Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Э. Деркачёв, В. П. Спиридонов, О $6j$ -символах для группы $SL(2, \mathbb{C})$, *ТМФ*, 2019, том 198, номер 1, 32–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 03:14:23

© 2019 г.

С. Э. Деркачёв*, В. П. Спиридонов†

О $6j$ -СИМВОЛАХ ДЛЯ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{C})$

Строятся $6j$ -символы, или коэффициенты Рака, для тензорных произведений бесконечномерных унитарных представлений основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$. С помощью техники фейнмановских диаграмм воспроизводится (с точностью до некоторой разницы, связанной с эквивалентными представлениями) результат Исмагилова по построению этих символов. Возникающие $6j$ -символы выражаются либо в виде тройного интеграла по комплексной плоскости, либо в виде бесконечной двусторонней суммы интегралов типа Меллина–Барнса.

Ключевые слова: $3j$ - и $6j$ -символы, фейнмановские диаграммы, гипергеометрические интегралы, группа $SL(2, \mathbb{C})$.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9512>

Памяти Людвига Дмитриевича Фаддеева

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема разложения тензорных произведений неприводимых представлений классических групп в прямую сумму таких представлений с помощью $3nj$ -символов является хорошо известным старым сюжетом для исследований. Несмотря на очень большое число результатов, полученных в этой области Клебшем, Горданом, Вигнером, ван дер Варденом, Фоком, Рака, Наймарком, Биденхарном и многими другими учеными, эта тема еще не исчерпана и продолжает развиваться. Детально изучая атомные спектры, Рака [1] построил замкнутое выражение для $6j$ -символов конечномерных представлений группы $SU(2)$. Оно задается обрывающимся гипергеометрическим рядом ${}_4F_3$ и определяет множество классических ортогональных полиномов, называемых многочленами Рака [2]. Обзор теории $3nj$ -символов и список соответствующей литературы можно найти в справочнике [3].

Группа $SL(2, \mathbb{C})$ – одна из самых важных групп Ли, поскольку она является неабелевой группой наименьшего ранга над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ [4]. Она

Данная работа поддержана Российским научным фондом (проект № 14-11-00598).

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: derkach@pdmi.ras.ru

†Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: spiridon@theor.jinr.ru

совпадает с группой Лоренца, и, соответственно, ее конечномерные представления играют ключевую роль в четырехмерной квантовой теории поля, поскольку они описывают наблюдаемые элементарные частицы. Неприводимые бесконечномерные представления группы $SL(2, \mathbb{C})$ также нашли приложения в физике. Например, эти представления возникают в модели спиновой цепочки в высокоэнергетическом режиме квантовой хромодинамики (см. работы [5]–[8]). Таким образом, исследование теории представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ не требует дополнительных обоснований.

В настоящей работе мы рассматриваем $6j$ -символы, или коэффициенты (операторы) Рака, для тензорного произведения унитарных бесконечномерных представлений основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$. Для таких представлений $3j$ -символы, или коэффициенты Клебша–Гордана, были построены Наймарком еще в 1959 г. [9]. Они определяются однозначной комплексной функцией трех переменных, описывающей пространство представлений, и зависят от трех целочисленных и трех вещественных параметров. Проекторы на неприводимые компоненты соответствующих двойных тензорных произведений задаются интегральными операторами с ядрами, которые определяются такими функциями. Несмотря на важность проблемы получения $6j$ -символов для группы $SL(2, \mathbb{C})$, связанных с тройными тензорными произведениями, они были построены только недавно Исмагиловым в работах [10], [11].

Предыдущий наиболее близкий результат по этой теме был получен в работе [12], где было рассмотрено интегральное преобразование, связанное с функциями Вильсона, и построены $6j$ -символы для тензорных произведений, включающих унитарное представление основной серии группы $SU(1, 1)$. Результаты Исмагилова открывают заключительную главу программы построения $3nj$ -символов для групп наименьшего ранга. Как следует из общей теории представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ [4], остается рассмотреть аналогичные задачи для случаев, включающих представления дополнительной серии, а также неунитарные представления. В настоящей работе мы заново получаем результаты Исмагилова, используя другой подход, а именно технику фейнмановских диаграмм, и приводим два различных типа интегральных представлений для этих $6j$ -символов.

Область приложений $6j$ -символов является весьма обширной, простираясь от квантовой механики, в которой они описывают динамику углового момента, до квантовой гравитации, статистической механики, теории инвариантов узлов и т. д. Например, оператор, сплетающий эквивалентные представления основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$ (он описан в следующем разделе), играет ключевую роль при построении общего решения уравнения Янга–Бакстера вершинного типа [13]. Аналогичным образом $6j$ -символы, рассмотренные в настоящей статье, должны определять решения уравнения Янга–Бакстера другого типа, связанного с моделями IRF (interaction round a face, взаимодействие вокруг плакета) в статистической механике.

Квантовые деформации алгебры $sl(2)$ исследовались в последние десятилетия с различных точек зрения. В частности, модулярный дубль $U_q(sl(2, \mathbb{R}))$ был предложен Фаддеевым в работе [14], а в работе [15] были построены $6j$ -символы для унитарных представлений основной серии этой алгебры. Дальнейшее обобщение этого анализа на простейшую квантовую супергруппу было предложено в статье [16]. Мы ожидаем, что наши результаты также можно обобщить на случай комплексного расширения таких квантовых групп (см. связанные результаты в [17], [18]).

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы излагаем основы теории группы $SL(2, \mathbb{C})$ и ее представлений основной серии. В разделе 3 мы описываем структуру коэффициентов Клебша–Гордана для тензорного произведения двух таких представлений и рассматриваем соотношения биортогональности и полноты для них. Раздел 4 содержит основные результаты нашей работы – новый вывод коэффициентов Рака для соответствующих представлений; эти коэффициенты представляются в виде ядер интегрального оператора, связывающего различные базисы тройных тензорных произведений. В разделе 5 мы приводим представление типа Меллина–Барнса для полученных $6j$ -символов. В приложении мы собрали некоторые справочные формулы и вспомогательный материал.

2. ГРУППА $SL(2, \mathbb{C})$

2.1. Представления группы и сплетающий оператор. Опишем некоторые базовые факты теории представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ [4], [19] в том виде, который будет естественным при работе с коэффициентами Рака и соответствующими проекционными операторами.

