Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Журавлев, Многомерные нелинейные уравнения
Клейна–Гордона и ривертоны, *ТМФ*, 2018, том 197, но-
мер 3, 356–370

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9502>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:37:51

© 2018 г.

В. М. Журавлев*

МНОГОМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА И РИВЕРТОНЫ

На основе решений системы квазилинейных уравнений первого порядка специального вида (ривертонов) построены классы точных решений многомерных нелинейных уравнений Клейна–Гордона. Полученные решения выражаются через производные от ривертонов по независимым переменным. В результате они являются многозначными и имеют сингулярности в точках ветвления. В общем случае решения могут быть комплексными. Установлена связь между функциональной формой нелинейности уравнений Клейна–Гордона и функциональной зависимостью решений от самих ривертонов и их производных. Исследованы условия, при которых нелинейность уравнения Клейна–Гордона имеет конкретный функциональный вид. Приведены примеры. Установлена связь геометрической структуры ривертонов с начальными условиями.

Ключевые слова: многомерные нелинейные уравнения Клейна–Гордона, многомерные квазилинейные уравнения первого порядка, точные решения, ривертоны.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9502>

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] была установлена связь между решениями многомерных квазилинейных уравнений первого порядка специального вида с многомерными нелинейными (и линейными в частном случае) уравнениями второго порядка в частных производных. Среди нелинейных уравнений второго порядка, решения которых совпадают с решениями квазилинейных уравнений первого порядка, имеются многомерные уравнения типа уравнений электромагнитных волн в диэлектрической среде

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 3.2111.2017/4.6), РФФИ (грант № 16-42-732119 р_офи_м) и с использованием средств субсидии в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

* Научно-исследовательский технологический институт им. С. П. Капицы, Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия. E-mail: zhvictorm@gmail.com

с нелинейной поляризацией произвольного вида, но при отсутствии дисперсии, а также уравнения акустических волн в сжимаемой среде [1]. Среди линейных уравнений второго порядка имеются как многомерные уравнения Даламбера, так и уравнения Лапласа. Сами решения в случае гиперболичности уравнений, названные в статье [1] ривертонами, представляют собой в общем случае опрокидывающиеся волны, распространяющиеся вдоль кривых, называемых базовыми. Геометрическая форма базовых кривых определяется начальными условиями. В работе [1] было показано, что решения типа ривертонов присущи не только перечисленным типам уравнений, но и целому ряду других нелинейных уравнений, например, некоторым многомерным уравнениям Клейна–Гордона и, в частности, многомерным уравнениям Лиувилля. В двумерном случае нелинейные уравнения Клейна–Гордона играют важную роль во многих прикладных задачах, например геометрии и гидродинамике [3], а также в квантовой и калибровочной теории полей [4]–[6] и ОТО [7], [8]. Поэтому исследованию возможности получать точные решения этих уравнений посвящено достаточно много работ [9]–[16]. В силу этого представляет особый интерес возможность расширения класса точных решений на основе ривертонов, полученных в статье [1], для более широкого круга типов нелинейности уравнений Клейна–Гордона в многомерном случае.

Целью настоящей работы является задача распространить развитый в работах [1], [2] метод построения решений типа ривертонов на общий класс многомерных нелинейных уравнений Клейна–Гордона. В работе предлагается общий рецепт построения решений уравнений Клейна–Гордона и строятся примеры точных решений. Также проводится анализ связи геометрической структуры ривертонов с начальными условиями и устанавливается явная связь между геометрией базовой кривой ривертона с начальным распределением неизвестной функции. Эта часть работы важна для использования последующих результатов в прикладных задачах.

2. РИВЕРТОНЫ

В соответствии с общим подходом, развитым в работах [1], [2], рассмотрим систему квазилинейных уравнений относительно функции $\phi(\mathbf{x}, t)$ следующего вида:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = B_\alpha(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $B_\alpha(\phi)$ – компоненты векторного поля $\mathbf{B}(\phi)$, являющиеся дважды дифференцируемыми функциями только от ϕ . Согласно статьям [1], [2] эта система уравнений имеет решения, которые можно записать в форме неявной функции:

$$\phi = H\left(t + \sum_{\alpha=1}^n B_\alpha(\phi)x_\alpha\right), \quad (2)$$

где $H(\xi)$ – произвольная дифференцируемая функция одного аргумента, вообще говоря, комплексного. Неявные функции, заданные соотношением (2), и были названы в работах [1], [2] ривертонами. Доказательство этого факта строится на исследовании условий совместности системы дифференциальных следствий (2) как системы уравнений относительно производных функции $H(\xi)$.

Наиболее существенным свойством ривертонов как решений системы уравнений (1) [1], [2] является то, что функция ϕ также удовлетворяет нелинейному уравнению второго порядка

