Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Исаев, М. А. Подойницын, Унитарные представления Вигнера группы $ISL(2, \mathbb{C})$ и двухспинорное описание массивных частиц с произвольным спином, *ТМФ*, 2018, том 195, номер 3, 331–361

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:32:29

© 2018 г. А. П. Исаев^{*†}, М. А. Подойницын^{*†}

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВИГНЕРА ГРУППЫ $ISL(2, \mathbb{C})$ И ДВУХСПИНОРНОЕ ОПИСАНИЕ МАССИВНЫХ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

На основе унитарных представлений Вигнера для накрывающей группы $ISL(2, \mathbb{C})$ группы Пуанкаре получены спин-тензорные волновые функции свободных массивных частиц с произвольным спином, удовлетворяющие уравнениям Дирака–Паули–Фирца. В рамках двухспинорного формализма построены спин-векторы поляризации и получены условия, которые фиксируют соответствующие матрицы плотности (проекционные операторы Берендса–Фронсдала), определяющие числители в пропагаторах полей таких частиц. С помощью этих условий найдены явные выражения для матриц плотности частиц с целым (проекционные операторы Берендса–Фронсдала) и полуцелым спином. Получено обобщение проекционных операторов Берендса–Фронсдала для случая произвольного числа D измерений пространства-времени.

Ключевые слова: унитарные представления Вигнера, группа Пуанкаре, проекционный оператор Берендса–Фронсдала, уравнения Дирака–Паули–Фирца.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9503>

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе с помощью унитарных представлений Вигнера [1] накрывающей группы $ISL(2, \mathbb{C})$ группы Пуанкаре строятся спин-тензорные волновые функции специального вида, на пространствах которых также реализуются неприводимые представления группы $ISL(2, \mathbb{C})$. Указанные спин-тензорные волновые функции автоматически удовлетворяют волновым уравнениям Дирака–Паули–Фирца [2]–[4] для свободных массивных частиц произвольного спина. Мы используем подход,

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 14-11-00598.

^{*}Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерной физики, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: isaevap@theor.jinr.ru

[†]Государственный университет “Дубна”, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: mikhailpodoinicin@gmail.com

изложенный в книге [5]. Построение осуществляется с помощью операторов Вигнера (аналогичная конструкция рассматривалась в [6], [7]), которые переводят унитарное массивное представление группы $ISL(2, \mathbb{C})$ (индуцированное из неприводимого представления малой подгруппы $SU(2)$) в представление группы $ISL(2, \mathbb{C})$, действующее в пространстве спин-тензорных полей для массивных частиц.

В данной статье, следуя работам [5], мы предлагаем специальную параметризацию операторов Вигнера, с помощью которой решения волновых уравнений и импульсы частиц на массовой поверхности переписываются через пару вейлевских спиноров (двухспинорный формализм; см. в связи с этим также работы [8], [9] и приведенные там ссылки). Разложение полностью симметричной вигнеровской волновой функции по специально выбранному базису дает естественный рецепт описания поляризаций при решении волновых уравнений для массивных частиц с произвольными спинами. В качестве приложения рассматриваемого формализма строится проекционный оператор Берендса–Фронсдала, определяющий спин-тензорные структуры двухточечной функции Грина (пропагатора) массивных частиц высших спинов для произвольного числа измерений D .

Работа организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем определение группы $ISL(2, \mathbb{C})$ – универсальной накрывающей группы Пуанкаре – и строим спин-тензорные волновые функции $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\beta_1 \dots \beta_r)}(k)$ (в импульсном представлении) для свободных массивных частиц произвольного спина. Далее мы доказываем, что построенные спин-тензорные волновые функции удовлетворяют системе уравнений Дирака–Паули–Фирца, и показываем, что эти волновые функции имеют естественную параметризацию в терминах пары вейлевских спиноров (*двухспинорный формализм*). В конце раздела 2 мы доказываем, что волновые функции $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\beta_1 \dots \beta_r)}(k)$ являются собственными векторами для оператора квадрата вектора Паули–Любанского $\widehat{W}_n \widehat{W}^n$ (одного из операторов Казимира группы Пуанкаре) с собственными значениями, пропорциональными $j(j+1)$, где параметр $j = (p+r)/2$ называется спином. В разделе 3 в качестве примеров подробно разбираются построения спин-тензорных волновых функций в случае спинов $j = 1/2, 1$ и $3/2$. В частности, мы показываем, как выделяются вклады от различных поляризаций, и вычисляем матрицы плотности для частиц со спинами $j = 1/2, 1$ и $3/2$ как суммы по поляризациям квадратичных комбинаций тензоров поляризаций. В разделе 4 мы находим общий вид тензоров поляризации для произвольного целого спина j , а также доказываем свойства матриц плотности (суммы по поляризациям квадратичных комбинаций тензоров поляризаций) для целого спина j . В разделе 5 построен явный вид матриц плотности в случае целого спина и произвольного числа $D > 2$ измерений пространства-времени, т. е. построено обобщение проекционного оператора Берендса–Фронсдала, известного (см. [10]) для случая $D = 4$. В конце раздела 5 приведено явное выражение для матрицы плотности частиц с произвольным полуцелым спином j . Это выражение получено с помощью прямого вычисления суммы по поляризациям квадратичных комбинаций тензоров поляризаций для полуцелых j .

2. МАССИВНЫЕ УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $ISL(2, \mathbb{C})$

2.1. Накрывающая группа $ISL(2, \mathbb{C})$ группы Пуанкаре. Для того чтобы зафиксировать обозначения, мы напомним определение накрывающей группы $ISL(2, \mathbb{C})$ группы Пуанкаре и ее алгебры Ли (см., например, [11]).

Группа $ISL(2, \mathbb{C})$ – это множество всех пар (A, X) , где $A \in SL(2, \mathbb{C})$, а X – любая эрмитова (2×2) -матрица, которую всегда можно представить в виде

$$X = x_0\sigma^0 + x_1\sigma^1 + x_2\sigma^2 + x_3\sigma^3 = x_k\sigma^k = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, \quad x_m \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv I_2, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

С помощью формулы (2.1) каждой эрмитовой матрице X однозначно сопоставляется 4-вектор $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между пространством $\mathbf{H}$ всех эрмитовых (2×2) -матриц X и пространством $\mathbb{R}^{1,3}$ векторов x ; ниже мы иногда вместо пары (A, X) будем писать (A, x) .

Произведение элементов в группе $ISL(2, \mathbb{C})$ определяется формулой

$$(A', Y') \cdot (A, Y) = (A' \cdot A, A' \cdot Y \cdot A'^{\dagger} + Y'),$$

откуда следует правило действия группы $ISL(2, \mathbb{C})$ в пространстве Минковского $\mathbf{H} = \mathbb{R}^{1,3}$ ($\forall X, Y \in \mathbf{H}$)

$$(A, Y) \cdot X = A \cdot X \cdot A^{\dagger} + Y \in \mathbf{H}. \quad (2.3)$$

Очевидно, что множество пар $(A, 0)$ образует подгруппу $SL(2, \mathbb{C}) \subset ISL(2, \mathbb{C})$. Из уравнения (2.3) вытекает формула для действия группы $SL(2, \mathbb{C})$ (накрывающей группы Лоренца) на векторы

$$X_{\alpha\dot{\beta}} = x_k\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^k, \quad \alpha, \dot{\beta} = 1, 2, \quad (2.4)$$

из пространства Минковского $\mathbf{H} = \mathbb{R}^{1,3}$

$$X \rightarrow X' = A \cdot X \cdot A^{\dagger} \Rightarrow \sigma^k x'_k = \sigma^k \Lambda_k^m(A) x_m \Rightarrow x'_k = \Lambda_k^m(A) x_m, \quad (2.5)$$

где матрица $\|\Lambda_k^m(A)\| \in SO^{\uparrow}(1, 3)$ определяется из соотношений

$$A \cdot \sigma^m \cdot A^{\dagger} = \sigma^k \Lambda_k^m(A) \iff A_{\xi}^{\alpha} A_{\dot{\gamma}}^* \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m = \sigma_{\xi\dot{\gamma}}^k \Lambda_k^m(A). \quad (2.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Определяющее представление $\|A_{\xi}^{\alpha}\|$ и комплексно-сопряженное к нему представление $\|A_{\dot{\gamma}}^{\dot{\beta}}\|$ элемента A группы $SL(2, \mathbb{C})$ являются неэквивалентными. Для того чтобы различать эти представления, над индексами матриц комплексно-сопряженного представления ставят точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для определения ковариантного произведения σ -матриц (2.2) необходимо ввести дуальный набор таких матриц:

$$(\tilde{\sigma}^k)^{\dot{\beta}\alpha} = \varepsilon^{\alpha\xi} \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \sigma_{\xi\dot{\gamma}}^k, \quad \tilde{\sigma}^k = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3). \quad (2.7)$$

Симметризованные произведения σ_n и $\tilde{\sigma}_m$ удовлетворяют тождествам

$$(\sigma^n \tilde{\sigma}^m + \sigma^m \tilde{\sigma}^n)_{\beta}^{\alpha} = 2\eta^{nm} \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (\tilde{\sigma}^n \sigma^m + \tilde{\sigma}^m \sigma^n)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = 2\eta^{nm} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}, \quad (2.8)$$

$$\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1).$$

Подъем спинорных индексов в (2.7) осуществляется с помощью свертки с антисимметричной метрикой

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^{\gamma_1\gamma_2}\| &= \|\varepsilon^{\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2}\| = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \|\varepsilon_{\gamma_1\gamma_2}\| &= \|\varepsilon_{\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta} &= \delta_{\beta}^{\alpha}, & \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\varepsilon_{\dot{\gamma}\dot{\beta}} &= \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Образующие P_n и M_{mn} алгебры Ли $iso(1, 3)$ накрывающей группы Пуанкаре $ISL(2, \mathbb{C})$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[P^n, P^m] = 0, \quad [P^n, M^{mk}] = \eta^{mn}P^k - \eta^{kn}P^m, \quad (2.10)$$

$$[M^{nm}, M^{kl}] = \eta^{mk}M^{nl} + \eta^{nl}M^{mk} - \eta^{nk}M^{ml} - \eta^{ml}M^{nk}. \quad (2.11)$$

Операторы P_n и M_{nm} генерируют соответственно трансляции и лоренцевские вращения в $\mathbb{R}^{1,3}$. Отметим, что антисимметризованные произведения матриц σ_n и $\tilde{\sigma}_m$

$$(\sigma_{nm})_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{4}(\sigma_n\tilde{\sigma}_m - \sigma_m\tilde{\sigma}_n)_{\alpha}^{\beta}, \quad (\tilde{\sigma}_{nm})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = \frac{1}{4}(\tilde{\sigma}_n\sigma_m - \tilde{\sigma}_m\sigma_n)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \quad (2.12)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (2.11) и таким образом реализуют спинорные представления образующих M_{nm} алгебры $so(1, 3)$. Подчеркнем, что тензор σ_{nm} самодуален, а тензор $\tilde{\sigma}_{nm}$ антисамодуален:

$$\frac{i}{2}\varepsilon^{klm}\sigma_{nm} = \sigma^{kl}, \quad \frac{i}{2}\varepsilon^{klm}\tilde{\sigma}_{nm} = -\tilde{\sigma}^{kl}, \quad (2.13)$$

где ε_{mnpb} — полностью антисимметричный тензор ($\varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = 1$).

Определим вектор Паули–Любанского W с компонентами

$$W_m = \frac{1}{2}\varepsilon_{mnij}M^{ij}P^n, \quad m = 0, 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Известно, что алгебра Ли группы Пуанкаре $iso(1, 3)$ с определяющими соотношениями (2.10), (2.11) имеет только два оператора Казимира $(P)^2 := P_m P^m$ и $(W)^2 := W_m W^m$. Собственные значения этих операторов характеризуют неприводимые представления алгебры $iso(1, 3)$ (группы $ISL(2, \mathbb{C})$). Собственное значение оператора $(P)^2$ записывается как m^2 , где параметр $m \in \mathbb{R}$ называется массой. Случай, когда $m > 0$, называется массивным. В массивном случае согласно классификации всех неприводимых унитарных представлений группы $ISL(2, \mathbb{C})$ и ее алгебры $iso(1, 3)$ собственное значение оператора $(W)^2$ равно $-m^2 j(j+1)$, где параметр j называется спином и может принимать только целые или полуцелые неотрицательные значения (см., например, [1], [7], [11]–[13] и приведенные там ссылки).

2.2. Спин-тензорные представления группы $ISL(2, \mathbb{C})$ и уравнения Дирака–Паули–Фирца. В массивном случае унитарные неприводимые представления Вигнера группы $ISL(2, \mathbb{C})$ характеризуются спином $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ и действуют в пространствах вигнеровских волновых функций $\phi_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})}(k)$, которые являются компонентами полностью симметричного $SU(2)$ -тензора ранга $2j$. Здесь индексы α_ℓ принимают два значения 1 и 2, скобки в мультииндексе $(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})$ указывают на полную симметризацию индексов, а $k = (k_0, k_1, k_2, k_3)$ обозначает 4-импульс частицы с массой m :

$$k^n k_n = k_r \eta^{rn} k_n = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = m^2.$$

Далее мы будем рассматривать только массивный случай, когда $m > 0$. Зафиксируем некоторый тестовый импульс $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ такой, что $q^2 = m^2$, $q_0 > 0$. Для каждого импульса k , принадлежащего орбите $k^2 = m^2$, $k^0 > 0$, выберем представителя $A_{(k)} \in SL(2, \mathbb{C})$, который переводит импульс q в импульс k с помощью преобразования Лоренца (2.5):

$$(k\sigma) = A_{(k)}(q\sigma)A_{(k)}^\dagger \iff k_m = (\Lambda_k)_m^n q_n, \quad (2.15)$$

где $(k\sigma) = k^n \sigma_n$, $(q\sigma) = q^n \sigma_n$ и связь матриц $A_{(k)}$ и $\Lambda_k \equiv \Lambda(A_{(k)})$ стандартна (см. (2.6)). Преобразование Лоренца (2.15) можно переписать в эквивалентной форме

$$(k\tilde{\sigma}) = A_{(k)}^{-1\dagger} \cdot (q\tilde{\sigma}) \cdot A_{(k)}^{-1}, \quad (2.16)$$

где $(k\tilde{\sigma}) = (k^n \tilde{\sigma}_n)$ и $(q\tilde{\sigma}) = (q^n \tilde{\sigma}_n)$. Эта форма записи понадобится нам в дальнейшем.

Определим подгруппу стабильности $G_q \subset SL(2, \mathbb{C})$ импульса q (малую группу) как множество элементов $A \in SL(2, \mathbb{C})$, удовлетворяющих условию

$$A \cdot (q\sigma) \cdot A^\dagger = (q\sigma) \iff A_\alpha^\gamma (q^n \sigma_n)_{\gamma\dot{\alpha}} (A^*)_{\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}} = (q^n \sigma_n)_{\alpha\dot{\gamma}}, \quad (2.17)$$

которое, если учесть тождество $(q\tilde{\sigma})(q\sigma) = m^2$, переписывается в эквивалентном виде

$$A = (q\sigma) \cdot (A^{-1})^\dagger \cdot (q\sigma)^{-1} = (q\tilde{\sigma})^{-1} \cdot (A^{-1})^\dagger \cdot (q\tilde{\sigma}). \quad (2.18)$$

В массивном случае $m > 0$ легко доказать, что все подгруппы G_q (для разных q) изоморфны $SU(2)$.

Заметим теперь, что матрица $A_{(k)} \in SL(2, \mathbb{C})$, переводящая тестовый импульс q в импульс k , определяется из (2.15) неоднозначно. Действительно, матрицу $A_{(k)}$ можно умножить справа на любой элемент U из подгруппы стабильности $G_q = SU(2)$, и при этом мы имеем

$$(A_{(k)} \cdot U) \cdot (q\sigma) \cdot (A_{(k)} \cdot U)^\dagger = A_{(k)} \cdot (U \cdot (q\sigma) \cdot U^\dagger) \cdot A_{(k)}^\dagger = (k\sigma).$$

Выберем для каждого k одну фиксированную матрицу $A_{(k)}$, удовлетворяющую (2.15). Эти выбранные матрицы $A_{(k)}$ нумеруют левые смежные классы в $SL(2, \mathbb{C})$ по подгруппе $G_q = SU(2)$ и соответствуют точкам факторпространства $SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$.

