Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Р. Лебедев, С. З. Пакуляк, С. М. Хорошкин, Алгебра Замолодчикова–Фаддеева для дубля янгиана на уровне 1, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 1, 25–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf950>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:28:09

Д. Р. Лебедев*, С. З. Пакуляк†, С. М. Хорошкин*

АЛГЕБРА ЗАМОЛОДЧИКОВА–ФАДДЕЕВА ДЛЯ ДУБЛЯ ЯНГИАНА НА УРОВНЕ 1¹⁾

Изучена теория представлений центрально-расширенного дубля янгиана. Построены сплетающие операторы для бесконечномерных представлений $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$, являющиеся деформированными аналогами представлений старшего веса для аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ на уровне 1. Получены бозонизованные выражения для сплетающих операторов, и проверено, что они образуют алгебру, изоморфную алгебре Замолдчикова–Фаддеева для $SU(2)$ -инвариантной модели Тирринга. С использованием формул Мики из сплетающих операторов построены L -операторы, которые, как показано, совпадают с L -операторами, построенными из универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы. Матричные элементы произведений сплетающих операторов вычислены явно и удовлетворяют квантовому (деформированному) уравнению Книжника–Замолдчикова, ассоциированному с универсальной $\mathcal{R}$ -матрицей для $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ был построен Дринфельдом в работе [1]. Как алгебра Хопфа эта алгебра является деформацией универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}[u])$ $\mathfrak{g}$ -значных полиномиальных токов, где $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. В работах [2, 3, 4] было показано, что в физических приложениях необходим дубль янгиана. Дубль янгиана был явно описан в рамках конструкции квантового дубля [5] в работе [6]. После добавления к янгиану оператора дифференцирования та же конструкция квантового дубля дает центральное расширение дубля янгиана [7]. Получаемая алгебра имеет более богатую теорию представлений, чем просто янгианный дубль. К примеру, могут быть построены бесконечномерные представления, являющиеся деформированными аналогами представлений старшего веса для аффинной алгебры. Этот тип представлений оказался важен для теоретико-групповой интерпретации конформных теорий поля, ассоциированных с аффинными алгебрами Ли, и для описания структуры пространства состояний в квантовых интегрируемых моделях, ассоциированных с деформациями универсальных обертывающих

¹⁾Статья написана по заказу Редколлегии.

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Б.Черемушкинская 25, 117259 Москва, lebedev@vitep1.itep.ru; khor@heron.itep.ru

†Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Московская обл., rakuliak@thsun1.jinr.dubna.su

аффинных алгебр. В работах [8, 9] и затем в книге [10] теория бесконечномерных представлений $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ была использована для полного решения квантовых интегрируемых спиновых цепочек. Полное решение квантовой модели означает возможность получения явного аналитического интегрального представления для произвольного формфактора любого локального оператора в этой модели. Целью настоящей работы является развитие теории бесконечномерных представлений центрально-расширенного дубля янгиана $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ в применении к квантовым интегрируемым моделям теории поля [11].

Представление свободными полями для массивных интегрируемых теорий поля было развито в работе Лукьянова [12]. Отправной точкой этого подхода являлась алгебра Замолотчикова–Фаддеева (ЗФ) [13, 14] для операторов рождения/уничтожения частиц, а также для операторов, связанных с локальными операторами. В [12] была построена реализация операторов ЗФ свободными полями с использованием ультрафиолетовой регуляризации фоковских модулей. Наш подход позволяет сделать это с использованием незначительной регуляризации в определении этих операторов (см. (4.8)–(4.13)).

Настоящая работа является расширенной версией препринта [15] и построена следующим образом. В разделе 2 дается определение алгебры Хопфа $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$. Бесконечномерные представления этой алгебры в терминах свободных бозонных полей построены в разделе 3. Следующие два раздела посвящены реализации свободными полями операторов, сплетающих эти бесконечномерные представления, и вычислению коммутационных и нормировочных соотношений между ними. В разделе 6 определяется универсальная $\mathcal{R}$ -матрица для центрально-расширенного дубля янгиана и доказывается изоморфизм Линга–Френкеля [16] между “новой” [17] и “ RLL ” [18, 19] формулировками $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ [6, 7, 16]. В следующем разделе получена реализация L -операторов, отвечающих центрально-расширенному дублю янгиана на уровне 1 (формулы Мики [20]), и проверено, что полученные таким способом L -операторы совпадают с полученными из универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы. В последнем разделе рассмотрено квантовое (разностное) уравнение Книжника–Замолотчикова, которое удовлетворяется матричными элементами произведений сплетающих операторов. Показано также, что эти матричные элементы могут быть вычислены явно с использованием представления свободными полями для сплетающих операторов.

2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСШИРЕНИЕ $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$

Янгиан $Y(\mathfrak{sl}_2)$ является алгеброй Хопфа, порожденной генераторами e_k, f_k, h_k , $k \geq 0$, и соотношениями

$$\begin{aligned}
 [h_k, h_l] &= 0, & [e_k, f_l] &= h_{k+l}, \\
 [h_0, e_l] &= 2e_l, & [h_0, f_l] &= -2f_l, \\
 [h_{k+1}, e_l] - [h_k, e_{l+1}] &= \hbar\{h_k, e_l\}, \\
 [h_{k+1}, f_l] - [h_k, f_{l+1}] &= -\hbar\{h_k, f_l\}, \\
 [e_{k+1}, e_l] - [e_k, e_{l+1}] &= \hbar\{e_k, e_l\}, \\
 [f_{k+1}, f_l] - [f_k, f_{l+1}] &= -\hbar\{f_k, f_l\},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\hbar$ – параметр деформации и $\{a, b\} = ab + ba$. Коалгебраическая структура определена соотношениями

$$\begin{aligned}\Delta(e_0) &= e_0 \otimes 1 + 1 \otimes e_0, & \Delta(h_0) &= h_0 \otimes 1 + 1 \otimes h_0, & \Delta(f_0) &= f_0 \otimes 1 + 1 \otimes f_0, \\ \Delta(e_1) &= e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_1 + \hbar h_0 \otimes e_0, & \Delta(f_1) &= f_1 \otimes 1 + 1 \otimes f_1 + \hbar f_0 \otimes h_0, \\ \Delta(h_1) &= h_1 \otimes 1 + 1 \otimes h_1 + \hbar h_0 \otimes h_0 - 2f_0 \otimes e_0.\end{aligned}$$

В форме (2.1) янгиан $Y(sl_2)$ появился в [17] в так называемой новой реализации, которая является деформированным аналогом петлевой реализации аффинных алгебр. В этой статье мы изучаем представления и сплетающие операторы для центрального расширения $\widehat{DY(\mathfrak{sl}_2)}$ квантового дубля $DY(\mathfrak{sl}_2)$. Алгебра Хопфа $\widehat{DY(\mathfrak{sl}_2)}$ была построена в [7]. Она может быть определена как формальное пополнение алгебры с генераторами d , центральным элементом c и генераторами $e_k, f_k, h_k, k \in \mathbb{Z}$, собранными в производящие функции (поля)

$$\begin{aligned}e^\pm(u) &= \pm \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k < 0}} e_k u^{-k-1}, & f^\pm(u) &= \pm \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k < 0}} f_k u^{-k-1}, & h^\pm(u) &= 1 \pm \hbar \sum_{\substack{k \geq 0 \\ k < 0}} h_k u^{-k-1}, \\ e(u) &= e^+(u) - e^-(u), & f(u) &= f^+(u) - f^-(u).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Эти поля удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}[d, e(u)] &= \frac{d}{du} e(u), & [d, f(u)] &= \frac{d}{du} f(u), & [d, h^\pm(u)] &= \frac{d}{du} h^\pm(u), \\ e(u)e(v) &= \frac{u-v+\hbar}{u-v-\hbar} e(v)e(u), \\ f(u)f(v) &= \frac{u-v-\hbar}{u-v+\hbar} f(v)f(u), \\ h^\pm(u)e(v) &= \frac{u-v+\hbar}{u-v-\hbar} e(v)h^\pm(u), \\ h^+(u)f(v) &= \frac{u-v-\hbar-\hbar c}{u-v+\hbar-\hbar c} f(v)h^+(u), \\ h^-(u)f(v) &= \frac{u-v-\hbar}{u-v+\hbar} f(v)h^-(u), \\ h^+(u)h^-(v) &= \frac{u-v+\hbar}{u-v-\hbar} \cdot \frac{u-v-\hbar-\hbar c}{u-v+\hbar-\hbar c} h^-(v)h^+(u), \\ [e(u), f(v)] &= \frac{1}{\hbar} (\delta(u-(v+\hbar c))h^+(u) - \delta(u-v)h^-(v)),\end{aligned}\tag{2.3}$$

где

$$\delta(u-v) = \sum_{n+m=-1} u^n v^m, \quad \delta(u-v)g(u) = \delta(u-v)g(v).$$

Эта алгебра обладает следующей фильтрацией:

$$\cdots \subset C_{-n} \subset \cdots \subset C_{-1} \subset C_0 \subset C_1 \cdots \subset C_n \cdots \subset C,\tag{2.4}$$

определенной условиями $\deg e_k = \deg f_k = \deg h_k = k$; $\deg \{x \in C_m\} \leq m$. Тогда $\widehat{DY(\mathfrak{sl}_2)}$ является формальным пополнением C относительно фильтрации (2.4).