Обычно представления группы $SL(2, \mathbb{C})$ реализуются в пространстве однозначных функций $\Phi(z, \bar{z})$ на комплексной плоскости, $z \in \mathbb{C}$ (через $\bar{z}$ обозначено число, комплексно сопряженное z). Неунитарное представление основной серии [19] параметризуется парой $(s, \bar{s})$ комплексных чисел в общем положении, на которые наложено единственное ограничение $2(s - \bar{s}) \in \mathbb{Z}$. Их мы называем в дальнейшем *спины*. Чтобы избежать недопонимания, подчеркнем, что s и $\bar{s}$ не являются комплексно сопряженными по отношению друг к другу.

Как обычно, при заданной матрице $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ можно рассмотреть действие группы $SL(2, \mathbb{C})$ на координатах $x, y \in \mathbb{C}$ двумерной плоскости:

$$(x, y) \rightarrow (x, y)g = (\alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y) \quad (1)$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow g^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta x - \beta y \\ -\gamma x + \alpha y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Если воспользоваться последними преобразованиями, то после введения обозначения $z = y/x$ мы приходим к представлению $T^{(s, \bar{s})}$, явно определяемому соответствующим дробно-линейным преобразованием [19]:

$$[T^{(s, \bar{s})}(g)\Phi](z, \bar{z}) = (\delta - \beta z)^{2s}(\bar{\delta} - \bar{\beta}\bar{z})^{2\bar{s}}\Phi\left(\frac{-\gamma + \alpha z}{\delta - \beta z}, \frac{-\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\bar{z}}{\bar{\delta} - \bar{\beta}\bar{z}}\right). \quad (3)$$

В работе [11] Исмагилов использовал преобразование (1), которое после введения обозначения $z = x/y$ дает эквивалентное, хотя и несколько по-другому выглядящее, представление

$$[T_a(g)\Phi](z, \bar{z}) = (\beta z + \delta)^{a-1}(\bar{\beta}\bar{z} + \bar{\delta})^{\bar{a}-1}\Phi\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}, \frac{\bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\gamma}}{\bar{\beta}\bar{z} + \bar{\delta}}\right). \quad (4)$$

Свяжем параметры представлений в (3) и (4) формулами $a = 2s + 1$, $\bar{a} = 2\bar{s} + 1$. В статье [11] подразумевалось, что представления являются унитарными представлениями основной серии с ограничениями $a := m + i\sigma$, $\bar{a} := -m + i\sigma$, $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. В этом случае величина $a - \bar{a} = 2s - 2\bar{s} = 2m \in 2\mathbb{Z}$ является четным целым числом.

Мы начинаем наше рассмотрение с общего неунитарного представления, которое предполагает, что параметры имеют следующий вид:

$$a = \frac{m}{2} + b + i\sigma, \quad \bar{a} = -\frac{m}{2} + b + i\sigma, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad b, \sigma \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Унитарный случай соответствует выбору $b = 0$ и произвольному целому числу m . В работе [11] использовалась следующая функция характера представлений:

$$\phi_k(a, z) := |z|^{i\sigma - m - k} z^m, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Вместо этого обозначения мы принимаем соглашение

$$[z]^a := z^a \bar{z}^{\bar{a}} = |z|^{2a} z^{a - \bar{a}} = |z|^{2b + 2i\sigma - m} z^m,$$

которое служит заменой функции $\phi_0(2a, z)$ из работы [11].

Если взять матрицу g , лежащую в окрестности единичной матрицы, $g = 1 + \varepsilon \mathcal{E}_{ik}$, где $\mathcal{E}_{ik}$ являются бесследовыми (2×2) -матрицами, $(\mathcal{E}_{ik})_{jl} = \delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}/2$, то нетрудно найти генераторы E_{ik} и $\bar{E}_{ik}$ алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$:

$$T^{(s, \bar{s})}(1 + \varepsilon \mathcal{E}_{ik})\Phi(z, \bar{z}) = \Phi(z, \bar{z}) + (\varepsilon E_{ik} + \bar{\varepsilon} \bar{E}_{ik})\Phi(z, \bar{z}) + O(\varepsilon^2). \quad (6)$$

В явном виде генераторы E_{ik} , $\bar{E}_{ik}$ задаются дифференциальными операторами первого порядка, которые мы представляем в виде (2×2) -матриц $E^{(s)}$ и $\bar{E}^{(\bar{s})}$:

$$E^{(s)} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{21} \\ E_{12} & E_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\partial - s & -\partial \\ z^2\partial - 2sz & -z\partial + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s-1 & -\partial \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица $\bar{E}^{(\bar{s})}$ (определяющая генераторы $\bar{E}_{ik}$ аналогичным образом), получается из $E^{(s)}$ после замен $z \rightarrow \bar{z}$, $\partial \rightarrow \bar{\partial}$ и $s \rightarrow \bar{s}$.

Хорошо известно, что представления, которые характеризуются параметрами $s, \bar{s}$ и $-1-s, -1-\bar{s}$ (или $a, \bar{a}$ и $-a, -\bar{a}$), являются эквивалентными (значения операторов Казимира для них совпадают) [4]. Существует интегральный оператор M , который сплетает такие эквивалентные представления $T^{(s, \bar{s})}$ и $T^{(-1-s, -1-\bar{s})}$ основной серии для комплексных s и $\bar{s}$ в общем положении:

$$M(s, \bar{s})T^{(s, \bar{s})}(g) = T^{(-1-s, -1-\bar{s})}(g)M(s, \bar{s}). \quad (7)$$

Это равенство можно переформулировать как совокупность сплетающих соотношений для генераторов алгебры Ли:

$$M(s, \bar{s})E^{(s)} = E^{(-1-s)}M(s, \bar{s}), \quad M(s, \bar{s})\bar{E}^{(\bar{s})} = \bar{E}^{(-1-\bar{s})}M(s, \bar{s}). \quad (8)$$

Оператор M можно переписать в следующем виде [19] (для оправдания выбранного нормировочного множителя, см. [13], [20]):

$$[M(s, \bar{s})\Phi](z, \bar{z}) = \frac{i^{-|2s-2\bar{s}|}}{\pi} \frac{\Gamma(s + \bar{s} + |s - \bar{s}| + 2)}{\Gamma(-s - \bar{s} + |s - \bar{s}| - 1)} \int d^2x \frac{\Phi(x, \bar{x})}{[z - x]^{2s+2}}, \quad (9)$$

где $\Gamma(x)$ является стандартной гамма-функцией. Этот оператор корректно определен для параметров s и $\bar{s}$ в общем положении. Несмотря на расходямость интеграла

при дискретных значениях $2s = n$, $2\bar{s} = \bar{n}$, где $n, \bar{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, он и в этом случае остается корректно определенным благодаря подходящему нормировочному множителю (см. следующий раздел).