$$\Delta\phi = \frac{\partial}{\partial t}(R(\phi)\phi_t) \quad (3)$$

и уравнению первого порядка типа эйконала

$$|\nabla\phi|^2 = R(\phi)(\phi_t)^2. \quad (4)$$

Здесь введено обозначение

$$R = |\mathbf{B}|^2 = \sum_{\alpha=1}^n (B_{\alpha}(\phi))^2. \quad (5)$$

Следует отметить, что многозначные решения (2) квазилинейных уравнений (1) удовлетворяют уравнениям второго порядка (3) с нулевой правой частью почти во всех точках координатного пространства, за исключением, возможно, точек ветвления решений, в которых первые производные решений имеют особенности, хотя само решение ограничено и непрерывно. Поскольку в запись уравнений (3) и (4) входит лишь функция $R = |\mathbf{B}|^2$, решениями этих уравнений являются решения вида (2) уравнений (1) со всевозможными функциями $B_{\alpha}(\phi)$, $\alpha = 1, \dots, n$, при заданной функции $R(\phi)$ (5). Кроме этого, при $R = \text{const}$ уравнение (3) оказывается линейным и, следовательно, его решениями являются все возможные линейные суперпозиции решений (2) с произвольными постоянными коэффициентами. Специфика решений типа ривертонов для линейных уравнений Даламбера, Лапласа (и даже для некоторых типов уравнений диффузии [17]) заключается в том, что они состоят из нескольких отдельных листов, которые в силу принципа линейной суперпозиции являются решениями уравнений по отдельности. Однако эти решения “сцеплены” между собой в точках ветвления и не могут существовать друг без друга. Таким образом, ривертоны для линейных уравнений представляют собой особый класс решений, которые нельзя получить с помощью принципа линейной суперпозиции из отдельных простых решений, получаемых с помощью, например, разделения переменных. Таким способом можно найти в заданной области пространства-времени решения в форме отдельных листов ривертона, но не все листы одновременно. Это создает особую ситуацию при решении начальных и граничных задач.

Заметим также, что в класс ривертонов формально попадают и решения типа бегущей волны, которые чаще всего являются предметом исследований нелинейных уравнений. А именно, в случае если компоненты поля $\mathbf{B}$ постоянны, т.е. не зависят от ϕ , то выражение (2) представляет собой решение в форме бегущей волны вдоль направления, заданного постоянным вектором $\mathbf{B}$. С этой точки зрения $\mathbf{B}(\phi)$ в общем случае можно рассматривать как локальный волновой вектор ривертона.

Для описания геометрической структуры ривертонов введем следующее обозначение:

$$s = \sum_{\alpha=1}^n n_{\alpha}(\phi)x_{\alpha},$$

где $n_{\alpha}(\phi) = B_{\alpha}(\phi)R^{-1/2}$ – компоненты единичного векторного поля $\mathbf{n}(\phi)$, всюду коллинеарного $\mathbf{B}$. Тогда формулу (2) можно записать в виде

$$t + R(\phi)s = h(\phi), \quad (6)$$

где $h(\phi)$ – функция, обратная к $H(\xi)$. Сворачивая (1) с компонентами поля $\mathbf{n}(\phi)$, эти уравнения можно записать в виде

$$\sum_{\alpha=1}^n n_{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} = R(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Это квазилинейное уравнение имеет характеристики, которые вычисляются из решения системы уравнений

$$\frac{dx_{\alpha}}{ds} = n_{\alpha}(\phi), \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = R(s) \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Первая часть этой системы определяет кривую в пространстве, вдоль которой распространяется волна и к которой ее фронт всюду ортогонален. Эта кривая и называется базовой. Для того чтобы связать базовую кривую с начальными условиями, удобно перейти от параметра s к значениям самой функции ϕ , которые также параметризуют точки базовой кривой. Из выражения (6) для каждого значения t имеем

$$s = \frac{h(\phi) - t}{R(\phi)}. \quad (7)$$

В результате уравнения кривой принимают вид

$$\frac{dx_{\alpha}}{d\phi} = n_{\alpha}(\phi) \frac{h'(\phi)R(\phi) - (h(\phi) - t)R'(\phi)}{R^2(\phi)}, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Интегрируя это уравнение, приходим к соотношениям, определяющим явный вид точек кривой:

$$x_{\alpha}(\phi) = X_{\alpha}(\phi) + tV_{\alpha}(\phi) + x_{\alpha}^{(0)}, \quad (9)$$

где $x_{\alpha}^{(0)}$ – постоянные интегрирования и введены обозначения

$$X_{\alpha}(\phi) = \int n_{\alpha}(\phi) \frac{h'(\phi)R(\phi) - h(\phi)R'(\phi)}{R^2(\phi)} d\phi, \quad V_{\alpha}(\phi) = \int n_{\alpha}(\phi) \frac{R'(\phi)}{R^2(\phi)} d\phi.$$

Эти соотношения определяют в каждый момент времени геометрическую структуру базовой кривой из функциональной формы компонент поля $\mathbf{B}(\phi)$ и функции $h(\phi)$ (или $H(\xi)$), которые связаны с начальными условиями. Отсюда, в частности, следует, что базовая кривая не меняет своей формы со временем, если только $R'(\phi) = 0$. В противном случае со временем базовая кривая меняется в соответствии с формулой (9).

Установим теперь то, какая информация требуется для того, чтобы определить геометрическую структуру ривертона из начальных и граничных условий. Введем обозначения

$$\Phi_{\alpha}(x) = \phi(\mathbf{x}, 0)|_{x^1=0, x^2=0, \dots, x^{\alpha-1}=0, x^{\alpha}=x, x^{\alpha+1}=0, \dots, x^n=0}, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Функции $\Phi_{\alpha}(x)$ – функции одного аргумента x , которые представляет собой изменение $\phi(\mathbf{x}, t)$ вдоль координатной прямой с индексом α . Рассматривая уравнение (2) на оси координат с номером α при $t = 0$, находим, что

$$B^{\alpha}(\Phi_{\alpha}(x)) = \frac{1}{x} h(\Phi_{\alpha}(x)), \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Таким образом, функциональный вид компонент поля $\mathbf{B}(\phi)$ определяется в начальный момент времени распределением поля $\phi(\mathbf{x}, 0)$ вдоль координатных осей. Для вычисления этой функциональной зависимости необходимо обращать функции $\phi = \Phi_\alpha(x)$: $x = \Phi_\alpha^{-1}(\phi)$, и знать функцию $h(\phi)$. Эта функция $h(\phi)$ вычисляется из условия