Коумножение в $\widehat{DY(\mathfrak{sl}_2)}$ задается соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta(h^\varepsilon(u)) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) \hbar^{2k} (f^\varepsilon(u + \hbar - \delta_{\varepsilon,+} \hbar c_1))^k h^\varepsilon(u) \otimes \\ &\quad \otimes h^\varepsilon(u - \delta_{\varepsilon,+} \hbar c_1) (e^\varepsilon(u + \hbar - \delta_{\varepsilon,+} \hbar c_1))^k, \\ \Delta(e^\varepsilon(u)) &= e^\varepsilon(u) \otimes 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \hbar^{2k} (f^\varepsilon(u + \hbar - \delta_{\varepsilon,+} \hbar c_1))^k h^\varepsilon(u) \otimes \\ &\quad \otimes (e^\varepsilon(u - \delta_{\varepsilon,+} \hbar c_1))^{k+1}, \\ \Delta(f^\varepsilon(u)) &= 1 \otimes f^\varepsilon(u) + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \hbar^{2k} (f^\varepsilon(u + \delta_{\varepsilon,+} \hbar c_2))^{k+1} \otimes \\ &\quad \otimes h^\varepsilon(u) (e^\varepsilon(u + \hbar))^k, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\varepsilon = \pm$, $\delta_{+,+} = 1$, $\delta_{-,+} = 0$ и c_1, c_2 означают $c \otimes 1$, $1 \otimes c$, соответственно.

Алгебра Хопфа $\widehat{DY(\mathfrak{sl}_2)}$ была построена в два этапа. Во-первых, в [6] было доказано, что квантовой дубль $\widehat{DY(\mathfrak{sl}_2)}$ янгиана $Y(\mathfrak{sl}_2)$ может быть описан формулами (2.3)–(2.5) с опущенным d и $c = 0$. Дубль $\widehat{DY(\mathfrak{sl}_2)}$ содержит янгиан $Y(\mathfrak{sl}_2)$ и дуальную к нему алгебру с противоположным коумножением в качестве хопфовых подалгебр. Подалгебра $Y^+ = Y(\mathfrak{sl}_2) \subset \widehat{DY(\mathfrak{sl}_2)}$ генерируется полями $e^+(u)$, $f^+(u)$, $h^+(u)$, тогда как дуальная подалгебра с противоположным коумножением $Y^- = (Y(\mathfrak{sl}_2))^0$ является формальным пополнением (см. (2.4)) подалгебры, генерируемой полями $e^-(u)$, $f^-(u)$, $h^-(u)$. Хопфово спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle: Y^+ \otimes (Y^-)^0 \rightarrow \mathbb{C}$ может быть описано следующим образом.

Пусть $E^\pm$, $H^\pm$, $F^\pm$ – подалгебры (или их пополнения в случае Y^-), генерируемые компонентами полей $e^\pm(u)$, $h^\pm(u)$, $f^\pm(u)$. Подалгебры $E^\pm$ и $F^\pm$ не содержат единицы. Тогда для спаривания элементов $e^\pm \in E^\pm$, $h^\pm \in H^\pm$, $f^\pm \in F^\pm$ справедливо соотношение

$$\langle e^+ h^+ f^+, f^- h^- e^- \rangle = \langle e^+, f^- \rangle \langle h^+, h^- \rangle \langle f^+, e^- \rangle, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \langle e^+(u), f^-(v) \rangle &= \frac{1}{\hbar(u-v)}, \quad \langle f^+(u), e^-(v) \rangle = \frac{1}{\hbar(u-v)}, \\ \langle h^+(u), h^-(v) \rangle &= \frac{u-v+\hbar}{u-v-\hbar}. \end{aligned}$$

Эти свойства определяют спаривание однозначно.

На следующем шаге алгебра Хопфа Y^- расширяется до полупрямого произведения $\widehat{Y}^- = Y^- \rtimes \mathbb{C}[[d]]$, где d есть оператор дифференцирования

$$[d, e^\pm(u)] = \frac{d}{du} e^\pm(u), \quad [d, h^\pm(u)] = \frac{d}{du} h^\pm(u), \quad [d, f^\pm(u)] = \frac{d}{du} f^\pm(u). \quad (2.7)$$

$\widehat{Y}^-$ является алгеброй Хопфа, если положить

$$\Delta(d) = d \otimes 1 + 1 \otimes d.$$

Таким образом, центральное расширение $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ есть квантовый дубль для $\widehat{Y}^-$. Центральный элемент c дуален к d : $\langle c, d \rangle = \frac{1}{\hbar}$. Соотношения (2.3) являются результатом общих коммутационных соотношений в конструкции Дринфельда квантового дубля [5]. Явные вычисления могут быть найдены в [7].

Отметим, что $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ является деформацией обертывающей алгебры $U(\mathfrak{sl}_2[t, t^{-1}]) + \mathbb{C}c + \mathbb{C}\frac{d}{dt}$ (которая отличается от $U(\mathfrak{sl}_2)$ на элемент градуировки) “в направлении” рациональной r -матрицы $r(u) = \frac{g_a \otimes g_a}{u}$. Деформация картановских полей генерируется полями $\kappa^\pm(u) = \frac{1}{\hbar} \ln h^\pm(u)$ (см. ниже (3.7)).

3. ФОРМУЛЫ БОЗОНИЗАЦИИ ДЛЯ УРОВНЯ 1

Пусть $\mathcal{H}$ – алгебра Гейзенберга, генерируемая свободными бозонами с нулевой модой $a_{\pm n}$, $n = 1, 2, \dots$, a_0 , p и коммутационными соотношениями

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}, \quad [p, a_0] = 2.$$

Пусть V_i , $i = 0, 1, -$ формальное степенное расширение пространства Фока

$$V_i = \mathbb{C}[[a_{-1}, \dots, a_{-n}, \dots]] \otimes \left(\oplus_{n \in \mathbb{Z} + i/2} \mathbb{C} e^{na_0} \right) \quad (3.1)$$

со следующими действиями бозонов на этих пространствах:

$$\begin{aligned} a_{-n}(a_{-j_k} \cdots a_{-j_1} \otimes e^{na_0}) &= a_{-n}a_{-j_k} \cdots a_{-j_1} \otimes e^{na_0}, \\ a_n(a_{-j_k} \cdots a_{-j_1} \otimes e^{na_0}) &= [a_n, a_{-j_k} \cdots a_{-j_1}] \otimes e^{na_0}, \quad n > 0, \\ e^{n_1 a_0}(a_{-j_k} \cdots a_{-j_1} \otimes e^{n_2 a_0}) &= a_{-j_k} \cdots a_{-j_1} \otimes e^{(n_1 + n_2)a_0}, \\ u^p(a_{-j_k} \cdots a_{-j_1} \otimes e^{na_0}) &= u^{2n}a_{-j_k} \cdots a_{-j_1} \otimes e^{na_0}. \end{aligned}$$

Сформулируем следующее [7]

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Производящие $\text{End } V_i$ -значные функции (поля)*

$$\begin{aligned} e(u) &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n} [(u - \hbar)^n + u^n] \right) e^{a_0} u^p \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} u^{-n} \right), \\ f(u) &= \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n} [(u + \hbar)^n + u^n] \right) e^{-a_0} u^{-p} \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} u^{-n} \right), \\ h^-(u) &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{n} [(u - \hbar)^n - (u + \hbar)^n] \right), \\ h^+(u) &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} [(u - \hbar)^{-n} - u^{-n}] \right) \left(\frac{u - \hbar}{u} \right)^{-p} \end{aligned} \quad (3.2)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.3) с центральным элементом $c = 1$.