Описанный сплетающий оператор имеет смысл псевдодифференциального оператора. Такая интерпретация возникает благодаря следующему явному преобразованию Фурье:

$$A(\alpha, \bar{\alpha}) \int d^2 z \frac{e^{ipz + i\bar{p}\bar{z}}}{z^{1+\alpha} \bar{z}^{1+\bar{\alpha}}} = p^\alpha \bar{p}^{\bar{\alpha}}, \quad \alpha - \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}, \quad (10)$$

в котором мера определяется как $d^2 z = dx dy = (i/2) dz d\bar{z}$ (с $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$) и нормировочная постоянная имеет канонический вид [19]

$$A(\alpha, \bar{\alpha}) := \frac{i^{-|\alpha - \bar{\alpha}|}}{\pi} \frac{\Gamma((\alpha + \bar{\alpha} + |\alpha - \bar{\alpha}| + 2)/2)}{\Gamma((-\alpha - \bar{\alpha} + |\alpha - \bar{\alpha}|)/2)}. \quad (11)$$

Для нецелых значений α эту постоянную можно записать в более простой форме

$$A(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{i^{\bar{\alpha} - \alpha}}{\pi a(\alpha + 1)}, \quad a(\alpha) := \frac{\Gamma(1 - \bar{\alpha})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (12)$$

что проверяется подстановкой соотношения $\alpha = \bar{\alpha} + m$, $m \in \mathbb{Z}$, для общего неунитарного представления основной серии и применением формулы отражения для гамма-функции.

Заменим в формуле (10) комплексные переменные p и $\bar{p}$ на дифференциальные операторы, $p \rightarrow i\partial_x$ и $\bar{p} \rightarrow i\partial_{\bar{x}}$. Тогда можно воспользоваться стандартным конечно-разностным оператором $e^{a\partial_x} f(x) = f(x + a)$ для того, чтобы положить по определению

$$(i\partial_z)^\alpha (i\partial_{\bar{z}})^{\bar{\alpha}} \Phi(z, \bar{z}) := A(\alpha, \bar{\alpha}) \int d^2 x \frac{\Phi(x, \bar{x})}{[z - x]^{1+\alpha}}, \quad (13)$$

где

$$[z - x]^{1+\alpha} := (z - x)^{1+\alpha} (\bar{z} - \bar{x})^{1+\bar{\alpha}}, \quad \alpha - \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Ограничение на показатели степени $\alpha, \bar{\alpha}$ в (14) гарантируют, что функция $[z - x]^\alpha$ является однозначной. Если взять отдельно голоморфную часть, то она имеет разрез, но специальный выбор антиголоморфного множителя приводит к однозначной функции. Именно этот псевдодифференциальный оператор используется для фиксации нормировочного множителя в сплетающем операторе (9). Для этого необходимо просто положить $M(s, \bar{s}) := [i\partial_z]^{2s+1}$. В частности, при $s = \bar{s} = -1/2$ выполняется соотношение $M(s, \bar{s}) = \mathbb{1}$ (где $\mathbb{1}$ — единичный оператор) [19].

2.2. Отщепление конечномерных представлений. Тот факт, что конечномерные представления можно получить из общего представления основной серии с помощью редукции, является хорошо известным [4], [20]. Действительно, для дискретного множества параметров $2s = n$, $2\bar{s} = \bar{n}$, где $n, \bar{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, интегральный оператор (9) становится дифференциальным оператором $(i\partial_z)^{n+1} (i\partial_{\bar{z}})^{\bar{n}+1}$ конечного порядка. Это следует не из формального отождествления $M(s, \bar{s}) = [i\partial_z]^{2s+1}$, а из строгого рассмотрения особенностей мероморфных функций, возникающих после действия этого оператора (9) на достаточно гладкие функции $\Phi(z, \bar{z})$, и тщательного изучения пределов $2s \rightarrow n$, $2\bar{s} \rightarrow \bar{n}$ (см. описание обобщенной функции $z^{-n-2} \bar{z}^{-\bar{n}-2}$ умеренного роста в книге [19]). Основным закон преобразования (3) подразумевает,

что для таких дискретных значений спинов от общего бесконечномерного представления отщепляется $(n+1)(\bar{n}+1)$ -мерное представление. Это очевидно, поскольку $(n+1)(\bar{n}+1)$ -мерное векторное пространство с базисом $z^k \bar{z}^{\bar{k}}$, $k = 0, 1, \dots, n$ и $\bar{k} = 0, 1, \dots, \bar{n}$, инвариантно относительно действия операторов $T^{(s, \bar{s})}(g)$.

Эта картина элегантно описывается сплетающим оператором $M(s, \bar{s})$ (9). Можно ввести единую производящую функцию для этого базиса многочленов, заданную как $[z-x]^n = (z-x)^n (\bar{z}-\bar{x})^{\bar{n}}$, где $x, \bar{x}$ являются некоторыми вспомогательными переменными. Очевидно, что разложение функции $[z-x]^n$ в ряд по x и $\bar{x}$ приводит к необходимым векторам $z^k \bar{z}^{\bar{k}}$, $k = 0, 1, \dots, n$ и $\bar{k} = 0, 1, \dots, \bar{n}$. Тогда из соотношения (7) следует, что пространство, на котором действие оператора $M(s, \bar{s})$ равно нулю (нуль-пространство), инвариантно относительно действия операторов $T^{(s, \bar{s})}(g)$. Поэтому любое нетривиальное инвариантное пространство нулевых мод описывает некоторое подпредставление. При $2s = n$ и $2\bar{s} = \bar{n}$ сплетающий оператор превращается в дифференциальный оператор $\partial^{n+1} \bar{\partial}^{\bar{n}+1}$, под действием которого производящая функция $[z-x]^n$ обращается в нуль. Однако полное пространство нулевых мод включает все гармонические функции, т. е. оно намного больше. Образ сплетающего оператора $M(-1-s, -1-\bar{s})$ инвариантен относительно действия оператора $T^{(s, \bar{s})}(g)$, что следует из формулы (7).