Пусть $T^{(j)}$ – конечномерное неприводимое представление группы $SU(2)$ со спином j , действующее в пространстве симметричных спин-тензоров ранга $2j$ с компонентами $\phi_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})}$. Унитарные неприводимые представления Вигнера U группы $ISL(2, \mathbb{C})$ со спином j определяются (см. [1], а также [5], [7], [12] и приведенные там ссылки) следующим действием элемента $(A, a) \in ISL(2, \mathbb{C})$ на волновые функции $\phi_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{2j})}(k)$:

$$[U(A, a) \cdot \phi]_\mu(k) \equiv \phi'_\mu(k) = e^{ia^m k_m} T_{\mu\mu'}^{(j)}(h_{A, \Lambda^{-1} \cdot k}) \phi_{\mu'}(\Lambda^{-1} \cdot k), \quad (2.19)$$

где мы использовали краткие обозначения

$$\phi_\mu(k) \equiv \phi_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})}(k), \quad (2.20)$$

индексы μ, μ' необходимо воспринимать как мультииндексы $(\alpha_1 \dots \alpha_{2j}), (\alpha'_1 \dots \alpha'_{2j})$, матрица $\Lambda \in SO^\uparrow(1, 3)$ связана с $A \in SL(2, \mathbb{C})$ соотношением (2.6), а элемент $h_{A, \Lambda^{-1}, k}$ принадлежит малой группе $SU(2)$ и равен

$$h_{A, \Lambda^{-1}, k} = A_{(k)}^{-1} \cdot A \cdot A_{(\Lambda^{-1}, k)} \in SU(2). \quad (2.21)$$

В формуле (2.19) элемент малой группы $h_{A, \Lambda^{-1}, k}$ реализован в представлении $T^{(j)}$ в виде матрицы $\|T_{\mu\mu'}^{(j)}(h_{A, \Lambda^{-1}, k})\|$, эквивалентной унитарной (см. (2.17)), которую с учетом (2.18) можно представить в факторизованном виде

$$\begin{aligned} T_{\mu\mu'}^{(j)}(h_{A, \Lambda^{-1}, k}) &= (h_{A, \Lambda^{-1}, k})_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots (h_{A, \Lambda^{-1}, k})_{\beta_p}^{\alpha_p} \times \\ &\times ((q\tilde{\sigma})^{-1} \cdot h_{A, \Lambda^{-1}, k}^{\dagger-1} \cdot (q\tilde{\sigma}))_{\beta_{p+1}}^{\alpha_{p+1}} \dots ((q\tilde{\sigma})^{-1} \cdot h_{A, \Lambda^{-1}, k}^{\dagger-1} \cdot (q\tilde{\sigma}))_{\beta_{p+r}}^{\alpha_{p+r}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь мы разбили прямое произведение $2j = p + r$ факторов на две группы, первая из которых состоит из p множителей $h_{A, \Lambda^{-1}, k}$, а вторая состоит из r множителей, записанных с помощью тождества (2.18) в виде $((q\tilde{\sigma})^{-1} \cdot h_{A, \Lambda^{-1}, k}^{\dagger-1} \cdot (q\tilde{\sigma}))$. Далее, пользуясь (2.21), выражение (2.22) можно представить в виде произведения

$$\begin{aligned} T_{\mu\mu'}^{(j)}(h_{A, \Lambda^{-1}, k}) &= (A_{(k)}^{-1})_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\kappa_1 \dots \kappa_p} (A)_{\kappa_1 \dots \kappa_p}^{\gamma_1 \dots \gamma_p} (A_{(\Lambda^{-1}, k)})_{\gamma_1 \dots \gamma_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \times \\ &\times ((q\tilde{\sigma})^{-1} A_{(k)}^{\dagger})_{\beta_{p+1} \dots \beta_{p+r}; \kappa_{p+1} \dots \kappa_{p+r}}^{\dagger-1} (A_{(\Lambda^{-1}, k)}^{\dagger-1})_{\gamma_{p+1} \dots \gamma_{p+r}}^{\kappa_{p+1} \dots \kappa_{p+r}} \times \\ &\times (A_{(\Lambda^{-1}, k)}^{\dagger-1} (q\tilde{\sigma}))_{\gamma_{p+1} \dots \gamma_{p+r}; \alpha_{p+1} \dots \alpha_{p+r}}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где мы ввели краткие обозначения

$$\begin{aligned} (X)_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_p} &= X_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots X_{\alpha_p}^{\beta_p}, & (Y)_{\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r}^{\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_r} &= Y_{\dot{\beta}_1}^{\dot{\alpha}_1} \dots Y_{\dot{\beta}_r}^{\dot{\alpha}_r}, \\ (Z)_{\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_r; \beta_1 \dots \beta_r}^{\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_r} &= Z^{\dot{\alpha}_1 \beta_1} \dots Z^{\dot{\alpha}_r \beta_r}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

В записи без индексов формула (2.23) представляется в виде

$$\begin{aligned} T^{(j)}(h_{A, \Lambda^{-1}, k}) &= (A_{(k)}^{-1} \cdot A \cdot A_{(\Lambda^{-1}, k)})^{\otimes p} \otimes ((q\tilde{\sigma})^{-1} A_{(k)}^{\dagger} \cdot A^{\dagger-1} \cdot A_{(\Lambda^{-1}, k)}^{\dagger-1} (q\tilde{\sigma}))^{\otimes r} = \\ &= (A_{(k)}^{\otimes p} \otimes (A_{(k)}^{\dagger-1} (q\tilde{\sigma}))^{\otimes r})^{-1} (A^{\otimes p} \otimes (A^{\dagger-1})^{\otimes r}) (A_{(\Lambda^{-1}, k)}^{\otimes p} \otimes (A_{(\Lambda^{-1}, k)}^{\dagger-1} (q\tilde{\sigma}))^{\otimes r}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Пользуясь факторизованным представлением (2.23), (2.25), преобразование (2.19) можно переписать следующим образом:

$$[U(A, a) \cdot \psi^{(r)}]_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k) = e^{ia^m k_m} A_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\gamma_1 \dots \gamma_p} (A^{\dagger-1})_{\dot{\kappa}_1 \dots \dot{\kappa}_r}^{\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r} \psi_{(\gamma_1 \dots \gamma_p)}^{(r)}(\dot{\kappa}_1 \dots \dot{\kappa}_r)(\Lambda^{-1} \cdot k), \quad (2.26)$$

где вместо вигнеровских волновых функций $\phi_{(\delta_1 \dots \delta_{p+r})}(k)$ мы ввели спин-тензорные волновые функции $(p/2, r/2)$ -типа:

$$\begin{aligned} \psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)}(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)(k) &= \\ &= \frac{1}{\mathbf{m}^r} (A_{(k)}^{\dagger})_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\delta_1 \dots \delta_p} \cdot (A_{(k)}^{-1\dagger} \cdot (q\tilde{\sigma}))_{\dot{\beta}_{p+1} \dots \dot{\beta}_{p+r}; \delta_{p+1} \dots \delta_{p+r}}^{\dot{\beta}_{p+1} \dots \dot{\beta}_{p+r}} \phi_{(\delta_1 \dots \delta_p \delta_{p+1} \dots \delta_{p+r})}(k). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Верхний индекс (r) у спин-тензоров $\psi^{(r)}$ различает эти спин-тензоры по количеству точечных индексов. Операторы $A_{(k)}^{\otimes p} \otimes (A_{(k)}^{\dagger-1} (q\tilde{\sigma}))^{\otimes r}$, использованные в (2.27) для перевода вигнеровских волновых функций в спин-тензорные функции $(p/2, r/2)$ -типа, называются *операторами Вигнера*.

В массивном случае тестовый импульс удобно выбрать в виде $q = (\mathbf{m}, 0, 0, 0)$. Тогда согласно (2.15) и (2.16) элементы $A_{(k)}, A_{(k)}^{\dagger-1} \in SL(2, \mathbb{C})$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{m}(A_{(k)})_{\alpha}^{\beta}(\sigma_0)_{\beta\dot{\gamma}} = (\sigma_n k^n)_{\alpha\dot{\beta}}(A_{(k)}^{\dagger-1})_{\dot{\gamma}}^{\beta} \iff \mathbf{m}(A_{(k)}^{\dagger-1})_{\dot{\gamma}}^{\beta}(\tilde{\sigma}_0)^{\dot{\gamma}\alpha} = (\tilde{\sigma}_n k^n)^{\dot{\beta}\gamma}(A_{(k)})_{\gamma}^{\alpha}. \quad (2.28)$$

Так как σ_0 и $\tilde{\sigma}_0$ – единичные матрицы, то соотношения (2.28) можно записать в краткой форме:

$$\mathbf{m}A_{(k)} = (\sigma_n k^n)A_{(k)}^{\dagger-1} \iff \mathbf{m}A_{(k)}^{\dagger-1} = (\tilde{\sigma}_n k^n)A_{(k)}. \quad (2.29)$$

Следует, однако, отметить, что при такой записи нарушается баланс точечных и бес-точечных индексов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть тестовый импульс равен $q = (\mathbf{m}, 0, 0, 0)$. Тогда волновые функции $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\beta_1 \dots \beta_r)}(k)$, заданные в (2.27), удовлетворяют уравнениям Дирака–Паули–Фирца

$$\begin{aligned} k^m(\tilde{\sigma}_m)^{\dot{\gamma}_1 \alpha_1} \psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\beta_1 \dots \beta_r)}(k) &= \mathbf{m} \psi_{(\alpha_2 \dots \alpha_p)}^{(\dot{\gamma}_1 \beta_1 \dots \beta_r)}(k), & r = 0, \dots, 2j-1, \\ k^m(\sigma_m)_{\gamma_1 \dot{\beta}_1} \psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\beta_1 \dots \beta_r)}(k) &= \mathbf{m} \psi_{(\gamma_1 \alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\beta_2 \dots \beta_r)}(k), & r = 1, \dots, 2j, \end{aligned} \quad (2.30)$$

которые описывают динамику массивной частицы со спином $j = (p+r)/2$. Условиями совместности этих уравнений выступают соотношения $(k^n k_n - m^2)\psi^{(r)}(k) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое уравнение из (2.30) доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} k^m(\tilde{\sigma}_m)^{\dot{\gamma}_1 \alpha_1} \psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\beta_1 \dots \beta_r)}(k) &= k^m(\tilde{\sigma}_m)^{\dot{\gamma}_1 \alpha_1} (A_{(k)})_{\alpha_1}^{\delta'_1} (A_{(k)})_{\alpha_2 \dots \alpha_p}^{\delta'_2 \dots \delta'_p} \times \\ &\quad \times (A_{(k)}^{-1\dagger} \tilde{\sigma}_0)^{\dot{\beta}_{p+1} \dots \dot{\beta}_{p+r}; \delta'_{p+1} \dots \delta'_{p+r}} \phi_{(\delta'_1 \dots \delta'_p \delta'_{p+1} \dots \delta'_{p+r})}(k) = \\ &= \mathbf{m}(A_{(k)}^{-1\dagger} \tilde{\sigma}_0)^{\dot{\gamma}_1 \alpha_1} (A_{(k)})_{\alpha_2 \dots \alpha_p}^{\delta'_2 \dots \delta'_p} \times \\ &\quad \times (A_{(k)}^{-1\dagger} \tilde{\sigma}_0)^{\dot{\beta}_{p+1} \dots \dot{\beta}_{p+r}; \delta'_{p+1} \dots \delta'_{p+r}} \phi_{(\delta'_1 \dots \delta'_p \delta'_{p+1} \dots \delta'_{p+r})}(k) = \\ &= \mathbf{m} \psi_{(\alpha_2 \dots \alpha_p)}^{(\dot{\gamma}_1 \beta_1 \dots \beta_r)}(k), \end{aligned}$$

где мы воспользовались тождеством $\tilde{\sigma}_0 = I_2$, второй формулой из (2.28) и симметрией компонент вигнеровской волновой функции $\phi_{(\delta'_1 \dots \delta'_p \delta'_{p+1} \dots \delta'_{p+r})}(k)$ относительно любых перестановок индексов δ'_k . Второе уравнение из (2.30) доказывается аналогично. При этом необходимо воспользоваться первым соотношением из (2.28). Для того чтобы система (2.30) имела нетривиальные решения, необходимо учитывать, что

$$\begin{aligned} (k^n k_n) \psi_{(\tau \alpha_2 \dots \alpha_p)}^{(\beta_1 \dots \beta_r)}(k) &= (k\sigma)_{\tau \dot{\gamma}_1} (k\tilde{\sigma})^{\dot{\gamma}_1 \alpha_1} \psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\beta_1 \dots \beta_r)}(k) = \\ &= \mathbf{m} k^n (\sigma_n)_{\tau \dot{\gamma}_1} \psi_{(\alpha_2 \dots \alpha_p)}^{(\dot{\gamma}_1 \beta_1 \dots \beta_r)}(k) = \mathbf{m}^2 \psi_{(\tau \alpha_2 \dots \alpha_p)}^{(\beta_1 \dots \beta_r)}(k), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где мы воспользовались тождествами (2.8) и уравнениями (2.30). Если сравнить левую и правую части равенства (2.31), мы получаем условие массовой поверхности $(k^n k_n - m^2)\psi^{(r)}(k) = 0$. ■

Вернемся теперь к обсуждению матриц $A_{(k)} \in SL(2, \mathbb{C})$, которые согласно (2.15) переводят тестовый импульс q в импульс k и, как мы показали выше, нумеруют точки пространства $SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$. Левое действие группы $SL(2, \mathbb{C})$ на однородное пространство $SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$ определяется стандартным образом:

$$A \cdot A_{(k)} = A_{(\Lambda \cdot k)} \cdot U_{A,k}, \quad (2.32)$$

где матрицы $A \in SL(2, \mathbb{C})$ и $\Lambda \in SO^\dagger(1, 3)$ связаны соотношениями (2.6) и элемент $U_{A,k} \in SU(2)$ зависит от матрицы A и импульса k . При таком действии точка $A_{(k)} \in SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$ переходит в точку $A_{(\Lambda \cdot k)} \in SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$. Формула (2.32) есть не что иное, как другая запись формулы (2.21) для элемента малой группы в определении представления Вигнера.

Заметим теперь, что при левом действии (2.32) группы $SL(2, \mathbb{C})$ на матрицу $A_{(k)}$ столбцы матрицы $A_{(k)}$ преобразуются как двумерные спиноры. Поэтому удобно представить матрицу $A_{(k)}$ поэлементно с помощью двух вейлевских спиноров μ, λ (соответственно матрица $A_{(k)}^\dagger$ будет выражаться в терминах сопряженных спиноров $\bar{\mu}$ и $\bar{\lambda}$) следующим образом [5]:

$$(A_{(k)})_\alpha^\beta = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \mu_1 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (A_{(k)}^\dagger)_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} = \frac{1}{z^*} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_2 & -\bar{\mu}_2 \\ -\bar{\lambda}_1 & \bar{\mu}_1 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

$$z^2 = \mu^\rho \lambda_\rho, \quad (z^*)^2 = \bar{\mu}^{\dot{\rho}} \bar{\lambda}_{\dot{\rho}},$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_1 \\ \bar{\mu}_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

$$\mu^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \mu_\beta, \quad \mu_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} \mu^\beta, \quad \bar{\mu}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\mu}_{\dot{\beta}}, \quad \bar{\mu}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\mu}^{\dot{\beta}}, \quad (2.35)$$

где $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} = (\lambda_\alpha)^*$ и $\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} = (\mu_\alpha)^*$ и нормировка матриц $A_{(k)}, A_{(k)}^{\dagger-1} \in SL(2, \mathbb{C})$ в (2.33) выбрана так, чтобы $\det(A_{(k)}) = 1 = \det(A_{(k)}^{\dagger-1})$. Из формул (2.29) следует, что импульс k выражается через спиноры $\mu_\alpha, \lambda_\beta, \bar{\mu}_{\dot{\beta}}, \bar{\mu}^{\dot{\beta}}$ следующим образом:

$$\frac{\mathbf{m}}{|\mu^\rho \lambda_\rho|} (\mu_\alpha \bar{\mu}_{\dot{\beta}} + \lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}) = (k^n \sigma_n)_{\alpha\dot{\beta}}, \quad \frac{\mathbf{m}}{|\mu^\rho \lambda_\rho|} (\mu^\alpha \bar{\mu}^{\dot{\beta}} + \lambda^\alpha \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}) = (k^n \tilde{\sigma}_n)^{\dot{\alpha}\alpha}, \quad (2.36)$$

где $|\mu^\rho \lambda_\rho| = zz^*$. Таким образом, волновые функции массивных частиц, зависящие от импульса k , можно представить в виде функций, зависящих не от k , а от двух спиноров λ и μ . Двухспинорное выражение (2.36) времениподобного 4-вектора k с компонентами $k_n, k^2 = \mathbf{m}^2 > 0$ и $k_0 > 0$, является обобщением известного твисторного представления для 4-импульса безмассовой частицы [14]. Такое двухспинорное описание массивных частиц (см. также работы [8], [9], [15]–[21]) с произвольными спинами оказывается удобным при обсуждении их поляризационных свойств. В следующем разделе мы рассмотрим этот двухспинорный формализм на примере частиц со спинами $j = 1/2, j = 1$ и $j = 3/2$.