Формулы (3.2) являются янгианной версией реализации свободными полями квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ [21]. В терминах производящих функций

$$a_+(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} z^{-n} - p \log z, \quad a_-(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_{-n}}{n} z^n + \frac{a_0}{2}, \quad (3.3)$$

$$a(z) = a_+(z) - a_-(z), \quad \phi_{\pm}(z) = \exp a_{\pm}(z) \quad (3.4)$$

формулы бозонизации (3.2) могут быть переписаны в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} e(u) &= \phi_-(u - \hbar) \phi_-(u) \phi_+^{-1}(u), & f(u) &= \phi_-^{-1}(u + \hbar) \phi_-^{-1}(u) \phi_+(u), \\ h^+(u) &= \phi_+(u - \hbar) \phi_+^{-1}(u), & h^-(u) &= \phi_-(u - \hbar) \phi_-^{-1}(u + \hbar). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Доказательство предложения 1 основано на формуле Хаусдорфа

$$\phi_+(z) \phi_-(w) = \frac{1}{z - w} \phi_-(w) \phi_+(z), \quad |w| < |z|. \quad (3.6)$$

Оператор дифференцирования действует на полях $\phi_{\pm}(z)$ аддитивным сдвигом по спектральному параметру

$$e^{\gamma d} \phi_{\pm}(u) = \phi_{\pm}(u + \gamma) e^{\gamma d}, \quad e^{\gamma d} (1 \otimes 1) = 1 \otimes 1.$$

Заметим, что в классическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$) формулы бозонизации превращаются в однородную реализацию Френкеля–Каца аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ на уровне 1 (см. [22]):

$$\begin{aligned} e(u) &= \phi_-^2(u) \phi_+^{-1}(u), & f(u) &= \phi_-^{-2}(u) \phi_+(u), \\ \kappa(u) &= \kappa^+(u) - \kappa^-(u) = \partial_u (a_+(u) - 2a_-(u)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Структура пространств V_i , $i = 0, 1$, отличается от аналогичной структуры пространств представлений старшего веса для аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ и квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ (отвечающей тригонометрической деформации $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$). Наличие конечного числа генераторов Шевалье в этих алгебрах позволяет построить всю бесконечномерную алгебру при помощи многократных коммутаторов генераторов Шевалье. Оказывается также, что генераторы Шевалье могут быть отождествлены с некоторыми компонентами токов, которые образуют петлевую (новую) реализацию аффинной (квантовой аффинной) алгебры. Это дает комбинаторное описание пространств представлений V_i , $i = 0, 1$, с векторами старшего веса $u_0 = 1 \otimes 1$, $u_1 = 1 \otimes e^{a_0/2}$ в терминах последовательно вложенных конечномерных модулей двух (квантовых) конечномерных подалгебр $\widehat{\mathfrak{sl}}_2(U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2))$.

В случае $\widehat{DY}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ действие компонент токов e_k или f_k на любой элемент пространств представлений V_i дает бесконечные суммы элементов того же типа, поэтому аналогичное комбинаторное описание пространств представлений V_0 и V_1 отсутствует. Тем не менее эти пространства хорошо определены вместе с действием $\widehat{DY}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ на них.

4. СПЛЕТАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

Определим следующие сплетающие операторы:

$$\Phi^{(i)}(z) : V_i \rightarrow V_{1-i} \otimes V_z, \quad \Phi^{*(i)}(z) : V_i \otimes V_z \rightarrow V_{1-i}, \quad (4.1)$$

$$\Psi^{(i)}(z) : V_i \rightarrow V_z \otimes V_{1-i}, \quad \Psi^{*(i)}(z) : V_z \otimes V_i \rightarrow V_{1-i}, \quad (4.2)$$

где V_z означает двумерный модуль

$$V_z = V \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}], \quad V = \mathbb{C}v_+ \oplus \mathbb{C}v_-.$$

Сплетающие операторы (4.1) и (4.2) коммутируют с действием янгианного дубля

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)}(z)x &= \Delta(x)\Phi^{(i)}(z), & \Phi^{*(i)}(z)\Delta(x) &= x\Phi^{*(i)}(z), \\ \Psi^{(i)}(z)x &= \Delta(x)\Psi^{(i)}(z), & \Psi^{*(i)}(z)\Delta(x) &= x\Psi^{*(i)}(z), \quad \forall x \in \widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Компоненты сплетающих операторов определены формулами

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)}(z)v &= \Phi_+^{(i)}(z)v \otimes v_+ + \Phi_-^{(i)}(z)v \otimes v_-, & \Phi^{*(i)}(z)(v \otimes v_{\pm}) &= \Phi_{\pm}^{*(i)}(z)v, \\ \Psi^{(i)}(z)v &= v_+ \otimes \Psi_+^{(i)}(z)v + v_- \otimes \Psi_-^{(i)}(z)v, & \Psi^{*(i)}(z)(v_{\pm} \otimes v) &= \Psi_{\pm}^{*(i)}(z)v, \end{aligned}$$

где $v \in V_i$ и компоненты операторов $\Phi_{\varepsilon}^{(i)}(z)$, $\Psi_{\varepsilon}^{(i)}(z)$ и т.д., $\varepsilon = \pm$, являются производящими функциями

$$\Phi^{(i)}(z)v = \sum_{\varepsilon=\pm} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Phi_{\varepsilon,n}^{(i)} v \otimes v_{\varepsilon} z^n.$$

Если $v \in V_i$, то $\Phi_{\varepsilon,n}^{(i)} v \in V_{1-i}$.

В соответствии с терминологией, введенной в [8], мы будем называть сплетающие операторы (4.1) и (4.2) соответственно операторами типа I и типа II. Зафиксируем также нормировку, которая дает зависимость сплетающих операторов от индекса i ,

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)}(z)u_i &= (-z)^{-i/2} \varepsilon_{1-i} u_{1-i} \otimes v_{\varepsilon_i} + \dots, \\ \Psi^{*(i)}(z)(v_{\varepsilon_{1-i}} \otimes u_i) &= (-z)^{-i/2} u_{1-i} + \dots, \quad \varepsilon_0 = -, \quad \varepsilon_1 = +, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где мы обозначили

$$u_0 = 1 \otimes 1, \quad u_1 = 1 \otimes e^{a_0/2},$$

и точки в (4.4) означают коэффициенты, являющиеся положительными степенями $\hbar$. Нормировка (4.4) не является стандартной²⁾, но позволяет записать точные выражения для операторов

$$\Phi_{\varepsilon} = \Phi_{\varepsilon}^{(0)} \oplus \Phi_{\varepsilon}^{(1)} : V_0 \oplus V_1 \rightarrow V_1 \oplus V_0 \quad \text{и} \quad \Psi_{\varepsilon}^* = \Psi_{\varepsilon}^{*(0)} \oplus \Psi_{\varepsilon}^{*(1)} : V_0 \oplus V_1 \rightarrow V_1 \oplus V_0,$$

²⁾ В отличие от нормировки сплетающих операторов для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, правая часть (4.4) содержит как положительные, так и отрицательные степени спектрального параметра. Слагаемые с отрицательными степенями спектрального параметра исчезают в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$.

не зависящих явно от индекса i .

Для реализации сплетающих операторов свободными полями удобно ввести следующую комбинацию свободных полей:

$$\eta_+(z) = \lim_{K \rightarrow \infty} (2\hbar K)^{-p/2} \prod_{k=0}^K \frac{\phi_+(z - 2k\hbar)}{\phi_+(z - \hbar - 2k\hbar)}. \quad (4.5)$$

Это составное поле обладает свойством

$$\begin{aligned} \eta_+(z)\eta_+(z - \hbar) &= \lim_{K \rightarrow \infty} (2\hbar K)^{-p} \prod_{k=0}^K \frac{\phi_+(z - 2k\hbar)}{\phi_+(z - 2\hbar - 2k\hbar)} = \\ &= \phi_+(z) \lim_{K \rightarrow \infty} (2\hbar K)^{-p} \phi_+^{-1}(z - 2\hbar - 2K\hbar) = \\ &= \phi_+(z)(-1)^p, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где оператор $(-1)^p$ действует на модулях V_i умножением на $(-1)^i$. Мы можем переписать поле (4.5) в эквивалентной форме, пользуясь представлением Γ -функции через бесконечное произведение и формулой Стирлинга,

$$\begin{aligned} \eta_+(z) &= (2\hbar)^{-p/2} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{z}{2\hbar})}{\Gamma(-\frac{z}{2\hbar})} \right)^{-p} \times \\ &\times \lim_{K \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^K \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} [(z - 2k\hbar)^{-n} - (z - \hbar - 2k\hbar)^{-n}] \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Это представление удобно при изучении классического предела поля $\eta_+(z)$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \eta_+(z) = \phi_+^{1/2}(z)(-1)^{p/2},$$

основанного на варианте формулы Стирлинга

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - 2k\hbar} - \frac{1}{z - \hbar - 2k\hbar} \right) = \frac{1}{2z}.$$

Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Сплетающие операторы (4.1) и (4.2) имеют следующее представление свободными полями:*

$$\Phi_-(z) = \phi_-(z + \hbar)\eta_+^{-1}(z), \quad (4.8)$$

$$\Phi_+(z) = \Phi_-(z)f_0 - f_0\Phi_-(z), \quad (4.9)$$

$$\Phi_{\varepsilon}^{*(i)}(z) = \varepsilon(-1)^i \Phi_{-\varepsilon}^{(i)}(z - \hbar), \quad (4.10)$$

$$\Psi_-^*(z) = \phi_-^{-1}(z)\eta_+(z), \quad (4.11)$$

$$\Psi_+^*(z) = e_0\Psi_-^*(z) - \Psi_-^*(z)e_0, \quad (4.12)$$

$$\Psi_{\varepsilon}^{(i)}(z) = \varepsilon(-1)^{-i} \Psi_{-\varepsilon}^{*(i)}(z - \hbar), \quad \varepsilon = \pm. \quad (4.13)$$