$$t = h(\phi(\mathbf{0}, t))$$

или

$$\phi(\mathbf{0}, t) = H(t),$$

т.е. с помощью изменения функции ϕ в начале координат со временем. Таким образом, доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Неявно заданная соотношениями (2) или (6) функция $\phi(\mathbf{x}, t)$ является решением системы квазилинейных уравнений (1), а также уравнений (3) и (4) почти во всех точках координатного пространства, за исключением, возможно, точек ветвления многозначных решений. Каждое решение (2) уравнений (3) и (4) отвечает определенной системе уравнений (1), функциональный вид компонент поля $\mathbf{B}(\phi)$ которой определяется распределением функции $\phi(\mathbf{x}, t)$ вдоль осей координат, а функция $H(\xi)$ – распределением поля вдоль оси времени в начале координат.*

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть ϕ – ривертон, т.е. решение системы уравнений (1) вида (2). Для удобства введем еще одно обозначение, полагая $u = \phi_t$. Тогда можно формально записать представление компонент градиента функции ϕ в следующем виде:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} = B_\alpha(\phi)u. \quad (12)$$

Продифференцируем последнее уравнение по t , предполагая здесь и далее дифференцируемость компонент поля $\mathbf{B}(\phi)$ по ϕ . В результате получаем следующее соотношение для функции $u(\mathbf{x}, t)$:

$$u_{,\alpha} = \frac{\partial}{\partial t}(B_\alpha u) = B'_\alpha u^2 + B_\alpha u_t, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Пусть $w = w(\phi, u)$ – некоторая дифференцируемая функция двух аргументов ϕ и u , не являющаяся постоянной. Используя выражения (1) и (13), получаем систему соотношений

$$w_{,\alpha} = B'_\alpha F(u) + B_\alpha w_{,t}, \quad (14)$$

где $F(u) = u^2 w_{,u}$. Здесь и далее

$$w_{,u} = \frac{\partial w(\phi, u)}{\partial u}, \quad w_{,\phi} = \frac{\partial w(\phi, u)}{\partial \phi}.$$

Вычисляя теперь дивергенцию от обеих частей уравнения (14), получаем тождество

$$\Delta w = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (B'_\alpha F(u) + B_\alpha w_t). \quad (15)$$

Раскрывая скобки в правой части, уравнение можно привести к следующей форме:

$$\Delta w - R w_{,tt} = R'' u F(u) + \Omega_1^2 (F'(u) u^2 - 2uF) + \frac{1}{2} R' (2F_{,u} u_t + F_{,\phi} u - 2u w_{,t}), \quad (16)$$

где введено обозначение $\Omega_1^2(\phi) = \sum_{\alpha=1}^n (B'_\alpha)^2$. Здесь были учтены тождества

$$\sum_{\alpha=1}^n B^\alpha B'^\alpha = \frac{1}{2} R', \quad \sum_{\alpha=1}^n B^\alpha B''^\alpha = \frac{d}{d\phi} \sum_{\alpha=1}^n B'^\alpha B^\alpha - \sum_{\alpha=1}^n B'^\alpha B'^\alpha = \frac{1}{2} R'' - \Omega^2.$$

Кроме этого, из системы (14) следует также уравнение типа эйконала

$$\sum_{\alpha=1}^n (w_{,\alpha})^2 - R(w_{,t})^2 = \Omega^2(F(u))^2 + R'F(u)w_t. \quad (17)$$

Смысл полученного результата состоит в том, что если $\phi(\mathbf{x}, t)$ – решение системы уравнений (1) для заданного векторного поля $\mathbf{B}(\phi)$ как функции ϕ , то любая дифференцируемая функция $w = w(\phi, \phi_t)$ как функция $\mathbf{x}$ и t удовлетворяет уравнениям (16) и (17). Поскольку функция ϕ задана неявным образом с помощью соотношения (2), то функцию $u(x, t)$ следует вычислять из того же соотношения (2). Дифференцируя его по t , находим

$$u = \phi_t = \frac{H'(\xi)}{1 - H'(\xi) \sum_{\alpha=1}^n B'_\alpha(\phi) x_\alpha}, \quad \xi = t + \sum_{\alpha=1}^n B_\alpha(\phi) x_\alpha. \quad (18)$$

В эти соотношения необходимо еще подставить решение для ϕ из формулы (2). Следует отметить, что функция u как производная по переменной t от ривертонна имеет сингулярность в точке ветвления (или опрокидывания волны). Следовательно, и все функции $w(\phi, \phi_t)$ также имеют сингулярности в точках ветвления, что является типичным свойством решений уравнений (16) и (17).

Коэффициенты уравнений (16) и (17) являются функциями ϕ . На практике больший интерес представляют уравнения с постоянными коэффициентами. Покажем, что при определенном выборе поля $\mathbf{B}(\phi)$ эти уравнения принимают вид нелинейных уравнений Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим случай векторного поля $\mathbf{B}(\phi)$, имеющего постоянную длину:

$$|\mathbf{B}|^2 = R(\phi) = \sum_{\alpha=1}^n (B^\alpha(\phi))^2 = c^{-2} = \text{const}, \quad R' = 0. \quad (19)$$

Как следует из уравнения (3), в этом случае функции ϕ и $u = \phi_t$ удовлетворяют уравнению Даламбера. Уравнение же (16) принимает общий вид n -мерного нелинейного уравнения Клейна–Гордона

$$\Delta w - c^{-2} w_{,tt} = \Omega_1^2(\phi) (F'(u) u^2 - 2uF(u)) = G(w), \quad (20)$$

ТАБЛИЦА 1. Список нелинейных функций $E(w)$ в уравнении (23) и $G(w)$ в уравнении (20).