В заключение этого подраздела обсудим более детально, почему в случае $p + r = 2j$ система волновых функций (2.27), удовлетворяющих уравнениям Дирака–Паули–Фирца (2.30), действительно описывает частицы со спином j . Рассмотрим представление (2.26) группы $ISL(2, \mathbb{C})$, действующее в пространстве спин-тензорных волновых функций $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k)$, в случае, когда вектор $a = 0$ и $A, A^{\dagger-1} \in SL(2, \mathbb{C})$

близки к единичному элементу: $A_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta + (1/2)(\omega^{nm}\sigma_{nm})_\alpha^\beta + \dots$, $(A^{\dagger-1})_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha + (1/2)(\omega^{nm}\tilde{\sigma}_{nm})_\beta^\alpha + \dots$. Здесь $\omega^{nm} = -\omega^{mn}$ – малые вещественные параметры, а σ_{nm} и $\tilde{\sigma}_{nm}$ – спинорные представления (2.12) образующих M_{nm} алгебры $so(1, 3)$. В результате мы получаем для (2.26) разложение

$$\left[U \left(I + \frac{1}{2} \omega^{mn} \sigma_{mn} + \dots, 0 \right) \cdot \psi^{(r)} \right]_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}(k) = \psi^{(r)}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}(k) + \frac{1}{2} \omega^{mn} (M_{mn})_{\bar{\alpha}\bar{\kappa}}^{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \psi^{(r)}_{\bar{\gamma}}^{\bar{\kappa}}(k) + \dots,$$

где для краткости использованы обозначения $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ для мультииндексов $(\alpha_1 \dots \alpha_p)$ и $(\beta_1 \dots \beta_r)$, элементы $M_{mn} = ((k_m \cdot \partial / \partial k^n - k_n \cdot \partial / \partial k^m) + \hat{\Sigma}_{mn})$ – образующие алгебры $so(1, 3)$ в представлении U и операторы

$$\hat{\Sigma}_{mn} = \sum_{a=1}^p (\sigma_{mn})_a + \sum_{b=1}^r (\tilde{\sigma}_{mn})_b \quad (2.37)$$

описывают спиновый вклад в компоненты M_{mn} углового момента. Операторы $(\sigma_{mn})_a$ и $(\tilde{\sigma}_{mn})_b$ в (2.37) определяются следующим образом:

$$[(\sigma_{mn})_a \psi^{(r)}]_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}(k) = (\sigma_{mn})_{\alpha_a}^{\gamma_a} \psi^{(r)}_{\bar{\alpha}_a}^{\bar{\beta}}(k), \quad [(\tilde{\sigma}_{mn})_b \psi^{(r)}]_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}(k) = (\tilde{\sigma}_{mn})_{\dot{\gamma}_b}^{\dot{\beta}_b} \psi^{(r)}_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}_b}(k).$$

Здесь для краткости мы использовали обозначения $\bar{\beta}_b = (\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_{b-1} \dot{\beta}_b \dot{\beta}_{b+1} \dots \dot{\beta}_r)$ и $\bar{\alpha}_a = (\alpha_1 \dots \alpha_{a-1} \alpha_a \alpha_{a+1} \dots \alpha_p)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Спин-тензорные волновые функции $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k)$ ($p/2, r/2$)-типа, подчиняющиеся уравнениям Дирака–Паули–Фирца (2.30), автоматически удовлетворяют уравнениям

$$[(\widehat{W}^m \widehat{W}_m) \psi]_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k) = -m^2 j(j+1) \psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k), \quad (2.38)$$

где $j = (p/2 + r/2)$ и $\widehat{W}_m$ – компоненты вектора Паули–Любанского (2.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что компоненты (2.14) вектора Паули–Любанского равны

$$W_m = \frac{1}{2} \varepsilon_{mnij} M^{ij} P^n = \frac{1}{2} \varepsilon_{mnij} \hat{\Sigma}^{ij} P^n, \quad (2.39)$$

т.е. они зависят только от спиновой части $\hat{\Sigma}^{ij}$, заданной в (2.37), компонент M^{ij} полного углового момента.

Теперь перейдем к доказательству формулы (2.38). При доказательстве удобно записать симметризованные компоненты $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k)$ в виде производящих функций

$$\psi^{(r)}(k; u, \bar{u}) = \psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k) u^{\alpha_1} \dots u^{\alpha_p} \cdot \bar{u}_{\dot{\beta}_1} \dots \bar{u}_{\dot{\beta}_r}, \quad (2.40)$$

где u^α и $\bar{u}_{\dot{\beta}}$ – вспомогательные вейлевские спиноры. Действие спиновых операторов (2.37) на функции $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k)$ эквивалентно действию на производящие функции (2.40) дифференциальных операторов

$$\hat{\Sigma}_{mn}(u, \bar{u}) = u^\alpha (\sigma_{mn})_\alpha^\beta \partial_\beta + \bar{u}_{\dot{\beta}} (\tilde{\sigma}_{mn})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}, \quad (2.41)$$

где для краткости мы ввели обозначения $\partial_\beta = \partial_{u^\beta}$ и $\bar{\partial}^{\dot{\beta}} = \partial_{\bar{u}_{\dot{\beta}}}$ и не стали указывать среди аргументов оператора $\widehat{\Sigma}_{mn}$ его зависимость от производных по $u, \bar{u}$. Положим $W_m(u, \bar{u}) = (1/2)\varepsilon_{mni j} P^n \widehat{\Sigma}^{ij}(u, \bar{u})$ и воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} \widehat{W}_n(u, \bar{u}) \widehat{W}^n(u, \bar{u}) = & -\frac{1}{2}(\widehat{\Sigma}_{nm}(u, \bar{u}) \widehat{\Sigma}^{nm}(u, \bar{u})) \widehat{P}^2 + \\ & + (\widehat{\Sigma}_{nm}(u, \bar{u}) \widehat{P}^n)(\widehat{\Sigma}^{km}(u, \bar{u}) \widehat{P}_k), \end{aligned} \quad (2.42)$$

которое проверяется прямым вычислением. Фактор $(\widehat{\Sigma}_{nm} \widehat{\Sigma}^{nm})$ в первом слагаемом в правой части (2.42) приводится к виду

$$\widehat{\Sigma}_{nm}(u, \bar{u}) \widehat{\Sigma}^{nm}(u, \bar{u}) = 2(u^\alpha \partial_\alpha) + (u^\alpha \partial_\alpha)^2 + 2(\bar{u}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}) + (\bar{u}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}})^2 \equiv D(u, \bar{u}), \quad (2.43)$$

при этом необходимо использовать равенства

$$(\tilde{\sigma}_m)^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} (\sigma^m)_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} = (\sigma^m)^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} (\tilde{\sigma}_m)_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} = 2\delta_{\alpha_2}^{\alpha_1} \delta_{\dot{\beta}_2}^{\dot{\beta}_1}, \quad (2.44)$$

$$(\tilde{\sigma}_m)^{\dot{\beta}_1 \alpha_1} (\tilde{\sigma}^m)^{\dot{\beta}_2 \alpha_2} = 2\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2} \varepsilon^{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2}, \quad (\sigma_m)_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} (\sigma^m)_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} = 2\varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2} \varepsilon_{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2}. \quad (2.45)$$

Второе слагаемое в (2.42) с учетом (2.44) и (2.45) переписывается следующим образом:

$$(\widehat{\Sigma}_{nm} \widehat{P}^n)(\widehat{\Sigma}^{km} \widehat{P}_k) = \frac{\widehat{P}^2}{4}(D(u, \bar{u}) - 2(u^\alpha \partial_\alpha)(\bar{u}_{\dot{\gamma}} \bar{\partial}^{\dot{\gamma}})) + (\widehat{P}\sigma)_{\alpha\dot{\gamma}}(\widehat{P}\tilde{\sigma})^{\dot{\beta}\alpha} u^\alpha \partial_\beta \bar{u}^{\dot{\gamma}} \bar{\partial}_{\dot{\delta}}, \quad (2.46)$$

где $(\widehat{P}\sigma) = (\widehat{P}_n \sigma^n)$, $(\widehat{P}\tilde{\sigma}) = (\widehat{P}_n \tilde{\sigma}^n)$ и оператор $D(u, \bar{u})$ определен в (2.43). Подставим формулы (2.43) и (2.46) в правую часть (2.42):

$$\begin{aligned} (\widehat{W}(u, \bar{u}))^2 = & -\frac{\widehat{P}^2}{4}((u^\alpha \partial_\alpha + \bar{u}_{\dot{\gamma}} \bar{\partial}^{\dot{\gamma}})^2 + 2(u^\alpha \partial_\alpha + \\ & + \bar{u}_{\dot{\gamma}} \bar{\partial}^{\dot{\gamma}})) + ((\widehat{P}\sigma)_\alpha^{\dot{\gamma}} u^\alpha \bar{u}_{\dot{\gamma}})((\widehat{P}\tilde{\sigma})_{\dot{\delta}}^\beta \partial_\beta \bar{\partial}^{\dot{\delta}}), \end{aligned} \quad (2.47)$$

а затем подействуем получившимся оператором на производящую функцию (2.40) спин-тензорного поля $(p/2, r/2)$ -типа. Учтем при этом равенство $\widehat{P}_n \psi^{(r)}(k, u, \bar{u}) = k_n \psi^{(r)}(k, u, \bar{u})$, уравнения Дирака–Паули–Фирца (2.30), которые, в частности, дают условие

$$\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\delta}}(k\tilde{\sigma})^{\dot{\alpha}\beta} \partial_\beta \bar{\partial}^{\dot{\delta}} \psi^{(r)}(k, u, \bar{u}) = 0, \quad (2.48)$$

а также соотношения

$$(u^\alpha \partial_\alpha) \psi^{(r)}(k, u, \bar{u}) = p \psi^{(r)}(k, u, \bar{u}), \quad (\bar{u}_{\dot{\gamma}} \bar{\partial}^{\dot{\gamma}}) \psi^{(r)}(k, u, \bar{u}) = r \psi^{(r)}(k, u, \bar{u}),$$

вытекающие из подсчета степеней однородности полиномов (2.40). В результате мы получаем

$$\widehat{W}^2 \psi^{(r)}(x, u, \bar{u}) = -\frac{m^2}{4}((p+r)^2 + 2(p+r)) \psi^{(r)}(x, u, \bar{u}),$$

что эквивалентно формуле (2.38) для $j = (p+r)/2$.

Напомним теперь, что $(\widehat{W}^m \widehat{W}_m)$ – оператор Казимира для алгебры $iso(1, 3)$. Из формулы (2.38) следует, что спин-тензорные волновые функции $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\beta_1 \dots \beta_r)}(k)$ являются собственными для оператора $(\widehat{W}^m \widehat{W}_m)$ и, согласно замечанию 3 в п. 2.1, принадлежат пространству представления алгебры $iso(1, 3)$ (группы $ISL(2, \mathbb{C})$) со спином j .

В разделе 3 мы рассмотрим более подробно три важных с точки зрения приложений примера $j = 1/2$, $j = 1$ и $j = 3/2$ общей конструкции, изложенной выше.

3. ПРИМЕРЫ: ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ ДЛЯ СПИНОВ $j = 1/2, 1, 3/2$

3.1. Спин $j = 1/2$. Согласно общей конструкции, изложенной в п. 2.2, унитарное представление Вигнера группы $SL(2, \mathbb{C})$ со спином $j = 1/2$ реализуется в пространстве спиноров ϕ :

$$\phi(k) = \begin{pmatrix} \phi_1(k) \\ \phi_2(k) \end{pmatrix} = \phi_1(k)\epsilon^+ + \phi_2(k)\epsilon^-, \quad \epsilon^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где компоненты $\phi_\alpha(k)$ – функции от 4-импульса k . Для дальнейшего нам удобно записать эти компоненты следующим образом:

$$\phi_\beta(k) = \phi_1(k)\epsilon_\beta^+ + \phi_2(k)\epsilon_\beta^-. \quad (3.2)$$

Тогда, учитывая (2.27) и (2.33), мы получаем, что спин-тензорное представление (2.26) в случае $j = 1/2$ реализуется на пространствах вейлевских спиноров:

$$\psi_\alpha^{(0)}(k) = (A_{(k)})_\alpha^\beta \phi_\beta = \frac{1}{z}(\phi_{(1)}\mu_\alpha + \phi_{(2)}\lambda_\alpha), \quad (3.3)$$

$$\psi^{(1)\dot{\alpha}}(k) = (A_{(k)}^{\dagger-1}\tilde{\sigma}_0)^{\dot{\alpha}\beta}\phi_\beta = \frac{1}{z^*}(\phi_{(2)}\bar{\mu}^{\dot{\alpha}} - \phi_{(1)}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}), \quad (3.4)$$

где, напомним, $\tilde{\sigma}_0$ – единичная матрица I_2 (см. (2.7)) и мы использовали тождества, вытекающие из (2.33):

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= z(A_{(k)})_\alpha^\beta \epsilon_\beta^+, & \lambda_\alpha &= z(A_{(k)})_\alpha^\beta \epsilon_\beta^-, \\ \bar{\mu}^{\dot{\alpha}} &= z^*(A_{(k)}^{\dagger-1}\tilde{\sigma}_0)^{\dot{\alpha}\beta} \epsilon_\beta^-, & \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} &= -z^*(A_{(k)}^{\dagger-1}\tilde{\sigma}_0)^{\dot{\alpha}\beta} \epsilon_\beta^+. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из соотношений (2.29) для матриц $A_{(k)}$, $A_{(k)}^{\dagger-1}$ следует, что вейлевские спиноры $\psi_\alpha^{(0)}(k)$, $\psi^{(1)\dot{\alpha}}(k)$ удовлетворяют системе уравнений (частный случай уравнений (2.30))

$$(k^n \sigma_n)_{\gamma\dot{\alpha}} \psi^{(1)\dot{\alpha}} = m \psi_\gamma^{(0)}, \quad (k^n \tilde{\sigma}_n)^{\dot{\alpha}\gamma} \psi_\gamma^{(0)} = m \psi^{(1)\dot{\alpha}}. \quad (3.6)$$

Хорошо известно, что эта система эквивалентна уравнению Дирака

$$(k^n \gamma_n - m)\Psi = 0, \quad (3.7)$$

где γ_n – матрицы Дирака, а Ψ – дираковский биспинор:

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_n \\ \tilde{\sigma}_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha^{(0)} \\ \psi^{(1)\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Отметим, что проверка уравнений (3.6) в рамках двухспинорного формализма (с использованием правых частей соотношений (3.3), (3.4)) представляет собой простое чисто алгебраическое упражнение:

$$\begin{aligned} \frac{m}{|\mu^\rho \lambda_\rho| z^*} (\mu_\alpha \bar{\mu}_{\dot{\beta}} + \lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}) (\phi_{(2)} \bar{\mu}^{\dot{\beta}} - \phi_{(1)} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}) &= \frac{m}{z} (\phi_{(1)} \mu_\alpha + \phi_{(2)} \lambda_\alpha), \\ \frac{m}{|\mu^\rho \lambda_\rho| z} (\mu^\alpha \bar{\mu}^{\dot{\beta}} + \lambda^\alpha \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}) (\phi_{(1)} \mu_\alpha + \phi_{(2)} \lambda_\alpha) &= \frac{m}{z^*} (\phi_{(2)} \bar{\mu}^{\dot{\beta}} - \phi_{(1)} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (2.36) и свойствами коммутирующих вейлевских спиноров: $\lambda^\alpha \lambda_\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \lambda_\beta \lambda_\alpha \equiv 0$, $\bar{\mu}^{\dot{\beta}} \bar{\mu}_{\dot{\beta}} = \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \bar{\mu}_{\dot{\alpha}} \bar{\mu}_{\dot{\beta}} \equiv 0$.

Запишем биспинор Ψ из (3.8) с учетом (3.3) и (3.4) в виде

$$\Psi = \phi_1(k) e^{(+)} + \phi_2(k) e^{(-)}, \quad (3.10)$$

где мы ввели два дираковских биспинора:

$$e^{(+)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} \mu_\alpha \\ -\frac{1}{z^*} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad e^{(-)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} \lambda_\beta \\ \frac{1}{z^*} \bar{\mu}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Обозначим компоненты этих биспиноров как $e_A^{(+)}$ и $e_A^{(-)}$, где $A = 1, 2, 3, 4$. Сопреженные по Дираку спиноры с компонентами $\bar{e}^{(+A)}$ и $\bar{e}^{(-A)}$ имеют вид

$$\bar{e}^{(+)} = (e^{(+)})^\dagger \gamma_0 = \left(-\frac{1}{z} \lambda^\alpha, \quad \frac{1}{z^*} \bar{\mu}_{\dot{\alpha}} \right), \quad \bar{e}^{(-)} = (e^{(-)})^\dagger \gamma_0 = \left(\frac{1}{z} \mu^\alpha, \quad \frac{1}{z^*} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \right). \quad (3.12)$$

Легко проверить, что биспиноры (3.11) ортонормированы следующим образом:

$$\bar{e}^{(+A)} e_A^{(-)} = \bar{e}^{(-A)} e_A^{(+)} = 0, \quad \bar{e}^{(+A)} e_A^{(+)} = \bar{e}^{(-A)} e_A^{(-)} = 2. \quad (3.13)$$

Заметим, что согласно (3.2) вигнеровские волновые функции $\phi_1(k)$ и $\phi_2(k)$ соответствуют (в представлении малой группы $SU(2)$ со спином $j = 1/2$) проекциям $+1/2$ и $-1/2$ оператора третьей компоненты спина $S_3 = \sigma_3/2$. Поэтому с точки зрения разложений (3.2) и (3.10) естественно интерпретировать спиноры $e^{(+)}$ и $e^{(-)}$ как “векторы” поляризации частицы со спином $j = 1/2$, описываемой биспинорной волновой функцией $\Psi(k)$.