Для доказательства этого предложения достаточно знать формулы действия алгебры $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ на конечномерном модуле и первые слагаемые в формулах (2.5), описывающих коалгебраическую структуру центрально-расширенного дубля янгиана $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$:

$$\begin{aligned}\Delta h^+(u) &= h^+(u) \otimes h^+(u - \hbar c_1) + F \otimes E, \\ \Delta h^-(u) &= h^-(u) \otimes h^-(u) + F \otimes E, \\ \Delta e(u) &= e(u) \otimes 1 + F' \otimes E, \\ \Delta f(u) &= 1 \otimes f(u) + F \otimes E',\end{aligned}\tag{4.14}$$

где E , F , E' и F' генерируются элементами $\{e_k\}$, $\{f_k\}$, $\{e_k, h_k^\pm\}$, $\{f_k, h_k^\pm\}$. Формулы действия $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ на конечномерном модуле, полученные в [6], имеют вид

$$\begin{aligned}h^+(u)v_{\pm,z} &= \frac{u-z \pm \hbar}{u-z}v_{\pm,z}, \quad |z| < |u|, \\ h^-(u)v_{\pm,z} &= \frac{u-z \pm \hbar}{u-z}v_{\pm,z}, \quad |z| > |u|, \\ e^\pm(u)v_{+,z} &= 0, \quad f^\pm(u)v_{-,z} = 0, \\ e^+(u)v_{-,z} &= \frac{1}{u-z}v_{+,z}, \quad f^+(u)v_{+,z} = \frac{1}{u-z}v_{-,z}, \quad |z| < |u|, \\ e^-(u)v_{-,z} &= \frac{1}{u-z}v_{+,z}, \quad f^-(u)v_{+,z} = \frac{1}{u-z}v_{-,z}, \quad |z| > |u|.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Принимая во внимание (4.14) и (4.15), из (4.3) при $x = h^+(u)$, $h^-(u)$, $e(u)$ и f_0 можно получить следующие определяющие формулы для $\Phi_-^{(i)}(z)$:

$$\Phi_-^{(i)}(z)h^+(u) = \frac{u-z-2\hbar}{u-z-\hbar}h^+(u)\Phi_-^{(i)}(z),\tag{4.16}$$

$$\Phi_-^{(i)}(z)h^-(u) = \frac{u-z-\hbar}{u-z}h^-(u)\Phi_-^{(i)}(z),\tag{4.17}$$

$$\Phi_-^{(i)}(z)e(u) = e(u)\Phi_-^{(i)}(z),\tag{4.18}$$

$$\Phi_+^{(i)}(z) = \Phi_-^{(i)}(z)f_0 - f_0\Phi_-^{(i)}(z).$$

Аналогичные формулы для дуальных операторов $\Phi^*(z)$ имеют вид

$$\Phi_+^{*(i)}(z)h^+(u) = \frac{u-z-\hbar}{u-z}h^+(u)\Phi_+^{*(i)}(z),$$

$$\Phi_+^{*(i)}(z)h^-(u) = \frac{u-z}{u-z+\hbar}h^-(u)\Phi_+^{*(i)}(z),$$

$$\Phi_+^{*(i)}(z)e(u) = e(u)\Phi_+^{*(i)}(z),$$

$$\Phi_-^{*(i)}(z) = f_0\Phi_+^{*(i)}(z) - \Phi_+^{*(i)}(z)f_0.$$

Сравнивая эти формулы, мы получаем (4.10). Выбирая в (4.10) не зависящий от z множитель $(-1)^i$, получим ту же нормировку для дуальных операторов, что и для $\Psi^{*(i)}$:

$$\Phi^{*(i)}(z)(u_i \otimes v_{\varepsilon_{1-i}}) = (-z)^{-i/2}u_{1-i} + \dots, \quad \varepsilon_0 = -, \quad \varepsilon_1 = +.$$

Ясно, что решение уравнений (4.16)–(4.18) может быть получено в виде экспоненциальных функций от бозонов. Докажем, например, что оператор $\Phi_-(z)$, заданный формулой (4.8), удовлетворяет соотношению (4.18). Воспользуемся формулой Хаусдорфа (3.6) и определением поля $\eta_+(z)$. Сначала упорядочим свободные поля в произведении $e(u)\Phi_-(z)$:

$$e(u)\Phi_-(z) = (u - z - \hbar):e(u)\Phi_-(z):,$$

затем – в произведении операторов $\Phi_-(z)e(u)$:

$$\begin{aligned} \Phi_-(z)e(u) &= \lim_{K \rightarrow \infty} 2\hbar K \prod_{k=0}^K \frac{(z - u + \hbar - 2k\hbar)(z - u - 2k\hbar)}{(z - u - 2k\hbar)(z - u - \hbar - 2k\hbar)} : \Phi_-(z)e(u) : = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} 2\hbar K \frac{(z - u + \hbar)}{(z - u - \hbar - 2K\hbar)} : \Phi_-(z)e(u) : = \\ &= (u - z - \hbar): \Phi_-(z)e(u) :. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Так как под знаком нормального упорядочения $:$ $*$ $:$ можно переставлять операторы, то коммутационное соотношение (4.18) доказано. Представление свободными полями сплетающих операторов типа II доказывается аналогично.

5. КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СПЛЕТАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Сплетающие операторы типа I и типа II удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям (алгебра Замолотчикова–Фаддеева) [13, 14]:*

$$\Phi_{\varepsilon_2}(z_2)\Phi_{\varepsilon_1}(z_1) = R_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^{\varepsilon'_1\varepsilon'_2}(z_1 - z_2)\Phi_{\varepsilon'_1}(z_1)\Phi_{\varepsilon'_2}(z_2), \quad (5.1)$$

$$\Psi_{\varepsilon_1}^*(z_1)\Psi_{\varepsilon_2}^*(z_2) = -R_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^{\varepsilon'_1\varepsilon'_2}(z_1 - z_2)\Psi_{\varepsilon'_2}^*(z_2)\Psi_{\varepsilon'_1}^*(z_1), \quad (5.2)$$

$$\Phi_{\varepsilon_1}(z_1)\Psi_{\varepsilon_2}^*(z_2) = \tau(z_1 - z_2)\Psi_{\varepsilon_2}^*(z_2)\Phi_{\varepsilon_1}(z_1), \quad (5.3)$$

$$g \sum_{\varepsilon} \Phi_{\varepsilon}^{*(1-i)}(z)\Phi_{\varepsilon}^{(i)}(z) = -\text{id}, \quad (5.4)$$

$$g\Phi_{\varepsilon_1}^{*(1-i)}(z)\Phi_{\varepsilon_2}^{*(i)}(z) = \delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\text{id}, \quad (5.5)$$

$$g^{-1}\Psi_{\varepsilon_1}^{*(1-i)}(z_1)\Psi_{\varepsilon_2}^{*(i)}(z_2) = \frac{\delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{z_1 - z_2} + o(z_1 - z_2), \quad (5.6)$$

где R -матрица задана соотношением

$$R(z) = r(z)\overline{R}(z) \quad (5.7)$$

и

$$r(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{z}{2\hbar})\Gamma(1 + \frac{z}{2\hbar})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{z}{2\hbar})\Gamma(1 - \frac{z}{2\hbar})}, \quad \overline{R}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(z) & c(z) & 0 \\ 0 & c(z) & b(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\tau(z) = -\text{ctg} \frac{\pi z}{2\hbar}, \quad b(z) = \frac{z}{z + \hbar}, \quad c(z) = \frac{\hbar}{z + \hbar}, \quad g = \sqrt{\frac{2\hbar}{\pi}}.$$

Можно легко проверить, что R -матрица (5.7) удовлетворяет соотношениям унитарности и кроссинг-симметрии

$$\begin{aligned} R(z)R(-z) &= 1, \\ (C \otimes \text{id})R(z)(C \otimes \text{id}) &= R^{t_1}(-z - h) \end{aligned}$$

с матрицей зарядового сопряжения

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

где $R^{t_1}(z)$ означает транспонирование в первом пространстве.