Мы имеем также соотношение

$$[M(-1-s, -1-\bar{s})\Phi](z, \bar{z}) = \frac{i^{-|2s-2\bar{s}|}}{\pi} \frac{\Gamma(-s-\bar{s}+|s-\bar{s}|)}{\Gamma(s+\bar{s}+|s-\bar{s}|+1)} \int d^2x (z-x)^{2s} (\bar{z}-\bar{x})^{2\bar{s}} \Phi(x, \bar{x}). \quad (15)$$

После отбрасывания численного множителя $\Gamma(-s-\bar{s}+|s-\bar{s}|)$, расходящегося при $2s = n$ и $2\bar{s} = \bar{n}$, становится очевидным, что образом оператора $M(-1-s, -1-\bar{s})$ является множество многочленов от z и $\bar{z}$, образующее необходимое конечномерное подпространство. Таким образом, конечномерное подпространство полиномов представляет собой пересечение пространства нулевых мод оператора $M(s, \bar{s})$ и образа правильным образом нормированного оператора $M(-1-s, -1-\bar{s})$ при спинах $2s = n$ и $2\bar{s} = \bar{n}$.

С помощью свойств инверсии сплетающего оператора можно показать, что сплетающий оператор обращает в нуль производящую функцию $[z-x]^n$. Действительно, обозначения $M(s, \bar{s}) = [i\partial_z]^{2s+1}$ и $M(-1-s, -1-\bar{s}) = [i\partial_z]^{-1-2s}$ формально предполагают, что $M(s, \bar{s})M(-1-s, -1-\bar{s}) = \mathbb{1}$. Однако это соотношение не может быть верным в случае, когда спины принимают положительные целые значения. Перепишем соотношение обращения, подставив явный вид ядер интегрального оператора $M(-1-s, -1-\bar{s})$ (15) и оператора $\mathbb{1}$ (задаваемого в этом случае дельта-функцией Дирака), как

$$[i\partial_z]^{2s+1} [z-x]^{2s} = \pi i^{|2s-2\bar{s}|} \frac{\Gamma(s+\bar{s}+|s-\bar{s}|+1)}{\Gamma(-s-\bar{s}+|s-\bar{s}|)} \delta^2(z-x). \quad (16)$$

При $2s \rightarrow n$, $2\bar{s} \rightarrow \bar{n}$, где $n, \bar{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, возникают полюсы у множителя $\Gamma(-s-\bar{s}+|s-\bar{s}|)$ в знаменателе. При $n \geq \bar{n}$ этот множитель равен $\Gamma(-\bar{n})$, а при $n \leq \bar{n}$ он равен $\Gamma(-n)$, так что правая часть соотношения (16) обращается в нуль. Поэтому $[i\partial_z]^{n+1} [z-x]^n = 0$ для $n, \bar{n} = 0, 1, 2, \dots$, т. е. производящая функция $[z-x]^n$ конечномерных представлений есть ядро оператора $M(-1-n/2, -1-\bar{n}/2)$, нормированного подходящим образом.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Разложение тензорного произведения двух представлений основной серии на неприводимые компоненты было получено Наймарком [9]. Проекционный оператор

$$T_{a_1} \otimes T_{a_2} \xrightarrow{P(a_1, a_2 | a_3)} T_{a_3}$$

определяется следующим интегральным оператором:

$$\Phi(z_1, z_2) \xrightarrow{P(a_1, a_2 | a_3)} [P(a_1, a_2 | a_3) \Phi](z_3) = \int d^2 z_1 d^2 z_2 W \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{pmatrix} \Phi(z_1, z_2).$$

Ядро данного оператора представляет собой коэффициент Клебша–Гордана и имеет явный вид

$$W \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{pmatrix} = [z_2 - z_1]^{-(1+a_1+a_2+a_3)/2} [z_3 - z_1]^{-(1+a_1-a_2-a_3)/2} [z_2 - z_3]^{-(1-a_1+a_2-a_3)/2}, \quad (17)$$

который совпадает с выражением, приведенным Наймарком в [9], после отождествления $z_3 = z$. Эта функция фиксируется с точностью до общей нормировочной постоянной условием ковариантности

$$\begin{aligned} & [\beta z_3 + \delta]^{a_3-1} [P(a_1, a_2 | a_3) \Phi] \left(\frac{\alpha z_3 + \gamma}{\beta z_3 + \delta} \right) = \\ & = \int d^2 z_1 d^2 z_2 W \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{pmatrix} [\beta z_1 + \delta]^{a_1-1} [\beta z_2 + \delta]^{a_2-1} \Phi \left(\frac{\alpha z_1 + \gamma}{\beta z_1 + \delta}, \frac{\alpha z_2 + \gamma}{\beta z_2 + \delta} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

3j-Символы (17) были получены Наймарком в [9] для унитарного представления основной серии. Однако подчеркнем, что соответствующий вывод не зависит от того, является ли параметр $i\sigma$ чисто мнимым или произвольным комплексным числом. Поэтому формулы (17), (18) верны для общего неунитарного представления с $b \neq 0$ в параметризации (5) спинных переменных. Необходимо отметить, что в формуле (17) имеются показатель экспоненты вида $\alpha := (1 + a_1 + a_2 + a_3)/2$ и аналогичные ему, которые не сохраняют общее ограничение $\alpha - \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}$ на значения спинных переменных. Как отмечено в [9], это означает, что нетривиальные коэффициенты Клебша–Гордана существуют, только если целые числа m_1, m_2, m_3 , входящие в определение параметров a_1, a_2, a_3 , удовлетворяют условию, что $m_1 + m_2 + m_3$ является четным целым числом (в работах [10], [11] это условие было выполнено за счет наложения требования, чтобы все m_j были четными целыми числами).