Сумма по всем поляризациям ($+1/2$ и $-1/2$) произведений компонент спиноров $e^{(\pm)}$ и $\bar{e}^{(\pm)}$ дает (4×4) -матрицу:

$$\begin{aligned} (\Theta^{(1/2)})_A^B &= \frac{1}{2} (e_A^{(+)} \bar{e}^{(+B)} + e_A^{(-)} \bar{e}^{(-B)}) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta_\alpha^\beta & \frac{1}{|\mu^\rho \lambda_\rho|} (\mu_\alpha \bar{\mu}_{\dot{\beta}} + \lambda_\alpha \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}) \\ \frac{1}{|\mu^\rho \lambda_\rho|} (\mu^\beta \bar{\mu}_{\dot{\alpha}} + \lambda^\beta \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}) & \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} m \delta_\alpha^\beta & (k^n \sigma_n)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (k^n \bar{\sigma}_n)_{\dot{\alpha}\beta} & m \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2m} (k^n \gamma_n + m I_4), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где мы использовали тождества

$$\frac{\lambda_\alpha \mu^\beta - \mu_\alpha \lambda^\beta}{(\mu^\rho \lambda_\rho)} = \delta_\alpha^\beta, \quad \frac{\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \bar{\mu}^{\dot{\beta}} - \bar{\mu}_{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}}{(\bar{\mu}^{\dot{\rho}} \bar{\lambda}_{\dot{\rho}})} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}. \quad (3.15)$$

Матрицу $\Theta^{(1/2)}$ иногда называют матрицей плотности частицы со спином $j = 1/2$. Эта матрица по построению (в силу (3.13)) является проектором: $(\Theta^{(1/2)})^2 = \Theta^{(1/2)}$. Кроме того, выражение (3.14) определяет числитель пропагатора для массивной частицы со спином $j = 1/2$.

3.2. Спин $j = 1$. Как было показано в п. 2.2, унитарное представление $ISL(2, \mathbb{C})$ со спином $j = 1$ действует на пространстве спин-тензорных волновых функций $\psi^{(2)\dot{\alpha}\dot{\beta}}(k)$, $\psi_\alpha^{(1)\dot{\beta}}(k)$ и $\psi_{\alpha\beta}^{(0)}(k)$. Эти функции удовлетворяют уравнениям Дирака–Паули–Фирца (2.30):

$$(k\tilde{\sigma})^{\dot{\beta}_1\alpha_1}\psi_{(\alpha_1\alpha_2)}^{(0)}(k) = m\psi_{\alpha_2}^{(1)\dot{\beta}_1}(k), \quad (3.16)$$

$$(k\tilde{\sigma})^{\dot{\beta}_1\alpha_2}\psi_{\alpha_2}^{(1)\dot{\beta}_2} = m\psi^{(2)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}(k), \quad (3.17)$$

$$(k\sigma)_{\alpha_1\dot{\beta}_1}\psi^{(2)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}(k) = m\psi_{\alpha_1}^{(1)\dot{\beta}_2}(k), \quad (3.18)$$

$$(k\sigma)_{\alpha_1\dot{\beta}_2}\psi_{\alpha_2}^{(1)\dot{\beta}_2}(k) = m\psi_{(\alpha_1\alpha_2)}^{(0)}(k). \quad (3.19)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Система (3.16)–(3.19) эквивалентна уравнению Прока для свободного массивного векторного поля $A_m(k)$:

$$k^n(k_n A_m(k) - k_m A_n(k)) - m^2 A_m(k) = 0, \quad (3.20)$$

где компоненты $A_m(k)$ определяются через спин-тензор $\psi_\gamma^{(1)\dot{\beta}}(k)$ следующей формулой:

$$A_m(k) = \frac{1}{2}(\sigma_m)_{\alpha\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\gamma}\psi_\gamma^{(1)\dot{\beta}}(k). \quad (3.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спин-тензорные волновые функции $\psi_{(\alpha_1\alpha_2)}^{(0)}(k)$, $\psi_\alpha^{(1)\dot{\beta}}(k)$ и $\psi^{(2)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}(k)$ можно взаимно однозначно перевести в вектор-тензоры $F_{mn}^{(+)}(k)$, $A_m(k)$ и $F_{mn}^{(-)}(k)$ пространства Минковского с помощью формул

$$\psi_{(\alpha\beta)}^{(0)}(k) = (\sigma_{mn})_{\alpha\beta}F^{(+)\,mn}(k), \quad (3.22)$$

$$\psi_\alpha^{(1)\dot{\beta}}(k) = \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}(\sigma^m)_{\alpha\dot{\gamma}}A_m(k), \quad (3.23)$$

$$\psi^{(2)(\dot{\alpha}\dot{\beta})}(k) = (\tilde{\sigma}_{mn})^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}F^{(-)\,mn}(k), \quad (3.24)$$

где матрицы σ_{mn} , $\tilde{\sigma}_{mn}$ определены в (2.12) и спин-тензоры

$$(\sigma_{mn})_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\gamma}(\sigma_{mn})_\alpha^\gamma, \quad (\tilde{\sigma}_{mn})^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}(\tilde{\sigma}_{mn})_{\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}$$

симметричны по перестановкам спинорных индексов $\alpha \leftrightarrow \beta$, $\dot{\alpha} \leftrightarrow \dot{\beta}$. Отметим также, что в силу свойств симметрии (2.13) матриц σ_{mn} и $\tilde{\sigma}_{mn}$ антисимметричные вектор-тензоры $F_{mn}^{(+)}(k)$ и $F_{mn}^{(-)}(k)$ самодуальны и антисамодуальны соответственно:

$$\frac{i}{2}\varepsilon^{k\ell nm}F_{nm}^{(+)} = F^{(+)\,k\ell}, \quad \frac{i}{2}\varepsilon^{k\ell nm}F_{nm}^{(-)} = -F^{(-)\,k\ell}. \quad (3.25)$$

Перепишем (3.16), используя формулы (3.22), (3.23):

$$k^b(\tilde{\sigma}_b)^{\dot{\beta}\beta}(\sigma_{mn})_{\alpha\beta}F^{(+)\,mn}(k) = m\varepsilon_{\alpha\gamma}(\tilde{\sigma}^r)^{\dot{\beta}\gamma}A_r(k). \quad (3.26)$$

Для исключения спинорных индексов умножим обе части равенства (3.26) на $\varepsilon^{\delta\alpha}$, а затем на $(\sigma_p)_{\delta\dot{\beta}}$:

$$k^b(\sigma_{mn})_{\beta}^{\delta}(\sigma_p)_{\delta\dot{\beta}}(\tilde{\sigma}_b)^{\dot{\beta}\beta}F^{(+)\,mn}(k) = m(\sigma_p)_{\delta\dot{\beta}}(\tilde{\sigma}^r)^{\dot{\beta}\delta}A_r(k) \quad (3.27)$$

и воспользуемся формулой (2.8). В результате получаем

$$k^b \operatorname{Tr}(\sigma_{mn}\sigma_p\tilde{\sigma}_b)F^{(+)\,mn}(k) = 2mA_p(k), \quad (3.28)$$

где

$$\operatorname{Tr}(\sigma_{mn}\sigma_p\tilde{\sigma}_b) = (\sigma_{mn})_{\beta}^{\delta}(\sigma_p)_{\delta\dot{\beta}}(\tilde{\sigma}_b)^{\dot{\beta}\beta} = \eta_{np}\eta_{mb} - \eta_{nb}\eta_{mp} - i\varepsilon_{mnpb}. \quad (3.29)$$

Аналогичным образом можно преобразовать к вектор-тензорному виду остальные уравнения системы (3.16)–(3.19). Результатом такого преобразования являются следующие уравнения:

$$2k^{\ell}F_{\ell p}^{(+)}(k) = mA_p(k), \quad (3.30)$$

$$k_{\ell}A_p(k) - k_pA_{\ell}(k) + i\varepsilon_{\ell pbr}k^bA^r(k) = 2mF_{\ell p}^{(+)}(k), \quad (3.31)$$

$$k_{\ell}A_p(k) - k_pA_{\ell}(k) - i\varepsilon_{\ell pbr}k^bA^r(k) = 2mF_{\ell p}^{(-)}(k), \quad (3.32)$$

$$2k^{\ell}F_{\ell p}^{(-)}(k) = mA_p(k), \quad (3.33)$$

где мы учли условия (3.25). Из уравнений (3.31) и (3.32) следует, что компоненты $F_{\ell p}^{(+)}(k)$ и $F_{\ell p}^{(-)}(k)$ выражаются через вектор-потенциал $A^r(k)$. Складывая уравнения (3.31) и (3.32), получаем

$$k_{\ell}A_p(k) - k_pA_{\ell}(k) = F_{\ell p}(k),$$

где мы ввели обозначение $F_{\ell p}(k) = m(F_{\ell p}^{(+)}(k) + F_{\ell p}^{(-)}(k))$ для напряженности векторного поля, при этом тензоры $(mF_{\ell}^{(+)}p)$ и $(mF_{\ell}^{(-)}p)$ определяют соответственно самодуальную и антисамодуальную части тензора напряженности $F_{\ell p}(k)$. Наконец, подставляя выражение (3.31) для $F_{\ell p}^{(+)}(k)$ в (3.30) (или выражение (3.32) для $F_{\ell p}^{(-)}(k)$ в (3.33)), получаем, что вектор-потенциал $A_p(k)$ удовлетворяет уравнению Прока:

$$k^{\ell}(k_{\ell}A_p(k) - k_pA_{\ell}(k)) - m^2A_p(k) = 0, \quad (3.34)$$

которое описывает векторные частицы с массой m . ■

Спин-тензорная волновая функция $\psi_{\alpha}^{(1)\dot{\beta}}$, связанная соотношениями (3.21) и (3.23) с вектором A_m , определяется по соответствующей вигнеровской волновой функции ϕ согласно формуле (2.27):

$$\psi_{\alpha}^{(1)\dot{\beta}} = \frac{1}{m}(A_{(k)})_{\alpha}^{\gamma_1}(A_{(k)}^{\dagger-1}(q\tilde{\sigma}))^{\dot{\beta}\gamma_2}\phi_{(\gamma_1\gamma_2)}. \quad (3.35)$$

В пространстве симметричных тензоров второго ранга введем нормированные базисные векторы

$$\epsilon^{(+1)} = \epsilon^+ \otimes \epsilon^+, \quad \epsilon^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon^+ \otimes \epsilon^- + \epsilon^- \otimes \epsilon^+), \quad \epsilon^{(-1)} = \epsilon^- \otimes \epsilon^-,$$

где базисные спиноры ϵ^+ и ϵ^- были определены в (3.1), и разложим симметричную вигнеровскую волновую функцию $\phi(k)$ с компонентами $\phi_{(\alpha_1\alpha_2)}(k)$ по этим базисным векторам:

$$\phi(k) = \phi_{(11)}(k)\epsilon^{(+1)} + \sqrt{2}\phi_{(12)}(k)\epsilon^{(0)} + \phi_{(22)}(k)\epsilon^{(-1)}. \quad (3.36)$$

Отметим, что базисные элементы $\epsilon^{(+1)}$, $\epsilon^{(0)}$ и $\epsilon^{(-1)}$ – собственные векторы (с собственными значениями $+1$, 0 и -1) оператора S_3 третьей компоненты спина.

Подставим разложение (3.36) в равенство (3.35) и зафиксируем тестовый импульс $q = (m, 0, 0, 0)$, в результате получаем

$$\psi_\alpha^{(1)\dot{\beta}} = \phi_{(11)}(k)e^{(+)\dot{\beta}}_\alpha(k) + \sqrt{2}\phi_{(12)}(k)e^{(0)\dot{\beta}}_\alpha(k) + \phi_{(22)}(k)e^{(-)\dot{\beta}}_\alpha(k), \quad (3.37)$$

где согласно (2.34) и (2.35) компоненты спин-тензоров $e^{(+)}(k)$, $e^{(0)}(k)$ и $e^{(-)}(k)$ имеют следующий вид:

$$e^{(+)\dot{\beta}}_\alpha(k) = (A_{(k)})_{\alpha}^{\gamma_1} (A_{(k)}^{\dagger-1} \tilde{\sigma}_0)^{\dot{\beta}\gamma_2} \epsilon_{\gamma_1}^+ \epsilon_{\gamma_2}^+ = -\frac{\mu_\alpha \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}}{zz^*}, \quad (3.38)$$

$$e^{(0)\dot{\beta}}_\alpha(k) = (A_{(k)})_{\alpha}^{\gamma_1} (A_{(k)}^{\dagger-1} \tilde{\sigma}_0)^{\dot{\beta}\gamma_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_{\gamma_1}^+ \epsilon_{\gamma_2}^- + \epsilon_{\gamma_1}^- \epsilon_{\gamma_2}^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mu_\alpha \bar{\mu}^{\dot{\beta}} - \lambda_\alpha \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}}{zz^*}, \quad (3.39)$$

$$e^{(-)\dot{\beta}}_\alpha(k) = (A_{(k)})_{\alpha}^{\gamma_1} (A_{(k)}^{\dagger-1} \tilde{\sigma}_0)^{\dot{\beta}\gamma_2} \epsilon_{\gamma_1}^- \epsilon_{\gamma_2}^- = \frac{\lambda_\alpha \bar{\mu}^{\dot{\beta}}}{zz^*}. \quad (3.40)$$

На пространстве спин-тензоров $\psi_\alpha^{(1)\dot{\beta}}$ определено эрмитово скалярное произведение

$$(\xi^{(1)}, \psi^{(1)}) = \bar{\xi}_{\dot{\beta}}^{(1)\alpha} \psi_\alpha^{(1)\dot{\beta}} = (\psi^{(1)}, \xi^{(1)})^*, \quad (3.41)$$

где $\bar{\xi}_{\dot{\beta}}^{(1)\alpha} = (\xi_\beta^{(1)\dot{\alpha}})^*$ – комплексно-сопряженный спинор. Относительно скалярного произведения (3.41) спин-тензоры $e^{(+)}(k)$, $e^{(0)}(k)$ и $e^{(-)}(k)$, заданные в (3.38)–(3.40), образуют ортонормированный набор:

$$(e^{(+)}, e^{(+)}) = (e^{(0)}, e^{(0)}) = (e^{(-)}, e^{(-)}) = 1, \quad (e^{(\pm)}, e^{(0)}) = (e^{(+)}, e^{(-)}) = 0. \quad (3.42)$$

Соотношения (3.42) легко доказываются в рамках двухспинорного формализма, основанного на представлении (2.33) и формулах (3.38)–(3.40).

Найдем выражение для вектор-потенциала $A_m(k)$ через вигнеровские волновые функции ϕ . Для этого подставим разложение (3.37) в формулу (3.21):

$$A_m = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{(11)}(k)e_m^{(+)}(k) + \sqrt{2}\phi_{(12)}(k)e_m^{(0)}(k) + \phi_{(22)}(k)e_m^{(-)}(k)), \quad (3.43)$$

где векторы

$$\begin{aligned} e_m^{(+)}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_m)_{\alpha\dot{\beta}} \varepsilon^{\alpha\gamma} e^{(+)\dot{\beta}}_\gamma(k), & e_m^{(0)}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_m)_{\alpha\dot{\beta}} \varepsilon^{\alpha\gamma} e^{(0)\dot{\beta}}_\gamma(k), \\ e_m^{(-)}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_m)_{\alpha\dot{\beta}} \varepsilon^{\alpha\gamma} e^{(-)\dot{\beta}}_\gamma(k) \end{aligned} \quad (3.44)$$

естественно интерпретировать (имея в виду, что вигнеровские компоненты $\phi_{(11)}$, $\phi_{(12)}$, $\phi_{(22)}$ соответствуют проекциям $+1$, 0 , -1 оператора вектора спина на третью ось) как векторы поляризации массивной векторной частицы.