Проверка этих коммутационных соотношений основывается на следующих формулах нормального упорядочения:

$$\Phi_{-}(z_2)\Phi_{-}(z_1) = (2\hbar)^{1/2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)} : \Phi_{-}(z_2)\Phi_{-}(z_1) :, \quad (5.10)$$

$$\Psi_{-}^{*}(z_1)\Psi_{-}^{*}(z_2) = (2\hbar)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(-\frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)} : \Psi_{-}^{*}(z_1)\Psi_{-}^{*}(z_2) :, \quad (5.11)$$

$$\Psi_{-}^{*}(z_2)\Phi_{-}(z_1) = (2\hbar)^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)} : \Psi_{-}^{*}(z_2)\Phi_{-}(z_1) :, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{-}(z)f(u) &= \frac{1}{u - z} : \Phi_{-}(z)f(u) : = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{z^{k+1}} : \Phi_{-}(z)f(u) :, \\ f(u)\Phi_{-}(z) &= \frac{1}{u - z - \hbar} : \Phi_{-}(z)f(u) : = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z + \hbar)^k}{u^{k+1}} : \Phi_{-}(z)f(u) :, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{-}^{*}(z)e(v) &= \frac{1}{v - z - \hbar} : \Psi_{-}^{*}(z)e(v) : = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k}{(z + \hbar)^{k+1}} : \Psi_{-}^{*}(z)e(v) :, \\ e(v)\Psi_{-}^{*}(z) &= \frac{1}{v - z} : \Psi_{-}^{*}(z)e(v) : = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{v^{k+1}} : \Psi_{-}^{*}(z)e(v) :, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} e(v)\Phi_{-}(z) &= \Phi_{-}(z)e(v) = (v - z - \hbar) : \Phi_{-}(z)e(v) :, \\ f(u)\Psi_{-}^{*}(z) &= \Psi_{-}^{*}(z)f(u) = (u - z) : \Psi_{-}^{*}(z)f(u) :. \end{aligned}$$

Эти формулы используются, в частности, для представления вторых компонент сплетающих операторов через контурные интегралы по вспомогательным переменным u и v . Из (5.13) следует, что точки $z + \hbar, 0$ должны быть внутри контура C в определении оператора $\Phi_{+}(z)$:

$$\Phi_{+}(z) = \Phi_{-}(z)f_0 - f_0\Phi_{-}(z) = \int_C \frac{du}{2i\pi} (\Phi_{-}(z)f(u) - f(u)\Phi_{-}(z)), \quad (5.15)$$

а точки z, ∞ должны быть вне этого контура. Для сплетающих операторов типа II картина обратная. Контур $\tilde{C}$ в определении оператора $\Psi_+^*(z)$,

$$\Psi_+^*(z) = e_0 \Psi_-^*(z) - \Psi_-^*(z) e_0 = \int_{\tilde{C}} \frac{dv}{2i\pi} (e(v) \Psi_-^*(z) - \Psi_-^*(z) e(v)), \quad (5.16)$$

должен включать точки $z, 0$, но исключать точки $z + \hbar, \infty$. Форма контуров C и $\tilde{C}$ зависит от наличия других операторов и должна быть специфицирована в каждом конкретном случае произведения сплетающих операторов.

Формулы для нормального упорядочения “минус”-компонент этих операторов и янгианских токов $e(u)$ и $f(u)$ доказываются той же выкладкой, что и (4.19). Докажем теперь (5.10):

$$\begin{aligned} \Phi_-(z_2) \Phi_-(z_1) &= \lim_{K \rightarrow \infty} (2\hbar K)^{1/2} \prod_{k=0}^K \frac{(z_2 - z_1 - \hbar - 2k\hbar)}{(z_2 - z_1 - 2\hbar - 2k\hbar)} : \Phi_-(z_2) \Phi_-(z_1) : = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} (2\hbar K)^{1/2} \frac{\Gamma\left(K + \frac{z_1 - z_2 + 3\hbar}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(K + \frac{1}{2} + \frac{z_1 - z_2 + 3\hbar}{2\hbar}\right)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)} : \Phi_-(z_2) \Phi_-(z_1) : = \\ &= (2\hbar)^{1/2} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)} : \Phi_-(z_2) \Phi_-(z_1) :, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где были использованы элементарные свойства Γ -функции

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^K (k+x) &= \frac{\Gamma(K+1+x)}{\Gamma(x)}, \\ \lim_{K \rightarrow \infty} K^{-1/2} \frac{\Gamma\left(K+x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(K+x)} &= 1 \quad \text{для любого конечного } x \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Отметим, что хотя компоненты сплетающих операторов $\Phi_-(z)$ и $\Psi_-^*(z)$ содержат бесконечное произведение свободных полей, которое после нормального упорядочения дает бесконечное произведение рациональных функций, в (5.17) мы получаем хорошо определенное отношение Γ -функций.

6. УНИВЕРСАЛЬНАЯ $\mathcal{R}$ -МАТРИЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$

Целью настоящего раздела является описание дубля янгиана $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ в “ RLL ”-формализме [18, 19]. Существенной частью этой конструкции является понятие универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы. Универсальная $\mathcal{R}$ -матрица для центрально-расширенного дубля янгиана была получена в [6, 7] из канонического спаривания в $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$. Она дается выражением

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \cdot \mathcal{R}_0 \cdot \exp(\hbar c \otimes d) \cdot \mathcal{R}_-, \quad (6.1)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_+ &= \prod_{k \geq 0}^{\rightarrow} \exp(-\hbar e_k \otimes f_{-k-1}) = \exp(-\hbar e_0 \otimes f_{-1}) \exp(-\hbar e_1 \otimes f_{-2}) \cdots, \\ \mathcal{R}_- &= \prod_{k \geq 0}^{\leftarrow} \exp(-\hbar f_k \otimes e_{-k-1}) = \cdots \exp(-\hbar f_1 \otimes e_{-2}) \exp(-\hbar f_0 \otimes e_{-1}), \\ \mathcal{R}_0 &= \prod_{n \geq 0} \exp \left(\hbar^2 \operatorname{Res}_{u=v} \left(\frac{d}{du} \hbar^{-1} \ln h^+(u) \otimes \hbar^{-1} \ln h^-(v + \hbar + 2n\hbar) \right) \right).\end{aligned}$$

Операция Res определена так:

$$\operatorname{Res}_{u=v} \left(\sum_{i \geq 0} a_i u^{-i-1} \otimes \sum_{k \geq 0} b_k v^k \right) = \sum_{i \geq 0} a_i \otimes b_i.$$

В конечномерном представлении $\pi(z)$ дубля янгиана $DY(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ в пространстве V_z операторы $e_k, f_k, h_k, c, k \in \mathbb{Z}$, действуют следующим образом:

$$\begin{aligned}e_k v_{+,z} &= f_k v_{-,z} = c v_{\pm,z} = 0, \quad e_k v_{-,z} = z^k v_{+,z}, \\ f_k v_{+,z} &= z^k v_{-,z}, \quad h_k v_{\pm,z} = \pm z^k v_{\pm,z}.\end{aligned}$$

L -операторы определяются соотношениями (см. [23] для случая $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$)

$$L^-(z) = (\pi(z) \otimes \operatorname{id}) \mathcal{R} \exp(-\hbar c \otimes d), \quad L^+(z) = (\pi(z) \otimes \operatorname{id}) \exp(\hbar d \otimes c) (\mathcal{R}^{21})^{-1} \quad (6.2)$$

и могут быть записаны в форме разложения Гаусса:

$$L^-(z) = \begin{pmatrix} 1 & \hbar f^-(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k^-(z - \hbar))^{-1} & 0 \\ 0 & k^-(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hbar e^-(z) & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

$$L^+(z) = \begin{pmatrix} 1 & \hbar f^+(z - c\hbar) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k^+(z - \hbar))^{-1} & 0 \\ 0 & k^+(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hbar e^+(z) & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Для получения диагональной части операторов $L^\pm(z)$ было использовано следующее свойство операции Res :

$$\operatorname{Res}_{u=v} \left(\frac{d}{du} \sum_{i \geq 0} a_i u^{-i-1} \otimes \sum_{k \geq 0} b_k v^k \right) = - \operatorname{Res}_{u=v} \left(\sum_{i \geq 0} a_i u^{-i-1} \otimes \frac{d}{dv} \sum_{k \geq 0} b_k v^k \right).$$

Из определяющих формул (6.3) и (6.4) следует соотношение между полями $h^\pm(z)$ и $k^\pm(z)$:

$$h^\pm(z) = (k^\pm(z) k^\pm(z - \hbar))^{-1}. \quad (6.5)$$

В дальнейшем нам понадобится значение универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы, вычисленной на тензорном произведении двух конечномерных представлений ($z = z_1 - z_2$)

$$\begin{aligned}\tilde{R}^-(z) &= (\pi(z_1) \otimes \pi(z_2)) \mathcal{R} \exp(-\hbar c \otimes d) = (\text{id} \otimes \pi(z_2)) L^-(z_1) = \\ &= \rho^-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\hbar}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z-\hbar}{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{z+\hbar} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{z} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \rho^-(z) \overline{R}(z)\end{aligned}$$

и

$$\tilde{R}^+(z) = (\pi(z_1) \otimes \pi(z_2)) \exp(\hbar d \otimes c) (\mathcal{R}^{21})^{-1} = (\text{id} \otimes \pi(z_2)) L^+(z_1) = \rho^+(z) \overline{R}(z),$$

где $\overline{R}(z)$ определено в (5.8) и

$$\rho^\pm(z) = \left[\frac{\Gamma(\mp \frac{z}{2\hbar}) \Gamma(1 \mp \frac{z}{2\hbar})}{\Gamma^2(\frac{1}{2} \mp \frac{z}{2\hbar})} \right]^{\mp 1}.$$

Для R -матриц $\tilde{R}^\pm(z)$ условия унитарности и кроссинг-симметрии выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}R^+(z) R^-(z) &= 1, \\ (C \otimes \text{id}) \tilde{R}^\pm (C \otimes \text{id})^{-1} &= \tilde{R}^{\mp t_1}(-z - \hbar)\end{aligned}\tag{6.6}$$

с матрицей зарядового сопряжения C , определенной формулой (5.9).

