Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Карилло, Ф. Зулло, Уравнения Ермакова–Пинни и Эмдена–Фаулера: новые решения на основе преобразований Беклунда нового типа, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 3, 373–389

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:58:45

© 2018 г.

С. Карилло^{*†}, Ф. Зулло[‡]

УРАВНЕНИЯ ЕРМАКОВА–ПИННИ И ЭМДЕНА–ФАУЛERA: НОВЫЕ РЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕКЛУНДА НОВОГО ТИПА

Изучается класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида $y''y = F(z, y^2)$, где F – гладкая функция. К этому классу нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относятся различные обыкновенные дифференциальные уравнения, прикладное значение которых хорошо известно. Действительно, среди них можно упомянуть уравнения Эмдена–Фаулера, Ермакова–Пинни и обобщенное уравнение Ермакова. Построены преобразования и автопреобразования Беклунда: начиная с тривиального решения, эти преобразования позволяют построить семейство новых решений данного дифференциального уравнения. Заметим, что наличие сильной нелинейности в структуре дифференциальных уравнений из этого класса обуславливает наличие сложностей в применении численных методов.

Ключевые слова: нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, преобразования Беклунда, производная Шварца, уравнение Ермакова–Пинни, уравнение Эмдена–Фаулера.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9508>

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 1990 г. получены многочисленные результаты по дискретизации обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих интегрируемые физические системы. Среди них – модель Рейсенарса–Шнайдера [1], системы Хенона–Хейлеса, Гарнье и Неймана [2], [3], уравнение Ермакова–Пинни [4], волчок Эйлера [5], волчки

Работа финансово поддержана G.N.F.M. INdAM, Sezione di Roma INFN и Università di Roma “La Sapienza”.

^{*}Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l’Ingegneria, Università di Roma “La Sapienza”, Roma, Italy. E-mail: sandra.carillo@sbai.uniroma1.it

[†]Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma 1, Roma, Italy

[‡]DICATAM, Università di Brescia, Brescia, Italy

Лагранжа [6] и Кирхгофа [7], шар Чаплыгина [8], системы Гаудена [9], [10] (см. также работу [11] и ссылки в ней). Все указанные дискретизации являются отображениями на множестве решений дифференциальных уравнений, описывающих соответствующие интегрируемые системы. Обычно эти преобразования получаются из представления Лакса модели с помощью построения соответствующей *матрицы одевания*, сплетающей уравнения представления Лакса для данной системы (подробности можно найти, например, в работе [11]). Эти преобразования оказываются каноническими в фазовом пространстве системы. Кроме того, они обладают некоторыми ключевыми свойствами, присущими представлению Лакса и интегрируемой структуре системы. В частности, отображения являются алгебраическими, и в случае матрицы Лакса порядка N эта алгебраическая структура вводится через вспомогательную переменную γ , которая удовлетворяет неприводимому полиномиальному уравнению степени N , коэффициенты которого суть рациональные функции динамических переменных (например, см. статью [12]).

В настоящей работе получено алгебраическое отображение на множестве решений некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Интегрируемость уравнений не предполагается, а преобразования получены без использования представления Лакса системы. Как рассматриваемые дифференциальные уравнения, так и полученные преобразования являются скорее обобщением результатов работы [13], в которой при получении результатов принципиальную роль сыграли свойства производной Шварца. В нашем случае производная Шварца продолжает играть ключевую роль при построении преобразований, позволяющих получить новые результаты.

Наше исследование проведено для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющих вид

$$yy'' = F(z, y^2), \quad y: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (1)$$

где, как обычно, штрих означает производную по независимой переменной, а F — нужным образом заданная регулярная функция своих аргументов. В виде (1) можно представить большое количество дифференциальных уравнений, моделирующих физические явления: упомянем уравнение Ермакова–Пинни [14], [15] и уравнение Эмдена–Фаулера (например, см. работы [16] и [17]). Эти два уравнения и их обобщения обсуждаются в следующих разделах. Наконец, отметим, что если функция F в уравнении (1) зависит только от z , то уравнение (1) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (1.1), исследованному в статье [13], которое берет свое начало (в физическом смысле) в обобщенной кинетической теории (см. работу [13] и ссылки в ней).

Хорошо известно (например, см. монографию [18]), что производная Шварца играет фундаментальную роль в теории *линейных* дифференциальных уравнений второго порядка. Для произвольной достаточно гладкой функции $f(z)$, заданной на открытом множестве $I \subset \mathbb{R}$, производная Шварца $\{f, z\}$ определяется по формуле

$$\{f, z\} := \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2, \quad f'(z) \neq 0, \quad z \in I. \quad (2)$$

Связь между производной Шварца и теорией линейных дифференциальных уравнений выражается следующим образом (см., например, монографию [18]): если g_0

и g_1 – два независимых решения уравнения

$$g'' = 2P'g' + Qg, \quad (3)$$

где P и Q – гладкие функции (скажем, из множества C^2) независимых переменных, тогда производная Шварца отношения g_0/g_1 в предположении, что $g_1 \neq 0$, зависит только от функций P и Q . В частности, оказывается, что

$$\left\{ \frac{g_0}{g_1}, z \right\} = 2(P'' - P'^2 - Q). \quad (4)$$

Это соотношение связывает уравнения (1) и (3) через производную Шварца. Далее мы получаем преобразования Беклунда для самого уравнения (1). Тогда новые явные решения уравнения (1) можно строить с помощью преобразования Беклунда для уравнения (1).