$w(p)$	$E(w)$	$G(w)$
$\ln p$	e^{2w}	$-e^{2w}$
p^{-1}	1	$2w^{-1}$
p^n	$n^2 w^{2(n+1)/n}$	$n(n-1)w^{(n+2)/n}$
p	$2w^4$	0
p^2	$4w^3$	$2w^2$
e^p	$w^2(\ln w)^4$	$w(\ln w)^4$

если выполнено условие, которое можно записать как уравнение для w

$$u^4 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{G(w)}{\Omega_1^2(\phi)}. \quad (21)$$

Это уравнение можно привести к форме, не содержащей функцию $\Omega_1(\phi)$, вводя новую функцию $p = u\Omega_1(\phi)$ вместо u . Тогда уравнение для w принимает вид

$$p^4 \frac{\partial^2 w}{\partial p^2} = G(w). \quad (22)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении этих условий уравнение эйконала (17) приводится к уравнению

$$|\nabla w|^2 - c^{-2}(w_{,t})^2 = \Omega_1^2(\phi)(F(\phi, u))^2 = p^4(w_{,p})^2 = E(w). \quad (23)$$

Выбирая функции $w = w(\phi, u)$ различными способами, получаем разные формы уравнений (20) и (23). В частности, полагая $w = \ln p$, имеем $F(\phi, u) = u = \Omega_1^{-1}(\phi)e^w$. Эта подстановка приводит к многомерному уравнению Лиувилля

$$\Delta w - c^{-2}w_{,tt} = -e^{2w}. \quad (24)$$

Соответствующее уравнение эйконала принимает вид

$$|\nabla w|^2 - c^{-2}(w_{,t})^2 = e^{2w}. \quad (25)$$

При выборе $w = p^{-1}$ получаем $F(\phi, u) = -\Omega_1^{-1}(\phi)$, и нелинейное уравнение Клейна–Гордона записывается следующим образом:

$$\Delta w - c^{-2}w_{,tt} = \frac{2}{w}, \quad (26)$$

а соответствующее уравнение эйконала записывается как

$$|\nabla w|^2 - c^{-2}(w_{,t})^2 = w^{-2}. \quad (27)$$

В табл. 1 приведен вид функции $w(\phi, u)$ для некоторых других типов уравнений Клейна–Гордона и соответствующего уравнения эйконала.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть ϕ – ривертон, т. е. решение уравнения (1). Тогда многомерное нелинейное уравнение Клейна–Гордона

$$\Delta w - c^{-2}w_{,tt} = G(w) \quad (28)$$

имеет решения $w = w(p(\mathbf{x}, t))$, где $w(p)$ – какое-либо решение уравнения (22) относительно $p = \phi_t |\mathbf{B}'(\phi)|$ при условии (19) $R = |\mathbf{B}|^2 = c^{-2} = \text{const}$. Проведенные выше построения доказывают данное утверждение полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку полученные решения представляют собой производные от ривертонна по переменной t , то в случае общего положения решения уравнений (28) имеют сингулярности в точках ветвления. Это замечание относится ко всем решениям нелинейных уравнений Клейна–Гордона, выражающихся через производные любого порядка от ривертонных $\phi(\mathbf{x}, t)$, которые строятся далее.

Укажем также на то, что примеры из табл. 1 являются лишь частными случаями решений уравнения (22). Было бы полезно иметь возможность решать это уравнение для заданной функции $G(w)$ полностью. Однако уравнение (22) при своей внешней простоте не сводится к автономному уравнению по переменной p . В результате пока не удается вычислить общие решения этого уравнения даже в тех случаях, для которых известны частные решения из табл. 1 и аналогичные им решения.

Исключение составляет линейная функция $G(w) = \lambda^2 w + \mu$, где λ и μ – постоянные. Для такой функции $G(w)$ уравнение (22) после замен $r = p^{-1}$ и $f = rw$ приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$f'' = \lambda^2 f + \mu r,$$

решениями которого являются функции

$$f = C_1 e^{\lambda r} + C_2 e^{-\lambda r} - \frac{\mu}{\alpha^2} r,$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. Отсюда находим, что решения для $w(p)$ имеют вид

$$w = p(C_1 e^{\alpha/p} + C_2 e^{-\alpha/p}) - \frac{\mu}{\alpha^2} \frac{1}{p}. \quad (29)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Многомерные линейные уравнения Клейна–Гордона

$$\Delta w - c^{-2}w_{,tt} = \alpha^2 w, \quad (30)$$

где λ и μ – произвольные постоянные, имеют решения (29) при условии $R = |\mathbf{B}|^2 = c^{-2} = \text{const}$ (19) с функцией $p = \sqrt{|\mathbf{B}'(\phi)|^2} \phi_t$, в которой ϕ является ривертонном (2).

Уравнение Клейна–Гордона (30) для случая $n = 3$ в квантовой теории поля известно как уравнение для волновой функции массивного скалярного поля [6], [18]. Утверждение 3 указывает на существование среди решений этого линейного уравнения специфических “сцепленных” решений (состояний), связанных с решениями типа ривертонных.

5. НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

Общую схему вывода решений уравнений типа Клейна–Гордона можно существенно обобщить. Формально вместо функции $w(\phi, \phi_t)$ можно рассматривать в рамках аналогичной схемы функции следующего вида:

$$W = W(u_0, u_1, u_2, \dots, u_M) = W(\mathbf{u}), \quad (31)$$

где введены обозначения $\mathbf{u} = \{u_0, u_1, \dots, u_M\}$ и

$$u_0 = \phi, \quad u_k = \frac{\partial^k \phi}{\partial t^k} = \frac{\partial u_{k-1}}{\partial t}, \quad k = 1, \dots, M.$$

Дифференцируя по t систему (1) k раз, имеем

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} = \sum_{p=1}^k B_\alpha^{[p]}(\phi) F_p^{[k]}(u_1, \dots, u_{k-p+1}) + B_\alpha u_{k+1}, \quad (32)$$

где $F_k(\mathbf{u})$ – полиномы степени не выше M переменных $u_1, u_2, \dots, u_{k-p+1}$, вычисляемые из рекуррентных соотношений

$$F_{k+1}^{[k+1]} = u_1 F_k^{[k]}, \quad F_p^{[k+1]} = u_1 F_{p-1}^{[k]} + \sum_{q=1}^{k-p+1} F_{p,q}^{[k]} u_{q+1}, \quad p = 2, \dots, k-1,$$

$$F_1^{[k+1]} = \sum_{q=1}^k F_{1,q}^{[k]} u_{q+1} + u_1 u_{k+1},$$

начиная с $k = 1$, с начальным условием $F_1^{[1]} = u_1^2$. Здесь $F_{p,q}^{[k]} = \partial F_p^{[k]} / \partial u_q$. В частности,

$$F_2^{[2]} = u_1^3, \quad F_1^{[2]} = 3u_1 u_2, \quad F_3^{[3]} = u_1^4, \quad F_2^{[3]} = 6u_1^2 u_2, \quad F_1^{[3]} = 3u_2^2 + 4u_1 u_3.$$

Используя эти соотношения, находим, что

$$\frac{\partial W}{\partial x_\alpha} = \sum_{k=1}^M \sum_{p=1}^k B_\alpha^{[p]}(\phi) F_p^{[k]}(u_1, \dots, u_{k-p+1}) W_{,k} + B_\alpha \frac{\partial W}{\partial t}, \quad (33)$$

где

$$W_{,k} = \frac{\partial W}{\partial u_k}, \quad k = 0, \dots, M.$$

Если ϕ – ривертон (2), то (33) является тождеством. Вычисляя дивергенцию от правой и левой частей системы (33), можно получить уравнение следующего вида:

$$\Delta W - R W_{tt} = G(\mathbf{u}, W_{,0}, W_{,1}, \dots, W_{,M}, u_{M+1}). \quad (34)$$

Правая часть этого уравнения содержит производные функции W только по переменным $u_0, u_1, \dots, u_M$ порядка не выше второго. В результате можно получить условия на функциональный вид $W(\mathbf{u})$ и скалярные произведения вида $\Omega_{km}(\phi) = (\mathbf{B}^{[k]}, \mathbf{B}^{[m]})$, зависящие только от ϕ , при которых уравнение (34) принимает подходящий вид, например – нелинейного уравнения Клейна–Гордона или, возможно, многомерного нелинейного телеграфного уравнения. Последнее возможно в силу того, что правая часть (34) содержит в общем случае функцию u_{M+1} . В общем виде анализ таких уравнений затруднителен. Поэтому мы приводим только один пример в размерности $M = 2$.

6. УРАВНЕНИЯ ТИПА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА ДЛЯ $M = 2$

В случае $M = 2$ уравнение (33) имеет вид

$$W_{,\alpha} = B''_{\alpha} u^3 W_{,v} + B'_{\alpha} (W_{,u} u^2 + 3uv W_{,v}) + B_{\alpha} W_t, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (35)$$

где для сокращения записи обозначено $u = u_1$, $v = u_2$. Для удобства введем также обозначения

$$H_2(\phi, u, v) = u^3 W_{,v}, \quad H_1 = u^2 W_{,u} + 3uv W_{,v}. \quad (36)$$

Вычисляя дивергенцию от поля с компонентами $w_{,\alpha}$, получаем общее уравнение

$$\begin{aligned} \Delta w - R w_{tt} = & \Omega_{22} H_{2,v} u^3 + R''' u H_2 + \frac{1}{2} \Omega'_{11} (H_{2,u} u^2 + 3 H_{2,v} uv + H_{1,v} u^3 - 6u H_2) + \\ & + R'' (u H_1 + H_{2,v} v_t + H_{2,u} v) + \frac{1}{2} R'(\phi) (v H_{1,u} + H_{1,v} v_t + u w_t) + \\ & + \Omega_{11} (u^2 H_{1,u} + 3uv H_{1,v} - 2u H_1 - 2 H_{2,v} v_t - 2 H_{2,u} v - 2 H_{2,\phi} u). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь были учтены следующие соотношения: $\Omega_{30} = (R''' - 3\Omega'_{11})/2$, $\Omega_{21} = \Omega'_{11}/2$, $\Omega_{20} = (R'' - 2\Omega_{11})/2$, $\Omega_{10} = R'/2$. Для того чтобы уравнение было уравнением относительно только W , в первую очередь необходимо потребовать выполнения условия (19). В этом случае уравнение упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta w - c^{-2} w_{tt} = & \Omega_{22} H_{2,v} u^3 + \frac{1}{2} \Omega'_{11} (H_{2,u} u^2 + 3 H_{2,v} uv + H_{1,v} u^3 - 2u H_2) + \\ & + \Omega_{11} (u^2 H_{1,u} + 3uv H_{1,v} - 2u H_1) - F_t, \end{aligned}$$

где $F = 2\Omega_{11} H_2$.