Следующие свойства универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы и представлений дубля янгиана $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$:

- (i) справедливость уравнения Янга–Бакстера для $\mathcal{R}$;
- (ii) коумножение для $\mathcal{R}$:

$$(\Delta \otimes \text{id}) \mathcal{R} = \mathcal{R}^{13} \mathcal{R}^{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta) \mathcal{R} = \mathcal{R}^{13} \mathcal{R}^{12};$$

- (iii) реализация тривиального представления $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ как подмодуля

$$\mathbb{C}(v_+ \otimes v_- - v_- \otimes v_+) \hookrightarrow \pi(z + \hbar) \otimes \pi(z),$$

приводят к коммутационным соотношениям на операторы $L^\pm(z)$:

$$\tilde{R}^-(z + c\hbar) L_1^-(z_1) L_2^+(z_2) = L_2^+(z_2) L_1^-(z_1) \tilde{R}^-(z),\tag{6.7}$$

$$\tilde{R}^\pm(z) L_1^\pm(z_1) L_2^\pm(z_2) = L_2^\pm(z_2) L_1^\pm(z_1) \tilde{R}^\pm(z),\tag{6.8}$$

$$\text{q-det} L^\pm(z) = 1.\tag{6.9}$$

Здесь квантовый детерминант $q\text{-det} A(z)$ равен $A_{11}(z + \hbar)A_{22}(z) - A_{12}(z + \hbar)A_{21}(z)$ и коумножение на L -операторах определяется соотношениями

$$\Delta' L^+(x) = L^+(x - \hbar c_2) \dot{\otimes} L^+(x), \quad \Delta l_{ij}^+(u) = \sum_k l_{kj}^+(u) \otimes l_{ik}^+(u - \hbar c_1), \quad (6.10)$$

$$\Delta' L^-(x) = L^-(x) \dot{\otimes} L^-(x), \quad \Delta l_{ij}^-(u) = \sum_k l_{kj}^-(u) \otimes l_{ik}^-(u), \quad (6.11)$$

где Δ' означает переставленное коумножение и $\dot{\otimes}$ является матричным тензорным произведением. Используя разложение Гаусса для L -операторов, можно легко получить из (6.10) и (6.11) формулы коумножения токов $e^\pm(u)$, $f^\pm(u)$, $h^\pm(u)$ (см. (2.5)). Коммутационные соотношения для центрально-расширенного дубля янгиана в форме (6.7) и (6.8) являются аналогами конструкции, развитой в [19] для деформации универсальной обертывающей аффинной алгебры Ли $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$.

С другой стороны, мы можем начать с алгебры коэффициентов операторов $L^\pm(z)$, удовлетворяющих соотношениям (6.7)–(6.9), и доказать, что токи

$$\begin{aligned} e(z) &= e^+(z) - e^-(z), \\ f(z) &= f^+(z) - f^-(z), \\ h^\pm(z) &= [k^\pm(z)k^\pm(z - \hbar)]^{-1}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

определяемые разложениями Гаусса (6.3), (6.4), удовлетворяют коммутационным соотношениям центрально-расширенного дубля янгиана $DY(\mathfrak{sl}_2)$. Это утверждение является янгианной версией конструкции Линга–Френкеля [16].

7. ФОРМУЛЫ МИКИ И БОЗОНИЗАЦИЯ L -ОПЕРАТОРОВ

Следуя идее, предложенной в работе [20], составим из сплетающих операторов $\text{End } V_i$ -значные 2×2 -матрицы

$$L_{\varepsilon\nu}^+(z) = g\Phi_\varepsilon(z - \hbar)\Psi_\nu^*(z), \quad L_{\varepsilon\nu}^-(z) = g\Psi_\nu^*(z)\Phi_\varepsilon(z). \quad (7.1)$$

Можно проверить, что из коммутационных соотношений (5.1)–(5.3) следует, что так определенные L -операторы удовлетворяют соотношениям (6.7)–(6.9) с $c = 1$.

Важно отметить, что порядок сплетающих операторов в (7.1) строго фиксирован, так как только в таком порядке произведение этих операторов, взятых в одной точке, хорошо определено. Это следует из правил слияния

$$\begin{aligned} \Phi_-(z_1 - \hbar)\Psi_-^*(z_2) &= (2\hbar)^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)} : \Phi_-(z_1 - \hbar)\Psi_-^*(z_2) :, \\ \Psi_-^*(z_1)\Phi_-(z_2) &= (2\hbar)^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{z_1 - z_2}{2\hbar}\right)} : \Psi_-^*(z_1)\Phi_-(z_2) -. \end{aligned}$$

Также надо отметить, что, проверяя (6.8) или (6.7) при помощи (7.1), никогда не придется переставлять операторы, взятые в одной точке.

Нашей целью является проверка того, что L -операторы (7.1) совпадают с определяемыми из универсальной $\mathcal{R}$ -матрицы (6.1), вычисленной на тензорном произведении конечномерного и бесконечномерного модулей V_i , $i = 0, 1$, на уровне 1. Сначала вычислим компоненты $L_{--}^{\pm}(z)$:

$$L_{--}^{+}(z) = :\Phi_{-}(z - \hbar)\Psi_{-}^{*}(z): = \frac{\eta_{+}(z)}{\eta_{+}(z - \hbar)}, \quad (7.2)$$

$$L_{--}^{-}(z) = :\Psi_{-}^{*}(z)\Phi_{-}(z): = \frac{\phi_{-}(z + \hbar)}{\phi_{-}(z)}. \quad (7.3)$$

Сравнивая (7.2), (7.3) с (3.5) и (6.5), заключаем, что

$$L_{--}^{+}(z) = k^{+}(z), \quad L_{--}^{-}(z) = k^{-}(z) \quad (c = 1).$$

Чтобы найти бозонизованные выражения для других элементов L -операторов, мы получим сначала более адекватные для этой цели представления для “плюсовых” компонент сплетающих операторов $\Phi(z)$ и $\Psi^{*}(z)$. Используя определение (4.3) для $x = f^{\pm}(z)$, $e^{\pm}(z)$, явные формулы коумножения (2.5) и (4.15), можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2 - z_1} \Phi_{+}(z_1) &= \Phi_{-}(z_1) f^{\pm}(z_2) - \frac{z_2 - z_1 - \hbar}{z_2 - z_1} f^{\pm}(z_2) \Phi_{-}(z_1), \quad |z_2| \geq |z_1|, \\ \frac{1}{z_2 - z_1} \Psi_{+}^{*}(z_1) &= e^{\pm}(z_2) \Psi_{-}^{*}(z_1) - \frac{z_2 - z_1 - \hbar}{z_2 - z_1} \Psi_{-}^{*}(z_1) e^{\pm}(z_2), \quad |z_2| \geq |z_1|, \\ 0 &= \Phi_{-}(z_1) e^{\pm}(z_2) - e^{\pm}(z_2) \Phi_{-}(z_1), \\ 0 &= f^{\pm}(z_2) \Psi_{-}^{*}(z_1) - \Psi_{-}^{*}(z_1) f^{\pm}(z_2), \end{aligned}$$

где $f^{\pm}(z_2)$ и $e^{\pm}(z_2)$ определены из (2.2). Теперь можно вычислить остальные компоненты L -операторов:

$$\begin{aligned} L_{-+}^{+}(z) &= g \Phi_{-}(z - \hbar) \Psi_{+}^{*}(z) = \hbar k^{+}(z) e^{+}(z), \\ L_{+-}^{+}(z) &= g \Phi_{+}(z - \hbar) \Psi_{-}^{*}(z) = \hbar f^{+}(z - \hbar) k^{+}(z), \\ L_{-+}^{-}(z) &= g \Psi_{+}^{*}(z) \Phi_{-}(z) = \hbar k^{-}(z) e^{-}(z), \\ L_{+-}^{-}(z) &= g \Psi_{-}^{*}(z) \Phi_{+}(z) = \hbar f^{-}(z) k^{-}(z), \\ L_{++}^{+}(z) &= g \Phi_{+}(z - \hbar) \Psi_{+}^{*}(z) = (k^{+}(z - \hbar))^{-1} + \hbar^2 f^{+}(z - \hbar) k^{+}(z) e^{+}(z), \\ L_{++}^{-}(z) &= g \Psi_{+}^{*}(z) \Phi_{+}(z) = (k^{-}(z - \hbar))^{-1} + \hbar^2 f^{-}(z) k^{-}(z) e^{-}(z), \end{aligned}$$

где необходимо использовать операторные тождества (6.5). Из этих формул следует разложение Гаусса для $L^{\pm}(z)$ -операторов (7.1):

$$\begin{aligned} L^{+}(z) &= \begin{pmatrix} 1 & \hbar f^{+}(z - \hbar) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k^{+}(z - \hbar))^{-1} & 0 \\ 0 & k^{+}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hbar e^{+}(z) & 1 \end{pmatrix}, \\ L^{-}(z) &= \begin{pmatrix} 1 & \hbar f^{-}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k^{-}(z - \hbar))^{-1} & 0 \\ 0 & k^{-}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hbar e^{-}(z) & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

что совпадает с (6.3) и (6.4) при $c = 1$.