Статья организована следующим образом. В вводном разделе 2 рассматривается построение преобразования Беклунда, необходимого для получения последующих результатов. В частности, получены условия, отвечающие за то, что построенное преобразование является автопреобразованием Беклунда. Функциональные уравнения, гарантирующие, что преобразование Беклунда является автопреобразованием, изучаются в разделе 3. В разделе 4 изучаются соотношения между линейным уравнением (3), уравнением (4) и автопреобразованием Беклунда рассматриваемых обыкновенных дифференциальных уравнений. Важно, что в них присутствуют члены, в которых появляется производная Шварца.

В разделе 5 показано, каким образом некоторые хорошо известные нелинейные уравнения можно изучать с помощью метода, развитого в предыдущих разделах. В частности, физически значимые уравнения Ермакова–Пинни и Эмдена–Фаулера изучаются в двух различных пунктах, в которых построены соответствующие преобразования Беклунда и автопреобразования Беклунда.

В заключительном разделе 6 кроме выводов упоминаются также перспективы исследований.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

В этом разделе мы вспоминаем инвариантность, рассмотренную в работе [13], и обобщаем ее должным образом на более широкий класс исследуемых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для начала сформулируем следующую лемму.

ЛЕММА 2.1. *Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (1), где $y: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$. Его допустимые решения связаны преобразованием Беклунда с решениями обыкновенного дифференциального уравнения*

$$v''v - \frac{1}{2}(v')^2 = 2vF(z, v). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим преобразование

$$T: v = y^2, \quad y, v: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (6)$$

и заметим, что ядро оператора T пусто, поскольку y и v считаются вещественными положительнозначными. Тогда после прямой подстановки преобразования (6) в уравнение (1) получаем уравнение (5). Лемма доказана.

Связь можно изобразить графически следующим образом:

$$\boxed{y''y = F(z, y^2)} \xrightarrow{T} \boxed{v''v - \frac{1}{2}(v')^2 = 2vF(z, v)}.$$

ЛЕММА 2.2. Рассмотрим обратное преобразование

$$R: \begin{cases} x = \Phi, & D_t = vD_x, \\ v = D_t\Phi, & D_x = [\Phi_t]^{-1}D_t, \end{cases} \quad (7)$$

в котором

$$D_t := \frac{d}{dt}, \quad D_x := \frac{d}{dx}, \quad \Phi_t = \frac{d}{dt}\Phi. \quad (8)$$

Оно преобразует уравнение (5), где $v: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, в уравнение

$$\{\phi, t\} = 2\phi_t F(\phi, \phi_t). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения следует из непосредственного применения обратного преобразования R .

Две леммы можно объединить в следующей блок-схеме Беклунда согласно терминологии работы [19]¹⁾, где под *блок-схемой Беклунда* подразумевается цепочка связей между разными уравнениями, представленных преобразованиями Беклунда:

$$\boxed{y''y = F(z, y^2)} \xrightarrow{T} \boxed{v''v - \frac{1}{2}(v')^2 = 2vF(z, v)} \xrightarrow{R} \boxed{\{\phi, t\} = 2\phi_t F(\phi, \phi_t)}.$$

Таким образом, мы установили соответствие между уравнениями (1) и (9), которое назовем уравнением Шварца. Этот результат в совокупности с известными свойствами производной Шварца позволяет далее доказать инвариантность, которой обладает уравнение (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть g и ψ – два достаточно гладких отображения. Предположим, что ϕ можно представить в виде композиции двух таких отображений, а именно $\phi = g(\psi)$. Тогда ψ удовлетворяет уравнению Шварца того же вида (9), т. е.

$$\{\psi, t\} = 2\psi_t \tilde{F}(\psi, \psi_t), \quad (10)$$

где $\tilde{F}$ – гладкая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисляя производную Шварца $\{\phi, t\}$, где $\phi = g(\psi)$ представляет собой композицию двух различных отображений g и ψ , получаем выражение

$$\{\phi, t\} = \psi_t^2 \{g, \psi\} + \{\psi, t\}. \quad (11)$$

¹⁾Интересующийся читатель может обратиться к работе [19] и имеющимся там ссылкам, чтобы проследить за более ранними применениями термина *блок-схема Беклунда*.

Это уравнение после подстановки в него уравнения (9) принимает вид

$$\{\psi, t\} = 2\phi_t F(\phi, \phi_t) - \psi_t^2 \{g, \psi\}. \quad (12)$$

Заметим, что это уравнение имеет тот же вид, что и уравнение (9). Действительно, производная ϕ_t равна $g'\psi_t$, следовательно,

$$\{\psi, t\} = 2g'\psi_t F(g, g'\psi_t) - \psi_t^2 \{g, \psi\}. \quad (13)$$

Таким образом, если определить новую функцию $\tilde{F}$ по формуле

$$\tilde{F}(\psi, \psi_t) := g'F(g, g'\psi_t) - \frac{\psi_t}{2} \{g, \psi\} \quad (14)$$

и подставить ее в уравнение (13), то утверждение будет доказано, поскольку мы сразу получаем уравнение (10) вида (9).

