(z)$, получим формулу (15), где $\Phi_i = \Phi_i(P_i)$.

Доказательство второй части утверждения основано на факте, что глобальные сечения соответствуют сечениям над аффинной картой, которые могут быть регулярно продолжены в бесконечность. Выражение (15) регулярно в бесконечности, если оно не имеет членов, регулярных по z и его вычет в бесконечности равен нулю, что налагает дополнительное условие $\sum_{i=1}^N \Phi_i = 0$.

Обратно, для любых $\{\Phi_i, i = 1, \dots, N\}$, удовлетворяющих условиям (16), существует эндоморфизм $\{\Phi_i(z), i = 2, \dots, N\}$ модуля M_Λ такой, что

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\Phi_i}{z - P_i} \otimes dz = \sum_{i=2}^N \Phi_i(z) \otimes \omega_i.$$

Действительно, рассмотрим локальные эндоморфизмы $\Phi'_i(z)$ такие, что $\Phi'_i(P_i) = (P_i - P_1)\Phi_i$, $i = 2, \dots, N$. Вычет функции

$$\Phi'(z) = \sum_{i=2}^N \Phi'_i(z) \otimes \omega_i$$

в точке P_1 равен

$$\text{Res}_{|P_1} \Phi' = - \sum_{i=2}^N \Lambda_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} = \Phi_1.$$

Разница $\Phi(z) - \Phi'(z)$ регулярна в аффинной карте, следовательно, не имеет вычета в бесконечности. Теперь рассмотрим выражение

$$\tilde{\Phi}(z) \otimes dz = \prod_{i=1}^N (z - P_i) \tilde{\Phi}(z) \otimes \frac{dz}{\prod_{i=1}^N (z - P_i)},$$

которое также является сечением $\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K}$ над аффинной картой для произвольной матрично-значной функции $\tilde{\Phi}(z)$. Оно имеет полюс в бесконечности произвольного порядка выше второго и не имеет вычета. Существует функция $\tilde{\Phi}(z)$ такая, что $\Phi(z) = \Phi'(z) + \tilde{\Phi}(z) \otimes dz$. Последнее выражение является выражением типа (17), что завершает доказательство.

2.6. Описание $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$.

2.6.1. *Кривые, полученные склейкой точек без кратностей.* Рассмотрим кривую Σ^{proj} , полученную склейкой N различных точек $\mathbb{CP}^1$ (рассматривается случай склейки без кратностей). Напомним, что аффинная часть Σ^{proj} задается как $\text{Spec}\{f(z) \in \mathbb{C}[z]: \forall i, j, f(P_i) = f(P_j)\}$, расслоение M_Λ соответствует модулю над аффинной картой $\{s(z) \in \mathbb{C}^r[z]: \forall i = 2, \dots, N, s(P_1) = \Lambda_i s(P_i)\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Пространство матрично-значных полиномов $\chi(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \chi_i z^i$ отображается сюръективно на $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$. Ядро отображения представляется в виде суммы двух линейных подпространств: пространства постоянных полиномов $\chi(z) = \chi_0$ и пространства матрично-значных полиномов, удовлетворяющих условию $\chi(P_1) = \Lambda_i \chi(P_i) \Lambda_i^{-1}$ для $i = 2, \dots, N^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение достаточно очевидно при рассмотрении представления Чеха для $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$. Покроем нашу особую кривую картами $U_P = \Sigma \setminus \infty$, $U_\infty = \Sigma \setminus P$, где P – особая точка. Тогда

$$H^1(\text{End}(M_\Lambda)) = \text{End}(M_\Lambda)(U_P \cap U_\infty) / \text{End}(M_\Lambda)(U_P) \oplus \text{End}(M_\Lambda)(U_\infty).$$

Из утверждения 6 следует, что $\text{End}(M_\Lambda)(U_P)$ – это в точности те полиномы $\chi(z)$, которые удовлетворяют $\chi(P_1) = \Lambda_i \chi(P_i) \Lambda_i^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Следствием утверждения 10 является теорема Римана–Роха для расслоения M_Λ . Используемое нами описание $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ схоже с адельным описанием и с описанием Кричевера. Подобные описания имеются и в старших размерностях (см. [21]). Было бы интересно использовать подобные описания для доказательства теоремы Римана–Роха в старших размерностях.

ПРИМЕР 13. В абелевом случае (т.е. когда ранг M_Λ равен единице) для всех Λ мы видели, что $\text{End}(M_\Lambda)$ совпадает с $\mathcal{O}$. Из утверждения 10 следует, что $H^1(\mathcal{O})$ представляется в виде факторпространства всех полиномов $\sum_i \chi_i z^i$ по подпространству полиномов $\chi(z)$, удовлетворяющих условию $\chi(P_1) = \chi(P_i)$. (Тот же результат может быть получен как следствие точной последовательности $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^{\text{norm}} \rightarrow \mathbb{C}_P$, т.е. $H^1(\mathcal{O}) = H^0(\mathbb{C}_P)$.)

Хорошо известно, что векторное пространство $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ отождествляется канонически с касательным пространством к пространству деформаций M_Λ в классе алгебраических расслоений. С другой стороны, все расслоения определяются параметрами Λ . Нашей локальной целью является определение деформации $\delta_{\chi(z)} \Lambda$, соответствующей элементу $\chi(z) = \sum_i \chi_i z^i$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Матрично-значный полином $\chi(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \chi_i z^i$ (рассматриваемый как элемент $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$) в соответствии с утверждением 10) задает следующую деформацию параметров Λ_i :*

$$\delta_{\chi(z)} \Lambda_i = \chi(P_1) \Lambda_i - \Lambda_i \chi(P_i). \quad (18)$$

¹⁾Заметим, что пересечение данных пространств – это в точности $H^0(\text{End}(M_\Lambda))$, и второе рассматриваемое подпространство состоит из полиномов $\chi(z)$, которые задают эндоморфизмы модуля M_Λ над аффинной картой без бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Известно, что для случая кривой H^2 (когерентный пучок) $= 0$ из общей теории следует, что отображение из $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ в касательное пространство деформаций модуля M_Λ является биекцией. Наиболее существенным для нас моментом будет то, что для элемента $\chi(z) = \sum_i \chi_i z^i$, который деформирует M_Λ по формуле $\Lambda_i \mapsto \Lambda_i + \chi(P_1)\Lambda_i - \Lambda_i\chi(P_i)$, спаривание Серра между ним и элементом $\Phi(z) \in H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ задается по формуле $\sum_i \text{Res } |_{P_i} \text{Tr}(\chi(z)\Phi(z))$ (см. ниже утверждение 12).

СЛЕДСТВИЕ 3. Матрично-значный полином $\chi(z) = \sum_j \chi_j z^j$, удовлетворяющий условиям $\chi(P_1) = \Lambda_i \chi(P_i) \Lambda_i^{-1}$ при $i = 2, \dots, N$, не меняет Λ_i . Это наблюдение полностью согласовано с утверждением 10, в соответствии с которым такой полином лежит в ядре отображения факторизации.

СЛЕДСТВИЕ 4. Постоянный матрично-значный полином $\chi(z) = \chi_0$ изменяет Λ в классе сопряженности, т.е. не меняет расслоения. Этот факт также согласован с утверждением 10, т.е. такой полином также лежит в ядре при факторизации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 11. Рассмотрим элемент $1 + \delta\chi(z)$, где $\delta^2 = 0$. Он представляет собой инфинитезимальный автоморфизм модуля $\mathbb{C}^r[z]$, отвечающий эндоморфизму $\chi(z)$. Данный автоморфизм деформирует модуль M_Λ следующим образом: новый модуль состоит из элементов $\tilde{s}(z) = (1 + \delta\chi(z))s(z)$, где $s(z)$ — элемент M_Λ . Элемент $\tilde{s}(z)$ удовлетворяет условию

$$\tilde{s}(P_1) = (1 + \delta\chi(P_1))\Lambda_i(1 + \delta\chi(P_i))^{-1}\tilde{s}(P_i)$$

для $i = 2, \dots, N$. Таким образом,

$$\tilde{s}(P_1) = (\Lambda_i + \delta\chi(P_1)\Lambda_i - \Lambda_i\delta\chi(P_i))\tilde{s}(P_i).$$

Следовательно, новый модуль — это модуль $M_{\Lambda_i + \chi(P_1)\Lambda_i - \Lambda_i\chi(P_i)}$.

Модуль M_Λ вложен в тривиальный модуль $\mathbb{C}^r[z]$, который не может быть продеформирован, а следовательно, все деформации M_Λ определяются деформациями вложения $M_\Lambda \rightarrow \mathbb{C}^r[z]$. Элементы $\text{End}(\mathbb{C}^r[z])$ действуют на вложениях $M_\Lambda \rightarrow \mathbb{C}^r[z]$, а значит, элементы из $\text{End}(\mathbb{C}^r[z])$ отображаются в пространство деформаций модуля M_Λ . (Другой способ мотивировать отображение из $\text{End}(\mathbb{C}^r[z])$ в деформации модуля M_Λ состоит в том, чтобы рассуждать на основании принципа: когомологии эндоморфизмов — это эндоморфизмы для резольвенты, а для модуля M_Λ можно взять резольвенту $\mathbb{C}^r[z] \rightarrow \mathbb{C}^p$.)