Набор векторов $\mathbf{e}^{(+)}(k)$, $\mathbf{e}^{(0)}(k)$, $\mathbf{e}^{(-)}(k)$, введенных в (3.44), ортонормирован и поперечен импульсу k . Нормировка и ортогональность этих векторов следует из нормировки и ортогональности (3.42) соответствующих спин-тензоров. Действительно, для любых двух комплексных векторов $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{e}'_m$, связанных соотношениями типа (3.44) с соответствующими спин-тензорами e_{γ}^{β} и $e'_{\gamma}{}^{\beta}$, имеет место тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_m \bar{\mathbf{e}}'^m &= \frac{1}{2} (\sigma_m)_{\alpha\dot{\beta}_1} (\sigma^m)_{\beta_2\dot{\alpha}_2} \varepsilon^{\alpha_1\gamma_1} e_{\gamma_1}^{\dot{\beta}_1} \varepsilon^{\dot{\alpha}_2\gamma_2} \bar{e}'_{\gamma_2}{}^{\beta_2} = \\ &= \varepsilon_{\alpha_1\beta_2} \varepsilon_{\dot{\beta}_1\dot{\alpha}_2} \varepsilon^{\alpha_1\gamma_1} \varepsilon^{\dot{\alpha}_2\gamma_2} e_{\gamma_1}^{\dot{\beta}_1} \bar{e}'_{\gamma_2}{}^{\beta_2} = -\delta_{\beta_2}^{\gamma_1} \delta_{\dot{\beta}_1}^{\gamma_2} e_{\gamma_1}^{\dot{\beta}_1} \bar{e}'_{\gamma_2}{}^{\beta_2} = -(\mathbf{e}', \mathbf{e}), \end{aligned} \quad (3.45)$$

где $\bar{\mathbf{e}}_m = (\mathbf{e}_m)^*$ и мы применили вторую формулу из (2.45). Пользуясь формулой (3.45) и нормировкой (3.42) спин-тензоров, мы получаем

$$\mathbf{e}^{(+)}{}^m \bar{\mathbf{e}}_m^{(+)} = \mathbf{e}^{(0)}{}^m \bar{\mathbf{e}}_m^{(0)} = \mathbf{e}^{(-)}{}^m \bar{\mathbf{e}}_m^{(-)} = -1, \quad \mathbf{e}^{(\pm)}{}^m \bar{\mathbf{e}}_m^{(0)} = \mathbf{e}^{(+)}{}^m \bar{\mathbf{e}}_m^{(-)} = 0. \quad (3.46)$$

Поперечность векторов $\mathbf{e}_m^{(\pm)}$, $\mathbf{e}_m^{(0)}$ к вектору k_m легко доказывается с помощью двух-спинорного формализма, если воспользоваться представлениями (2.36) и (3.38)–(3.40). Например, поперечность вектора $\mathbf{e}_m^{(+)}$ следует из цепочки равенств

$$k^m \mathbf{e}_m^{(+)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (k^m \sigma_m)_{\alpha\dot{\beta}} \varepsilon^{\alpha\gamma} e_{\gamma}^{\dot{\beta}}(k) = -\frac{m}{\sqrt{2} z^{*2}} (\mu_{\alpha} \bar{\mu}_{\dot{\beta}} + \lambda_{\alpha} \bar{\lambda}_{\dot{\beta}}) \mu^{\alpha} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} = 0, \quad (3.47)$$

где мы воспользовались формулами (2.36), (3.38) и свойствами вейлевских спиноров $\mu_{\alpha} \mu^{\alpha} = \bar{\lambda}_{\dot{\beta}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} = 0$, которые вытекают из (2.35). Поперечность векторов $\mathbf{e}_m^{(0)}$ и $\mathbf{e}_m^{(-)}$ доказывается аналогично. Таким образом, выражение (3.43) действительно дает разложение вектор-потенциала $A_m(k)$ по ортонормированным векторам поляризации $\mathbf{e}^{(+)}(k)$, $\mathbf{e}^{(0)}(k)$ и $\mathbf{e}^{(-)}(k)$.

В заключение этого подраздела, посвященного детальному обсуждению унитарных представлений группы $ISL(2, \mathbb{C})$, характеризуемых спином $j = 1$, вычислим явно сумму произведения векторов (3.44) по поляризациям:

$$\Theta_{nm}^{(1)}(k) = -(\mathbf{e}_n^{(+)}(k) \bar{\mathbf{e}}_m^{(+)}(k) + \mathbf{e}_n^{(-)}(k) \bar{\mathbf{e}}_m^{(-)}(k) + \mathbf{e}_n^{(0)}(k) \bar{\mathbf{e}}_m^{(0)}(k)). \quad (3.48)$$

Здесь общий знак минус выбран в соответствии с нормировкой векторов поляризации (3.46) так, чтобы матрица $\Theta_{nm}^{(1)}(k)$ удовлетворяла проекционному свойству

$$(\Theta^{(1)})_r^n(k) (\Theta^{(1)})_m^r(k) = (\Theta^{(1)})_m^n(k). \quad (3.49)$$

Матрица с элементами $\Theta_{nm}^{(1)}(k)$ называется матрицей плотности массивных векторных частиц и играет важную роль в теории. Для вычисления суммы (3.48) воспользуемся двухспинорным формализмом. Подставим формулы (3.44) и (3.38)–(3.40) в (3.48). В результате получаем

$$\begin{aligned} \Theta_{nm}^{(1)}(k) &= -\frac{1}{4} \frac{(\sigma_n)_{\beta\dot{\beta}} (\sigma_m)_{\alpha\dot{\alpha}}}{(\mu^{\rho} \lambda_{\rho})(\bar{\mu}^{\dot{\rho}} \bar{\lambda}_{\dot{\rho}})} (2\mu^{\beta} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} \lambda^{\alpha} \bar{\mu}^{\dot{\alpha}} + 2\lambda^{\beta} \bar{\mu}^{\dot{\beta}} \mu^{\alpha} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + \\ &\quad + (\mu^{\beta} \bar{\mu}^{\dot{\beta}} - \lambda^{\beta} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}})(\mu^{\alpha} \bar{\mu}^{\dot{\alpha}} - \lambda^{\alpha} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}})). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые в правой части (3.50):

$$\Theta_{nm}^{(1)}(k) = \frac{1}{4} \frac{(\sigma_n)_{\beta\dot{\beta}}(\sigma_m)_{\alpha\dot{\alpha}}}{(\mu^\rho\lambda_\rho)(\bar{\mu}^{\dot{\rho}}\bar{\lambda}_{\dot{\rho}})} ((\bar{\mu}^{\dot{\beta}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} - \bar{\mu}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\beta}})(\mu^\beta\lambda^\alpha - \mu^\alpha\lambda^\beta) - (\mu^\beta\bar{\mu}^{\dot{\alpha}} + \lambda^\beta\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}})(\mu^\alpha\bar{\mu}^{\dot{\beta}} + \lambda^\alpha\bar{\lambda}^{\dot{\beta}})), \quad (3.51)$$

после чего воспользуемся двухспинорным представлением (2.36) и тождествами

$$(\bar{\mu}^{\dot{\beta}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} - \bar{\mu}^{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}) = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\bar{\mu}^{\dot{\rho}}\bar{\lambda}_{\dot{\rho}}), \quad (\mu^\beta\lambda^\alpha - \mu^\alpha\lambda^\beta) = \varepsilon^{\alpha\beta}(\mu^\rho\lambda_\rho). \quad (3.52)$$

Тогда окончательное выражение для $\Theta_{nm}^{(1)}(k)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \Theta_{nm}^{(1)}(k) &= \frac{1}{4} (\sigma_n)_{\beta\dot{\beta}}(\sigma_m)_{\alpha\dot{\alpha}} \left(\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta} - \frac{(k^s\tilde{\sigma}_s)^{\dot{\alpha}\beta}(k^l\tilde{\sigma}_l)^{\dot{\beta}\alpha}}{m^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\eta_{nm} - \frac{k^s k^l \text{Tr}(\sigma_n \tilde{\sigma}_l \sigma_m \tilde{\sigma}_s)}{2m^2} \right) = \\ &= \left(\eta_{nm} - \frac{k_n k_m}{m^2} \right) = \left(\eta_{nm} - \frac{k_n k_m}{k^2} \right), \end{aligned} \quad (3.53)$$

где мы воспользовались формулой (2.8) и тождеством

$$\text{Tr}(\sigma_n \tilde{\sigma}_l \sigma_m \tilde{\sigma}_s) = 2(\eta_{nl}\eta_{ms} - \eta_{nm}\eta_{ls} + \eta_{ns}\eta_{ml} - i\varepsilon_{nlms}). \quad (3.54)$$

В последнем равенстве в (3.53) мы учли то, что импульс k лежит на массовой поверхности.

3.3. Спин $j = 3/2$. Согласно утверждению 2 унитарное представление $ISL(2, \mathbb{C})$ со спином $j = 3/2$ реализуется на пространстве спин-тензорных волновых функций $\psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{(0)}(k)$, $\psi_{\alpha_1}^{(1)\dot{\beta}_1}(k)$, $\psi_{\alpha_1}^{(2)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}(k)$, $\psi_{(3)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3}(k)$, заданных в (2.27), причем в силу уравнений Дирака–Паули–Фирца (2.30), как и в случае спина $j = 1$, независимыми мы можем считать только две функции $\psi_{\alpha_1\alpha_2}^{(1)\dot{\beta}_1}(k)$ и $\psi_{\alpha_1}^{(2)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}(k)$. Преобразуем эти две волновые функции в вектор-спиноры $(\psi_n^-)_{\alpha_2}(k)$, $(\psi_n^+)_{\dot{\beta}_2}(k)$, конвертируя один точечный и один бесточечный индексы в векторный индекс n стандартным образом:

$$\begin{aligned} (\psi_n^-)_{\alpha_2}(k) &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma_1\alpha_1}(\sigma_n)_{\gamma_1\dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_1\alpha_2}^{(1)\dot{\beta}_1}(k), \\ (\psi_n^+)_{\dot{\beta}_2}(k) &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma_1\alpha_1}(\sigma_n)_{\gamma_1\dot{\beta}_1} \psi_{\alpha_1}^{(2)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}(k), \end{aligned} \quad (3.55)$$

и образуем из вейлевских спиноров $(\psi_n^-)_{\alpha_2}(k)$ и $(\psi_n^+)_{\dot{\beta}_2}(k)$ биспинорную волновую функцию

$$\Psi_n(k) = \begin{pmatrix} (\psi_n^-)_{\alpha_2}(k) \\ (\psi_n^+)_{\dot{\beta}_2}(k) \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

каждая компонента которой является 4-вектором. Действительно, волновая функция $(\Psi_n)_A(k)$, как и дираковский биспинор $\Psi_A(k)$ из (3.8), имеет спинорный индекс $A = 1, 2, 3, 4$, но кроме этого она имеет еще и векторный индекс $n = 0, 1, 2, 3$. Определим для биспинора $\Psi_n(k)$ сопряженную по Дираку волновую функцию $\bar{\Psi}_n^B(k)$:

$$\bar{\Psi}_n = (\Psi_n)^\dagger \gamma_0 = ((\bar{\psi}_n^+)_{\beta_2}, (\bar{\psi}_n^-)_{\dot{\alpha}_2}), \quad (3.57)$$

где мы использовали обозначения $\bar{\psi}_n^+ = (\psi_n^+)^*$, $\bar{\psi}_n^- = (\psi_n^-)^*$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Биспинорная волновая функция $\Psi_n(k)$, определенная в (3.56), удовлетворяет уравнению Рариты–Швингера

$$\gamma^{[mrn]}k_r\Psi_n(k) + m\gamma^{[mn]}\Psi_n(k) = 0, \quad (3.58)$$

описывающему свободную массивную частицу со спином $j = 3/2$. В формуле (3.58) мы использовали обозначения $\gamma^{[mrs]}$ и $\gamma^{[mn]}$ для антисимметризованных произведений γ -матриц

$$\gamma^{[mn]} = \frac{1}{2}(\gamma^m\gamma^n - \gamma^n\gamma^m), \quad \gamma^{[mrs]} = \frac{1}{3}(\gamma^m\gamma^{[rs]} - \gamma^r\gamma^{[ms]} + \gamma^s\gamma^{[mr]}). \quad (3.59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (3.58) эквивалентно системе трех уравнений

$$\gamma^n\Psi_n(k) = 0, \quad k^n\Psi_n(k) = 0, \quad (\gamma^rk_r - m)\Psi_n(k) = 0,$$

которые доказываются так же, как и утверждение 3 (см. [5]).

Теперь, аналогично тому, как мы делали это в п. 3.1 и 3.2, мы построим, используя двухспинорный формализм, разложение по поляризациям для биспинорной волновой функции $\Psi_n(k)$. Спин-тензорные волновые функции $\psi_{\alpha_1\alpha_2}^{(1)\dot{\beta}_1}(k)$, $\psi_{\alpha_1}^{(2)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}(k)$, связанные с $\Psi_n(k)$, определяются согласно формуле (2.27):

$$\psi_{\alpha_1\alpha_2}^{(1)\dot{\beta}_1}(k) = (A_{(k)})_{\alpha_1}^{\gamma_1}(A_{(k)})_{\alpha_2}^{\gamma_2}(A_{(k)}^{\dagger-1}\tilde{\sigma}_0)^{\dot{\beta}_1\gamma_3}\phi_{(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)}, \quad (3.60)$$

$$\psi_{\alpha_1}^{(2)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2}(k) = (A_{(k)})_{\alpha_1}^{\gamma_1}(A_{(k)}^{\dagger-1}\tilde{\sigma}_0)^{\dot{\beta}_1\gamma_2}(A_{(k)}^{\dagger-1}\tilde{\sigma}_0)^{\dot{\beta}_2\gamma_3}\phi_{(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)}. \quad (3.61)$$

В пространстве симметричных тензоров третьего ранга введем нормированные базисные векторы

$$\begin{aligned} \epsilon^{(\frac{3}{2})} &= \epsilon^+ \otimes \epsilon^+ \otimes \epsilon^+, \\ \epsilon^{(\frac{1}{2})} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\epsilon^+ \otimes \epsilon^+ \otimes \epsilon^- + \epsilon^+ \otimes \epsilon^- \otimes \epsilon^+ + \epsilon^- \otimes \epsilon^+ \otimes \epsilon^+), \\ \epsilon^{(-\frac{1}{2})} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\epsilon^- \otimes \epsilon^- \otimes \epsilon^+ + \epsilon^- \otimes \epsilon^+ \otimes \epsilon^- + \epsilon^+ \otimes \epsilon^- \otimes \epsilon^-), \\ \epsilon^{(-\frac{3}{2})} &= \epsilon^- \otimes \epsilon^- \otimes \epsilon^-, \end{aligned} \quad (3.62)$$

где базисные спиноры ϵ^+ и ϵ^- были определены в (3.1), и разложим симметричную вигнеровскую волновую функцию $\phi(k)$ с компонентами $\phi_{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)}(k)$ по этим базисным векторам:

$$\phi(k) = \phi_{(111)}(k)\epsilon^{(\frac{3}{2})} + \sqrt{3}\phi_{(112)}(k)\epsilon^{(\frac{1}{2})} + \sqrt{3}\phi_{(122)}(k)\epsilon^{(-\frac{1}{2})} + \phi_{(222)}(k)\epsilon^{(-\frac{3}{2})}. \quad (3.63)$$

Подставим разложение (3.63) в формулы (3.60), (3.61), воспользуемся (3.5) и затем получившиеся выражения подставим в (3.56), в результате получим

$$\begin{aligned} \Psi_n(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{(111)}(k)e_n^{(\frac{3}{2})}(k) + \sqrt{3}\phi_{(112)}(k)e_n^{(\frac{1}{2})}(k) + \\ &\quad + \sqrt{3}\phi_{(122)}(k)e_n^{(-\frac{1}{2})}(k) + \phi_{(222)}(k)e_n^{(-\frac{3}{2})}(k)), \end{aligned} \quad (3.64)$$

где мы ввели обозначения

$$\begin{aligned} e_n^{(\frac{3}{2})}(k) &= e_n^{(+)}(k)e^{(+)}, & e_n^{(\frac{1}{2})}(k) &= \sqrt{\frac{2}{3}}e_n^{(0)}(k)e^{(+)} + \sqrt{\frac{1}{3}}e_n^{(+)}(k)e^{(-)}, \\ e_n^{(-\frac{1}{2})}(k) &= \sqrt{\frac{2}{3}}e_n^{(0)}(k)e^{(-)} + \sqrt{\frac{1}{3}}e_n^{(-)}(k)e^{(+)}, & e_n^{(-\frac{3}{2})}(k) &= e_n^{(-)}(k)e^{(-)}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

и векторы $e_n^{(+)}(k)$, $e_n^{(0)}(k)$, $e_n^{(-)}(k)$ определены в (3.44), а биспиноры $e^{(+)}$, $e^{(-)}$ – в (3.11). Биспинорные функции $e_n^{(\frac{3}{2})}(k)$, $e_n^{(\frac{1}{2})}(k)$, $e_n^{(-\frac{1}{2})}(k)$, $e_n^{(-\frac{3}{2})}(k)$ естественно считать спин-векторами поляризации (далее мы будем называть их просто поляризациями), по которым разлагается биспинорная волновая функция $\Psi_n(k)$ для частиц со спином $j = 3/2$.