Теперь блок-схему Беклунда можно распырить, добавив преобразование B_1 вида $\phi - g(\psi) = 0$. Таким образом, в итоге получаем цепочку связей

$$\boxed{y''y = F(z, y^2)} \stackrel{T}{-} \boxed{v''v - \frac{1}{2}(v')^2 = 2vF(z, v)} \stackrel{R}{-} \boxed{\{\phi, t\} = 2\phi_t F(\phi, \phi_t)} \stackrel{B_1}{-} \boxed{\{\psi, t\} = 2\psi_t \tilde{F}(\psi, \psi_t)}.$$

В соответствии с этим мы можем строить решения, допускаемые дифференциальным уравнением (1), что отражается в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть f – достаточно гладкая функция, такая что $f'(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{R}^+$. Введем

$$Y^2(z) := \frac{y^2(f(z))}{f'(z)}, \quad (15)$$

где $y(z)$ – произвольное решение уравнения (1). Тогда $Y(z)$ – решение уравнения

$$YY'' = f'F(f, f'Y^2) - \frac{1}{2}\{f, z\}Y^2. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что преобразование (15) можно считать преобразованием Беклунда

$$B_2: f'(z)Y^2(z) - y^2(f(z)) = 0, \quad (17)$$

которое при заданной функции f связывает уравнение (10) с (1). Таким образом, утверждение доказывается прямыми вычислениями.

Обсудим полученный результат. Преобразование (15) представляет собой взаимное отображение соответствующих решений уравнений (1) и (16). Существует два различных случая.

1) Когда два уравнения (16) и (1) имеют различный вид, преобразование Беклунда B_2 вида (17) связывает решения уравнения (1) с решениями уравнения (16).

2) Особый случай возникает, когда уравнения (1) и (16) имеют одинаковый вид: в этом случае преобразование B_2 вида (15) представляет собой автопреобразование Беклунда между решениями уравнения (1). Необходимое и достаточное условие,

которому должно удовлетворять преобразование B_2 , чтобы быть автопреобразованием Беклунда, имеет вид

$$F(z, v) = f'F(f, f'v) - \frac{1}{2}\{f, z\}v. \quad (18)$$

Это соотношение получается при непосредственном сравнении правых частей уравнений (16) и (1). Сформулируем полученный результат в виде следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $y(z)$ и $Y(z)$ – решения дифференциальных уравнений (1) и (16) соответственно. Тогда преобразование B_2 вида (15) является автопреобразованием Беклунда, в котором f – решение функционального дифференциального уравнения (18).

Уравнение (18) является функциональным дифференциальным уравнением: характеристика его допустимых решений приводится в следующем разделе. После этого рассмотрены явные примеры, показывающие, каким образом можно построить новые решения уравнения (1), применяя преобразование (17).

3. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

В этом разделе изучается функциональное уравнение (18), в котором неизвестной является функция f , а функция F задана. Таким образом, оно является нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка с наложенным условием $f' \neq 0$. Здесь для простоты мы не ищем функцию f как решение уравнения (18), а предпочитаем рассмотреть (18) как линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение для неизвестной функции F , где, кроме того, предполагается зависимость F от v посредством *правильно подобранного* разложения по степеням. Этот подход позволяет указать, какой формы должна быть заданная функция F , чтобы можно было применить изложенный метод. В частности, предлагается метод построения решений уравнения (1) с помощью преобразования Беклунда при правильно заданной функции F .

Таким образом, предположим, что функция $F(z, v)$ допускает формальное разложение в ряд по степеням v , т. е.

$$F(z, v) = \sum_n F_n(z)v^n, \quad (19)$$

где суммирование происходит по соответствующему множеству целых чисел. Для удобства коэффициенты $F_n(z)$ при $n \neq 1$ будем искать в виде $F_n = (G'_n)^{n+1}$, где G'_n означает производную гладкой (по крайней мере, из множества C^1) функции от z . В случае $n = 1$ положим

$$F_1(z) := (G'_1)^2 - \frac{1}{2}Q(z), \quad (20)$$

где $Q(z)$ – нужным образом подобранная функция. Следовательно, подставляя это выражение, а также выражение (19) в уравнение (18), получаем уравнение

$$2 \sum_n ((f')(G'_n)(f) - (G'_n(z))^{n+1}v^n - (f')^2Q(f)v + Q(z)v - \{f, z\}v) = 0, \quad (21)$$

которое явно зависит от G_n . При этом, например, $(G'_n)(f)$ означает, что функция G'_n образована функциями $f(z)$.

Первый член разложения в степенной ряд (21) умножается на v^{-1} ; равенство (21) тривиально удовлетворяется, если положить равными нулю все коэффициенты при v^k . Это означает, что действие отображения $f(z)$ на функции $G_n(z)$ является переносом, т. е. функции $G_n(z)$ удовлетворяют линейным функциональным уравнениям

$$G_n(f(z)) = G_n(z) + K_n \iff f'G'_n(f) = G'_n(z) \quad (22)$$

при всех n , где K_n – произвольные постоянные. Подставляя (22) в уравнение (21), получаем равенство

$$Q(z) = (f')^2 Q(f) + \{f, z\}. \quad (23)$$

Заметим, что правая часть в этом уравнении похожа на правую часть уравнения (11), если отождествить переменную z с переменной t , а функцию f – с функцией ψ . Такая аналогия предлагает отождествить Q с соответствующей производной Шварца, т. е. положить

$$Q(z) := \{w, z\}. \quad (24)$$

Подстановка этого выражения в формулу (22) с последующим сравнением уравнений (23) и (11) показывает, что решения уравнения (23) получаются в том случае, если $w(z)$ и $f(z)$ связаны функциональным уравнением

$$\{w(z), z\} = (f')^2 \{w(f), f\} + \{f, z\}, \quad (25)$$

где появляется производная Шварца композиции двух функций, поскольку

$$(f')^2 \{w(f), f\} + \{f, z\} \equiv \{w(f), z\}.$$

Поэтому функции $w(f(z))$ и $w(z)$ должны быть связаны дробно-линейным преобразованием

$$w(f(z)) = \frac{aw(z) + b}{cw(z) + d}, \quad ad - bc \neq 0. \quad (26)$$

Следовательно, комбинируя полученные результаты, можно доказать следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если функция $F(z, v)$ представима в виде разложения в степенной ряд по v , то решение функционального дифференциального уравнения

$$F(z, v) = f'F(f, f'v) - \frac{1}{2}\{f, z\}v$$

имеет вид

$$F(z, v) = \sum_n a_n G'_n(z) v^{n+1} - \frac{1}{2}\{w(z), z\}v, \quad (27)$$

где функции $G_n(z)$ и $w(z)$ удовлетворяют функциональным уравнениям (в которых a, b, c, d и K_n – произвольные постоянные)

$$G_n(f(z)) = G_n(z) + K_n, \quad w(f(z)) = \frac{aw(z) + b}{cw(z) + d}, \quad ad - bc \neq 0. \quad (28)$$