Существует другое доказательство утверждения 11. Оно более прозрачно на уровне идей, но менее эффективно с точки зрения явных представлений. Рассмотрим представление Чеха для когомологий пучков. Как и прежде, имеется в виду покрытие двумя картами нашей проективной кривой: одна состоит из кривой без особой точки, вторая не является в действительности открытым множеством, а лишь пределом открытых множеств, т.е. представляет собой инфинитезимальную окрестность особой точки,

т.е. $\text{Spec}\{f \in \mathbb{C}(z), f \text{ регулярна в } P_i \text{ и } f(P_i) = f(P_j)\}$. Рассмотрение данной инфинитезимальной окрестности необходимо потому, что только в такой окрестности особой точки все модули тривиализуются вследствие того факта, что данная окрестность – это спектр локального кольца (в любой конечной окрестности есть модули, которые не тривиализуются, – это отличает ситуацию особых рациональных кривых от $\mathbb{CP}^1$). Таким образом, любой модуль на особой кривой может быть получен склейкой тривиальных модулей на пересечении карт. В данном случае пересечением является *общая точка*, т.е. $\text{Spec}\{\mathbb{C}(z)\}$. Первая задача заключается в том, чтобы описать модуль M_Λ с помощью функций переклейки. После этого достаточно очевидно, как найти деформацию, отвечающую элементу $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$. Представим элемент $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ как $\chi \in \text{End}(M_\Lambda)$ на пересечении карт, далее следует умножить функцию переклейки на элемент $1 + \delta\chi$. Таким образом найдем новую функцию переклейки. Новое расслоение также можно представить в форме M_Λ . Данная конструкция дает тот же самый результат.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих утверждения 10 и 11.

ПРИМЕР 14. Рассмотрим кривую с двойной точкой, аффинная часть которой определяется как $\text{Spec}\{f(A) = f(B)\}$, где $A, B \in \mathbb{C}$. Рассмотрим матрично-значный полином

$$\chi(z) = \chi_0 + \chi_1 z + (z - A)(z - B)\tilde{\chi}(z).$$

В соответствии с утверждением 11 он действует на Λ по формуле $\delta_\chi \Lambda = \chi(A)\Lambda - \Lambda\chi(B)$. Часть $(z - A)(z - B)\tilde{\chi}(z)$ не деформирует Λ . Будем рассматривать только линейные полиномы $\chi(z) = \chi_0 + \chi_1 z$. В соответствии с утверждением 10 пространство $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ представляется в виде факторпространства $\chi_0 + \chi_1 z$ по прямой сумме подпространств $\chi(z) = \chi_0$ и $\chi(z) = \Theta(z - A) - \Lambda\Theta\Lambda^{-1}(z - B)$, где χ_0, Θ – произвольные матрицы. (Было бы любопытно найти явную параметризацию ортогонального дополнения по отношению к форме Киллинга к сумме этих подпространств и обобщить на случай склейки схемных точек.) Пересечение этих подпространств – это подпространство полиномов $\chi(z) = \chi_0$ таких, что χ_0 коммутирует с Λ . Это пересечение совпадает с $H^0(\text{End}(M_\Lambda))$. Таким образом, получаем, что $\dim H^1(\text{End}(M_\Lambda)) = \dim H^0(\text{End}(M_\Lambda))$. Данное наблюдение совпадает с вычислением по теореме Римана–Роха:

$$\dim H^0(\text{End}(M_\Lambda)) - \dim H^1(\text{End}(M_\Lambda)) = \deg(\text{End}(M_\Lambda)) - n^2(1 - \dim H^1(\mathcal{O})) = 0.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. *Спаривание Серра между $H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ и $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ в терминах матрично-значных полиномов $\Phi(z) dz$ и $\chi(z)$ представляется в виде*

$$\sum_{i=1}^N \text{Res}_{|P_i} \text{Tr}(\chi(z)\Phi(z) dz). \quad (19)$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Рассмотрим матрично-значный полином $\chi(z) = \sum_k \chi_k z^k$, удовлетворяющий условию $\chi(P_1) = \Lambda_i \chi(P_i) \Lambda_i^{-1}$ для $i = 2, \dots, N$. Спаривание Серра, определяемое формулой (19), между $\chi(z)$ и произвольным элементом $\Phi(z) \in H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes K)$ тождественно обращается в нуль. Данный факт полностью согласован с утверждением 10, в соответствии с которым данный элемент равен нулю в $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Рассмотрим матрично-значный полином $\chi(z) = \chi_0$. Спаривание Серра, заданное формулой (19), между $\chi(z)$ и произвольным элементом $\Phi(z) \in H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes K)$ тождественно обращается в нуль. Данный факт согласован с утверждением 10, в соответствии с которым данный полином равен нулю в $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$.

Это утверждение непосредственно следует из общего описания спаривания Серра, данного в утверждении 3. В доказательстве следствий используется утверждение 9, для того чтобы представить $\Phi(z)$ как матрично-значный полином:

$$\Phi(z) = \frac{1}{z - P_1} \sum_{i=2}^N -\Lambda_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} dz + \sum_{i=2}^N \frac{\Phi_i}{z - P_i} dz \quad (20)$$

для некоторых Φ_i .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Для доказательства следствия 6 также необходимо использовать второе из условий (16). Следствие 5 не использует данного условия на Φ_i и верно для любых $\Phi(z)$, представимых в виде (20) для произвольных Φ_i .

2.6.2. Кривая с особенностью типа каспа. Рассмотрим кривую с особенностью типа каспа Σ^{proj} . Ее аффинная часть задается как $\text{Spec}\{f(z) \in \mathbb{C}[z]: f'(P) = 0\}$, расслоение M_Λ отвечает модулю $\{s(z) \in \mathbb{C}^r[z]: s'(P) = \Lambda s(P)\}$ на аффинной карте.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. Пространство матрично-значных полиномов $\chi(z) = \chi_0 + \chi_1(z - P)$ отображается сюръективно на $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$. Ядро отображения состоит из суммы двух линейных подпространств: пространства постоянных полиномов $\chi(z) = \chi_0$ и пространства полиномов, удовлетворяющих условию $\chi_1 = [\Lambda, \chi_0]^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение является достаточно очевидным и доказывается с использованием описания Чеха по аналогии с доказательством утверждения 10.

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Матрично-значный полином $\chi(z) = \chi_0 + \chi_1(z - P)$ как элемент $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ определяет следующую деформацию расслоения в терминах координат Λ :

$$\delta_{\chi(z)} \Lambda = \chi_1 + [\chi_0, \Lambda].$$

²⁾Заметим, что пересечение этих подпространств совпадает с $H^0(\text{End}(M_\Lambda))$, при этом второе подпространство состоит из тех полиномов $\chi(z)$, которые задают эндоморфизмы модуля M_Λ над аффинной картой без бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение доказывается по аналогии с доказательством утверждения 11. Прокомментируем только следующий ключевой момент: рассмотрим элемент $1 + \delta\chi(z)$, где $\delta^2 = 0$. Это инфинитезимальный автоморфизм модуля $\mathbb{C}^r[z]$, соответствующий эндоморфизму $\chi(z)$. Ему соответствует следующая деформация модуля M_Λ : новый модуль состоит из элементов $(1 + \delta\chi(z))s(z)$, где $s(z)$ – элемент модуля M_Λ . Элементы вида $\tilde{s}(z) = (1 + \delta\chi(z))s(z)$ удовлетворяют условию

$$\begin{aligned}\tilde{s}'(P) &= (1 + \delta\chi(P))'s(P) + (1 + \delta\chi(P))s'(P) = \\ &= \delta\chi(P)'(1 - \delta\chi(P))\tilde{s}(P) + (1 + \delta\chi(P))\Lambda(1 - \delta\chi(P))\tilde{s}(P) = \\ &= (\Lambda + \delta\chi'(P) + [\delta\chi(P), \Lambda])\tilde{s}(P).\end{aligned}$$

Таким образом, новый модуль описывается как $M_{\Lambda + \delta\chi'(P) + [\delta\chi(P), \Lambda]}$.

Спаривание Серра в точности совпадает со спариванием, полученным в п. 2.6.1.

2.7. Каноническая 1-форма на кокасательном расслоении к пространству модулей векторных расслоений в терминах Φ , Λ .

2.7.1. *Кривые, полученные склейкой точек без кратностей.* Рассмотрим кривую Σ^{proj} , полученную склейкой N различных точек $\mathbb{CP}^1$ без кратностей. Аффинная часть кривой Σ^{proj} определяется как $\text{Spec}\{f(z) \in \mathbb{C}[z]: \forall i, j \ f(P_i) = f(P_j)\}$, расслоение M_Λ над аффинной частью определяется модулем $\{s(z) \in \mathbb{C}^r[z]: \forall i = 2, \dots, N \ s(P_1) = \Lambda_i s(P_i)\}$.

Известно, что $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$ отождествляется с пространством, касательным к пространству модулей расслоений в точке M_Λ , и, следовательно, $H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ – это двойственное к $H^1(\text{End}(M_\Lambda))$, т.е. кокасательное пространство к пространству модулей расслоений в той же точке. В соответствии с утверждением 9 сечения $H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ описываются выражениями (20), где матрицы Φ_i удовлетворяют второму из условий (16).