В инфинитезимальной форме глобальное соотношение (18) эквивалентно системе определяющих уравнений

$$(E_{z_1}^{(-a_1)} + E_{z_2}^{(-a_2)} + E_{z_3}^{(a_3)}) W \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (19)$$

Для краткости в обозначениях генераторов мы используем верхние индексы $a_j = 2s_j + 1$ вместо ранее использованных переменных s_j , в терминах которых эквивалентные представления описываются отражением $s_j \rightarrow -s_j - 1$.

Рис. 1. Диаграммное представление коэффициента $W^{(a_1, a_2, a_3)}_{z_1, z_2, z_3}$.

Теперь мы опишем базовые элементы диаграммной техники, которая будет использована в работе. Ядра интегральных операторов представляются в виде двумерных фейнмановских диаграмм. Пропагатор задается следующим выражением:

$$\frac{1}{[z-w]^\alpha} \equiv \frac{1}{(z-w)^\alpha (\bar{z}-\bar{w})^{\bar{\alpha}}} = \frac{(\bar{z}-\bar{w})^{\alpha-\bar{\alpha}}}{|z-w|^{2\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha-\bar{\alpha}}}{[w-z]^\alpha}, \quad (20)$$

где $\alpha - \bar{\alpha}$ является целым числом. На диаграмме он изображается линией со стрелкой, направленной от w к z , с индексом α , соответствующим скейлинговому весу.

Диаграммное представление для основного строительного элемента $W^{(a_1, a_2, a_3)}_{z_1, z_2, z_3}$ приведено на рис. 1. Мы имеем диаграмму с тремя внешними вершинами, при этом благодаря требуемому поведению (18) при $SL(2, \mathbb{C})$ -преобразованиях эта диаграмма совпадает с точностью до общего коэффициента с простейшим конформным треугольником. Термин “конформный треугольник” возникает из-за того, что система (19) совпадает с совокупностью тождеств Уорда для трехточечной конформноинвариантной функции Грина в двумерной конформной теории поля [21].

В случае унитарного представления основной серии, отвечающего выбору $b=0$ в (5), комплексное сопряжение эквивалентно изменению знаков всех спинных переменных:

$$\overline{W^{(a_1, a_2, a_3)}_{z_1, z_2, z_3}} = W^{(-a_1, -a_2, -a_3)}_{z_1, z_2, z_3}. \quad (21)$$

Начиная с этого места мы подразумеваем, что функция $\bar{W}$ (21) является комплексным сопряжением функции W . Как известно, представления с параметрами a и $-a$ эквивалентны. Поэтому функция (21) есть коэффициент Клебша–Гордана для проблемы разложения, когда все три используемых представления заменяются на эквивалентные.

Ядро дуального проектора $T_{a_3} \xrightarrow{P(a_3|a_1, a_2)} T_{a_1} \otimes T_{a_2}$ в точности определяется функцией (21):

$$\Phi(z_3) \xrightarrow{P(a_3|a_1, a_2)} [P(a_3|a_1, a_2) \Phi](z_1, z_2) = \int d^2 z_3 W^{(-a_1, -a_2, -a_3)}_{z_1, z_2, z_3} \Phi(z_3).$$

Это следует из соотношения биортогональности, рассматриваемого ниже.

Ортогональность и полнота. Докажем следующее соотношение (би)ортогональности для унитарного представления основной серии (которым мы ограничиваемся с данного момента):

$$\int d^2 z_1 d^2 z_2 W \begin{pmatrix} -a_1, -a_2, -a'_3 \\ z_1, z_2, z'_3 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{pmatrix} = \\ = \rho^{-1}(a_3) \delta_R(a_3 - a'_3) \delta^2(z_3 - z'_3) + B(a_1, a_2, a_3) \frac{\delta_R(a_3 + a'_3)}{[z_3 - z'_3]^{1-a_3}}, \quad (22)$$

где $\rho(a_3)$ и $B(a_1, a_2, a_3)$ – некоторые весовые функции. Параметрическая дельта-функция $\delta_R(a - a')$ имеет вид

$$\delta_R(a - a') = \delta_{mm'} \delta(\sigma - \sigma'), \quad a = \frac{m}{2} + i\sigma, \quad a' = \frac{m'}{2} + i\sigma'.$$

Появление второго слагаемого в правой части (22) является прямым следствием того, что два представления T_a и T_{-a} эквивалентны и что существует сплетающий оператор с ядром $[z - z']^{-1-a}$. Конкретно, имеет место равенство

$$\int d^2 z'_3 \frac{1}{[z_3 - z'_3]^{1+a_3}} W \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ z_1, z_2, z'_3 \end{pmatrix} = A(a_1, a_2, a_3) W \begin{pmatrix} a_1, a_2, -a_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

которое эквивалентно соотношению звезда-треугольник (51), с легко вычисляемым коэффициентом

$$A(a_1, a_2, a_3) = \pi \frac{a((1 + a_1 - a_2 - a_3)/2, 1 + a_3)}{a((1 + a_1 - a_2 + a_3)/2)}, \quad (24)$$

где $a(\alpha, \beta, \dots) := a(\alpha)a(\beta)\dots$ и функция $a(\alpha)$ была определена в (12). Применение соотношения (23) к (22) показывает неизбежность появления второго слагаемого в правой части (22), соответствующего коэффициенту Клебша–Гордана с заменой $a_3 \rightarrow -a_3$. Это приводит также к некоторым соотношениям между $\rho(a_3)$, $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(a_1, a_2, a_3)$, которые можно использовать для перекрестной проверки конечных результатов.

Второй член $\propto \delta(a_3 + a'_3)$ был явно описан Липатовым в работе [5] для специального случая $a_1 = a_2 = 0$ (конкретнее, для $W \begin{pmatrix} 0, 0, a \\ z_1, z_2, z_0 \end{pmatrix} = E^{n, \nu}(z_j)/|z_2 - z_1|^2$ с $a = n + 2i\nu$, $n \in \mathbb{Z}$). В случае квантовых групп появление такого члена в соответствующем соотношении ортогональности было рассмотрено в работах [22] и [23].