Предыдущее предложение позволяет найти дифференциальные уравнения, обладающие автопреобразованиями Беклунда (17). Из этого предложения вытекает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $y_0(z)$ – решение дифференциального уравнения

$$y'' = \sum_n a_n (G'_n(z))^{n+1} y^{2n-1} - \frac{1}{2} \{w(z), z\} y, \quad (29)$$

где функции $G_n(z)$ и $w(z)$ введены в предложении 3.1. Тогда

$$y_1(z)^2 = \frac{y_0(f(z))^2}{f'(z)}$$

является автопреобразованием Беклунда для уравнения (29).

Полученные результаты можно расширить и дополнить в силу следующих двух предложений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Общее решение функционального уравнения

$$G(f(z)) = G(z) + K \quad (30)$$

имеет вид

$$G(z) = G_0(z) + \Phi(G_0(z)), \quad (31)$$

где $G_0(z)$ – частное решение уравнения (30), а $\Phi(z)$ – произвольная периодическая функция с периодом K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть функция $w(z)$ задана в виде

$$w(z) := \frac{DG(z) - B}{A - CG(z)}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

где $G(z)$ – произвольная функция, удовлетворяющая уравнению (30). Тогда $w(z)$ является решением уравнения

$$w(f(z)) = \frac{(\Delta + DCK)w(z) + D^2K}{(\Delta - DCK) - w(z)C^2K}, \quad (33)$$

в котором $\Delta = AD - BC \neq 0$.

Оба этих предложения можно легко доказать с помощью непосредственных вычислений.

4. АВТОПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

В этом разделе мы связываем автопреобразования Беклунда с линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка. Особое внимание сосредоточим на том, как из решений *линейного* обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка можно построить преобразования (17).

Прежде всего изложим основные идеи. Рассмотрим связь между двумя независимыми решениями уравнения (3), и пусть $w(z)$ означает их отношение, а именно

$$w(z) := \frac{g_0(z)}{g_1(z)}, \quad g_1(z) \neq 0. \quad (34)$$

Тогда согласно уравнению (4) производная Шварца функции w имеет вид

$$-\frac{1}{2}\{w, z\} = Q + (P')^2 - P'',$$

где P и Q – гладкие коэффициенты обыкновенного дифференциального уравнения (1). Теперь предположим существование функции $f(z)$ такой, что $w(f(z))$ выражается через дробно-линейное преобразование функции $w(z)$, т. е. оно удовлетворяет гипотезам предложения 3.1. Тогда рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$w(f(z)) = \frac{(\Delta + DCK)w(z) + D^2K}{(\Delta - DCK) - w(z)C^2K}, \quad A, B, C, D, K \in \mathbb{R}, \quad (35)$$

где $\Delta = AD - BC \neq 0$. Зададим функцию $G(z)$ следующим образом:

$$G(z) := \frac{Aw(z) + B}{Cw(z) + D},$$

тогда для любого z справедливо функциональное соотношение $G(f(z)) = G(z) + K$. Заметим, что функция $w(z)$ задана выражением (34). Следовательно, производную функции $G(z)$ можно представить с помощью вронскиана решений уравнения (3) в виде

$$G'(z) = \Delta C_1 \left(\frac{e^{P(z)}}{Cg_0(z) + Dg_1(z)} \right)^2, \quad (36)$$

где C_1 – надлежащим образом выбранная константа. Если в качестве коэффициентов ввести произвольные константы, которые обозначим a_n , то тем самым будет доказан следующий вывод из следствия 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $y_0(z)$ – решение дифференциального уравнения

$$y'' = \sum_n a_n \left(\frac{e^{P(z)}}{Cg_0(z) + Dg_1(z)} \right)^{2n+2} y^{2n-1} + (Q + (P')^2 - P'')y, \quad (37)$$

где функции $P(z)$ и $Q(z)$ произвольны, а g_0 и g_1 – два независимых решения линейного дифференциального уравнения (3). Тогда, если можно найти функцию $f(z)$ такую, что справедливо уравнение (35), то отображение

$$y_1(z)^2 = \frac{y_0(f(z))^2}{f'(z)} \quad (38)$$

определяет автопреобразование Беклунда для уравнения (37).

Актуальность полученного результата подтверждается в следующем разделе, в котором уравнения (37), (38) используются в различных примерах.

5. ПРИМЕНЕНИЯ

Можно показать, что класс дифференциальных уравнений (29) охватывает, в частности, большое количество нелинейных дифференциальных уравнений. Целью данного раздела является показать принадлежность к этому классу хорошо известных нелинейных уравнений Ермакова–Пинни и Эмдена–Фаулера, применимость которых не вызывает сомнений. Кроме того, рассмотрены некоторые обобщения этих уравнений.