Последнее уравнение содержит в правой части функции u , v и W в достаточно сложной комбинации. Поэтому это уравнение можно рассматривать в сочетании с аналогичными уравнениями только для функций $u = \dot{\phi}$ и $v = \dot{\phi}$, что приводит по типу нелинейности к достаточно разнообразным системам уравнений относительно этих трех функций. Если же ставить задачу вычисления формы уравнений только относительно функции $W(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$, то уравнение (37) выбором компонент поля $\mathbf{B}(\phi)$ можно превратить как в уравнения типа нелинейных уравнений Клейна–Гордона, так и в нелинейные уравнения телеграфного типа. Рассмотрим далее именно эту задачу.

7. РАСШИРЕНИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Простейший способ превратить (37) в нелинейное уравнение Клейна–Гордона – это потребовать выполнения еще одного соотношения для компонент векторного поля $\mathbf{B}(\phi)$, а именно

$$\Omega_{11} = (\mathbf{B}', \mathbf{B}') = 0, \quad (38)$$

и требования на функциональный вид $W(\phi, u, v)$

$$\Omega_{22} H_{2,v} u^3 = G(W). \quad (39)$$

В этом случае уравнение (37) принимает вид

$$\Delta W - c^{-2}W_{tt} = G(W). \quad (40)$$

Уравнение (39) после подстановки в него $H_2(u, v)$ из (36) можно записать в форме

$$\frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = \frac{1}{u^3 \Omega_{22}} G(W). \quad (41)$$

Поскольку это уравнение второго порядка содержит производные только от v , то оно оказывается автономным по этой переменной, а зависимость его решений от u и ϕ является параметрической. Это существенно расширяет класс типов нелинейности $G(W)$ в нелинейном уравнении Клейна–Гордона (40), для которых можно получить решения в явном виде. Как хорошо известно, первый интеграл уравнения (41) находится без труда и имеет вид

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 - \frac{1}{u^3 \Omega_{22}} U(W), \quad (42)$$

где $U(W) = \int G(W) dW$. Второй интеграл находится из последнего соотношения:

$$I_2 = \pm u^{3/2} \sqrt{\Omega_{22}} \int \frac{dW}{\sqrt{2I_1 u^3 S_{22}(\phi) + 2U(W)}} - v. \quad (43)$$

Как следствие можно получить полные решения уравнения (41), а в результате – и нелинейного уравнения Клейна–Гордона, в классе функций $W(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$. В частности, теперь можно получить решения для многомерного уравнения синус-Гордона в классе эллиптических функций относительно $W(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$ с функцией ϕ в классе ривертонов.

8. ПРИМЕР УРАВНЕНИЯ ТЕЛЕГРАФНОГО ТИПА

Условиями превращения уравнения (38) в уравнение телеграфного типа относительно только W является выполнение двух соотношений для функциональной зависимости $W(\phi, u, v)$, а именно:

$$\begin{aligned} F &= 2\Omega_{11}H_2 = U(W), \\ \Omega_{22}H_{2,v}u^3 + \frac{1}{2}\Omega'_{11}(H_{2,u}u^2 + 3H_{2,v}uv + H_{1,v}u^3 - 2uH_2) + \\ &+ \Omega_{11}(u^2H_{1,u} + 3uvH_{1,v} - 2uH_1) = G(W). \end{aligned} \quad (44)$$

Первое из этих уравнений имеет первый порядок и легко интегрируется в квадратурах. Однако функциональный вид решения первого уравнения этой системы относительно W для почти всех вариантов выбора вида функции $U(W)$ (из тех, что удалось проверить) совместим со вторым уравнением этой системы только при определенных ограничениях на вид компонент поля $\mathbf{B}(\phi)$. Приведем пример выбора функции $U(W)$, для которой второе уравнение системы (44) совместно с первым. Этот пример соответствует линейной функции $U(W) = \mu W$, где μ – постоянная. В этом случае решение первого уравнения можно записать в форме $W = P(u, \phi)e^{\mu/(2\Omega_{11}u^3)}$,

где $P(u, \phi)$ – произвольная функция аргументов ϕ и u . Подставляя это выражение во второе уравнение, приходим к уравнению

$$4u^4\Omega_{11}^3 \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + 2u^2\mu\Omega'_{11}\Omega_{11} \frac{\partial P}{\partial u} + P(\Omega_{22}\mu^2 - 2u\mu\Omega'_{11}\Omega_{11}) = 4\Omega_{11}^2 P \frac{G(W)}{W}.$$

Поскольку $P(u, \phi)$ не зависит от переменной v , то необходимым условием существования решений этого уравнения является следующий выбор $G(W)$:

$$G(W) = \nu W, \quad \nu = \text{const.} \quad (45)$$

Если эти условия выполнены, то уравнение для функции P становится линейным уравнением второго порядка

$$4u^4\Omega_{11}^3 \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + 2u^2\mu\Omega'_{11}\Omega_{11} \frac{\partial P}{\partial u} + P(\Omega_{22}\mu^2 - 2u\mu\Omega'_{11}\Omega_{11}) = 4\nu\Omega_{11}^2 P. \quad (46)$$

По аналогии с (21), для линейного уравнения Клейна–Гордона (см. утверждение 3) линейное уравнение (46) сводится с помощью замены переменных $r = (\Omega_{11}u)^{-1}$ и $S = r(u)P(\phi, u)$ к уравнению

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - K(\phi) \frac{\partial S}{\partial r} + \left(\Lambda(\phi) - \frac{M(\phi)}{r} \right) S = 0,$$

интегрируемому в классе специальных функций. Здесь введены обозначения

$$K(\phi) = \frac{\mu\Omega'_{11}}{2\Omega_{11}}, \quad \Lambda(\phi) = \frac{\mu^2\Omega_{22} - \nu\Omega_{11}^2}{4\Omega_{11}}, \quad M(\phi) = \frac{\mu\Omega'_{11}}{2\Omega_{11}}.$$

Линейное телеграфное уравнение, соответствующее (45), имеет вид

$$\Delta W - c^{-2}W_{tt} = \nu W - \mu W_t.$$

Более сложные примеры требуют расширенного исследования совместности системы (44), что выходит за рамки данной работы.