Ниже в этом разделе зависимость поляризаций от импульса k будет опускаться для упрощения формул. Биспиноры (3.65) нормированы следующим образом:

$$(\bar{e}_n^{(m)})^A \eta^{nr} (e_r^{(m')})_A = -2\delta^{mm'}, \quad m, m' = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \quad (3.66)$$

здесь мы использовали нормировочные соотношения (3.46) и (3.13). Сумма по поляризациям (матрица плотности для частиц со спином $3/2$) определяется выражением

$$(\Theta_{nr}^{(\frac{3}{2})})_A^B = -\frac{1}{2} \sum_{m=-3/2}^{3/2} (e_n^{(m)})_A (\bar{e}_r^{(m)})^B \quad (3.67)$$

и в силу (3.66) удовлетворяет проекторному свойству $(\Theta_{nr}^{(\frac{3}{2})})_A^B \eta^{r\ell} (\Theta_{\ell m}^{(\frac{3}{2})})_B^C = (\Theta_{nm}^{(\frac{3}{2})})_A^C$. Наконец, подставим (3.65) в формулу (3.67) и сгруппируем слагаемые при одинаковых комбинациях произведений биспиноров $e_A^{(\pm)}$ и $\bar{e}^{(\pm)B}$, тогда матрица плотности (3.67) примет вид

$$\begin{aligned} (\Theta_{nr}^{(\frac{3}{2})})_A^B(k) &= \frac{1}{2} \left(\left(e_n^{(+)} \bar{e}_r^{(+)} + \frac{2}{3} e_n^{(0)} \bar{e}_r^{(0)} + \frac{1}{3} e_n^{(-)} \bar{e}_r^{(-)} \right) e_A^{(+)} \bar{e}^{(+)}{}^B + \right. \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{3} (e_n^{(0)} \bar{e}_r^{(+)} + e_n^{(-)} \bar{e}_r^{(0)}) e_A^{(+)} \bar{e}^{(-)}{}^B + \frac{\sqrt{2}}{3} (e_n^{(+)} \bar{e}_r^{(0)} + e_n^{(0)} \bar{e}_r^{(-)}) e_A^{(-)} \bar{e}^{(+)}{}^B + \\ &\left. + \left(e_n^{(-)} \bar{e}_r^{(-)} + \frac{2}{3} e_n^{(0)} \bar{e}_r^{(0)} + \frac{1}{3} e_n^{(+)} \bar{e}_r^{(+)} \right) e_A^{(-)} \bar{e}^{(-)}{}^B \right), \end{aligned} \quad (3.68)$$

который понадобится нам ниже в разделе 5.

4. ВЕКТОРЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ПОЛЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЦЕЛОГО СПИНА

Симметризованные вигнеровские волновые функции $\phi_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})}(k)$, на пространстве которых согласно (2.19), (2.20) определено унитарное неприводимое представление группы $ISL(2, \mathbb{C})$, удобно записать в виде производящей функции:

$$\phi(k; v) = \phi_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})}(k) v^{\alpha_1} \dots v^{\alpha_{2j}}, \quad (4.1)$$

где v^α – компоненты вспомогательного вейлевского спинора $v = (v^1, v^2)$. Введем $2j + 1$ однородных мономов $T_m^j(v)$:

$$T_m^j(v) = \frac{(v^1)^{j+m}(v^2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}, \quad m = -j, \dots, j, \quad (4.2)$$

которые можно рассматривать как базисные элементы в пространстве представления со старшим весом (спином) j алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ с образующими

$$S_+ = v^2 \partial_{v^1}, \quad S_- = v^1 \partial_{v^2}, \quad S_3 = \frac{1}{2}(v^1 \partial_{v^1} - v^2 \partial_{v^2}). \quad (4.3)$$

В данном случае пространство неприводимого представления алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ со спином j реализуется как пространство однородных полиномов (4.1) степени $2j$ от двух переменных v^1 и v^2 и любой полином (4.1) можно разложить по базисным мономам $T_m^j(v)$:

$$\phi(k, v) = \sum_{m=-j}^j \phi_m(k) T_m^j(v). \quad (4.4)$$

Связь коэффициентов $\phi_m(k)$ с $\phi_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})}(k)$ дается формулой

$$\phi_m(k) = \frac{(2j)!}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \phi_{\underbrace{(1 \dots 1)_{j+m}}_{j+m} \underbrace{(2 \dots 2)_{j-m}}_{j-m}}(k). \quad (4.5)$$

Мономы $T_m^j(v)$ – собственные векторы для оператора S_3 (третьей компоненты вектора спина), заданного в (4.3). Действительно, мы имеем $S_3 T_m^j(v) = m T_m^j(v)$, поэтому коэффициенты $\phi_m(k)$ в разложении (4.4) соответствуют проекциям m оператора S_3 .

Формулу (2.27), связывающую вигнеровскую волновую функцию $\phi_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})}(k)$ со спин-тензорной волновой функцией $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\beta_1 \dots \beta_r)}(k)$, можно переписать в терминах производящих функций (2.40), (4.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi^{(r)}(k; u, \bar{u}) &= \frac{1}{(2j)! m^r} \prod_{i=1}^p (u^{\alpha_i} (A_{(k)})_{\alpha_i}^{\rho_i} \partial_{\rho_i}^{(v)}) \times \\ &\times \prod_{\ell=1}^r (\bar{u}_{\beta_\ell} (A_{(k)}^{-1})^{\beta_\ell} \cdot (q\tilde{\sigma}))^{\beta_\ell \rho_{p+\ell}} \partial_{\rho_{p+\ell}}^{(v)} \phi(k; v), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $p + r = 2j$, $\partial_{\rho_i}^{(v)} = \partial / \partial v^{\rho_i}$. Зафиксируем, как обычно, тестовый импульс $q = (m, 0, 0, 0)$ и подставим в формулу (4.6) выражение (4.4) для вигнеровской волновой функции. После этого, разложив левую и правую части (4.6) по u и $\bar{u}$, получаем

$$\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\beta_1 \dots \beta_r)}(k) = \frac{1}{(2j)!} \sum_{m=-j}^j \phi_m(k) \prod_{i=1}^p (A_{(k)})_{\alpha_i}^{\rho_i} \prod_{\ell=1}^r (A_{(k)}^{-1})^{\beta_\ell} \tilde{\sigma}_0^{\beta_\ell \rho_{p+\ell}} \epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)}, \quad (4.7)$$

где

$$\epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)} = \partial_{\rho_1}^{(v)} \dots \partial_{\rho_{2j}}^{(v)} T_m^j(v). \quad (4.8)$$

Ясно, что тензор $\epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)}$ не зависит от компонент v^α и симметричен по перестановкам индексов ρ_i . В силу нормировки, принятой в (4.2), исходя из (4.8) мы имеем

$$\epsilon_{\underbrace{1 \dots 1}_{j+m} \underbrace{2 \dots 2}_{j-m}}^{(m)} = \sqrt{(j+m)!(j-m)!}. \quad (4.9)$$

Все компоненты $\epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)}$, у которых среди индексов количество единиц отличается от $j+m$, а двоек – от $j-m$ (ср. с (4.9)), равны нулю. Таким образом, у симметричного тензора $\epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)}$ существуют всего $(2j)!/(j-m)!(j+m)!$ ненулевых и равных друг другу (т.е. равных (4.9)) компонент. Определим спин-тензоры:

$$e_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(m)(\beta_1 \dots \beta_r)}(k) = \frac{1}{\sqrt{(2j)!}} \prod_{i=1}^p (A_{(k)})_{\alpha_i}^{\rho_i} \prod_{\ell=1}^r (A_{(k)}^{-1})_{\tilde{\sigma}_0}^{\beta_\ell} \tilde{\sigma}_0^{\beta_\ell \rho_p + \ell} \epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)}, \quad (4.10)$$

где нормировочный множитель $1/\sqrt{(2j)!}$ выбран для удобства. Используя (4.10), формулу (4.7) можно переписать в виде

$$\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\beta_1 \dots \beta_r)}(k) = \frac{1}{\sqrt{(2j)!}} \sum_{m=-j}^j \phi_m(k) e_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(m)(\beta_1 \dots \beta_r)}(k). \quad (4.11)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Спин-тензорные волновые функции $e_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(m)(\beta_1 \dots \beta_r)}(k)$, заданные в (4.10), удовлетворяют уравнениям Дирака–Паули–Фирца:

$$\begin{aligned} k^m (\tilde{\sigma}_m)_{\gamma_1 \alpha_1} e_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(m)(r)(\beta_1 \dots \beta_r)}(k) &= m e_{(\alpha_2 \dots \alpha_p)}^{(m)(r+1)(\gamma_1 \beta_1 \dots \beta_r)}(k), \quad r = 0, \dots, 2j-1, \\ k^m (\sigma_m)_{\gamma_1 \beta_1} e_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(m)(r)(\beta_1 \dots \beta_r)}(k) &= m e_{(\gamma_1 \alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(m)(r-1)(\beta_2 \dots \beta_r)}(k), \quad r = 1, \dots, 2j. \end{aligned} \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на использовании формулы (4.10) и проводится аналогично доказательству утверждения 1. ■

В этом разделе мы в основном будем рассматривать спин-тензорные волновые функции $(j/2, j/2)$ -типа $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_j)}^{(j)(\beta_1 \dots \beta_j)}(k)$, у которых числа “точечных” и “бесточечных” индексов совпадают. Поэтому ниже индекс (j) у таких спиноров $\psi^{(j)}$ мы будем опускать (нам придется восстановить этот индекс в доказательстве утверждения 6). Спин-тензорные функции $(j/2, j/2)$ -типа связаны с тензорами в пространстве Минковского следующей формулой:

$$f_{n_1 \dots n_j}(k) = \frac{1}{2^j} (\sigma_{n_1})_{\alpha_1 \beta_1} \dots (\sigma_{n_j})_{\alpha_j \beta_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} \psi_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\beta_1 \dots \beta_j)}(k). \quad (4.13)$$

Объект с компонентами $f_{n_1 \dots n_j}(k)$, имеющий только векторные индексы $\{n_1, \dots, n_j\}$, называется вектор-тензором. Заметим, что в силу симметричности $\psi_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\beta_1 \dots \beta_j)}(k)$ по перестановкам спинорных индексов вектор-тензор $f_{n_1 \dots n_j}(k)$, заданный в (4.3), полностью симметричен по перестановкам векторных индексов.

Определим эрмитово скалярное произведение спин-тензорных функций $\psi(k)$ и $\xi(k)$ $(j/2, j/2)$ -типа следующим образом:

$$(\psi(k), \xi(k)) := \bar{\psi}_{(\beta_1 \dots \beta_j)}^{(\alpha_1 \dots \alpha_j)}(k) \xi_{(\alpha_1 \dots \alpha_j)}^{(\beta_1 \dots \beta_j)}(k), \quad (4.14)$$

где $\bar{\psi}_{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}^{(\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_j)}(k) := (\psi_{(\beta_1 \dots \beta_j)}^{(\alpha_1 \dots \alpha_j)}(k))^*$. Напомним, что при комплексном сопряжении $*$ “точечные” индексы у спин-тензоров, преобразующихся по представлениям группы $SL(2, \mathbb{C})$, меняются на “бесточечные” и наоборот.

Заметим, что спин-тензоры $e^{(m)}(k)$ из (4.10) ортонормированны относительно скалярного произведения (4.14). Это следует из цепочки равенств:

$$\begin{aligned} (e^{(m)}(k), e^{(\bar{m})}(k)) &= \frac{1}{(2j)!} \prod_{i=1}^{2j} (((A(k))_{\beta_i}^{\gamma_i} (A(k)^{-1\dagger} \tilde{\sigma}_0)^{\dot{\alpha}_i \gamma_{j+i}})^* (A(k))_{\alpha_i}^{\rho_i} (A(k)^{-1\dagger} \tilde{\sigma}_0)^{\dot{\beta}_i \rho_{j+i}}) \times \\ &\times \epsilon_{\gamma_1 \dots \gamma_{2j}}^{(m)} \epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(\bar{m})} = \frac{1}{(2j)!} \epsilon_{\gamma_1 \dots \gamma_{2j}}^{(m)} \epsilon_{\gamma_1 \dots \gamma_{2j}}^{(\bar{m})} = \delta^{(m)(\bar{m})}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где мы воспользовались тождеством

$$((A(k))_{\beta_i}^{\gamma_i} (A(k)^{-1\dagger} \tilde{\sigma}_0)^{\dot{\alpha}_i \gamma_{j+i}})^* = (A(k)^{\dagger})_{\dot{\beta}_i}^{\gamma_i} (A(k)^{-1} \tilde{\sigma}_0)^{\gamma_{j+i} \dot{\alpha}_i}, \quad (4.16)$$

а также равенством

$$\epsilon_{\gamma_1 \dots \gamma_{2j}}^{(m)} \epsilon_{\gamma_1 \dots \gamma_{2j}}^{(\bar{m})} = (2j)! \delta^{(m)(\bar{m})}, \quad (4.17)$$

которое напрямую следует из формулы (4.9) и свойств тензора $\epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)}$, обсуждаемых после (4.9). В формулах (4.15)–(4.17) мы не ставим точки над индексами γ_i , так как эти индексы соответствуют представлениям группы $SU(2)$.

Перейдем от спин-тензорной волновой функции $\psi_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k)$ к вектор-тензорной функции $f_{n_1 \dots n_j}(k)$ с помощью соотношения (4.13), в которое подставим разложение (4.11) для $\psi_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k)$. В результате получаем

$$f_{n_1 \dots n_j}(k) = \frac{1}{\sqrt{2^j (2j)!}} \sum_{m=-j}^j \phi_m(k) e_{n_1 \dots n_j}^{(m)}(k), \quad (4.18)$$

где мы использовали обозначение

$$e_{n_1 \dots n_j}^{(m)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} (\sigma_{n_1})_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \dots (\sigma_{n_j})_{\alpha_j \dot{\beta}_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} e_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k). \quad (4.19)$$

Набор вектор-тензоров $e_{n_1 \dots n_j}^{(m)}(k)$ будем называть тензорами поляризации. Для дальнейших целей нам необходимо вычислить нормировку тензоров поляризации:

$$\begin{aligned} \bar{e}^{(m) n_1 \dots n_j}(k) e_{n_1 \dots n_j}^{(\bar{m})}(k) &= \frac{1}{2^j} (\sigma^{n_1})_{\tau_1 \dot{\rho}_1} \dots (\sigma^{n_j})_{\tau_j \dot{\rho}_j} \varepsilon^{\dot{\rho}_1 \dot{\nu}_1} \dots \varepsilon^{\dot{\rho}_j \dot{\nu}_j} \bar{e}_{(\dot{\nu}_1 \dots \dot{\nu}_p)}^{(\tau_1 \dots \tau_r)}(k) \times \\ &\times (\sigma_{n_1})_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \dots (\sigma_{n_j})_{\alpha_j \dot{\beta}_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} e_{(\gamma_1 \dots \gamma_p)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k) = \\ &= \varepsilon_{\tau_1 \alpha_1} \dots \varepsilon_{\tau_j \alpha_j} \varepsilon_{\dot{\rho}_1 \dot{\beta}_1} \dots \varepsilon_{\dot{\rho}_j \dot{\beta}_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} \varepsilon^{\dot{\rho}_1 \dot{\nu}_1} \dots \varepsilon^{\dot{\rho}_j \dot{\nu}_j} \times \\ &\times \bar{e}_{(\dot{\nu}_1 \dots \dot{\nu}_j)}^{(\tau_1 \dots \tau_j)}(k) e_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k) = \\ &= (-1)^j \bar{e}_{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}^{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}(k) e_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k) = (-1)^j \delta^{(m)(\bar{m})}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $\bar{e}^{(\bar{m}) n_1 \dots n_j}(k) = (e_{n_1 \dots n_j}^{(\bar{m})}(k))^*$. При вычислении (4.20) была использована вторая формула из (2.45), эрмитовость σ -матриц, свойства матриц $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ из (2.9) и ортонормированность спин-тензоров $e^{(m)}(k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из формулы (4.10) в случае $r = p$, т. е. для целого спина j , вытекает рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n_1 \dots n_j}^{(m)} = & \frac{1}{\sqrt{2j(2j-1)}} (\sqrt{(j+m)(j+m-1)} \mathbf{e}_{n_1 \dots n_{j-1}}^{(m-1)} \mathbf{e}_{n_j}^{(+)} + \\ & + \sqrt{(j-m)(j-m-1)} \mathbf{e}_{n_1 \dots n_{j-1}}^{(m+1)} \mathbf{e}_{n_j}^{(-)} + \sqrt{2(j-m)(j+m)} \mathbf{e}_{n_1 \dots n_{j-1}}^{(m)} \mathbf{e}_{n_j}^{(0)}), \end{aligned} \quad (4.21)$$

которое полностью определяет тензоры поляризации $\mathbf{e}_{n_1 \dots n_j}^{(m)}$ через векторы поляризации $\mathbf{e}_{n_j}^{(a)}$, $a = 0, \pm$.

Построим оператор $\Theta(k)$ в виде суммы произведений векторов $\mathbf{e}^{(m)}(k)$ и $\bar{\mathbf{e}}^{(m)}(k)$ по поляризациям m :

$$\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k) := (-1)^j \sum_{m=-j}^j \mathbf{e}_{r_1 \dots r_j}^{(m)}(k) \bar{\mathbf{e}}^{(m)n_1 \dots n_j}(k). \quad (4.22)$$

Этот оператор иногда называется матрицей плотности для массивной частицы с целым спином j или проекционным оператором Берендса–Фронсдала [10], [22]. Для случая спина $j = 1$ оператор $\Theta(k)$ был вычислен в (3.53).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Оператор $\Theta(k)$, заданный в (4.22), удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) проекторное свойство и вещественность: $\Theta^2 = \Theta$, $\Theta^\dagger = \Theta$;
- 2) симметричность: $\Theta_{r_1 \dots r_i \dots r_l \dots}^{n_1 \dots n_j} = \Theta_{r_l \dots r_i \dots r_1 \dots}^{n_1 \dots n_j}$, $\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_i \dots n_l \dots} = \Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_l \dots n_i \dots}$;
- 3) поперечность: $k^{r_1} \Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j} = 0$;
- 4) бесследовость: $\eta^{r_1 r_2} \Theta_{r_1 r_2 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Два соотношения из первого свойства в компонентной записи имеют вид

$$\Theta_{r_1 r_2 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j} \Theta_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} = \Theta_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_j}^{n_1 \dots n_j}, \quad (\Theta_{r_1 r_2 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j})^* = \Theta_{n_1 \dots n_j}^{r_1 r_2 \dots r_j},$$

и они выполняются в силу определения (4.22) оператора $\Theta(k)$ и условий нормировки (4.20) на векторы $\mathbf{e}^{(m)}(k)$. Второе свойство следует из симметрии тензоров $\mathbf{e}_{n_1 \dots n_j}^{(m)}(k)$ по перестановке индексов $\{n_1, \dots, n_j\}$, что, в свою очередь, следует из формулы (4.19).