Прежде всего обратимся к простому случаю. Заметим, что если в уравнении (29), которое для удобства перепишем в виде

$$y'' = \sum_n a_n (G'_n(z))^{n+1} y^{2n-1} - \frac{1}{2} \{w(z), z\} y, \quad (29)$$

для любого n положить $G_n(z) := G(z)$, то оно совместно с дополнительными условиями $K_n = K$ и $\Phi = 0$. Действительно, в уравнении (28) произвол выбора функций $G_n(z)$ отражается в произволе выбора параметров K_n и периодической функции Φ в уравнениях (22) и (31) соответственно. Кроме того, предполагаемая (по умолчанию) сходимости ряда в уравнении (29) на заданном открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$ означает, что последовательность $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ такова, что на $\Omega \subset \mathbb{R}$ можно ввести следующий сходящийся ряд:

$$H(z) := \sum_n a_n z^n. \quad (39)$$

В этом случае следствие 3.1 принимает упрощенный вид.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $y_0(z)$ – решение дифференциального уравнения

$$yy'' = G' H(G' y^2) - \frac{1}{2} \{w, z\} y^2, \quad (40)$$

где функции $G(z)$ и $w(z)$, как указано в предложении 3.1, удовлетворяют функциональным уравнениям (28), т. е.

$$G(f(z)) = G(z) + K, \quad w(f(z)) = \frac{aw(z) + b}{cw(z) + d}, \quad a, b, c, d, K \in \mathbb{R}. \quad (28)$$

Тогда отображение

$$y_1(z)^2 = \frac{y_0(f(z))^2}{f'(z)}$$

задает автоморфизм Беклунда уравнения (40).

В следующих пунктах получены дифференциальные уравнения, имеющие важный физический смысл и соответствующие специальным выборам функции $H(z)$ в уравнении (40).

5.1. Уравнение Ермакова–Пинни. Первый интересный случай представлен уравнением Ермакова–Пинни, которое изучается в данном пункте. А именно, если в уравнении (37) функция $P(z)$, а также все коэффициенты a_n равны нулю, кроме a_{-1} , который обозначим $a_1 = -\alpha$, то мы получаем уравнение Ермакова–Пинни²⁾

$$y'' = Q(z)y - \frac{\alpha}{y^3}. \quad (41)$$

Такой выбор эквивалентен выбору $H(z) = -\alpha/z$ в следствии 5.1.

Уравнение Ермакова–Пинни было введено в 1880 г. Ермаковым [15], который исследовал условия разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Уравнение Ермакова–Пинни близко связано с гармоническим осциллятором, частота которого зависит от времени. Оно используется для описания различных задач квантовой механики, таких как движение заряженных частиц в ловушке Поля [20], атомная теория переноса [21] и теория конденсата Бозе–Эйнштейна [22]. Кроме того, оно играет фундаментальную роль при описании унитарной эволюции квантовых неавтономных систем [23]. Оно также появляется в космологии [24]. Набор преобразований Беклунда и точная дискретизация уравнения (41) получены в работе Хоне [4], который, применив два различных преобразования, получил его точную дискретизацию. Уравнения типа уравнения Ермакова изучаются с помощью преобразований Беклунда в статьях [25], [26], где исследуется их связь с уравнениями Пенлеве.

Теперь, применяя результаты предыдущих разделов, мы получаем набор преобразований Беклунда для уравнения Ермакова–Пинни. В частности, поскольку уравнению (41) соответствует $P = 0$ в уравнении (37), допустимые преобразования Беклунда определяются следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Предположим, что y_0 – решение уравнения Ермакова–Пинни. Введем функцию $w(z) = g_0/g_1$, где g_0 и g_1 – два независимых решения линейного дифференциального уравнения $y'' = Qy$. Тогда если возможно найти такую функцию $f(z)$, для которой справедливо уравнение (26), то отображение*

$$y_1(z)^2 = \frac{y_0(f(z))^2}{f'(z)}$$

является автопреобразованием Беклунда уравнения (41).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость данного утверждения вытекает из следствия 4.1, если представить все параметры в нем в виде $a_k = -\alpha\delta_{k,-1}$ и положить $P \equiv 0$.

Интересные примеры возникают в случае, когда в функции Q присутствует зависимость от z^2 (в частности, если она является комбинацией члена, пропорционального z^{-2} , и члена, пропорционального z^{4k} , при некотором целом $k \in \mathbb{N}$). Каждая из этих функций в отдельности имеет приложение в космологиях скалярных полей (см. статью [10]). В частности, рассмотрим функцию Q вида

$$Q(z) = p^2(2k+1)^2 \frac{z^{4k}}{4} + \frac{k(k+1)}{z^2}, \quad p \in \mathbb{R}^+. \quad (42)$$

²⁾Вводя символ Кронекера $\delta_{k,l} := \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l, \end{cases}$ условие для коэффициентов a_n можно представить в виде $a_n = -\alpha\delta_{-1,n}$.

В этом случае мы получаем функцию w вида

$$w(z) = e^{pz^{2k+1}}, \quad (43)$$

а функцию $f(z)$ зададим формулой

$$f^{2k+1} = \frac{1}{p} \ln \left(\frac{aw(z) + b}{cw(z) + d} \right), \quad ad - bc \neq 0. \quad (44)$$

Следовательно, по заданному решению y_0 уравнения (41) можно построить решение по формуле

$$y_1(z)^2 = \frac{y_0(f)^2}{f'}. \quad (45)$$

Действительно, найдем частное решение уравнения (41) при выбранном Q в уравнении (42):

$$y_0(z) = \frac{\beta}{z^k}, \quad \beta^4 := \frac{4\alpha}{p^2(2k+1)^2}. \quad (46)$$

Таким образом, применяя преобразование (45), после некоторых манипуляций находим новый набор решений, скажем $y_1(z)$, следующего вида:

$$y_1(z)^2 = \frac{\beta^2}{z^{2k}} \frac{(aw(z) + b)(cw(z) + d)}{w(z)(ad - bc)}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (47)$$

где функция $w(z)$ задана выражением (43). Заметим, что предыдущее уравнение определяет общее решение уравнения (41), которое соответствует функции Q вида (42).