Можно проверить правила коумножения для L -операторов на уровне 1. Действительно, из (7.1), (5.1)–(5.3) и тождеств

$$r(z)\tau(-z) = \rho^-(z) \quad \text{и} \quad r(z - \hbar)\tau(-z) = \rho^+(z - \hbar)$$

можно вычислить

$$\Phi_{\varepsilon_2}(z_2)L_{\varepsilon_1\nu}^-(z_1) = \tilde{R}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^{-\varepsilon'_1\varepsilon'_2}(z_1 - z_2)L_{\varepsilon'_1\nu}^-(z_1)\Phi_{\varepsilon'_2}(z_2), \quad (7.4)$$

$$\Phi_{\varepsilon_2}(z_2)L_{\varepsilon_1\nu}^+(z_1) = \tilde{R}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}^{+\varepsilon'_1\varepsilon'_2}(z_1 - z_2 - \hbar)L_{\varepsilon'_1\nu}^+(z_1)\Phi_{\varepsilon'_2}(z_2), \quad (7.5)$$

что совпадает с формулами коммутативности сплетающих и L -операторов, которые получаются из определений (4.3) и (6.10), (6.11).

8. РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СПЛЕТАЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ

Целью настоящего раздела является получение квантового (разностного) уравнения для матричных элементов произведения сплетающих операторов (как это было проделано в случае квантовой аффинной алгебры $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ в работе [23]). Для определенности мы рассмотрим произведение дуальных сплетающих операторов типа I. Все другие случаи могут быть рассмотрены аналогично. В этом разделе мы опустим несущественную зависимость сплетающих операторов $\Phi^{*(i)}(z)$ от индекса $i = 0, 1$. Справедливо следующее операторное тождество:

$$\Phi^*(z - \hbar) = (L^-(z)\Phi^*(z))^t (L^+(z))^{-1}. \quad (8.1)$$

В компонентах это тождество выглядит так:

$$\Phi_\mu^*(z - \hbar) = \sum_{\nu, \varepsilon} L_{\varepsilon\nu}^-(z)\Phi_\nu^*(z) (L^+(z))_{\varepsilon\mu}^{-1}. \quad (8.2)$$

Эквивалентное (8.2) тождество

$$\sum_{\nu} L_{\varepsilon\nu}^-(z)\Phi_\nu^*(z) = \sum_{\mu} \Phi_\mu^*(z - \hbar)L^+(z)_{\mu\varepsilon} \quad (8.3)$$

следует из (5.4) и (5.5). Действительно, используя (5.5), мы получим в левой части (8.3)

$$\sum_{\nu} L_{\varepsilon\nu}^-(z)\Phi_\nu^*(z) = g \sum_{\nu} \Psi_\nu^*(z)\Phi_\varepsilon(z)\Phi_\nu^*(z) = \sum_{\nu} \Psi_\nu^*(z)\delta_{\varepsilon\nu} = \Psi_\varepsilon^*(z).$$

С другой стороны, правая часть (8.3) может быть преобразована с использованием тождества (5.4):

$$\sum_{\mu} \Phi_\mu^*(z - \hbar)L^+(z)_{\mu\varepsilon} = g \sum_{\mu} \Phi_\mu^*(z - \hbar)\Phi_\mu(z - \hbar)\Psi_\varepsilon^*(z) = \Psi_\varepsilon^*(z).$$

Тождество (8.1) является квантовым (разностным) уравнением Книжника–Замолодчикова, записанным в терминах сплетающих операторов.

Чтобы получить квантовое уравнение Книжника–Замолодчикова для матричных элементов произведений сплетающих операторов, необходимы коммутационные соотношения операторов $\Phi^*(z)$ с L -операторами. Эти коммутационные соотношения могут быть получены из (7.4), (7.5), определения (4.10) и свойства кроссинг-симметрии (6.6):

$$\Phi^*(z_2)L^-(z_1) = \tilde{R}_{1,2}^{+t_1}(z_{2,1} - 2\hbar)L^-(z_1)\Phi^*(z_2), \quad (8.4)$$

$$\Phi^*(z_2)L^+(z_1) = \tilde{R}_{1,2}^{-t_1}(z_{2,1} - \hbar)L^+(z_1)\Phi^*(z_2), \quad (8.5)$$

где $z_{i,j} = z_i - z_j$ и R -матрица $\tilde{R}_{i,j}^\pm$ действует в i -м и j -м пространствах.

Рассмотрим произведение дуальных сплетающих операторов типа I:

$$\mathcal{F}_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(z_1, \dots, z_n) = \Phi_{\varepsilon_1}^*(z_1) \cdots \Phi_{\varepsilon_{j-1}}^*(z_{j-1}) \Phi_{\varepsilon_j}^*(z_j) \Phi_{\varepsilon_{j+1}}^*(z_{j+1}) \cdots \Phi_{\varepsilon_n}^*(z_n).$$

Умножая $\mathcal{F}(z_1, \dots, z_n)$ слева на оператор

$$\prod_{k=j+1, \dots, n}^{\leftarrow} \tilde{R}_{j,k}^{-t_1}(z_{k,j} - \hbar) \prod_{k=1, \dots, j-1}^{\leftarrow} \tilde{R}_{j,k}^{+t_1}(z_{k,j} - 2\hbar)L^-(z_j) = A_j(z_1, \dots, z_n)L^-(z_j)$$

и используя соотношения (8.5), (8.4) и (8.2), можно доказать операторное тождество

$$\mathcal{F}(z_1, \dots, z_j - \hbar, \dots, z_n)L^+(z_j) = A_j(z_1, \dots, z_n)L^-(z_j)\mathcal{F}(z_1, \dots, z_n). \quad (8.6)$$

Теперь мы должны применить это операторное тождество к некоторому вектору u из пространств представлений V_0 или V_1 и спарить полученный вектор с некоторым вектором из соответствующего дуального пространства. Единственное требование, предъявляемое к этим векторам, — чтобы они были неподвижными относительно правого (левого) действия оператора $L^+(z)$ ($L^-(z)$). В случае аффинной или квантовой аффинной алгебры обычно выбирается старший (младший) весовой вектор, который автоматически удовлетворяет указанному требованию. Как было продемонстрировано в предыдущих разделах, мы не можем указать такие векторы в случае бесконечномерных представлений центрально-расширенного дубля янгiana. Но так как операторы в этих представлениях действуют в фоковском пространстве свободных бозонов, то можно выбрать вакуумный вектор

$$|0\rangle = 1 \otimes 1,$$

который уничтожается всеми положительными модами свободных бозонов a_n , $n > 0$, и оператором p . Умножая (8.6) справа на $|0\rangle$ и спаривая слева с

$$\langle n, p| = 1^* \otimes e^{(n-2p)\alpha/2} \quad (p = 0, 1, \dots, n)$$

для компенсации нулевой моды, мы получим для C_n^p -компонентной векторнозначной функции

$$F^{(p)}(z_1, \dots, z_n) = \langle n, p| \mathcal{F}(z_1, \dots, z_n) |0\rangle$$

квантовое уравнение Книжника–Замолодчикова:

$$F^{(p)}(z_1, \dots, z_j - \hbar, \dots, z_n) = \tilde{R}_{j,n}^{-t_1}(z_{n,j} - \hbar) \cdots \tilde{R}_{j,j+1}^{-t_1}(z_{j+1,j} - \hbar) \times \\ \times \tilde{R}_{j,j-1}^{+t_1}(z_{j-1,j} - 2\hbar) \cdots \tilde{R}_{j,1}^{+t_1}(z_{1,j} - 2\hbar) F^{(p)}(z_1, \dots, z_n). \quad (8.7)$$

Чтобы получить (8.7), мы использовали очевидные тождества

$$L_{ij}^+(z)|0\rangle = \delta_{ij}|0\rangle \quad \text{и} \quad \langle n, p|L_{ij}^-(z) = \delta_{ij}\langle n, p|,$$

которые следуют из формул бозонизации операторов $L^\pm(z)$. Сдвиг на $(-\hbar)$ в (8.7) фиксируется тем условием, что мы рассматриваем только бесконечномерные представления $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ на уровне 1. Этот сдвиг может быть сделан зависящим от уровня, если рассмотреть бесконечномерные представления центрально-расширенного дубля янгиана при других значениях центрального заряда, как это было сделано в [23] для деформации универсальной обертывающей аффинной алгебры Ли $U_q(\mathfrak{g})$.