Основная цель п. 2.7 состоит в доказательстве утверждения, формулировка которого на жаргоне специалистов, звучит так:

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каноническая 1-форма на кокасательном расслоении к пространству модулей расслоений на кривой Σ^{proj} в переменных Λ_i , Φ_i представляется в виде*

$$-\sum_{i=2}^N \text{Tr}(\Phi_i \Lambda_i^{-1} d\Lambda_i). \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В абелевом случае (т.е. для пространства модулей линейных расслоений) данное утверждение является буквально верным: Λ_i , Φ_i являются настоящими координатами на кокасательном расслоении к пространству модулей расслоений, и само выражение для симплектической формы имеет простой смысл. В неабелевом случае тонкость заключается в том, что пространство модулей является факторпространством пространства матриц Λ_i по сопряжению, а предложенная 1-форма написана на пространстве Λ_i , Φ_i без факторизации, т.е. необходимо придать смысл выражению

$\Phi_i \Lambda_i^{-1} d\Lambda_i$ в предположении, что Λ_i определены с точностью до сопряжения. Специалистам достаточно очевидно, как придать смысл данному выражению, но несмотря на это далее предлагается точная формулировка данного утверждения.

Рассмотрим пространство матриц Λ_i , Φ_i и 1-форму $\sum_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} d\Lambda_i$ на нем. Рассмотрим также подмногообразие, определенное уравнением $\sum_{i=2}^N (\Lambda_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} - \Phi_i) = 0$, и отображение p этого подмногообразия на кокасательное пространство к пространству модулей $p: (\Lambda_i, \Phi_i) \mapsto (M_\Lambda, \Phi(z))$, где $\Phi(z)$ задается формулой (20). Определим 1-форму на кокасательном пространстве к пространству модулей как ограничение 1-формы $\sum_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} d\Lambda_i$ на подмногообразии $\sum_{i=2}^N (\Lambda_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} - \Phi_i) = 0$; в действительности 1-форма обращается в нуль на векторах, касательных к слоям отображения p . Таким образом, 1-форма $\sum_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} d\Lambda_i$ проецируется на образ отображения p , т.е. на кокасательное пространство к пространству модулей расслоений. Формально утверждение заключается в том, что *результат проецирования $\sum_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} d\Lambda_i$ при отображении p совпадает с канонической 1-формой на кокасательном расслоении к пространству модулей*. Процедура, описанная выше, есть не что иное, как гамильтонова редукция. Перейдем теперь к точной формулировке результата.

Рассмотрим кокасательное пространство к пространству матриц Λ_i , т.е.

$$\mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)}) = \prod_{i=2}^N \mathcal{T}^*(GL_r)$$

с канонической инвариантной симплектической формой на нем

$$\omega_1 = \sum_{i=2}^N \text{Tr}(d(\Phi_i \Lambda_i^{-1}) \wedge d\Lambda_i),$$

где Φ_i – координаты на $\mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)})$ такие, что $\Phi_i \Lambda_i^{-1}$ канонически сопряжены Λ_i (выражение “матрица M является координатой” означает, что каждый ее матричный элемент задает некоторую функцию на рассматриваемом пространстве). Данная симплектическая форма инвариантна по отношению к естественному действию GL_r :

$$g: \Lambda_i \mapsto g^{-1} \Lambda_i g, \quad \Phi_i \mapsto g^{-1} \Phi_i g.$$

Отображение момента данного действия $\mu: \mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)}) \rightarrow gl_r^*$ может быть вычислено по 1-форме $\lambda_1 = \sum_{i=2}^N \text{Tr}(\Phi_i \Lambda_i^{-1} d\Lambda_i)$ вследствие ее инвариантности следующим образом:

$$(\iota(\xi)\lambda_1)[P] = \langle \mu[P], \xi \rangle,$$

где $P \in \mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)})$ и использовалось отождествление векторных пространств gl_r^* и gl_r с помощью спаривания $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB)$, а ξ обозначает векторное поле, определяемое по инфинитезимальному действию gl_r , которое выражается формулой $\iota(\xi) d\Lambda_i = \xi \Lambda_i - \Lambda_i \xi$. В результате получим

$$\iota(\xi)\lambda_1 = \sum_{i=2}^N \text{Tr}(\Phi_i \Lambda_i^{-1} (\xi \Lambda_i - \Lambda_i \xi)),$$

при этом отображение момента, как элемент gl_r^* , совпадает с

$$\mu[\Lambda_i, \Phi_i] = \sum_{i=2}^N (\Lambda_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} - \Phi_i). \quad (22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Условие голоморфности $\Phi(z)$ (см. утверждение 9) совпадает с условием нулевого уровня момента.

Рассмотрим результат гамильтоновой редукции для действия, описанного выше, и нулевого уровня момента

$$\mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)})//GL_r = \mu^{-1}(0)/GL_r.$$

На этом пространстве имеется каноническая симплектическая структура, совпадающая с симплектической структурой на кокасательном расслоении $\mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)})/GL_r$.

Напомним доказательство следующего классического результата.

ЛЕММА 1. Пусть группа G действует на многообразии M ; в этом случае существует индуцированное действие группы G на $\mathcal{T}^*M$, которое определяется с помощью поднятия на пространство дифференциальных форм. Каноническая 1-форма λ на $\mathcal{T}^*M$ инвариантна относительно индуцированного действия, и симплектическое многообразие $\mathcal{T}^*(M)/G$, получаемое гамильтоновой редукцией для нулевого уровня момента, канонически изоморфно симплектическому многообразию $\mathcal{T}^*(M/G)$ с канонической симплектической структурой на кокасательном расслоении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем кокасательное расслоение к M/G . Обозначим через τ отображение факторизации $\tau: M \rightarrow M/G$. Касательное пространство в точке $m \in M/G$ определяется как

$$\mathcal{T}_m(M/G) = \mathcal{T}_{\tau^{-1}(m)} / \{\text{Im}(\mathcal{G})\},$$

где $\text{Im}(\mathcal{G})$ – подпространство в $\mathcal{T}_{\tau^{-1}(m)}$, порожденное генераторами действия G . Кокасательный вектор к M/G представляется 1-формой, обращающейся в нуль на векторных полях, порожденных действием группы G , т.е. именно такими 1-формами Θ , что пара (m, Θ) принадлежит нулевому уровню момента, так как $\langle \Theta(x), \xi_g(x) \rangle = \langle \lambda(x, \Theta), \tilde{\xi}_g(x, \Theta) \rangle = \langle \mu[(x, \Theta)], g \rangle$, где $\tilde{\xi}_g$ – канонический подъем ξ_g с M на $\mathcal{T}^*M$, ξ_g – векторное поле на M , генерирующее действие группы G .

Каноническая симплектическая форма и каноническая 1-форма на $\mathcal{T}^*M$ редуцируются к канонической симплектической и канонической 1-форме на $\mathcal{T}^*(M/G)$ вследствие того факта, что 1-форма λ , редуцированная на нулевой уровень момента, является корректно определенной на факторпространстве $\mathcal{T}^*(M/G)$. Действительно, ее значение на векторном поле ξ в точке m, θ определяется выражением $\langle \theta, d\pi(\xi) \rangle$ и не зависит от выбора представителя элемента $\mathcal{T}_{\tau^{-1}(m)}/\{\text{Im}(\mathcal{G})\}$.

Возвращаясь к нашему специфическому случаю, обозначим через ω_2 соответствующую симплектическую форму на $\mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)})//GL_r$. В силу утверждения 9 имеет место отождествление пространств

$$\mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)})//GL_r \xrightarrow{p} \mathcal{T}^*\mathcal{M},$$

где по набору матриц $\{\Lambda_i\}$ строится расслоение M_Λ и по набору матриц $\{\Phi_i\}$ строится кокасательный вектор $\Phi(z)$ по формуле (20). Данное отображение является отождествлением вследствие формулы (22) для отображения момента. Другие представители Λ_i соответствуют сопряженным матрицам $\tilde{\Lambda}_i = g^{-1}\Lambda_i g$, $\tilde{\Phi}_i = g^{-1}\Phi_i g$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В действительности отображение p является не только отождествлением пространств, но и симплектоморфизмом по отношению к каноническим симплектическим структурам на данных пространствах. Более того, мы покажем, что это отображение совпадает с композицией канонического отождествления пространств $\mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)})//GL_r$ и $\mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)}/GL_r)$, описанного в лемме 1, и отождествления p пространства $\mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)}/GL_r)$ и $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$. Важность данного утверждения заключается в том, что таким образом удастся упростить задачу описания симплектической формы на $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ до описания симплектической формы на кокасательном пространстве группы Ли (в нашем случае это GL_r). Данное нетривиальное утверждение в нашем подходе является определением симплектической структуры в конструкции Бовиля [22], мы же выводим ее из канонической симплектической формы на кокасательном расслоении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. *Отображение p является симплектоморфизмом, т.е.*

$$p^*(\omega) = \omega_2,$$

где ω – каноническая симплектическая форма на $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$.