5.2. Уравнение Эмдена–Фаулера. Этот пункт посвящается второму примеру обыкновенного дифференциального уравнения, допускающего преобразования Беклунда, которые можно построить согласно общим результатам, содержащимся в разделах 2–4. Обобщенное уравнение Эмдена–Фаулера первого типа с неизвестной функцией $q(x)$ имеет вид (например, см. статью [17])

$$xq_{xx} + \alpha q_x + \beta x^\nu q^n = 0. \quad (48)$$

Это уравнение появляется в большом количестве разнообразных задач математической физики. В частности, при $\nu = 1$ и $\alpha = 3$ оно описывает гидростатическое и термодинамическое равновесие звезд. Кроме того, оно появляется при изучении полевых уравнений Эйнштейна [27] или в описании критического поглощения методом среднего поля [28] (другие примеры даны в работе [17] и в имеющихся в ней ссылках). Уравнение (48) с целым параметром α используется при моделировании сферически симметричных стационарных решений эволюционных задач с помощью оператора Лапласа в α -мерном пространстве. Точнее, если r означает *радиальную* координату при поиске сферически симметричного решения, редукция уравнения

$$\nabla^2 q + \beta r^{\nu-1} q^n = 0$$

непосредственно приводит к уравнению (48). Особенно интересное обобщение представляет собой модифицированное уравнение Эмдена–Фаулера, которое получается при замене в уравнении (48) множителя x^ν на функцию от x :

$$xq_{xx} + \alpha q_x + \beta r(x)q^n = 0. \quad (49)$$

В этом пункте приводится два примера: один для уравнения (48), а второй для уравнения (49). Уравнение (48) является частным случаем уравнения (49), который соответствует выбору $r(x) = x^\nu$. Аналогично, наш первый пример является частным случаем второго.

ПРИМЕР 1. В этом пункте возьмем $\nu = 1 - 2\alpha$ в уравнении (48) и положим $n = 2m - 1$ для дальнейшего удобства. Тогда дифференциальное уравнение (48) принимает вид

$$xq_{xx} + \alpha q_x + \beta x^{1-2\alpha} q^{2m-1} = 0. \quad (50)$$

Замена переменных

$$q(x) = \frac{y(z)}{z}, \quad z = x^{\alpha-1}$$

в уравнении (50) сводит его к уравнению

$$y'' + \frac{\beta}{(\alpha-1)^2} \frac{y^{2m-1}}{z^{2m+2}} = 0. \quad (51)$$

Сравним это уравнение с уравнением (37): полагая согласно следствию 4.1

$$Q = P'' - (P')^2 \quad \text{и} \quad a_m = -\frac{\beta}{(\alpha-1)^2} \delta_{m,n},$$

мы получаем уравнение (51). Действительно, выбор $Q = P'' - (P')^2$ приводит к тому, что функции g_0 и g_1 являются линейными комбинациями e^P и ze^P (независимыми решениями уравнения (3)). Пусть теперь

$$g_0 = e^P(D - bz), \quad g_1 = e^P(az - C), \quad aD - bC = 1,$$

тогда уравнение (37) в точности совпадает с (51). На следующем шаге, решая функциональное уравнение (33), покажем, что функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \frac{\Delta z}{Kz + \Delta},$$

что позволяет найти преобразование Беклунда

$$y_1^2(z) = y_0^2 \left(\frac{\Delta z}{Kz + \Delta} \right) \frac{(Kz + \Delta)^2}{\Delta^2}. \quad (52)$$

Частное решение уравнения (48) получено в работе [29]: оно соответствует случаю

$$y_0(z) = pz^{m/(m-1)} \quad (53)$$

и представляет собой решение уравнения (51), где константа p должна удовлетворять уравнению

$$\beta(m-1)^2 p^{2m-2} + m(\alpha-1)^2 = 0.$$

Заметим, что это уравнение при заданных вещественных β и m имеет, вообще говоря, комплексные решения $p \in \mathbb{C}$; следовательно, чтобы получить $p \in \mathbb{R}$, параметры β

и m должны быть соответственно положительным и отрицательным, или наоборот. Новое решение (52) имеет вид

$$y_1^2(z) = p^2 \left(\frac{\Delta z}{Kz + \Delta} \right)^{2m/(m-1)} \frac{(Kz + \Delta)^2}{\Delta^2} \quad (54)$$

и представляет собой два различных однопараметрических решения уравнения (51). Параметром, который можно выбирать, является K/Δ . Заметим также, что дальнейшие итерации того же самого преобразования, в которых каждая итерация определяется парой параметров Δ_n и K_n , не добавляют в решение новых констант. Действительно, n -ю итерацию можно представить в виде

$$y_n^2(z) = p^2 \left(\frac{R_n z}{S_n z + R_n} \right)^{2m/(m-1)} \frac{(S_n z + R_n)^2}{R_n^2},$$

где коэффициенты R_n и S_n являются решениями рекуррентных соотношений

$$R_{n+1} = \Delta_{n+1} R_n, \quad S_{n+1} = \Delta_{n+1} S_n + K_{n+1} R_n$$

с начальными значениями $R_0 = 1$, $S_0 = 0$ (очевидно, $\Delta_1 = \Delta$ и $K_1 = K$).