Третье свойство аналогично поперечности вектор-тензоров $\mathbf{e}^{(m)}(k)$, т. е. условию $k^{r_1} \mathbf{e}_{r_1 \dots n_j}^{(m)}(k) = 0$. Поперечность вектор-тензоров $\mathbf{e}^{(m)}(k)$ следует из равенств (здесь нам необходимо восстановить индекс (j) у спин-тензоров ${}^{(m)}e(k)$)

$$\begin{aligned} k^{r_1} \mathbf{e}_{r_1 \dots n_j}^{(m)}(k) &= k^{r_1} (\sigma_{r_1})_{\alpha_1 \beta_1} \dots (\sigma_{r_j})_{\alpha_j \beta_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} {}^{(m)}e_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\beta_1 \dots \beta_j)}(k) = \\ &= m(\sigma_{r_2})_{\alpha_2 \beta_2} \dots (\sigma_{r_j})_{\alpha_j \beta_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} {}^{(m)}e_{(\alpha_1 \gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\beta_2 \dots \beta_j)}(k) = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Во втором равенстве в (4.23) мы воспользовались вторым уравнением из системы (4.12), а в третьем равенстве учли, что свертка симметричного тензора с антисимметричным дает ноль.

Четвертое свойство, очевидно, равносильно утверждению о бесследовости вектор-тензоров $e^{(m)}(k)$, т.е. $\eta^{r_1 r_2} e_{r_1 \dots r_j}^{(m)}(k) = 0$. Это утверждение следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \eta^{r_1 r_2} e_{r_1 \dots r_j}^{(m)}(k) &= (\sigma^{r_2})_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} (\sigma_{r_2})_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \dots (\sigma_{r_j})_{\alpha_j \dot{\beta}_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} e_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(m) (\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k) = \\ &= (\sigma_{r_3})_{\alpha_3 \dot{\beta}_3} \dots (\sigma_{r_j})_{\alpha_j \dot{\beta}_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2} \varepsilon_{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2} e_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(m) (\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k) = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где мы использовали вторую формулу из (2.45). ■

5. ПРОЕКЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР БЕРЕНДСА–ФРОНСДАЛА

В данном разделе мы найдем явное выражение для проекционного оператора $\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k)$ (см. (4.22)) при любом целом значении $j > 1$ в терминах оператора $\Theta_r^n(k)$, вычисленного нами в (3.53) для случая спина $j = 1$. Для случая четырехмерного ($D = 4$) пространства-времени проекционный оператор Берендса–Фронсдала $\Theta(k)$ был явно построен в работах [10], [22]. Здесь мы найдем обобщение оператора Берендса–Фронсдала на случай произвольного числа измерений D . Также в этом разделе мы докажем формулу, связывающую проектор для полупростого спина j и проектор для спина $j + 1/2$. Построение будет проводиться исходя из свойств этого оператора, которые перечислены в утверждении 6.

Вместо тензора $\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k)$, симметризованного по верхним и нижним индексам, удобно рассматривать производящую функцию

$$\Theta^{(j)}(x, y) = x^{r_1} \dots x^{r_j} \Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k) y_{n_1} \dots y_{n_j}. \quad (5.1)$$

Для конкретности мы будем считать, что тензор с компонентами $\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k)$ задан в псевдоевклидовом D -мерном пространстве $\mathbb{R}^{s, t}$ ($s + t = D$) с произвольной метрикой $\eta = \|\eta_{mn}\|$, имеющей сигнатуру (s, t) . Индексы n_ℓ и r_ℓ в (5.1) пробегает значения $0, 1, \dots, D - 1$ и $(x_0, \dots, x_{D-1}), (y_0, \dots, y_{D-1}) \in \mathbb{R}^{s, t}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. *Производящая функция (5.1) ковариантного проекционного оператора $\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}$ (в D -мерном пространстве-времени), удовлетворяющего свойствам 1–4, перечисленным в утверждении 6, имеет вид*

$$\Theta^{(j)}(x, y) = \sum_{A=0}^{[j/2]} a_A^{(j)} (\Theta_{(y)}^{(y)} \Theta_{(x)}^{(x)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A}, \quad (5.2)$$

где $[j/2]$ – целая часть $j/2$,

$$a_A^{(j)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^A \frac{j!}{(j-2A)! A! (2j+D-5)(2j+D-7) \dots (2j+D-2A-3)}, \quad A \geq 1, \quad (5.3)$$

$a_0^{(j)} = 1$, а $\Theta_{(x)}^{(y)}$ определяется следующим образом (η_{rn} – метрика пространства $\mathbb{R}^{s, t}$):

$$\Theta_{(x)}^{(y)} \equiv \Theta^{(1)}(x, y) = x^r y_n \Theta_r^n, \quad \Theta_r^n = \eta_r^n - \frac{k_r k^n}{k^2}. \quad (5.4)$$

Для производящей функции (5.2), (5.3) имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial x^r} \frac{\partial}{\partial y_r} \Theta^{(j)}(x, y) = \frac{j(j+D-4)(2j+D-3)}{2j+D-5} \Theta^{(j-1)}(x, y). \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним (см. (3.49), (3.53)), что матрица Θ_r^n из (5.4) – проектор на подпространство, ортогональное D -вектору с компонентами k^r :

$$k^r \Theta_r^n = 0 = \Theta_r^n k_n, \quad \Theta_r^r = \eta_{rn} \Theta^{rn} = D - 1, \quad \Theta_r^n \Theta_m^r = \Theta_m^n. \quad (5.6)$$

Учитывая это, наиболее общий ковариантный оператор $\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k)$, удовлетворяющий свойствам 2 и 3, указанным в утверждении 6, запишем следующим образом:

$$\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k) = \frac{1}{(j!)^2} \sum_{\sigma, \mu \in S_j} \Theta_{\ell_1}^{n_{\sigma(1)}} \dots \Theta_{\ell_j}^{n_{\sigma(j)}} B_{m_1 \dots m_j}^{\ell_1 \dots \ell_j}(k) \Theta_{r_{\mu(1)}}^{m_1} \dots \Theta_{r_{\mu(j)}}^{m_j}, \quad (5.7)$$

где $\sigma, \mu \in S_j$ – перестановки индексов $\{1, 2, \dots, j\}$, а тензор $B_{m_1 \dots m_j}^{\ell_1 \dots \ell_j}(k)$ – любая ковариантная комбинация компонент метрики η_{rm} и D -вектора импульса k_r . Так как матрицы Θ_r^m , использованные в (5.7), поперечны D -импульсу k (см. (5.6)), то внешние индексы тензора $B_{m_1 \dots m_j}^{\ell_1 \dots \ell_j}(k)$ могут быть связаны только с метрикой и этот тензор представим в виде

$$\begin{aligned} B_{m_1 \dots m_j}^{\ell_1 \dots \ell_j}(k) = & a_0^{(j)}(k) \eta_{m_1}^{\ell_1} \dots \eta_{m_j}^{\ell_j} + a_1^{(j)}(k) \eta^{\ell_1 \ell_2} \eta_{m_1 m_2} \eta_{m_3}^{\ell_3} \dots \eta_{m_j}^{\ell_j} + \\ & + a_2^{(j)}(k) \eta^{\ell_1 \ell_2} \eta_{m_1 m_2} \eta^{\ell_3 \ell_4} \eta_{m_3 m_4} \eta_{m_5}^{\ell_5} \dots \eta_{m_j}^{\ell_j} + \dots, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где функции $a_A^{(j)}(k)$ зависят от инвариантов $(k)^2 = k^r k_r$. Подстановка (5.8) в (5.7) дает

$$\Theta_{n_1 r_2 \dots r_j}^{r_1 n_2 \dots n_j} = \frac{1}{(j!)^2} \sum_{A=0}^{[j/2]} \sum_{\sigma, \mu \in S_j} a_A^{(j)} \left(\prod_{\ell=1}^A \Theta_{n_{\mu(2\ell-1)} n_{\mu(2\ell)}} \Theta^{r_{\sigma(2\ell-1)} r_{\sigma(2\ell)}} \prod_{i=2A+1}^j \Theta_{n_{\mu(i)}}^{r_{\sigma(i)}} \right). \quad (5.9)$$

Наконец, подставляя выражение (5.9) в (5.1), мы получаем представление (5.2) для производящей функции проекционного оператора, где коэффициенты $a_A^{(j)}$, как мы увидим ниже, не зависят от $(k)^2$ и их явный вид фиксируется свойствами 1 и 4 из утверждения 6.

Условие 4 (бесследовость) в утверждении 6 для тензора Θ эквивалентно уравнению гармоничности для производящей функции (5.2):

$$(\partial)^2 \Theta^{(j)}(x, y) = 0, \quad (5.10)$$

где $(\partial)^2 = \partial_{x^r} \partial_{x_r}$ и $\partial_{x^r} = \partial / \partial x^r$. Подставим функцию (5.2) в уравнение (5.10) и найдем условия на коэффициенты $a_A^{(j)}$. При этом удобно переписать ряд (5.2) в виде

$$\Theta^{(j)}(x, y) = \sum_{A=0}^{[j/2]} \tilde{a}_A (\Theta_{(x)}^{(x)})^A (\Theta_{(y)}^{(y)})^{j-2A}, \quad \tilde{a}_A \equiv (\Theta_{(y)}^{(y)})^A a_A^{(j)}. \quad (5.11)$$

В результате указанной подстановки мы получаем

$$\begin{aligned} (\partial)^2 \Theta^{(j)}(x, y) &= \sum_A \tilde{a}_A (\partial)^2 ((\Theta_{(x)}^{(x)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A}) = \\ &= \sum_A \tilde{a}_A (2A(2j + D - 3 - 2A) (\Theta_{(x)}^{(x)})^{A-1} \cdot (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A} + \\ &\quad + (j - 2A)(j - 2A - 1) \Theta_{(y)}^{(y)} (\Theta_{(x)}^{(x)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A-2}), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где во втором равенстве мы воспользовались соотношениями

$$(\partial)^2 (\Theta_{(x)}^{(x)})^A = 2A(2A + D - 3) (\Theta_{(x)}^{(x)})^{A-1}, \quad (5.13)$$

$$2[\partial_{x^r} (\Theta_{(x)}^{(x)})^A][\partial_{x^r} (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A}] = 4A(j - 2A) (\Theta_{(x)}^{(x)})^{A-1} \cdot (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A}, \quad (5.14)$$

$$(\partial)^2 (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A} = (j - 2A)(j - 2A - 1) \Theta_{(y)}^{(y)} (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A-2}. \quad (5.15)$$

Таким образом, для выполнения тождества (5.10) согласно (5.12) необходимо потребовать выполнения рекуррентных соотношений для коэффициентов $\tilde{a}_A$:

$$\tilde{a}_{A+1} = -\frac{1}{2} \frac{(j - 2A)(j - 2A - 1)}{(A + 1)(2j - 2A + D - 5)} \Theta_{(y)}^{(y)} \tilde{a}_A, \quad (5.16)$$

что, в свою очередь, дает соотношения для коэффициентов $a_A^{(j)}$:

$$a_A^{(j)} = -\frac{1}{2} \frac{(j - 2A + 2)(j - 2A + 1)}{A(2j - 2A + D - 3)} a_{A-1}^{(j)}. \quad (5.17)$$

Решение уравнений (5.17) имеет вид

$$a_A^{(j)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^A \frac{j! a_0^{(j)}}{(j - 2A)! A! [(2j + D - 5)(2j + D - 7) \dots (2j + D - 3 - 2A)]}, \quad (5.18)$$

т. е. условие (5.10) определяет коэффициенты $a_A^{(j)}$ с точностью до единственного произвольного множителя $a_0^{(j)}$. Заметим, что, во-первых, произведение факторов в квадратных скобках в знаменателе (5.18) необходимо считать равным единице при $A = 0$ и, во-вторых, при подстановке коэффициентов (5.18) в сумму (5.2) видно, что эта сумма автоматически обрывается при $A > j/2$, так как в этом случае в знаменателе возникает бесконечный множитель $(j - 2A)! = \infty$.

Займемся теперь проверкой условия 1 из утверждения 6. Прежде всего отметим наличие для функции (5.2) свойства $\Theta(x, y) = \Theta(y, x)$, что в силу вещественности оператора Θ эквивалентно равенству $\Theta^\dagger = \Theta$ для матриц (5.9). Проверим для матрицы (5.9) проекторное соотношение $\Theta^2 = \Theta$ (см. условие 1 из утверждения 6):

$$\begin{aligned} (\Theta^2)_{n_1 n_2 \dots n_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} &= \\ &= \Theta_{m_1 m_2 \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} \frac{1}{(j!)^2} \sum_{A=0}^{[j/2]} \sum_{\sigma, \mu \in S_j} a_A^{(j)} \left(\prod_{\ell=1}^A \Theta_{m_{\sigma(2\ell-1)} m_{\sigma(2\ell)}}^{m_{\sigma(2\ell-1)} m_{\sigma(2\ell)}} \Theta_{n_{\mu(2\ell-1)} n_{\mu(2\ell)}} \prod_{i=2A+1}^j \Theta_{n_{\mu(i)}}^{m_{\sigma(i)}} \right) = \\ &= \Theta_{m_1 m_2 \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} \frac{1}{j!} \sum_{\mu \in S_j} a_0^{(j)} (\Theta_{n_{\mu(1)}}^{m_1} \dots \Theta_{n_{\mu(j)}}^{m_j}) = a_0^{(j)} \Theta_{n_1 n_2 \dots n_j}^{r_1 r_2 \dots r_j}, \end{aligned}$$

где во втором и третьем равенствах мы использовали тождества

$$\Theta_{m_1 m_2 \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} \Theta^{m_i m_\ell} = 0, \quad \Theta_{m_1 \dots m'_i \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} \Theta_{m_i}^{m'_i} = \Theta_{m_1 \dots m'_i \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} \eta_{m_i}^{m'_i} = \Theta_{m_1 m_2 \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j},$$

которые вытекают из установленных выше условий 3 и 4 утверждения 6. Таким образом, для выполнения проекторного свойства мы должны зафиксировать начальный коэффициент в разложении (5.2) как $a_0^{(j)} = 1$. Подставляя это значение в (5.18), мы получаем формулу (5.3).