Данное утверждение предоставляет явный способ вычисления значения канонической 1-формы на заданном касательном векторе в терминах переменных Λ_i, Φ_i .

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть α – каноническая 1-форма на $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$. Ее значение на векторе $\xi \in \mathcal{T}_{(\Lambda, \Phi)}(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$ равно

$$-\sum_{i=2}^N \text{Tr}(\Phi_i \Lambda_i^{-1} \tilde{\xi}_i),$$

где точка Λ в пространстве модулей векторных расслоений задается расслоением M_Λ , соответствующим набору матриц Λ_i ; ковектор Φ соответствует $\Phi(z)$, определенному по формуле (20). Матрицы $\tilde{\xi}_i$, рассматриваемые как касательные векторы к $(GL_r^{\times(N-1)})$ в точке Λ_i , $i = 2, \dots, N$, определяются условием, что проекция такого вектора на пространство модулей расслоений при дифференциале отображения $\Lambda_i \mapsto M_\Lambda$ совпадает с $\pi_*(\xi)$, где π – каноническая проекция с кокасательного расслоения к пространству модулей на само пространство модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 15. Наиболее простым способом доказательства данного утверждения является вычисление поднятия ω с $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ на пространство $\mu^{-1}(0) \subset \mathcal{T}^*(GL_r^{\times(N-1)})$. Обозначим через π_1 отображение $\pi_1: \mu^{-1}(0) \rightarrow \mathcal{T}^*\mathcal{M}$, которое является композицией отображения факторизации и отождествления p . Кроме

того, 1-форма λ является инвариантной, поэтому можно рассматривать ее поднятие. По определению значение “поднятой” 1-формы на векторе $\xi \in \mathcal{T}(\mu^{-1}(0))$ равно $\pi_1^*(\lambda)(\xi) = \lambda(d\pi_1\xi)$. Рассмотрим векторное поле ξ и соответствующую деформацию $\delta_\xi \Lambda_i = i(\xi) d\Lambda_i$. Далее найдем χ_i , удовлетворяющее уравнению

$$\delta_\xi \Lambda_i = \chi_1 \Lambda_i - \Lambda_i \chi_i, \quad (23)$$

и выберем некоторое $\chi(z)$ такое, что $\chi(P_i) = \chi_i$, $i = 1, \dots, N$. Уравнение (23) не полностью задает $\chi(z)$, для любого χ_1 можно найти χ_i . Фактически выбор χ_1 не является существенным: полиномы $\chi(z)$, построенные по разным χ_1 , лежат в одном классе в $H^1(\text{End}(E))$ (напомним, что, описывая $H^1(\text{End}(E))$ в утверждении 10, мы факторизовали пространство матрично-значных полиномов $\chi(z)$ по постоянным матрицам). Данное отображение действительно является дифференциалом π_1 , так как касательный вектор $\chi(z)$ определяет ту же деформацию Λ_i вследствие утверждения 11, как и выражение (23). Теперь

$$\pi_1^*(\lambda)(\xi) = \lambda(d\pi_1\xi) = \langle \Phi(z), \chi(z) \rangle,$$

где $\Phi(z)$ строится по $\{\Phi_i\}$ в соответствии с отождествлением p . Вычисляя спаривание Серра, имеем

$$\langle \Phi(z), \chi(z) \rangle = - \sum_{i=2}^N \text{Tr}(\Phi_i \chi(P_i)) + \text{Tr} \left(\sum_{i=2}^N \Lambda_i \Phi_i \Lambda_i^{-1} \chi(P_1) \right).$$

С другой стороны, каноническая 1-форма на $\mu^{-1}(0)$ может быть вычислена на векторе ξ следующим образом:

$$\lambda_1(\xi) = \sum_{i=2}^N \text{Tr}(\Phi_i \Lambda_i^{-1} \delta_\xi \Lambda_i) = \sum_{i=2}^N \text{Tr}(\Phi_i \Lambda_i^{-1} (\chi_1 \Lambda_i - \Lambda_i \chi_i)) = \langle \Phi(z), \chi(z) \rangle.$$

2.7.2. Кривые с несколькими особенностями типа каспа. По аналогии с п. 2.5 рассмотрим кривую Σ^{proj} , которая представляется в виде кривой $\mathbb{CP}^1$ с N каспами. Аффинная часть этой кривой задается как $\text{Spec}\{f(z) \in \mathbb{C}[z]: \forall i = 1, \dots, N \ f'(P_i) = 0\}$, расслоение M_Λ отвечает модулю над аффинной картой $\{s(z) \in \mathbb{C}^r[z]: \forall i = 1, \dots, N \ s'(P_i) = \Lambda_i s(P_i)\}$. В п. 2.5 рассматривался случай одного каспа, тем не менее все основные построения обобщаются непосредственно на случай с несколькими особенностями подобного типа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. *Сечения $H^0(\text{End}(M_\Lambda) \otimes \mathcal{K})$ представляются в виде*

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\Phi_i}{(z - P_i)^2} + \frac{[\Lambda_i, \Phi_i]}{z - P_i} \right), \quad (24)$$

где матрицы Φ_i удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^N [\Lambda_i, \Phi_i] = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. *Каноническая 1-форма на расслоении, кокасательном к пространству модулей голоморфных векторных расслоений на кривой Σ^{proj} , в координатах Λ_i , Φ_i представляется выражением*

$$\sum_{i=1}^N \text{Tr}(\Phi_i d\Lambda_i). \quad (25)$$

Данная формулировка нуждается в некотором уточнении, связанном с тем, что Λ_i , Φ_i определены с точностью до сопряжения. Но мы опустим эти детали, сославшись на полностью аналогичную ситуацию в случае кривых с двойными точками, разобрannую в п. 2.7.1.

2.8. Система Хитчина. Суммируем результаты, полученные выше.

ТЕОРЕМА 2. *Система Хитчина на кривой Σ^{proj} , которая есть результат склейки N различных точек P_i на $\mathbb{CP}^1$, является системой с фазовым пространством, полученным гамильтоновой редукцией из пространства наборов матриц Λ_i , Φ_i , $i = 2, \dots, N$, где Λ_i обратимы, с симплектической формой*

$$\sum_{i=2}^N -\text{Tr}[d(\Phi_i \Lambda_i^{-1}) d\Lambda_i].$$

Редукция производится по действию GL_r сопряжением на матрицах Λ_i , Φ_i . Оператор Лакса задается выражением (20).

Гамильтонианы получаются как коэффициенты разложения $\text{Tr}(\Phi(z)^k)$ по базису голоморфных сечений k -й степени канонического класса. Мы доказываем их коммутативность для значительно более общего случая в нашей следующей работе [20].

Аналогично система Хитчина на кривой с несколькими особенностями типа каспа описывается следующим образом:

ТЕОРЕМА 3. *Система Хитчина на кривой Σ^{proj} , которая является $\mathbb{CP}^1$ с N каспами в различных точках P_i , получается в результате гамильтоновой редукции с пространства наборов матриц Λ_i , Φ_i , $i = 1, \dots, N$, с симплектической формой*

$$\sum_{i=1}^N -\text{Tr}(d\Phi_i d\Lambda_i).$$

Редукция производится по действию GL_r сопряжением на матрицах Λ_i , Φ_i . Оператор Лакса задается формулой (24).

3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ И РАЦИОНАЛЬНАЯ СИСТЕМЫ КАЛОДЖЕРО–МОЗЕРА

3.1. Двойная точка. Как было показано в п. 2.2, дуализирующий пучок в данном случае имеет единственное глобальное сечение $dz(1/(z-z_1)-1/(z-z_2))$. Рассмотрим

пространство модулей $\mathcal{M}$ голоморфных расслоений V ранга n на Σ_{node} с фиксированной тривиализацией в точке $p, z = z_3$. Это значит, что

$$\mathcal{T}_V \mathcal{M} = H^1(\Sigma, \text{End}(V) \otimes \mathcal{O}(-p)).$$

Ограничимся главной клеткой этого пространства, которая соответствует классам эквивалентности матриц Λ с различными собственными значениями. Кокасательное пространство изоморфно пространству голоморфных сечений $\text{End}^*(V) \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{O}(p)$. Такие сечения – это матрично-значные функции от z вида

$$\Phi(z) = \left(\frac{\Phi_1}{z - z_1} - \frac{\Phi_2}{z - z_2} + \frac{\Phi_3}{z - z_3} \right) dz$$

такие, что

$$\Phi_1 \Lambda = \Lambda \Phi_2, \quad \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0. \quad (26)$$

Такие функции параметризуются внедиагональными элементами $(\Phi_3)_{ij} = f_{ij}$, $i \neq j$, собственными значениями e^{2x_i} матрицы Λ (все вычисления проводятся в базисе, собственном для этой матрицы) и диагональными элементами матрицы $(\Phi_1)_{ii} = p_i$. Все остальные величины могут быть выражены в терминах этих переменных.

Далее рассмотрим симплектическую структуру. Пространство модулей параметризуется матрицами Λ и U , которая фиксирует тривиализацию в точке p . Переменные Φ_i определяют кокасательный вектор.