На рис. 2 мы описываем по шагам процедуру вычисления для диаграммы, соответствующей левой части соотношения ортогональности; жирные точки в вершинах обозначают интегралы по соответствующим координатам. Чтобы избежать некорректно определенного выражения для интеграла, мы вводим ε -регуляризацию. А именно, мы заменяем коэффициент W в правом треугольнике на W_ε , который отличается от оригинального W добавлением к индексам линий бесконечно малого вещественного числа $\varepsilon = \bar{\varepsilon} > 0$, как показано на рис. 2. Заметим, что знак ε жестко зафиксирован требованием сходимости возникающих фейнмановских интегралов. Действительно, диаграмма на рис. 2б содержит линию, дающую вклад в интеграл по z_1 (или z_2), а именно множитель $1/[z_2 - z_1]^{1+(a_3-a'_3)/2-\varepsilon}$. Особенность в точке $z_1 = z_2$ должна быть интегрируемой. Поэтому для значений параметров $a_3 \approx a'_3$,

Рис. 2. Начальная диаграмма, соответствующая соотношению ортогональности (а). Диаграмма после замены средней двойной линии одной линией (б). Преобразование звезда-треугольник для нижней вершины (в). Та же диаграмма (с точностью до знака) после замены всех двойных линий одиночными (г). Заключительное интегрирование можно произвести с помощью правила интегрирования цепочек (50).

важных для соотношения ортогональности (см. ниже), необходимо взять $\varepsilon > 0$ (интеграл $\int d^2 z / [z]^\gamma$ сходится в окрестности $z = 0$ при $\text{Re } \gamma < 1$). Аналогично интеграл по z_1 в диаграмме на рис. 2г содержит множитель $1/[z_1 - z'_3]^{1+(a_3+a'_3)/2-\varepsilon}$ и аналогичный ему с заменой z_1 на z_2 . Опять же для интересующей нас области значений $a_3 + a'_3 \approx 0$ интеграл сходится при $\varepsilon > 0$.

Аккуратно производя вычисления на всех четырех шагах процедуры расчета, необходимо несколько раз менять направление линий с соответствующим изменением знаков, $[x - y]^a = (-1)^{a-\bar{a}}[y - x]^a$. Таким образом, переход к диаграмме на рис. 2г приводит к дополнительному множителю $(-1)^{(m_1-m_2-m'_3)/2}$, а изменение направления нижней линии на рис. 2г дает множитель $(-1)^{(m'_3-m_3)/2}$. Собирая все возникающие множители вместе, мы получаем формулу

$$\begin{aligned}
 & \int d^2 z_1 d^2 z_2 W \begin{pmatrix} -a_1, -a_2, -a'_3 \\ z_1, z_2, z'_3 \end{pmatrix} W_\varepsilon \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{pmatrix} = \\
 & = (-1)^{(m_1-m_2-m_3)/2} \pi^2 \times \\
 & \times a \left(\frac{1-a_1+a_2-a_3}{2} + \varepsilon, \frac{1+a_1-a_2+a'_3}{2}, 1 + \frac{a_3-a'_3}{2} - \varepsilon, 1 + \frac{a_3+a'_3}{2} - \varepsilon, 1 - \frac{a_3+a'_3}{2} - \varepsilon, 2\varepsilon \right) \times \\
 & \times \frac{1}{[z_3 - z'_3]^{1+(a'_3-a_3)/2-\varepsilon}}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Теперь мы можем внимательно исследовать, что происходит в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Прежде всего мы заметим, что при параметрах в общем положении, когда $a_3 + a'_3 \neq 0$ и $a_3 - a'_3 \neq 0$, всё выражение регулярно по ε , и благодаря присутствию функции $a(2\varepsilon) \sim \varepsilon$ оно обращается в нуль в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$.

Когда $a_3 + a'_3 \approx 0$, что происходит при $m_3 = -m'_3$ и $\sigma_3 \approx -\sigma'_3$, мы имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a \left(1 + \frac{a_3 + a'_3}{2} - \varepsilon, 1 - \frac{a_3 + a'_3}{2} - \varepsilon, 2\varepsilon \right) = \\ = \delta_{m_3, -m'_3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon}{(\sigma_3/2 + \sigma'_3/2)^2 + \varepsilon^2} = 4\pi \delta_{m_3, -m'_3} \delta(\sigma_3 + \sigma'_3). \end{aligned}$$

Здесь мы используем соотношение $\varepsilon/(x^2 + \varepsilon^2) \rightarrow \pi \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ и $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что если бы мы взяли $\varepsilon < 0$, то получили бы в правой части противоположный знак. В результате при $\varepsilon \rightarrow 0$ в правой части равенства (25) возникает выражение

$$(-1)^{(m_1 - m_2 - m_3)/2} 4\pi^3 a \left(\frac{1 - a_1 + a_2 - a_3}{2}, \frac{1 + a_1 - a_2 - a_3}{2}, 1 + a_3 \right) \frac{\delta_{\mathbb{R}}(a_3 + a'_3)}{[z_3 - z'_3]^{1 - a_3}}.$$

Теперь предположим, что $a_3 - a'_3 \approx 0$, т. е. $m_3 = m'_3$ и $\sigma_3 \approx \sigma'_3$. Используем еще одну формулу, порождающую дельта-функцию,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{[z_3 - z'_3]^{1 - \varepsilon}} = \pi \delta^2(z_3 - z'_3), \quad (26)$$

справедливую для произвольного комплексного ε . Она возникает в соотношении

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(-(a_3 - a'_3)/2 + \varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)} \frac{1}{[z_3 - z'_3]^{1 + (a'_3 - a_3)/2 - \varepsilon}} = \\ = \delta_{m_3, m'_3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon}{(\sigma_3/2 - \sigma'_3/2)^2 + \varepsilon^2} \frac{(a_3 - a'_3)/2 + \varepsilon}{[z_3 - z'_3]^{1 + (a'_3 - a_3)/2 - \varepsilon}} = \\ = 4\pi^2 \delta_{m_3, m'_3} \delta(\sigma_3 - \sigma'_3) \delta^2(z_3 - z'_3). \end{aligned} \quad (27)$$

В итоге при $a_3 - a'_3 \approx 0$ получаем выражение

$$(-1)^{(m_1 - m_2 - m_3)/2} 4\pi^4 a \left(\frac{1 - a_1 + a_2 - a_3}{2}, \frac{1 + a_1 - a_2 + a_3}{2}, 1 + a_3, 1 - a_3 \right) \delta_{\mathbb{R}}(a_3 - a'_3) \delta^2(z_3 - z'_3).$$

Применяя теперь формулы отражения для функции $a(\alpha)$, приведенные в приложении, и собирая все члены вместе, мы получаем соотношение (22) с

$$\rho(a_3) = -\frac{a_3 \bar{a}_3}{4\pi^4}, \quad B(a_1, a_2, a_3) = 4\pi^3 \frac{a((1 - a_1 + a_2 - a_3)/2, 1 + a_3)}{a((1 - a_1 + a_2 + a_3)/2)}. \quad (28)$$

Отметим, что $\rho(a)$ – положительная весовая функция, поскольку $a\bar{a} = -(m^2/4 + \sigma^2)$.