Используя представления свободными полями для сплетающих операторов, можно записать интегральную формулу для произвольной компоненты векторнозначной функции $F(z_1, \dots, z_n)$. Эти интегралы могут быть вычислены для экстремальной компоненты

$$F_{-, \dots, -, +, \dots, +}(z_1, \dots, z_n), \quad \#\{i; \varepsilon_i = -\} = m, \quad \#\{i; \varepsilon_i = +\} = n - m = p, \quad (8.8)$$

и затем все остальные компоненты подсистемы общего спина $(n/2 - p)$ в системе разностных уравнений (8.7) могут быть получены из симметричного свойства (5.1). С этой целью необходимо нормально упорядочить все произведения операторов в $\mathcal{F}(z_1, \dots, z_n)$. Подействовав полученным нормально упорядоченным оператором на вакуумный вектор $|0\rangle$ и осуществив операцию спаривания с дуальным вектором $\langle n, p|$, приходим к соотношению

$$F_{-, \dots, -, +, \dots, +}(z_1, \dots, z_{2n}) = (2\hbar)^{n(n-1)/2} (-\hbar)^m \prod_{i < j} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{z_i - z_j}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{z_i - z_j}{2\hbar}\right)} \times \\ \times \oint_C \cdots \oint_C \frac{du_1}{2\pi i} \cdots \frac{du_m}{2\pi i} \frac{\prod_{i < j}^m (u_i - u_j - \hbar)(u_i - u_j)}{\prod_{k=1}^m \prod_{j=1}^k (u_k - z_j + \hbar) \prod_{j=k}^n (u_k - z_j)}, \quad (8.9)$$

где контур C таков, что точки z_j , $j = 1, \dots, n$, лежат внутри контура, а точки $z_j - \hbar$ находятся вне контура.

Заметим теперь, что интегрирование по переменной u_1 сводится к вычислению вычета в точке $u_1 = z_1 - \hbar$, так как подынтегральное выражение имеет единственный простой полюс в этой точке вне контура C . Значение вычета равно

$$\oint_C \cdots \oint_C \frac{du_2}{2\pi i} \cdots \frac{du_m}{2\pi i} \frac{\prod_{j=2}^m (u_j - z_1 + 2\hbar)}{\hbar \prod_{j=2}^n (z_1 - z_j - \hbar)} \frac{\prod_{2 \leq i < j} (u_i - u_j - \hbar)(u_i - u_j)}{\prod_{k=2}^n \prod_{2 \leq j \leq k} (u_k - z_j + \hbar) \prod_{j \geq k} (u_k - z_j)}.$$

Заметим теперь, что полюсы в точке $z_1 - \hbar$ относительно переменных интегрирования u_k , $k = 2, \dots, m$, сократились. Теперь интегрирование по u_2 сводится к вычислению вычета в точке $z_2 - \hbar$, где подынтегральное выражение имеет простой полюс. Повторяя эту процедуру, на s -м шаге получим промежуточный ответ

$$\oint_C \cdots \oint_C \frac{du_s}{2\pi i} \cdots \frac{du_m}{2\pi i} \frac{(-1)^{s(s-1)/2}}{\hbar^s} \frac{\prod_{k=1}^s \prod_{j=s+1}^m (u_j - z_k + 2\hbar)}{\prod_{k=1}^s \prod_{j=s+1}^n (z_k - z_j - \hbar)} \times \\ \times \frac{\prod_{s+1 \leq i < j} (u_i - u_j - \hbar)(u_i - u_j)}{\prod_{k=s+1}^m \prod_{s+1 \leq j \leq k} (u_k - z_j + \hbar) \prod_{j=k}^n (u_k - z_j)},$$

а на последнем шаге будем иметь

$$\frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{\hbar^m} \prod_{k=1}^m \prod_{j=m+1}^{2n} (z_k - z_j - \hbar)^{-1}. \quad (8.10)$$

Следовательно,

$$F_{-, \dots, -, +, \dots, +}^{(p)}(z_1, \dots, z_{2n}) = (-1)^{n(n-1)/2 + m(m+1)/2} \times \\ \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{z_i - z_j}{2\hbar}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{z_i - z_j}{2\hbar}\right)} \prod_{1 \leq i < j \leq m} (z_i - z_j - \hbar) \prod_{m+1 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j - \hbar). \quad (8.11)$$

Теперь все остальные компоненты вектор-функции $F_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^{(p)}(z_1, \dots, z_n)$ могут быть получены из (8.11) при помощи соотношения симметрии (5.1). Заметим, что приведенное вычисление является полным аналогом вычисления, представленного в главе 9 книги [10] для матричных элементов сплетающих операторов для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$.

Авторы благодарят А. Герасимова, В. Фока, А. Левина и М. Ольшанецкого за плодотворные дискуссии. С. Пакуляк благодарит Физический институт университета г. Бонна, Математический институт Макса Планка (Бонн) и Институт теоретической физики университета г. Ганновера за гостеприимство во время его визита в Германию, где эта работа была закончена.

Исследования Д. Лебедева были поддержаны грантами РФФИ 96-01-01101, INTAS 1010-СТ93-0166, Volkswagen Stiftung и AMSFSU. Исследования С. Пакуляка были поддержаны программой Гейзенберг–Ландау и грантом РФФИ 96-01-01106. Исследования С. Хорошкина были поддержаны грантами РФФИ 96-01-01106 и INTAS 1010-СТ93-0023.

Список литературы

- [1] *В.Г. Дринфельд.* ДАН. 1985. Т. 283. С. 1060–1064.
- [2] *D. Bernard.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 137. P. 191.
- [3] *D. Bernard, A. LeClair.* Nucl. Phys. 1993. V. B399. P. 709–748.
- [4] *F. A. Smirnov.* J. Mod. Phys. 1992. V. A7, Suppl. 1B. P. 813–838.
- [5] *V. G. Drinfeld.* Quantum groups. In: Proc. of the International Congress of Mathematicians. Berkeley, 1987. P. 798–820.
- [6] *S. Khoroshkin, V. Tolstoy.* Lett. Math. Phys. 1996. V. 36. P. 373–402.
- [7] *S. Khoroshkin.* Central Extension of the Yangian Double. In: Collection SMF, Colloque “Septièmes Rencontres du Contact Franco-Belge en Algèbre”, June 1995. Reins; Preprint q-alg/9602031.
- [8] *B. Davies, O. Foda, M. Jimbo, T. Miwa, A. Nakayashiki.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 151. P. 89–153.
- [9] *M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, A. Nakayashiki.* Phys. Lett. 1992. V. A168. P. 256–263.
- [10] *M. Jimbo, T. Miwa.* Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models. In: Conference Board of the Math. Sci., Regional Conference Series in Mathematics, 85, 1995.
- [11] *S. Khoroshkin, D. Lebedev, S. Pakuliak.* Traces of intertwining operators for the Yangian double: Preprint ITEP-TH-8/96, BONN-TH-96-03, q-alg/9605039. Accepted for publication in Lett. Math. Phys..
- [12] *S. Lukyanov.* Commun. Math. Phys. 1995. V. 167. P. 183–226.
- [13] *A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov.* Ann. Phys. (N.Y.) 1979. V. 120. P. 253–291.
- [14] *L. D. Faddeev.* Sov. Sci. Rev. Math. Phys. 1980. V. C1. P. 107–155.
- [15] *S. Khoroshkin, D. Lebedev, S. Pakuliak.* Intertwining Operators for the Central Extension of the Yangian Double: Preprint DFTUZ/95/28, ITEP-TH-15/95, q-alg/9602030. Accepted for publication in Lett. Phys. A.
- [16] *J. Ding, I. B. Frenkel.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 156. P. 277–300.
- [17] *В.Г. Дринфельд.* Новая реализация янгиана и квантовых аффинных алгебр: Препринт ФТИНТ 30–86. Харьков, 1986; ДАН. 1988. Т. 32. С. 212–216.
- [18] *Л.Д. Фаддеев, Н.Ю. Решетихин, Л.А. Тхатадзеян.* Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. С. 178–201.
- [19] *N. Yu. Reshetikhin, M. A. Semenov-Tyan-Shansky.* Lett. Math. Phys. 1990. V. 19. P. 133–142.
- [20] *K. Miki.* Phys. Lett. 1994. V. A186. P. 217–224.
- [21] *I. B. Frenkel, N. Jing.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1988. V. 85. P. 9373–9377.
- [22] *I. M. Frenkel, V. G. Kac.* Invent. Math. 1980. V. 62. P. 23–66.
- [23] *I. B. Frenkel, N. Yu. Reshetikhin.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 146. P. 1–60.

Поступила в редакцию 11.VI.1996 г.

D. R. Lebedev, S. Z. Pakuliak, S. M. Khoroshkin
ZAMOLODCHIKOV–FADDEEV ALGEBRAS
FOR YANGIAN DOUBLE AT LEVEL 1

The representation theory of central extended Yangian double is investigated. The intertwining operators for infinite dimensional representations of $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$, which are deformed analogs of the highest weight representations of the affine algebra $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ at level 1 are constructed. We give bosonized expressions for intertwining operators, verify that they generate an algebra isomorphic to Zamolodchikov–Faddeev algebra for the $SU(2)$ -invariant Thirring model. We compose from them L -operators by Miki's prescription and verify that they coincide with L -operators constructed from universal $\mathcal{R}$ -matrix. The matrix elements of the product of these operators are calculated explicitly and shown to satisfy quantum (deformed) Knizhnik–Zamolodchikov equation associated with universal $\mathcal{R}$ -matrix for $\widehat{DY}(\mathfrak{sl}_2)$.