ЛЕММА 2. *Каноническая симплектическая форма на кокасательном расслоении $\mathcal{T}^* \mathcal{M}$ представляется в виде*

$$\omega = \text{Tr}(d(\Lambda^{-1} \Phi_1) \wedge d\Lambda) + \text{Tr}(d(U^{-1} \Phi_3) \wedge dU). \quad (27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Здесь, как и в п. 2.7, подразумевается гамильтонова редукция пространства матриц по сопряжению, т.е. более точная формулировка леммы 2 заключается в том, что каноническая симплектическая форма на $\mathcal{T}^* \mathcal{M}$ получается в результате гамильтоновой редукции по сопряжению из формы (27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Каноническая симплектическая форма ω на кокасательном расслоении $\mathcal{T}^* X$ к многообразию X определяется следующим образом: точка кокасательного расслоения представляется парой (x, p) , где $x \in X$ и $p: \mathcal{T}_x X \rightarrow \mathbb{C}$. Определим сначала каноническую 1-форму λ на кокасательном расслоении по формуле

$$\lambda(x, p)(\xi) = p(\pi_* \xi), \quad (28)$$

где $\xi \in \mathcal{T}(\mathcal{T}^* X)$, π – проекция $\mathcal{T}^* X \rightarrow X$ и π_* – ее дифференциал. На кокасательном расслоении к $\mathbb{C}^N$ с координатами $x_1, \dots, x_N$ и с соответствующими координатами $p_1, \dots, p_N$ на кокасательном пространстве данная форма записывается в стандартном виде $\lambda = \sum p_i dx_i$. Каноническая симплектическая форма на кокасательном расслоении – это $\omega = d\lambda$. Достаточно показать, что форма $\lambda' = \text{Tr}(\Lambda^{-1} \Phi_1 d\Lambda) + \text{Tr}(U^{-1} \Phi_3 dU)$ совпадает с канонической 1-формой.

Теперь опишем явно деформацию расслоения V , определяемую элементом $\chi \in H^1(\Sigma, \text{End}(V) \otimes \mathcal{O}(-p))$. Конечная форма этого элемента действует на данных, описывающих расслоение, следующим образом:

$$\Lambda \mapsto (1 + \epsilon\chi(z_1))\Lambda(1 - \epsilon\chi(z_2)), \quad U \mapsto (1 + \epsilon\chi(z_3))U.$$

Инфинитезимальная форма данной деформации представляется в виде $\delta_\chi \Lambda = \chi(z_1)\Lambda - \Lambda\chi(z_2)$, $\delta_\chi U = \chi(z_3)U$ и определяет векторные поля ξ_χ на пространстве модулей. Эти поля могут быть подняты до векторных полей на тотальном пространстве кокасательного расслоения. Назовем это поднятие $l: \mathcal{TM} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{T}^*\mathcal{M})$, для него, очевидно, имеем $\pi_* \circ l = \text{id}$. Другой выделенный класс векторных полей на тотальном пространстве кокасательного расслоения представляется вертикальными векторными полями ξ_{vert} , которые действуют только на координаты Φ , иными словами, $\xi_{\text{vert}} \in \ker \pi_*$. Необходимо проверить, что $\lambda'_{\text{vert}} = 0$ и $\lambda'(l(\xi_\chi)) = \langle \Phi, \chi \rangle$. Первое утверждение является тривиальным, так как $d\Lambda(\xi_{\text{vert}}) = 0$ и $dU(\xi_{\text{vert}}) = 0$. Рассмотрим подстановку поднятого векторного поля в формулу:

$$\begin{aligned} \lambda'(l(\xi_\chi)) &= \text{Tr}(\Lambda^{-1}\Phi_1\delta_\chi\Lambda) + \text{Tr}(U^{-1}\Phi_3\delta_\chi U) = \\ &= \text{Tr}(\Lambda^{-1}\Phi_1(\chi(z_1)\Lambda - \Lambda\chi(z_2))) + \text{Tr}(U^{-1}\Phi_3\chi(z_3)U) = \\ &= \text{Tr}(\Phi_1\chi(z_1) - \Phi_2\chi(z_2) + \Phi_3\chi(z_3)) = \langle \Phi, \chi \rangle, \end{aligned}$$

где использовано спаривание Серра (9) и соотношение $\Phi_1\Lambda = \Lambda\Phi_2$. Лемма доказана.

Для получения системы Калоджеро–Мозера необходимо провести дополнительную гамильтонову редукцию. Форма (27) инвариантна относительно действия группы GL_n : $U \mapsto Ug$. Отображение момента данного действия определяется формулой $g^{-1}Ug$. Зафиксируем общий диагональный уровень момента и профакторизуем по n -мерному стабилизатору. Данная процедура сокращает количество степеней свободы на $n \times n$, соответствующих вспомогательной переменной U . Редуцированное многообразие изоморфно прямому произведению пространства $\mathbb{C}^{2n}$, снабженного канонической симплектической структурой, и коприсоединенной орбиты GL_n ранга n в общем случае со скобкой Кириллова. На двойственном языке, в терминах скобки Пуассона, структура может быть представлена в виде

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{f_{ij}, f_{kl}\} = \delta_{jk}f_{il} - \delta_{il}f_{kj}. \quad (29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Данное представление для симплектической формы может быть проинтерпретировано в терминах нередуцированного пространства связностей. Эвристически постоянная связность A должна быть пропорциональна $\ln \Lambda$. Таким образом, форма (1) определяет

$$\oint \text{Tr}((\delta\Phi \wedge \delta(\ln \Lambda)) dz)$$

и совпадает с суммой вычетов с соответствующими знаками, т.е.

$$\sum_{i=1}^3 \text{Tr}(d\Phi_i \wedge \Lambda^{-1} d\Lambda).$$

Перейдем к построению интегралов. Следуя общей схеме, рассмотрим выражения $\text{Tr}(\Phi^k(z))$, а точнее ненулевые отрицательные коэффициенты разложения Лорана этих выражений в полюсах. Они находятся в инволюции по построению и вследствие того факта, что симплектическая форма получена процедурой гамильтоновой редукции из канонической симплектической формы на кокасательном расслоении. $\text{Tr}(\Phi^2(z))$ – рациональная функция по z , ее коэффициенты выражаются линейно через $\text{Tr}(\Phi_1^2)$ и $\text{Tr}(\Phi_1\Phi_2)$. Прямое вычисление показывает:

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{Tr}(\Phi_1^2) = \sum_{i=1}^n p_i^2 - 4 \sum_{i \neq j} \frac{f_{ij}f_{ji}}{\text{sh}^2(x_i - x_j)}, \\ H_2 &= \text{Tr}(\Phi_1\Phi_2) = \sum_{i=1}^n p_i^2 - \sum_{i \neq j} \frac{f_{ij}f_{ji}}{(e^{2x_j - 2x_i} - 1)^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Разность $H_1 - H_2$ совпадает со вторым элементом Казимира для Φ_3 , т.е. $\sum_{i \neq j} f_{ij}f_{ji}$. Заметим, что H_1 – гамильтониан тригонометрической системы Калоджеро–Мозера со спином.

3.2. Касп. Как и в случае двойной точки, рассмотрим главную клетку пространства модулей расслоений, параметризуемых матрицами Λ . Возьмем пространство модулей расслоений с фиксированной тривиализацией U в точке P , $z = z_2$. Сечение $\text{End}^*(V) \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{O}(p)$ в данном случае определяется выражением

$$\Phi(z) = \left(\frac{\Phi_1}{(z - z_1)^2} + \frac{\Phi_2}{z - z_1} + \frac{\Phi_3}{z - z_2} \right) dz$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям

$$\Phi_2 = [\Lambda, \Phi_1], \quad \Phi_3 = -\Phi_2. \quad (31)$$

Рассматривается собственный базис для матрицы Λ . Координатами на фазовом пространстве являются: x_i – собственные значения Λ , p_i – диагональные элементы матрицы Φ_1 , внедиагональные элементы матрицы Φ_2 , обозначим их f_{ij} , $i \neq j$, и матричные элементы U . Решая уравнения (31), получим

$$\Phi_{1ij} = \frac{f_{ij}}{x_i - x_j}.$$

Инфинитезимальное действие элемента $\chi \in H^1(\Sigma, \text{End}(V) \otimes \mathcal{O}(-p))$ имеет вид

$$\delta_\chi \Lambda = [\chi(z_1), \Lambda] + \chi'(z_1), \quad \delta_\chi U = U\chi(z_2).$$

Спаривание Серра (9) в данном случае приобретает форму

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \chi \rangle &= \text{Tr}(\Phi_1\chi'(z_1) + \Phi_2\chi(z_1) + \Phi_3\chi(z_2)) = \\ &= \text{Tr}(\Phi_1(\chi'(z_1) + [\chi(z_1), \Lambda]) - \Phi_2\chi(z_2)), \end{aligned}$$

где мы использовали (31). Подставляя точное выражение для действия и используя аргументы из предыдущего раздела, получим следующую лемму.

ЛЕММА 3. *Каноническая симплектическая форма на кокасательном расслоении $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ может быть представлена в виде*

$$\omega = \text{Tr}(d\Phi_1 \wedge d\Lambda) + \text{Tr}(d(U^{-1}\Phi_2) \wedge dU). \quad (32)$$

Более точная формулировка леммы 3 заключается в том, что каноническая симплектическая форма на $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ получается в результате гамильтоновой редукции по сопряжению из формы (32).