9. СТРУКТУРА ПОЛЯ В В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим, какие ограничения вносят в структуру решений нелинейных уравнений Клейна–Гордона условия (19) и (38). Можно видеть, что при $n > 2$ число компонент поля превышает число условий (19). Поэтому в этих размерностях всегда существуют поля $\mathbf{B}(\phi)$, которые удовлетворяют этим условиям. Рассмотрим отдельно случай $n = 2$. В этом случае для выполнения условия (19) компоненты поля можно выбрать в следующем виде:

$$B^1(\phi) = c^{-1} \cos(\Theta(\phi)), \quad B^2(\phi) = c^{-1} \sin(\Theta(\phi)).$$

Отсюда находим, что поле $\mathbf{B}(\phi)$ такого вида позволяет вычислить решения $w = w(\phi, \dot{\phi})$ уравнения (22) как функции от ϕ и $\dot{\phi}$, которые как функции от $\mathbf{x}$ и t являются решением нелинейного уравнения Клейна–Гордона (28). Компоненты поля $\mathbf{B}(\phi)$ должны иметь общий вид

$$B^1(\phi) = c^{-1} \cos(c\Omega\phi - \phi_0), \quad B^2(\phi) = c^{-1} \sin(c\Omega\phi - \phi_0),$$

где ϕ_0 – постоянная интегрирования. Соответственно, решение для ϕ можно найти в форме неявной функции (2)

$$\phi = H(t + c^{-1}(x \cos(c\Omega\phi - \phi_0) + y \sin(c\Omega\phi - \phi_0))), \quad (47)$$

где $H(\xi)$ – произвольная дифференцируемая функция одного аргумента. Для построения частного решения представим последнее решение в следующей форме:

$$t + c^{-1}(x \cos(c\Omega\phi - \phi_0) + y \sin(c\Omega\phi - \phi_0)) = h(\phi), \quad (48)$$

где $h(\phi)$ – функция, обратная к функции $H(\xi)$. Выберем функцию $h(\phi)$ в виде

$$h(\phi) = \tau \cos(c\Omega\phi - \phi_0), \quad \tau = \text{const.}$$

Ведem обозначение $q = \cos(c\Omega\phi - \phi_0)$. Тогда соотношение (48) можно переписать как

$$t + c^{-1}(xq + y\sqrt{1 - q^2}) = \tau q.$$

Разрешая это уравнение относительно q , приходим к следующему решению для ϕ :

$$\phi = \frac{1}{c\Omega} \arccos(\Theta_{\pm}(x, y, t)), \quad (49)$$

где

$$\Theta_{\pm}(x, y, t) = \phi_0 + \frac{1}{(x - \tau c)^2 + y^2} \left(ct(x - \tau c) \pm \sqrt{y^4 + t^2 c^2 ((x - \tau c)^2 - t^2 c^2)} \right).$$

Вычисляя теперь выражение для $\Omega_{11} = (\mathbf{B}', \mathbf{B}')$, находим

$$B'^1 = -c^{-1} \sin \Theta \Theta', \quad B'^2(\phi) = c^{-1} \cos \Theta \Theta'.$$

Отсюда получаем, что

$$|\mathbf{B}'|^2 = c^{-2}(\Theta')^2 = \Omega^2 = \Omega_{11}. \quad (50)$$

Для того чтобы можно было получить нетривиальные решения вида $W(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$, в условии (50) необходимо потребовать равенство $\Omega_{11} = 0$. Это возможно только в случае $\Theta'(\phi) = 0$, что приводит к независимости $\mathbf{B}$ от ϕ и вырождению нелинейных уравнений Клейна–Гордона в уравнение Даламбера. Таким образом, в размерности $n = 2$ решения типа $w = w(\phi, \dot{\phi})$ существуют, а решения типа $W(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$ (по крайней мере рассмотренного здесь типа) – нет.

10. СТРУКТУРА ПОЛЯ $\mathbf{B}(\phi)$ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим теперь условия (19) в размерности $n = 3$. Это условие автоматически выполняется при следующей параметризации компонент поля $\mathbf{B}(\phi)$:

$$B^1 = c^{-1} \cos \Psi \sin \Theta, \quad B^2 = c^{-1} \sin \Psi \sin \Theta, \quad B^3 = c^{-1} \cos \Theta. \quad (51)$$

Здесь Θ и Ψ – произвольные функции переменной ϕ . Следовательно, в размерности $n = 3$ имеется множество решений с заданной функцией $G(w)$ функциональной зависимостью $w = w(\phi, \dot{\phi})$, которое имеет два произвольных функциональных параметра $\Theta(\phi)$ и $\Psi(\phi)$.