Интересующее нас соотношение полноты для $3j$ -символов было установлено в [9] (см. формулы (114) и (115), а также теорему 3). Его форма зависит от четности целых параметров, определяющих представления. Зафиксируем $a_j = m_j/2 + i\sigma_j$, где $m_j \in \mathbb{Z}$, $\sigma_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, и обозначим для краткости $a_3 \equiv a = m/2 + i\sigma$.

Предположим, что $m_1 + m_2$ является четным целым числом. Тогда имеет место соотношение полноты

$$\sum_{m \in 2\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\sigma \int_{\mathbb{C}} d^2 z \frac{\rho(a)}{2} W \begin{pmatrix} -a_1, -a_2, -a \\ z_3, z_4, z \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a_1, a_2, a \\ z_1, z_2, z \end{pmatrix} = \delta^2(z_1 - z_3) \delta^2(z_2 - z_4). \quad (29)$$

В качестве проверки этого равенства умножим его на $W\left(\begin{smallmatrix} -a_1, -a_2, -a' \\ z_1, z_2, z' \end{smallmatrix}\right)$ и проинтегрируем по z_1 и z_2 . Применяя соотношение ортогональности (22) и интегрируя по соответствующим дельта-функциям, мы приходим к тривиальному тождеству благодаря равенству $\rho(a)A(-a_1, -a_2, -a)B(a_1, a_2, a) = (-1)^m$, где A , B и ρ заданы в формулах (22) и (24).

Предположим теперь, что $m_1 + m_2$ является нечетным целым числом. В этом случае

$$\sum_{m \in 2\mathbb{Z}+1} \int_{\mathbb{R}} d\sigma \int_{\mathbb{C}} d^2 z \frac{\rho(a)}{2} W\left(\begin{smallmatrix} -a_1, -a_2, -a \\ z_3, z_4, z \end{smallmatrix}\right) W\left(\begin{smallmatrix} a_1, a_2, a \\ z_1, z_2, z \end{smallmatrix}\right) = \delta^2(z_1 - z_3) \delta^2(z_2 - z_4). \quad (30)$$

4. ТРОЙНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТЫ РАКА

Возьмем теперь тензорное произведение $T_{a_1} \otimes T_{a_2} \otimes T_{a_3}$ трех представлений и разложим его в сумму неприводимых представлений. Это можно сделать двумя различными способами. Во-первых,

$$T_{a_1} \otimes T_{a_2} \otimes T_{a_3} \xrightarrow{P(a_1, a_2|c)} T_c \otimes T_{a_3} \xrightarrow{P(c, a_3|\ell)} T_\ell, \quad (31)$$

и эта возможность реализуется с помощью интегрального оператора

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2, z_3) &\xrightarrow{P(c, a_3|\ell)P(a_1, a_2|c)} [P(c, a_3|\ell)P(a_1, a_2|c)\Phi](z) = \\ &= \int d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3 \int d^2 z_0 W\left(\begin{smallmatrix} a_1, a_2, c \\ z_1, z_2, z_0 \end{smallmatrix}\right) W\left(\begin{smallmatrix} c, a_3, \ell \\ z_0, z_3, z \end{smallmatrix}\right) \Phi(z_1, z_2, z_3). \end{aligned}$$

Напомним, что целые переменные, входящие в параметры представлений a_j , c , ℓ , должны удовлетворять условиям, что $m_1 + m_2 + m_c$ и $m_c + m_3 + m_\ell$ являются четными числами.

Во-вторых, имеет место разложение

$$T_{a_1} \otimes T_{a_2} \otimes T_{a_3} \xrightarrow{P(a_2, a_3|c)} T_{a_1} \otimes T_c \xrightarrow{P(a_1, c|\ell)} T_\ell,$$

которое реализуется с помощью другого интегрального оператора

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2, z_3) &\xrightarrow{P(a_1, c|\ell)P(a_2, a_3|c)} [P(a_1, c|\ell)P(a_2, a_3|c)\Phi](z) = \\ &= \int d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3 \int d^2 z_0 W\left(\begin{smallmatrix} a_2, a_3, c \\ z_2, z_3, z_0 \end{smallmatrix}\right) W\left(\begin{smallmatrix} a_1, c, \ell \\ z_1, z_0, z \end{smallmatrix}\right) \Phi(z_1, z_2, z_3). \end{aligned}$$

6j-Символы, или коэффициенты Рака R_ℓ , задаются как ядро интегрального оператора, связывающего эти два разложения:

$$P(a_1, c|\ell)P(a_2, a_3|c) = \int D_R c' \frac{\rho(c')}{2} R_\ell(c, c') P(c', a_3|\ell) P(a_1, a_2|c'). \quad (32)$$

В явном виде они определяются следующим интегральным уравнением:

$$\begin{aligned} \int d^2 z_0 W\left(\begin{smallmatrix} a_2, a_3, c \\ z_2, z_3, z_0 \end{smallmatrix}\right) W\left(\begin{smallmatrix} a_1, c, \ell \\ z_1, z_0, z \end{smallmatrix}\right) = \\ = \int D_R c' \frac{\rho(c')}{2} R_\ell(c, c') \int d^2 z_0 W\left(\begin{smallmatrix} a_1, a_2, c' \\ z_1, z_2, z_0 \end{smallmatrix}\right) W\left(\begin{smallmatrix} c', a_3, \ell \\ z_0, z_3, z \end{smallmatrix}\right). \end{aligned} \quad (33)$$

Рис. 3. Диаграммное представление соотношения (33).

Рис. 4. Диаграммное представление соотношения (34).