Как и в п. 3.1, проведем гамильтонову редукцию и получим симплектическое многообразие, соответствующее скобкам (29). Коэффициенты разложения $\text{Tr}(\Phi^2(z))$ в полюсах выражаются линейно через выражения $\text{Tr}(\Phi_1^2)$, $\text{Tr}(\Phi_2^2)$, $\text{Tr}(\Phi_1\Phi_2)$, первое из которых совпадает с гамильтонианом рациональной системы Калоджеро–Мозера со спином

$$\begin{aligned} H_3 = \text{Tr}(\Phi_1^2) &= \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{f_{ij}f_{ji}}{(x_i - x_j)^2}, \\ H_4 = \text{Tr}(\Phi_2^2) &= \sum_{i \neq j} f_{ij}f_{ji}. \end{aligned} \quad (33)$$

Заметим, что H_4 равен второму элементу Казимира для матрицы Φ_2 и $\text{Tr}(\Phi_1\Phi_2) = 0$.

4. КРИВЫЕ С ДВУМЯ КАСПАМИ

Для гладких кривых рода 2 пространство модулей SL_2 -расслоений отождествляется с $\mathbb{CP}^3$ [15]. В работах [23], [24] гамильтонианы Хитчина были явно представлены как функции на $\mathcal{T}^*\mathbb{CP}^3$. Здесь мы рассматриваем особые кривые рода 2 (пример рациональной кривой с двумя каспами). Ниже описывается аналог параметризации Нарасимхана–Раманана для SL_2 -расслоений на такой кривой и предлагаются явные выражения для гамильтонианов Хитчина.

4.1. Конструкция. Рассмотрим пространство модулей голоморфных SL_2 -расслоений на кривой Σ_2 , определенной уравнением

$$y^2 = (x - x_1)^3(x - x_2)^3,$$

алгебраического рода 2 с двумя особенностями, которая может быть получена стягиванием всех циклов римановой поверхности рода 2. На нормализации, представляющей собой рациональную кривую $\mathbb{CP}^1$, получаемую раздутием $z = y/(x - x_1)(x - x_2)$, обратный образ структурного пучка представляется подпучком

$$\mathcal{O}_{\Sigma_2} = \{f \in \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^1} : \partial_z f|_{z_1} = \partial_z f|_{z_2} = 0\}. \quad (34)$$

Голоморфное расслоение E на Σ_2 определяется парой матриц (Λ_1, Λ_2) с нулевым следом с точностью до сопряжения, соответствующий пучок сечений на аффинной карте определяется как

$$\Gamma_U(E) = \{S \in \mathcal{O}_U(\mathbb{CP}^1) \otimes \mathbb{C}^2 : \partial_z S = \Lambda_1 S|_{z_1}; \partial_z S = \Lambda_2 S|_{z_2}\}. \quad (35)$$

Для описания кокасательного расслоения $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ используется соответствие Кодаиры–Спенсера.

В соответствии с утверждением 16 сечения $\text{End}(V) \otimes \mathcal{K}$ в данном случае представляются матрично-значной функцией

$$\Phi(z) = \frac{\Phi_1}{(z - z_1)^2} + \frac{\Phi_3}{z - z_1} + \frac{\Phi_2}{(z - z_2)^2} + \frac{\Phi_4}{z - z_2},$$

удовлетворяющей условиям

$$\Phi_3 = [\Lambda_1, \Phi_1], \quad \Phi_4 = [\Lambda_2, \Phi_2], \quad \Phi_3 + \Phi_4 = 0. \quad (36)$$

В соответствии с утверждением 17 получим следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Каноническая симплектическая форма на кокасательном расслоении к пространству SL_2 -расслоений на Σ_2 представляется в виде*

$$\omega = \text{Tr}(d\Phi_1 \wedge d\Lambda_1 + d\Phi_2 \wedge d\Lambda_2). \quad (37)$$

Более точная формулировка леммы 4 заключается в том, что каноническая симплектическая форма на $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ получается в результате гамильтоновой редукции по сопряжению из формы (37).

Открытое множество в пространстве модулей голоморфных SL_2 -расслоений совпадает с пространством классов эквивалентности пар (2×2) -матриц Λ_1, Λ_2 с точностью до общего сопряжения. Естественными координатами на этом пространстве являются инвариантные функции

$$t_1 = \text{Tr}(\Lambda_1^2), \quad t_2 = \text{Tr}(\Lambda_1 \Lambda_2), \quad t_3 = \text{Tr}(\Lambda_2^2).$$

Следующее вспомогательное рассмотрение будет использоваться для построения двойственных координат. Вследствие условий (36) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= -\text{Tr}([\Lambda_2, \Phi_2] \Lambda_2) = \text{Tr}([\Lambda_1, \Phi_1] \Lambda_2) = \text{Tr}([\Lambda_2, \Lambda_1] \Phi_1), \\ 0 &= -\text{Tr}([\Lambda_1, \Phi_1] \Lambda_1) = \text{Tr}([\Lambda_2, \Phi_2] \Lambda_1) = \text{Tr}([\Lambda_1, \Lambda_2] \Phi_2). \end{aligned}$$

Используя невырожденность формы Киллинга на sl_2 , мы можем заключить, что для общих Λ_1, Λ_2 матрицы Φ_1, Φ_2 представляются в виде линейных комбинаций:

$$\Phi_i = p_{i1} \Lambda_1 + p_{i2} \Lambda_2 \quad i = 1, 2. \quad (38)$$

Заметим также, что $p_{12} = p_{21}$, так как

$$p_{12}[\Lambda_1, \Lambda_2] = [\Lambda_1, \Phi_1] = -[\Lambda_2, \Phi_2] = -p_{21}[\Lambda_2, \Lambda_1].$$

Теперь введем координаты

$$p_1 = \frac{p_{11}}{2}, \quad p_2 = p_{12} = p_{21}, \quad p_3 = \frac{p_{22}}{2}.$$

В данных координатах условие (38) преобразуется к виду

$$\Phi_1 = 2p_1 \Lambda_1 + p_2 \Lambda_2, \quad \Phi_2 = p_2 \Lambda_1 + 2p_3 \Lambda_2. \quad (39)$$

ЛЕММА 5. *Переменные, сопряженные к t_1, t_2, t_3 по отношению к симплектической форме (37), совпадают с p_1, p_2, p_3 , таким образом*

$$\omega = \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dt_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравним соответствующие 1-формы $\lambda = \text{Tr}(\Phi_1 d\Lambda_1 + \Phi_2 d\Lambda_2)$ и $\lambda' = \sum_{i=1}^3 p_i dt_i$. Инфинитезимальная деформация определяется как

$$\delta_\chi \Lambda_1 = [\chi(z_1), \Lambda_1] + \chi'(z_1), \quad \delta_\chi \Lambda_2 = [\chi(z_2), \Lambda_2] + \chi'(z_2).$$

Необходимо проверить, что $\lambda(l(\xi_\chi)) = \lambda'(l(\xi_\chi))$, где l – некоторое поднятие векторного поля на $\mathcal{M}$ до векторного поля на $\mathcal{T}^*\mathcal{M}$ такое, что $\pi_* l = \text{id}$:

$$\begin{aligned} \lambda(l(\xi_\chi)) &= \text{Tr}(\Phi_1 [\chi(z_1), \Lambda_1] + \phi_1 \chi'(z_1) + \phi_2 [\chi(z_2), \Lambda_2] + \Phi_2 \chi'(z_2)) = \\ &= \text{Tr}([\Lambda_1, \phi_1](\chi(z_1) - \chi(z_2)) + \phi_1 \chi'(z_1) + \phi_2 \chi'(z_2)), \end{aligned}$$

где мы использовали условие (36). Вычислим $\lambda'(l(\xi_\chi))$:

$$\begin{aligned} \lambda'(l(\xi_\chi)) &= \text{Tr}\left(2p_1 \Lambda_1 ([\chi(z_1), \Lambda_1] + \chi'(z_1)) + p_2 \Lambda_1 ([\chi(z_2), \Lambda_2] + \right. \\ &\quad \left. + \chi'(z_2)) + p_2 \Lambda_2 ([\chi(z_1), \Lambda_1] + \chi'(z_1)) + 2p_3 \Lambda_2 ([\chi(z_2), \Lambda_2] + \chi'(z_2))\right) = \\ &= \text{Tr}((2p_1 \Lambda_1 + p_2 \Lambda_2) \chi'(z_1) + (2p_3 \Lambda_2 + p_2 \Lambda_1) \chi'(z_2) + p_2 (\chi(z_1) - \chi(z_2)) [\Lambda_1, \Lambda_2]). \end{aligned}$$

Вследствие соотношений (39) получим $[\Lambda_1, \Phi_1] = p_2 [\Lambda_1, \Lambda_2]$, что эквивалентно $\lambda(l(\xi_\chi)) = \lambda'(l(\xi_\chi))$. Совпадение 1-форм на вертикальных полях очевидно. Лемма доказана.