ПРИМЕР 2. В этом примере мы обращаемся к модифицированному уравнению Эмдена–Фаулера (49). Для дальнейшего удобства мы снова полагаем $n = 2m - 1$. Выберем функцию $r(x)$ как

$$r(x) = \frac{1}{x^{2\alpha}} \left(\frac{x^{\alpha-1}}{\eta + \gamma x^{\alpha-1}} \right)^{2m+2}, \quad (55)$$

что соответствует следующему дифференциальному уравнению для неизвестной функции $q(x)$:

$$xq_{xx} + \alpha q_x + \beta x^{1-2\alpha} \left(\frac{x^{\alpha-1}}{\eta + \gamma x^{\alpha-1}} \right)^{2m+2} q^{2m-1} = 0. \quad (56)$$

При частном выборе $(\eta, \gamma) = (0, 1)$ уравнение (56) сводится к уравнению (50) из предыдущего примера. Последующая замена переменных в уравнении (56)

$$q(x) = \frac{y(z)}{z}, \quad z = x^{\alpha-1},$$

приводит его к уравнению

$$y'' + \frac{\beta}{(\alpha-1)^2} \frac{y^{2m-1}}{(\eta + \gamma z)^{2m+2}} = 0. \quad (57)$$

Сравним это уравнение с уравнением (37): согласно следствию 4.1 нужно положить

$$Q = P'' - (P')^2 \quad \text{и} \quad a_m = -\frac{\beta}{(\alpha-1)^2} \delta_{m,n}.$$

Тогда функции g_0 и g_1 являются линейными комбинациями e^P и ze^P (т.е. они являются двумя независимыми решениями уравнения (3)). Пусть

$$\begin{cases} g_0 = e^P(a_0 z + b_0), \\ g_1 = e^P(a_1 z + b_1), \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} Ca_0 + Da_1 = \gamma, \\ Cb_0 + Db_1 = \eta. \end{cases}$$

Эти соотношения позволяют проверить, что уравнение (37) сводится в точности к уравнению (57). Далее можно показать, что функция $f(z)$ (решение функционального уравнения (33)) имеет вид

$$f(z) = \frac{(K\eta\gamma + \Delta\delta)z + K\eta^2}{(\Delta\delta - K\eta\gamma) - K\gamma^2z}, \quad \delta := a_0b_1 - a_1b_0.$$

Согласно следствию 4.1 уравнение (57) допускает следующие преобразования Беклунда:

$$y_1(z)^2 = y_0 \left(\frac{(K\eta\gamma + \Delta\delta)z + K\eta^2}{(\Delta\delta - K\eta\gamma) - K\gamma^2z} \right)^2 \left(\frac{(\Delta\delta - K\eta\gamma) - K\gamma^2z}{\Delta\delta} \right)^2. \quad (58)$$

Частное решение уравнения (56) имеет вид

$$y_0(z) = p(\eta + \gamma z)^{m/(m-1)}, \quad (59)$$

где постоянная p является решением уравнения

$$\beta(m-1)^2 p^{2m-2} + m\gamma^2(\alpha-1)^2 = 0.$$

Заметим, что решение (59) сводится к (53) при $(\eta, \gamma) = (0, 1)$, и тогда преобразование (58) совпадает с преобразованием (54). Новое решение имеет вид

$$y_1(z)^2 = p^2 \left(\frac{\Delta\delta(\eta + \gamma z)}{(\Delta\delta - K\eta\gamma) - K\gamma^2z} \right)^{2m/(m-1)} \left(\frac{(\Delta\delta - K\eta\gamma) - K\gamma^2z}{\Delta\delta} \right)^2.$$

6. ВЫВОДЫ

В настоящей работе рассмотрен класс нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка вида $yy'' = F(z, y^2)$, который является естественным обобщением уравнения $yy'' = S(x)$, представленного в работе [13]. Мы доказали, что изученные уравнения допускают преобразования Беклунда (15), которые в общем случае представляют собой отображения решений нелинейного дифференциального уравнения вида (1) в решения другого уравнения из того же класса. Интересно отметить, что в эти преобразования входят автопреобразования Беклунда в качестве частных случаев. Мы изучили и эти частные случаи. Так, в частности, показано, что если $F(z, v)$ и $f(z)$ удовлетворяют дифференциальному функциональному уравнению (18), то отображение (17) представляет собой автопреобразования Беклунда уравнения (1). Эти автопреобразования Беклунда являются алгебраическими и в действительности устанавливают многозначное соответствие между решениями одних и тех же дифференциальных уравнений в комплексной области определения. Однако если потребовать, чтобы функции были вещественнозначными и положительными, то соответствие становится взаимно однозначным. В частности, если обратиться к очень специфическому случаю, когда F зависит только от z , т. е. $F(z, v) = S(z)$, и, кроме того, функция f является дробно-линейным преобразованием, т. е. $f(z) = (az + b)/(cz + d)$, то в качестве частного случая преобразования (17) мы получаем преобразование, рассмотренное в работе [13]. Кроме того, предложены разнообразные приложения уравнения (1): они представляют собой только некоторые из примеров, в которых построенные преобразования Беклунда можно использовать для получения новых результатов. К классу исследованных нами уравнений

принадлежат и другие физически интересные системы, возникающие, например, как редукции уравнений в частных производных; в нашей работе мы сосредоточились только на некоторых физически важных примерах. Другие результаты, касающиеся уравнения Гросса–Питаевского, можно найти в [30]. Кроме того, ведутся исследования, касающиеся структуры уравнения (1), а также его решений в комплексной области. Также в настоящее время исследуются связи между полученными преобразованиями Беклунда, свойствами интегрируемости, и, возможно, гамильтоновой структурой соответствующих уравнений с целью уточнения результатов работы [29].