Наконец, докажем тождество (5.5). Для этого вычислим

$$\begin{aligned} \partial_{x^r} \partial_{y_r} \Theta^{(j)}(x, y) &= \sum_{A=0}^{[j/2]} a_A^{(j)} \partial_{x^r} \partial_{y_r} ((\Theta_{(x)}^{(x)} \Theta_{(y)}^{(y)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A}) = \\ &= \sum_{A=0}^{[j/2]} (a_{A+1}^{(j)} 4(A+1)^2 + a_A^{(j)} (j-2A)(D-2+j+2A)) \times \\ &\quad \times (\Theta_{(x)}^{(x)} \Theta_{(y)}^{(y)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A-1}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где мы воспользовались равенствами

$$\begin{aligned} [\partial_{x^r} \partial_{y_r} (\Theta_{(x)}^{(x)} \Theta_{(y)}^{(y)})^A] &= 4A^2 \Theta_{(x)}^{(y)} (\Theta_{(x)}^{(x)} \Theta_{(y)}^{(y)})^{A-1}, \\ [\partial_{x^r} (\Theta_{(x)}^{(x)} \Theta_{(y)}^{(y)})^A] [\partial_{y_r} (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A}] &= 2(j-2A)A (\Theta_{(x)}^{(x)} \Theta_{(y)}^{(y)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A-1} = \\ &= [\partial_{y_r} (\Theta_{(x)}^{(x)} \Theta_{(y)}^{(y)})^A] [\partial_{x^r} (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A}], \\ [\partial_{x^r} \partial_{y_r} (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A}] &= (j-2A)(D+j-2A-2) (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A-1}. \end{aligned}$$

Учитывая явную формулу для коэффициентов (5.3), получаем соотношение

$$a_{A+1}^{(j)} 4(A+1)^2 + a_A^{(j)} (j-2A)(D+j+2A-2) = \frac{j(j+D-4)(2j+D-3)}{2j+D-5} a_A^{(j-1)},$$

подставляя которое в (5.19), мы сразу же выводим тождество (5.5). ■

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Тождество (5.5) для производящих функций (5.1) дает равенство, связывающее проекторы (5.9) для спинов j и $j-1$:

$$\eta_{n_1}^{r_1} (\Theta^{(j)})_{r_1 r_2 \dots r_j}^{n_1 n_2 \dots n_j} = (\Theta^{(j)})_{r_1 r_2 \dots r_j}^{r_1 n_2 \dots n_j} = \frac{(j+D-4)(2j+D-3)}{j(2j+D-5)} (\Theta^{(j-1)})_{r_2 \dots r_j}^{n_2 \dots n_j}. \quad (5.20)$$

Таким образом, след матрицы $\Theta^{(j)}$ по паре индексов пропорционален матрице $\Theta^{(j-1)}$. Пользуясь формулой (5.20), можно вычислить полный след проектора Берендса-Фронсдала $\Theta^{(j)}$ в случае D -мерного пространства-времени ($D \geq 3$):

$$(\Theta^{(j)})_{r_1 r_2 \dots r_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} = \frac{(D-4+j)!}{j!(D-3)!} (2j+D-3). \quad (5.21)$$

Этот след равен размерности подпространства, которое вырезается проектором $\Theta^{(j)}$ в пространстве вектор-тензорных волновых функций $f_{n_1 \dots n_j}(k)$. Другими словами,

след (5.21) равен числу N независимых компонент симметричных вектор-тензорных волновых функций $f_{(n_1 \dots n_j)}(k)$, удовлетворяющих условиям

$$k^{n_1} f_{(n_1 \dots n_j)}(k) = 0, \quad \eta^{n_1 n_2} f_{(n_1 n_2 \dots n_j)}(k) = 0,$$

на пространстве которых реализуется неприводимое массивное представление D -мерной группы вращений. Например, для $D = 3$ мы имеем $N = 2$ ($\forall j$), а для $D = 4$ формула (5.21) дает хорошо известный результат $N = (2j + 1)$, что совпадает с числом различных поляризаций массивных частиц со спином j (совпадает с размерностью неприводимого представления со спином j малой подгруппы $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из соотношения (5.2) сразу же следует полезное тождество [10]:

$$\Theta^{(j)}(x, x) = (\Theta^{(1)}(x, x))^j \sum_{A=0}^{[j/2]} a_A^{(j)} = (k)^{-2j} ((k)^2(x)^2 - (k^n x_n)^2)^j \sum_{A=0}^{[j/2]} a_A^{(j)}, \quad (5.22)$$

где коэффициенты $a_A^{(j)}$ определены в (5.5).

Сумму коэффициентов $a_A^{(j)}$ в правой части (5.22) можно вычислить с помощью соотношений (5.5) и (5.22). Действительно, положим $x_r = y_r$ в (5.5), учтем (5.10) и применим оператор $\partial_{x^r} \partial_{x_r}$ к обеим частям равенства (5.22). После этого, сравнивая результаты, мы получаем рекуррентное уравнение

$$S_D^{(j)} = \frac{j + D - 4}{2j + D - 5} S_D^{(j-1)},$$

где $S_D^{(j)} = \sum_{A=0}^{[j/2]} a_A^{(j)}$. Решая это уравнение с учетом начального значения $S_D^{(1)} = a_0^{(j)} = 1$, находим

$$S_D^{(j)} = \frac{(j + D - 4)!}{(D - 3)!(2j + D - 5)(2j + D - 7) \dots (D - 1)}, \quad j > 1. \quad (5.23)$$

Для $D = 4$ выражение для суммы (5.23) упрощается и мы имеем $S_4^{(j)} = j!/(2j - 1)!!$, где $j > 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Для четырехмерного случая $D = 4$ и полуцелого спина j проектор, удовлетворяющий условиям 1–4 из утверждения 6 и равный сумме по поляризациям произведения векторов поляризации (аналог формул (4.22) и (3.14)), имеет вид

$$\begin{aligned} (\Theta^{(j)})_{r_2 \dots r_{j+1/2}}^{n_2 \dots n_{j+1/2}} &= \frac{c^{(j)}}{2\mathbf{m}} (k^n \gamma_n + mI_4) \gamma^{r_1} \gamma_{n_1} (\Theta^{(j+1/2)})_{r_1 r_2 \dots}^{n_1 n_2 \dots} = \\ &= \frac{1}{2\mathbf{m}} (k^n \gamma_n + mI_4) (\tilde{\Theta}^{(j)})_{r_2 \dots}^{n_2 \dots}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где $\Theta^{(j+1/2)}$ – проекционный оператор (5.9), (5.3) для целого спина $(j + 1/2)$, множитель $c^{(j)} = (j + 1/2)/2(j + 1)$, и комбинация $(\tilde{\Theta}^{(j)})_{r_2 \dots}^{n_2 \dots} = c^{(j)} \gamma^{r_1} \gamma_{n_1} (\Theta^{(j+1/2)})_{r_1 \dots}^{n_1 \dots}$ – проекционный оператор для полуцелого спина, построенный в работе [10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала отметим, что $(\Theta^{(j)})_{r_2 \dots r_{j+1/2}}^{n_2 \dots n_{j+1/2}}$ можно также определить как сумму по поляризациям, т. е.

$$(\Theta^{(j)})_{r_2 \dots r_{j+1/2}}^{n_2 \dots n_{j+1/2}} = \frac{(-1)^{j-1/2}}{2} \sum_{m=-j}^j e_{r_2 \dots r_{j+1/2}}^{(m)} \bar{e}^{(m) n_2 \dots n_{j+1/2}}. \quad (5.25)$$

Поляризации произвольного полуцелого спина j выражаются через поляризации целого спина следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{n_1 \dots n_{j+1/2}}^{(m)} &= \sqrt{\frac{(j+m)}{2j}} e_{n_1 \dots n_{j+1/2}}^{(m-1/2)} e^{(+)} + \\ &+ \sqrt{\frac{(j-m)}{2j}} e_{n_1 \dots n_{j+1/2}}^{(m+1/2)} e^{(-)}, \quad m = -j, \dots, j. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Формула (5.26) является обобщением (3.65) и доказывается прямым построением. Перепишем первое равенство в (5.24) в развернутом виде, используя определение (4.22) и (5.25):

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{j-1/2}}{2} \sum_{m=-j}^j e_{r_2 \dots r_j}^{(m)} \bar{e}^{(m) n_2 \dots n_j} &= \\ &= (-1)^{j+1/2} c^{(j)} \Theta^{(1/2)} \gamma^{r_1} \gamma_{n_1} \sum_{m=-(j+1/2)}^{j+1/2} e_{r_1 \dots r_{j+1/2}}^{(m)} \bar{e}^{(m) n_1 \dots n_{j+1/2}}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Левую часть раскрываем с помощью выражения (5.26), а в правой части воспользуемся формулой (4.21) и соотношениями

$$\begin{aligned} \Theta^{(1/2)} \hat{e}^{(0)} \hat{e}^{(+)} &= \Theta^{(1/2)} \hat{e}^{(-)} \hat{e}^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{(-)} \bar{e}^{(+)}, \\ \Theta^{(1/2)} \hat{e}^{(0)} \hat{e}^{(-)} &= \Theta^{(1/2)} \hat{e}^{(+)} \hat{e}^{(0)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{(+)} \bar{e}^{(-)}, \\ \Theta^{(1/2)} \hat{e}^{(-)} \hat{e}^{(-)} &= -e^{(-)} \bar{e}^{(-)}, \quad \Theta^{(1/2)} \hat{e}^{(+)} \hat{e}^{(+)} = -e^{(+)} \bar{e}^{(+)}, \\ \Theta^{(1/2)} \hat{e}^{(-)} \hat{e}^{(+)} &= \Theta^{(1/2)} \hat{e}^{(+)} \hat{e}^{(-)} = 0, \\ \Theta^{(1/2)} \hat{e}^{(0)} \hat{e}^{(0)} &= -\frac{1}{2} (e^{(+)} \bar{e}^{(+)} + e^{(-)} \bar{e}^{(-)}), \end{aligned} \quad (5.28)$$

которые проверяются прямым вычислением. Далее после некоторой перегруппировки слагаемых в правой части убеждаемся, что правая и левая части формулы (5.27) совпадают. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для случая спинов $j = 1/2$ и $j = 3/2$ соотношение (5.24) принимает вид

$$\Theta^{(1/2)} = \frac{1}{3} \Theta^{(1/2)} \gamma^{r_1} \gamma^{n_1} \Theta_{n_1 r_1}^{(1)}, \quad \Theta_{n_2 r_2}^{(3/2)} = \frac{2}{5} \Theta^{(1/2)} \gamma^{r_1} \gamma^{n_1} \Theta_{n_1 n_2 r_1 r_2}^{(2)}. \quad (5.29)$$

Эти равенства можно проверить прямым вычислением, воспользовавшись формулами (3.14), (3.48), (3.68), (5.28) и представлением для матрицы плотности частиц

со спином $j = 2$:

$$\begin{aligned} \Theta_{n_1 n_2 r_1 r_2}^{(2)} = & \mathbf{e}_{n_1}^{(+)} \mathbf{e}_{n_2}^{(+)} \bar{\mathbf{e}}_{r_1}^{(+)} \bar{\mathbf{e}}_{r_2}^{(+)} + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{n_1}^{(+)} \mathbf{e}_{n_2}^{(0)} + \mathbf{e}_{n_1}^{(0)} \mathbf{e}_{n_2}^{(+)})(\bar{\mathbf{e}}_{r_1}^{(+)} \bar{\mathbf{e}}_{r_2}^{(0)} + \bar{\mathbf{e}}_{r_1}^{(0)} \bar{\mathbf{e}}_{r_2}^{(+)} + \\ & + \frac{1}{6} (\mathbf{e}_{n_1}^{(+)} \mathbf{e}_{n_2}^{(-)} + 2\mathbf{e}_{n_1}^{(0)} \mathbf{e}_{n_2}^{(0)} + \mathbf{e}_{n_1}^{(-)} \mathbf{e}_{n_2}^{(+)})(\bar{\mathbf{e}}_{r_1}^{(+)} \bar{\mathbf{e}}_{r_2}^{(-)} + 2\bar{\mathbf{e}}_{r_1}^{(0)} \bar{\mathbf{e}}_{r_2}^{(0)} + \bar{\mathbf{e}}_{r_1}^{(-)} \bar{\mathbf{e}}_{r_2}^{(+)} + \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{n_1}^{(0)} \mathbf{e}_{n_2}^{(-)} + \mathbf{e}_{n_1}^{(-)} \mathbf{e}_{n_2}^{(0)})(\bar{\mathbf{e}}_{r_1}^{(0)} \bar{\mathbf{e}}_{r_2}^{(-)} + \bar{\mathbf{e}}_{r_1}^{(-)} \bar{\mathbf{e}}_{r_2}^{(0)}) + \mathbf{e}_{n_1}^{(-)} \mathbf{e}_{n_2}^{(-)} \bar{\mathbf{e}}_{r_1}^{(-)} \bar{\mathbf{e}}_{r_2}^{(-)}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

которое следует из общей формулы (4.21).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе на основе унитарных представлений накрывающей группы Пуанкаре $ISL(2, \mathbb{C})$ построены явные решения волновых уравнений для свободных массивных частиц произвольного целого и полуцелого спина. Предложен метод разложения данных решений на независимые компоненты, соответствующие разным поляризациям. Построена и вычислена сумма по поляризациям для матрицы плотности частиц произвольного целого спина, которая для $D = 4$ совпадает с проекционным оператором Берендса–Фронсдала. Найдена явная формула для матрицы плотности и для частиц с полуцелым спином. Подробно рассмотрены примеры, отвечающие спинам $j = 1/2, 1, 3/2$.

Отметим, что аналогичным образом может быть рассмотрен и безмассовый случай. Определенные шаги в этом направлении сделаны в работе [5]. Точно так же, как и в массивном случае, из векторов пространств унитарных безмассовых представлений Вигнера для накрывающей группы $ISL(2, \mathbb{C})$ группы Пуанкаре строятся спин-тензорные волновые функции свободных безмассовых частиц с произвольной спиральностью. При этом формула (2.27) переносится на безмассовый случай практически без изменений (надо убрать из правой части нормировочный фактор m^{-r}). Однако соответствующие спин-тензорные волновые функции удовлетворяют вместо уравнений Дирака–Паули–Фирца уравнениям Пенроуза (эти уравнения были сформулированы Пенроузом в координатном представлении, см. [23], [24]), а вместо двухспинорного формализма, изложенного здесь, мы приходим к твисторному формализму [23].

Мы надеемся, что рассмотренный в данной статье двухспинорный формализм для описания массивных частиц произвольного спина будет полезен при построении амплитуд рассеяния массивных частиц, аналогичных амплитудам рассеяния с максимально нарушенной спиральностью безмассовых частиц и их следующего порядка [25], [26].

Благодарности. Авторы благодарны В. А. Рубакову и С. А. Федоруку за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] E. P. Wigner, “On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group”, *Ann. Math.*, **40**:1 (1939), 149–204; V. Bargmann, E. P. Wigner, “Group theoretical discussion of relativistic wave equations”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **34**:5 (1948), 211–223.
- [2] P. A. M. Dirac, “Relativistic wave equations”, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **155**:886 (1936), 447–459.

- [3] M. Fierz, “Über den Drehimpuls von Teilchen mit Ruhemasse null und beliebigem Spin”, *Helvetica Phys. Acta*, **13**:12 (1940), 45–60.
- [4] M. Fierz, W. Pauli, “On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field”, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **173**:953 (1939), 211–232.
- [5] А. П. Исаев, В. А. Рубаков, *Теория групп и симметрий. Конечные группы. Группы и алгебры Ли*, УРСС, М., 2018.
- [6] S. Weinberg, “Feynman rules for any spin”, *Phys. Rev.*, **133**:5B (1964), B1318–B1332; “Feynman rules for any spin. II. Massless particles”, *Phys. Rev.*, **134**:4B (1964), B882–B896.
- [7] Ю. В. Новожилов, *Введение в теорию элементарных частиц*, Наука, М., 1972.
- [8] J. A. de Azcárraga, A. Frydryszak, J. Lukierski, C. Miquel-Espanya, “Massive relativistic particle model with spin from free two-twistor dynamics and its quantization”, *Phys. Rev. D*, **73**:10 (2006), 105011, 9 pp.
- [9] J. A. Azcárraga, S. Fedoruk, J. M. Izquierdo, J. Lukierski, “Two-twistor particle models and free massive higher spin fields”, *JHEP*, **4** (2015), 10, 39 pp.
- [10] R. E. Behrends, C. Fronsdal, “Fermi decay for higher spin particles”, *Phys. Rev.*, **106**:2 (1957), 345–353.
- [11] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [12] I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity. Or a Walk Through Superspace*, IOP, Bristol, 1995.
- [13] Ю. Б. Румер, А. И. Фей, *Теория групп и квантованные поля*, Наука, М., 1977.
- [14] R. Penrose, M. A. H. MacCallum, “Twistor theory: an approach to the quantization of fields and space-time”, *Phys. Rep.*, **6**:4 (1973), 241–315.
- [15] K. P. Tod, “Some symplectic forms arising in twistor theory”, *Rep. Math. Phys.*, **11**:3 (1977), 339–346.
- [16] Z. Perjés, “Twistor variables of relativistic mechanics”, *Phys. Rev. D*, **11**:8 (1975), 2031–2041.
- [17] L. P. Hughston, *Twistors and Particles*, Lecture Notes in Physics, **97**, Springer, Berlin, 1979.
- [18] A. Bette, “On a pointlike relativistic massive and spinning particle”, *J. Math. Phys.*, **25**:8 (1984), 2456–2460; “Directly interacting massless particles – a twistor approach”, *J. Math. Phys.*, **37**:4 (1996), 1724–1734.
- [19] A. Bette, J. A. de Azcárraga, J. Lukierski, C. Miquel-Espanya, “Massive relativistic free fields with Lorentz spins and electric charges”, *Phys. Lett. B*, **595**:1–4 (2004), 491–497.
- [20] S. Fedoruk, J. Lukierski, “Massive twistor particle with spin generated by Souriau–Wess–Zumino term and its quantization”, *Phys. Lett. B*, **733** (2014), 309–315.
- [21] L. C. Biedenharn, H. W. Braden, P. Truini, H. van Dam, “Relativistic wavefunctions on spinor spaces”, *J. Phys. A*, **21**:18 (1988), 3593–3610.
- [22] C. Fronsdal, “On the theory of higher spin fields”, *Nuovo Cimento*, **9**, supp. 2 (1958), 416–443.
- [23] Р. Пенроуз, В. Риндлер, *Спиноры и пространство-время*, т. 2: *Спинорные и твисторные методы в геометрии пространства-времени*, Мир, М., 1988.
- [24] R. Penrose, “Zero rest-mass fields including gravitation: asymptotic behaviour”, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **284**:1397 (1965), 159–203.
- [25] E. Witten, “Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space”, *Commun. Math. Phys.*, **252**:1–3 (2004), 189–258.
- [26] Н. Elvang, Y.-T. Huang, *Scattering Amplitudes in Gauge Theory and Gravity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015.