4.2. Гамильтонианы Хитчина. Как обычно, получим гамильтонианы из отображения

$$\text{End}(V) \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{\Delta^{\otimes m}} \text{End}(V)^{\otimes m} \otimes \mathcal{K}^{\otimes m} \rightarrow \text{End}(V) \otimes \mathcal{K}^{\otimes m} \xrightarrow{\text{Tr} \otimes \text{id}} \mathcal{K}^{\otimes m},$$

где первое отображение соответствует диагональному вложению, следующее определяется умножением в $\text{End}(V)$. Композиция этих двух отображений индуцирует отображение в когомологиях

$$i: H^0(\text{End}(E) \otimes \mathcal{K}) \rightarrow H^0(\mathcal{K}^{\otimes m}). \quad (40)$$

Любой базис в пространстве глобальных сечений $\mathcal{K}^{\otimes m}$ определяет набор функций на нашем фазовом пространстве.

Определим квадратичные гамильтонианы, т.е. гамильтонианы для $m = 2$. Следствием теоремы Римана–Роха являются равенства $H^0(\mathcal{K}^2) = 3$ и $H^0(\mathcal{K}) = 2$. Рассмотрим следующий базис в пространстве глобальных сечений $\mathcal{K}$:

$$s_1 = \frac{dz}{(z - z_1)^2}, \quad s_2 = \frac{dz}{(z - z_2)^2}.$$

Тензорные произведения

$$s_1 \otimes s_1, \quad s_1 \otimes s_2 \quad \text{и} \quad s_2 \otimes s_2 \quad (41)$$

образуют базис в пространстве глобальных сечений $\mathcal{K}^2$. Рассмотрим теперь поле Хиггса

$$\Phi(z) = \left\{ \frac{\Phi_1}{(z - z_1)^2} + \frac{\Phi_2}{(z - z_2)^2} + \frac{(z_1 - z_2)[\Lambda_1, \Phi_1]}{(z - z_1)(z - z_2)} \right\} dz.$$

Найдем его образ при отображении (40):

$$\text{Tr}(\Phi^2(z)) = \left\{ \frac{\text{Tr}(\Phi_1^2)}{(z - z_1)^4} + \frac{\text{Tr}(\Phi_2^2)}{(z - z_2)^4} + \frac{2 \text{Tr}(\Phi_1 \Phi_2) + (z_1 - z_2)^2 \text{Tr}[\Lambda_1, \Phi_1]^2}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} \right\} dz \otimes dz.$$

Разлагая $\text{Tr}(\Phi^2(z))$ по базису (41), получим коэффициенты

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{Tr}(\Phi_1^2) = 4p_1^2 t_1 + p_2^2 t_3 + 4p_1 p_2 t_2, \\ H_2 &= 2 \text{Tr}(\Phi_1 \Phi_2) + (z_1 - z_2)^2 \text{Tr}[\Lambda_1, \Phi_1]^2 = \\ &= 4p_1 p_2 t_1 + 4p_2 p_3 t_3 + (8p_1 p_3 + 2p_2^2) t_2 - 2(z_1 - z_2)^2 p_2^2 (t_1 t_3 - t_2^2), \\ H_3 &= \text{Tr}(\Phi_2^2) = 4p_3^2 t_3 + p_2^2 t_1 + 4p_2 p_3 t_2, \end{aligned}$$

которые являются функциями на фазовом пространстве системы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. *Функции H_i находятся в инволюции, т.е. имеет место интегрируемость.*

В данном случае доказательство можно получить прямым вычислением скобок Пуассона или сославшись на общий случай, разобранный в работе [20].

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Получено одномерное семейство априори не эквивалентных интегрируемых систем на $\mathcal{T}^* \mathbb{C}^3$. Также заметим, что отождествление этих систем с моделью Неймана остается открытым вопросом.

4.3. Вырожденная параметризация Нарасимхана–Раманана. Напомним классическую конструкцию [15], [25], которая отождествляет пространство модулей стабильных SL_2 -расслоений на регулярной кривой Σ рода 2 с $\mathbb{C}P^3$:

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\Delta} |2\Theta| \cong \mathbb{C}P^3.$$

С расслоением E можно ассоциировать дивизор $D_E \subset \text{Pic}_1(\Sigma)$ такой, что для любого линейного расслоения $\mathcal{L} \in D_E$ размерность $H^0(E \otimes \mathcal{L})$ равна единице. В соответствии с [15], [25] дивизор D_E лежит в линейной системе $|2\Theta|$, и это соответствие является изоморфизмом. Дивизор D_E определяется уравнением

$$\sum_{i,j=1,2} p_{ij} \theta_{[\frac{1}{2}(i-1), \frac{1}{2}(j-1)]} = 0.$$

Коэффициенты p_{ij} задают проективные координаты на пространстве модулей.

Вырожденный случай допускает аналогичные рассуждения. Возьмем SL_2 -расслоение E на Σ_2 , заданное парой матриц Λ_1, Λ_2 , и линейное расслоение $\mathcal{L}$ степени $\deg = 1$, заданное парой комплексных чисел λ, μ . Их тензорное произведение $E' = E \otimes \mathcal{L}$ является голоморфным расслоением ранга $r = 2$ и степени $\deg = 2$. В особых точках это расслоение определяется парой матриц $\Lambda_1 + \lambda \mathbf{1}, \Lambda_2 + \mu \mathbf{1}$. Вычислим размерность $H^0(E \otimes \mathcal{L})$. Для описания глобальных сечений покроем кривую двумя картами: $U_1 = \Sigma_2 \setminus \infty$ и $U_2 = U_{\infty, \varepsilon}$ — маленькая окрестность бесконечности. Тот факт, что расслоение $\mathcal{L}$ имеет степень $\deg = 1$, означает, что функция переклейки для данного покрытия может быть выбрана в виде функции z , которая обратима в $U_1 \cap U_2$. Таким образом, глобальные сечения E' определяются линейными функциями S на U_1 такими, что $\partial_z S = \Lambda_1 S|_{z_1}, \partial_z S = \Lambda_2 S|_{z_2}$. Заметим, что такие функции могут быть продолжены в карту U_1 , так как они линейны и S/z регулярна в бесконечности.

Перепишем определяющее условие (35) с учетом явной линейной формы сечения S , т.е. $S(z) = S_0 + zS_1$:

$$\begin{aligned} S_1 &= (\Lambda_1 + \lambda \mathbf{1})(S_0 + z_1 S_1), \\ S_1 &= (\Lambda_2 + \mu \mathbf{1})(S_0 + z_2 S_1). \end{aligned}$$

Условие согласованности данной линейной системы задается уравнением

$$\det \begin{pmatrix} \Lambda_1 + \lambda \mathbf{1} & z_1(\Lambda_1 + \lambda \mathbf{1}) + \mathbf{1} \\ \Lambda_2 + \mu \mathbf{1} & z_2(\Lambda_2 + \mu \mathbf{1}) + \mathbf{1} \end{pmatrix} = 0.$$

Прямым вычислением получаем следующее выражение для определителя:

$$\begin{aligned} \det(\lambda, \mu) &= \lambda\mu(\lambda(z_1 - z_2) - 2)(\mu(z_1 - z_2) + 2) + (\lambda + \mu)^2 + \\ &+ (\lambda^2 \det(\Lambda_2) + \mu^2 \det(\Lambda_1))(z_1 - z_2)^2 + 2(\lambda \det(\Lambda_2) - \mu \det(\Lambda_1))(z_1 - z_2) + \\ &+ \det(\Lambda_1) \det(\Lambda_2)(z_1 - z_2)^2 + \det(\Lambda_1) + \det(\Lambda_2) + \text{Tr}(\Lambda_1 \Lambda_2). \end{aligned}$$

Представим это выражение в переменных t_1, t_2, t_3 :

$$\begin{aligned} \det(\lambda, \mu) &= \frac{t_1 t_3}{4}(z_1 - z_2)^2 + t_2 - \frac{t_1}{2}(\mu(z_1 - z_2) - 1)^2 - \\ &- \frac{t_3}{2}(\lambda(z_1 - z_2) + 1)^2 + (\lambda\mu(z_1 - z_2) - \lambda + \mu)^2. \end{aligned}$$

Функции

$$1, \quad -\frac{(\mu(z_1 - z_2) - 1)^2}{2}, \quad -\frac{(\lambda(z_1 - z_2) + 1)^2}{2}, \quad (\lambda\mu(z_1 - z_2) - \lambda + \mu)^2$$

могут быть проинтерпретированы как базис θ -функций второго порядка для рассматриваемой особой кривой, а выражения

$$\tau_1 = t_1, \quad \tau_2 = t_2 + \frac{t_1 t_3}{4}(z_1 - z_2)^2, \quad \tau_3 = t_3$$

представляются аналогами аффинных параметров Нарасимхана–Раманана.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что инвариантное описание системы Хитчина на особых кривых является эффективным и предполагает явную параметризацию во всех рассмотренных случаях. Тем не менее задача описания нередуцированных координат остается достаточно сложной. Приведем некоторые основные, на наш взгляд, направления дальнейшего изучения системы Хитчина.