Список литературы

- [1] F. W. Nijhoff, O. Ragnisco, V. B. Kuznetsov, “Integrable time-discretisation of the Ruijsenaars–Schneider model”, *Commun. Math. Phys.*, **176**:3 (1996), 681–700.
- [2] A. N. W. Hone, V. B. Kuznetsov, O. Ragnisco, “Bäcklund transformations for many-body systems related to KdV”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**:27 (1999), L299–L306.
- [3] A. V. Tsiganov, “On auto and hetero Bäcklund transformations for the Hénon–Heiles systems”, *Phys. Lett. A*, **379**:5 (2015), 2903–2907.
- [4] A. N. W. Hone, “Exact discretization of the Ermakov–Pinney equation”, *Phys. Lett. A*, **263**:4–6 (1999), 347–354.
- [5] A. I. Bobenko, B. Lorbeer, Yu. B. Suris, “Integrable discretizations of the Euler top”, *J. Math. Phys.*, **39**:12 (1998), 6668–6683.
- [6] V. B. Kuznetsov, M. Petrera, O. Ragnisco, “Separation of variables and Bäcklund transformations for the symmetric Lagrange top”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:35 (2004), 8495–8512.
- [7] O. Ragnisco, F. Zullo, “Bäcklund transformation for the Kirchhoff top”, *SIGMA*, **7**:001 (2011), 13.
- [8] A. V. Tsiganov, “Integrable Euler top and nonholonomic Chaplygin ball”, *J. Geom. Mech.*, **3**:3 (2011), 337–362.
- [9] O. Ragnisco, F. Zullo, “Bäcklund transformations as exact integrable time discretizations for the trigonometric Gaudin model”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43**:43 (2010), 434029, 14 pp.
- [10] F. Zullo, “Bäcklund transformations for the elliptic Gaudin model and a Clebsch system”, *J. Math. Phys.*, **52**:7 (2011), 073507, 14 pp.
- [11] F. Zullo, “Bäcklund transformations and Hamiltonian flows”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:14 (2013), 145203, 16 pp.
- [12] A. N. W. Hone, O. Ragnisco, F. Zullo, “Algebraic entropy for algebraic maps”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49**:2 (2016), 02LT01, 16 pp.
- [13] S. Carillo, “A novel Bäcklund invariance of a nonlinear differential equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **252**:2 (2000), 828–839.
- [14] A. K. Common, M. Musette, “Two discretisations of the Ermakov–Pinney equation”, *Phys. Lett. A*, **235**:6 (1997), 574–580.
- [15] V. P. Ermakov, “Second-order differential equations: conditions of complete integrability”, *Appl. Anal. Discrete Math.*, **2**:2 (2008), 123–145.
- [16] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structures*, Dover, New York, 1958.
- [17] H. Goenner, P. Havas, “Exact solutions of the generalized Lane–Emden equation”, *J. Math. Phys.*, **41**:10 (2000), 7029–7042.
- [18] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*, Wiley, Toronto, 1976.
- [19] S. Carillo, M. Lo Schiavo, C. Schiebold, “Bäcklund transformations and non-abelian nonlinear evolution equations: a novel Bäcklund chart”, *SIGMA*, **12** (2016), 087, 17 pp.

- [20] F. Major, V.N. Gheorghe, G. Werth, *Charged Particle Traps. Physics and Techniques of Charged Particle Field Confinement*, Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics, **37**, Springer, Berlin, 2005.
- [21] E. Torrontegui, S. Ibáñez, X. Chen, A. Ruschhaupt, D. Guéry-Odelin, J.G. Muga, “Fast atomic transport without vibrational heating”, *Phys. Rev. A*, **83**:1 (2011), 013415, 9 c.
- [22] A.I. Nicolin, “Resonant wave formation in Bose–Einstein condensates”, *Phys. Rev. E*, **84**:5 (2011), 056202, 6 pp.
- [23] D.G. Vergel, E.J.S. Villaseñor, “The time-dependent quantum harmonic oscillator revisited: applications to quantum field theory”, *Ann. Phys.*, **324**:6 (2009), 1360–1385.
- [24] R.L. Hawkins, J.E. Lidsey, “Ermakov–Pinney equation in scalar field cosmologies”, *Phys. Rev. D*, **66**:2 (2002), 023523, 8 pp.
- [25] C. Rogers, “On hybrid Ermakov–Painlevé systems. Integrable reduction”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **24**:2 (2017), 239–249.
- [26] C. Rogers, W.K. Schief, “On Ermakov–Painlevé II systems. Integrable reduction”, *Meccanica*, **51**:12 (2016), 2967–2974.
- [27] E. Hertl, “Spherically symmetric nonstatic perfect fluid solutions with shear”, *Gen. Rel. Grav.*, **28**:8 (1996), 919–934.
- [28] S. Gbutzmann, U. Ritschel, “Analytic solution of Emden–Fowler equation and critical adsorption in spherical geometry”, *Z. Phys. B*, **96**:3 (1995), 391–393.
- [29] B. Fuchssteiner, S. Carillo, “The action-angle transformation for soliton equations”, *Phys. A*, **166**:3 (1990), 651–676.
- [30] S. Carillo, F. Zullo, “The Gross–Pitaevskii equation: Bäcklund transformations and admitted solutions”, *Ricerche Mat.*, 2018 (to appear); [arXiv:1803.09228](https://arxiv.org/abs/1803.09228).