Условие (38) теперь сводится к уравнению

$$\sin^2 \Theta (\Psi')^2 + (\Theta')^2 = 0. \quad (52)$$

Отсюда находим, что

$$\Psi(\phi) = \pm i \int \frac{\Theta'(\phi)}{\sin(\Theta(\phi))} d\phi = \pm \frac{i}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos(\Theta(\phi))}{1 + \cos(\Theta(\phi))} \right|. \quad (53)$$

Следовательно, решение нелинейного уравнения Клейна–Гордона с функцией $W(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$, удовлетворяющей уравнению (41) при выполнении условия (38), определяется ривертонами с одним произвольным функциональным параметром Θ . Но в этом случае для многих функций $G(W)$ класс решений расширяется за счет возможности явно решить уравнение (41).

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что существуют функциональные преобразования решений типа ривертонов систем многомерных квазилинейных уравнений первого порядка (1), которые приводят к решениям многомерных уравнений Клейна–Гордона и некоторых других типов уравнений. В отличие от набора частных примеров такого рода, приведенных в работе [1], в настоящей работе развит систематический метод построения таких преобразований, которые можно представить в виде функциональной зависимости решений нелинейных уравнений Клейна–Гордона от ривертонов (2) и производных по переменной t первого порядка и выше. Вводя дополнительные ограничения на функциональный вид компонент поля $\mathbf{B}(\phi)$, можно получать решения уравнений различного типа. Наиболее важным результатом работы является то, что решения такого типа, построенные с помощью ривертонов, оказываются достаточно богатым подмножеством множества всех решений уравнений типа нелинейных уравнений Клейна–Гордона в координатной размерности пространства $n > 1$. При этом следует специально отметить, хотя это делалось и в тексте статьи, что все построенные с помощью развитого подхода решения нелинейных уравнений типа Клейна–Гордона имеют сингулярности в точках ветвления ривертона и могут оказаться комплексными. Наличие сингулярностей является типичным свойством решений этого типа.

Как было показано в разделе 1, конкретный тип решения в виде ривертонов можно определять с помощью специального набора начальных и граничных условий, задавая распределение неизвестной функции в начальный момент времени вдоль всех осей координат и распределения поля вдоль оси времени в начале координат. Такой подход единственным образом связывает произвольные функциональные параметры задачи с начальными условиями для неизвестной функции.

Список литературы

- [1] В. М. Журавлев, “Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями”, *ТМФ*, **174:2** (2013), 272–284.
- [2] В. М. Журавлев, “Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов”, *ТМФ*, **186:3** (2016), 371–385.

- [3] И. Н. Векуа, *Основы тензорного анализа и теории ковариантов*, Наука, М., 1978.
- [4] H. Berestycki, P.-L. Lions, “Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **82**:4 (1983), 313–345.
- [5] F. Gungor, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**:2 (1998), 697–706.
- [6] Ю. П. Рыбаков, В. И. Санюк, *Многомерные солитоны*, Изд-во РУДН, М., 2001.
- [7] V. M. Zhuravlev, D. A. Kornilov, E. P. Savelova, “The scalar fields with negative kinetic energy, dark matter and dark energy”, *Gen. Rel. Grav.*, **36**:7 (2004), 1719–1736.
- [8] V. M. Zhuravlev, D. A. Kornilov, E. P. Savelova, “Dark matter, dark energy and field of negative energy.”, *Gravit. Cosmol.*, **12**:4 (2006), 283–288.
- [9] F. Gungor, “Exact solutions of a $(2 + 1)$ -dimensional nonlinear Klein–Gordon equation”, *Phys. Scr.*, **61** (2000), 385–390, arXiv: solv-int/9810019.
- [10] В. М. Журавлев, “Точные решения уравнений Лиувилля в многомерных пространствах”, *ТМФ*, **120**:1 (1999), 3–19.
- [11] J. Bellazzini, V. Benci, C. Bonanno, E. Sinibaldi, “Hylomorphic solitons in the nonlinear Klein–Gordon equation”, *Dyn. Partial Differ. Equ.*, **6**:4 (2009), 311–334, arXiv: 0810.5079.
- [12] М. Н. Кузнецова, “О нелинейных гиперболических уравнениях, связанных дифференциальными подстановками с уравнением Клейна–Гордона”, *Уфимск. матем. журн.*, **4**:3 (2012), 86–103.
- [13] R. Côte, C. Muñoz, “Multi-solitons for nonlinear Klein–Gordon equations”, *Forum Math. Sigma*, **2** (2014), e15, 38 pp., arXiv: 1210.7953.
- [14] R. Côte, Y. Martel, “Multi-travelling waves for the nonlinear Klein–Gordon equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **370**:10 (2018), 7461–7487, arXiv: 1612.02625.
- [15] J. Bellazzini, M. Ghimenti, S. Le Coz, “Multi-solitary waves for the nonlinear Klein–Gordon equation”, *Comm. Partial Differ. Equ.*, **39**:8 (2014), 1479–1522, arXiv: 1302.3814.
- [16] Е. Г. Екомасов, Р. К. Салимов, “О локализованных долгоживущих трехмерных решениях нелинейного уравнения Клейна–Гордона с потенциалом дробной степени”, *Письма в ЖЭТФ*, **100**:7 (2014), 532–534.
- [17] В. М. Журавлев, В. М. Морозов, “О многозначных решениях двумерных линейных параболических уравнений”, *Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании*, Материалы XIII Международной научной конференции (Саранск, 12–16 июля 2017 г.), СВМО, Саранск, 2017, 330–340, <http://conf.svmo.ru/files/deamm2017/papers/paper46.pdf>.
- [18] Р. Раджараман, *Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля*, Мир, М., 1985.

Поступила в редакцию 2.11.2017,
после доработки 30.05.2018