1. *Явная параметризация.* В неособом случае существует несколько способов параметризовать явно пространство модулей (полу)стабильных голоморфных расслоений. Использование координат Гекке–Тюрина является одним из наиболее универсальных подходов к этой проблеме. Представляется важным выразить полученные явные формулы в параметрах Гекке–Тюрина (см. [14] для случая неособой кривой). Для особых кривых это сделано в работе [26]. Непосредственно связанный вопрос состоит в построении разделенных переменных и объяснении их алгебраической природы.

2. *Общее описание системы Хитчина на особых кривых.* Рассмотренные примеры демонстрируют определенную схожесть анализа. Предметом работы [20] является универсальное построение системы Хитчина на более широком классе особых кривых.

3. *Компактификация пространства модулей голоморфных векторных расслоений на особых кривых.* Для кривых, рассмотренных в данной работе (кривые с каспами и двойными точками), расслоения описываются достаточно явно. Мы надеемся, что эта задача построения компактификации решается в общем случае. Модули линейных расслоений на особой кривой должны быть компактифицированы пучками без кручения, для случая векторных расслоений также наиболее вероятно, что компактификация требует включения некоторых “полустабильных пучков без кручения”.

4. *Пара Лакса.* Все интегрируемые системы представимы в форме Лакса. Представление не единственно и для большинства известных интегрируемых систем возникает естественно, например как вспомогательная линейная задача для нелинейных уравнений в частных производных. Важно получить представление Лакса для нашей системы и объяснить его инвариантное значение. (Представление Лакса системы Калоджеро–Мозера обсуждалось в рамках системы Хитчина в [27].)

5. *Классические решения.* Существует общий рецепт построения переменных действие–угол для системы Хитчина, связанный с динамикой на якобиане спектральной кривой. Другой способ решения классической задачи заключается в использовании метода проецирования, который может быть крайне эффективным для нашего описания. Представляется интересным сравнить данные методы и решить явно уравнения движения.

6. *Связь с иерархиями изомонодромных деформаций и уравнением Книжника–Замолодчикова–Бернара.* Известно (см., например, [8]), что вариации комплексной структуры на кривой превращают систему Хитчина в иерархию изомонодромных деформаций, а квантовую систему Хитчина – в уравнение Книжника–Замолодчикова–Бернара. Явное описание модулей кривых гипотетически позволяет явно выписывать данные уравнения в вырожденном случае.

7. *Квантование.* Следующей важной задачей является явное описание квантовых коммутирующих гамильтонианов для систем, рассмотренных в этой работе. Полная задача квантования системы Хитчина предполагает нахождение волновых функций, спектра, статистической суммы, корреляторов и исследование так называемой двойственности [28], [29]. Интересным также представляется изучение свойств волновых функций: их интегральных представлений, асимптотик, различных соотношений между ними. Общее квантование системы Хитчина восходит к работе [5] и обсуждалось позже в частных случаях в работах [6], [7], [14]. Еще один достаточно общий подход к квантованию аналога системы Хитчина, а именно системы Бовиля, в терминах разделенных переменных содержится в [30]. Квантование системы Хитчина и соответствующей системы Бовиля–Мукаи было предложено недавно в работах [31], [32]. Следующий метод квантования основан на понятии квантовой R -матрицы и ее обобщений [33] (отметим, что классические r -матрицы для системы Хитчина были найдены в [3], [34]). Было бы крайне интересно понять аналоги всех упомянутых конструкций для системы Хитчина на особых кривых.

8. *Разделение переменных и геометрическое соответствие Лэнглендса.* Одной из важнейших задач является явное построение разделенных переменных [35], [30] для интегрируемых систем, рассмотренных в данной работе, и установление их взаимосвязи с геометрическим соответствием Лэнглендса [5], [7], [36], [28]. Рассмотренные примеры представляются достаточно простыми, так что многие конструкции [5] могут быть явно построены, что, в свою очередь, может прояснить “чудо” данного соответствия. Следует также отметить, что кривые, рассмотренные в данной работе, использовались в [16] для построения геометрической теории полей классов для разветвленных накрытий, и можно надеяться, что такие особые кривые будут играть аналогичную роль в разветвленной версии геометрического соответствия Лэнглендса.

Благодарности. Авторы благодарны своим друзьям и коллегам Н. Амбург, Ю. Чернякову, В. Долгушеву, В. Кисунко, А. Котову, Д. Осипову, С. Шадрину, Г. Шарыгину, А. Жеглову, А. Зотову за полезные и стимулирующие обсуждения.

Работа была выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 01-01-00546, работа А. В. Червова также была поддержана грантом Президента России № 00-15-99296.

Список литературы

- [1] *N. Hitchin.* Duke Math. J. 1987. V. 54. № 1. P. 91–114.
- [2] *N. Nekrasov.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 180. P. 587–604; hep-th/9503157.
- [3] *B. Enriquez, V. Rubtsov.* Math. Res. Lett. 1996. V. 3. P. 343–357; alg-geom/9503010.
- [4] *E. Markman.* Compos. Math. 1994. V. 93. P. 225–290.
- [5] *A. Beilinson, V. Drinfeld.* Quantization of Hitchin Integrable System and Hecke Eigensheaves. <http://www.math.utexas.edu/~benzvi/Math.html>.
- [6] *B. Feigin, E. Frenkel, N. Reshetikhin.* Commun. Math. Phys. 1994. V. 166. P. 27–62; hep-th/9402022.
- [7] *E. Frenkel.* Affine algebras, Langlands duality, and Bethe ansatz. q-alg/9506003.
- [8] *A. Levin, M. Olshanetsky.* Painlevé–Calogero correspondence. alg-geom/9706010.
- [9] *И. М. Кривевер.* Нелинейные уравнения и эллиптические кривые. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1983. С. 79–136.

- [10] Д. В. Талалаев. ТМФ. 2002. Т. 130. № 3. С. 426–441.
- [11] P. Saksida. Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1999. V. 78. № 3. P. 701–720.
- [12] A. Gorsky, N. Nekrasov, V. Rubtsov. Commun. Math. Phys. 2001. V. 222. P. 299–318; hep-th/9901089.
- [13] R. Donagi, E. Witten. Nucl. Phys. B. 1996. V. 460. P. 299–334.
- [14] B. Enriquez, V. Rubtsov. Hecke–Tyurin parametrization of the Hitchin and KZB systems. math.AG/9911087.
- [15] M. S. Narasimhan, S. Ramanan. Ann. Math. 1969. V. 89. P. 19–51.
- [16] J.-P. Serre. Algebraic Groups and Class Fields. Graduate Texts in Mathematics. V. 117. New York: Springer, 1988.
- [17] R. Hartshorne. Algebraic Geometry. Graduate Texts in Mathematics. V. 52. New York: Springer, 1977.
- [18] J. Harris, I. Morrison. Moduli of Curves. Graduate Texts in Mathematics. V. 187. New York: Springer, 1998.
- [19] J.-P. Serre. Ann. Inst. Fourier. 1955/1956. V. 6. P. 1–42.
- [20] A. Chervov, D. Talalaev. Hitchin systems and singular curves II. Gluing subschemes. hep-th/0309059.
- [21] D. V. Osipov. Krichever correspondence for algebraic varieties. math.AG/0003188.
- [22] A. Beauville. Acta Math. 1990. V. 164. № 3/4. P. 211–235.
- [23] B. van Geemen, E. Previato. Duke Math. J. 1996. V. 85. P. 659–684.
- [24] K. Gawedzki, P. Tran-Ngoc-Bich. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 4695–4712.
- [25] M. S. Narasimhan, S. Ramanan. 2Θ linear systems on Abelian varieties. In: Vector Bundles on Algebraic Varieties. Proc. Bombay Conf. (1984). Eds. M. Atiyah et al. Oxford: Oxford Univ. Press, 1987. P. 415–427.
- [26] A. Chervov, A. Samohin, D. Talalaev. Hecke–Tyurin parametrization of vector bundles on singular curves. (to appear).
- [27] J. C. Hurtubise, E. Markman. Commun. Math. Phys. 2001. V. 223. P. 533–552; math.AG/9912161.
- [28] V. Fock, A. Gorsky, N. Nekrasov, V. Rubtsov. JHEP. 2000. V. 0007. P. 028; hep-th/9906235.
- [29] A. Gorsky, V. Rubtsov. Dualities in integrable systems: geometrical aspects. hep-th/0103004.
- [30] O. Babelon, M. Talon. Riemann surfaces, separation of variables and classical and quantum integrability. hep-th/0209071.
- [31] B. Enriquez, V. Rubtsov. Commuting families in skew fields and quantization of Beauville's fibration. math.AG/0112276.
- [32] B. Enriquez, V. Rubtsov. Quantizations of Hitchin and Beauville–Mukai integrable systems. math.AG/0209294.
- [33] J. Avan, O. Babelon, E. Billey. Commun. Math. Phys. 1996. V. 178. P. 281–299.
- [34] V. A. Dolgushev. Commun. Math. Phys. 2003. V. 238. P. 131–147; math.AG/0209145.
- [35] E. Sklyanin. Progr. Theor. Phys. Suppl. 1995. V. 185. P. 35–60.
- [36] B. Enriquez, B. Feigin, V. Rubtsov. Separation of variables for Gaudin–Calogero systems. q-alg/9605030.

Поступила в редакцию 2.X.2003 г.