Мы полагаем здесь $c' = m/2 + i\sigma$ и определяем меру $\int D_R c'$ либо как $\sum_{m \in 2\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\sigma$, либо как $\sum_{m \in 2\mathbb{Z}+1} \int_{\mathbb{R}} d\sigma$ в зависимости от того, является ли сумма $m_1 + m_2$ четным или нечетным целым числом соответственно. Диаграммное представление этого соотношения приведено на рис. 3.

Выражение для ядра $R_\ell(c, c')$ можно получить с помощью соотношения ортогональности (22):

$$\begin{aligned} \int d^2 z_0 d^2 z_1 d^2 z_2 W \begin{pmatrix} -a_1, -a_2, -c' \\ z_1, z_2, z'_3 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a_2, a_3, c \\ z_2, z_3, z_0 \end{pmatrix} W \begin{pmatrix} a_1, c, \ell \\ z_1, z_0, z \end{pmatrix} = \\ = R_\ell(c, c') W \begin{pmatrix} c', a_3, \ell \\ z'_3, z_3, z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

Диаграммное представление этого равенства приведено на рис. 4. Мы имеем диаграмму с тремя внешними вершинами z, z_3, z'_3 . Благодаря конформной инвариантности она должна совпадать с конформным треугольником с точностью до общего коэффициента $R_\ell(c, c')$. Наоборот, уравнения (33) и (34) можно получить из условий полноты (29), (30).

В асимптотическом режиме, когда одна из координат z, z_3, z'_3 , например z_1 , стремится к бесконечности, мы имеем

$$W \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_1 \rightarrow \infty} [z_1]^{-a_1} [z_2 - z_3]^{-(1-a_1+a_2-a_3)/2},$$

Рис. 5. Диаграммное представление соотношения (35).

Рис. 6. Диаграммное представление соотношения (36).

Рис. 7. Диаграммное представление соотношения (37).

и можно свести эту трехточечную диаграмму к двухточечной. Таким образом, при $z_3 \rightarrow \infty$ мы получаем

$$\int \frac{d^2 z_0 d^2 z_1 d^2 z_2}{[z_0 - z_2]^{(1+a_2-a_3-c)/2}} \overline{W\left(a_1, a_2, c'\right)} W\left(a_1, c, \ell\right) = \frac{R_\ell(c, c')}{[z - z'_3]^{(1+c'-a_3-\ell)/2}}. \quad (35)$$

При $z'_3 \rightarrow \infty$ имеем

$$\int \frac{d^2 z_0 d^2 z_1 d^2 z_2}{[z_2 - z_1]^{(1-a_1-a_2-c')/2}} W\left(a_2, a_3, c\right) W\left(a_1, c, \ell\right) = \frac{R_\ell(c, c')}{[z_3 - z]^{(1-c'+a_3-\ell)/2}}, \quad (36)$$

Рис. 8. Порождающая диаграмма (а) и переход к эквивалентной диаграмме (б).

а при $z \rightarrow \infty$

$$\int \frac{d^2 z_0 d^2 z_1 d^2 z_2}{[z_0 - z_1]^{(1+a_1+c+\ell)/2}} \overline{W\left(\begin{matrix} a_1, a_2, c' \\ z_1, z_2, z'_3 \end{matrix}\right)} W\left(\begin{matrix} a_2, a_3, c \\ z_2, z_3, z_0 \end{matrix}\right) = \frac{R_\ell(c, c')}{[z_3 - z'_3]^{(1+c'+a_3+\ell)/2}}. \quad (37)$$

Эти соотношения изображены на рис. 5–7, где взятие пределов отвечает на диаграммах устранению двух линий с концами в рассматриваемой внешней вершине. Результирующие двухточечные диаграммы опять фиксируются условием конформной инвариантности и совпадают со свободным пропагатором с точностью до общего коэффициента $R_\ell(c, c')$, который мы называем значением интересующей нас фейнмановской диаграммы.

Все три диаграммы на рис. 5–7 имеют одинаковые значения, т. е. они представляют собой симметрии соответствующей функции $R_\ell(c, c')$ как функции своих аргументов. Происхождение такой симметрии было объяснено в работе [24]. Рассмотрим, например, диаграмму на рис. 7. Она принадлежит семейству диаграмм, ассоциированных с порождающей диаграммой, изображенной на рис. 8а. Конкретно, она возникает из нее после устранения линии с индексом $i\varepsilon + (1 - a_3 - c' - \ell)/2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Порождающая диаграмма имеет четыре вершины, по которым идет интегрирование, и одну внешнюю вершину; эта диаграмма равна

$$R_\ell(c, c') \int d^2 z \frac{1}{[z - y]^{(1+c'+a_3+\ell)/2}} \frac{1}{[z - y]^{i\varepsilon + (1-a_3-c'-\ell)/2}} = R_\ell(c, c') 2\pi^2 \delta(\varepsilon). \quad (38)$$

Основное наблюдение работы [24] состоит в том, что все диаграммы, получающиеся из такой порождающей вакуумной диаграммы устранением одной произвольной линии, имеют одно и то же значение. На рис. 8 мы изобразили переход к одной из возможных эквивалентных диаграмм путем устранения линии с индексом $(1 - a_1 - a_2 - c')/2$. Результирующая диаграмма содержит только три вершины, по которым ведется интегрирование, и имеет значение

$$R_\ell(c, c') [z_1 - z_2]^{-(1+a_1+a_2+c')/2 - i\varepsilon}.$$

Если мы домножим это выражение на пропагатор $[z_1 - z_2]^{(a_1+a_2+c'-1)/2}$, соответствующий устраненной линии, и проинтегрируем по z_1 , мы опять получим соотношение (38). Теперь мы полагаем $z_1 = 1$, $z_2 = 0$ в диаграмме на рис. 8б. В результате этого пропагаторная часть пропадает. Поскольку $R_\ell(c, c')$ не зависит от ε , можно перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ в пропагаторе, соединяющем вершины z и y . Это приводит к точному интегральному представлению для $R_\ell(c, c')$:

$$R_\ell(c, c') = \int d^2 z \Phi_2(a_1, a_2, a_3 | \ell, c, z) \overline{\Phi_1(a_1, a_2, a_3 | \ell, c', z)}, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_1(a_1, a_2, a_3 | \ell, c', z)} &= \\ &= \int \frac{d^2 y}{[y-1]^{(1-a_1+a_2+c')/2} [-y]^{(1+a_1-a_2+c')/2} [z-y]^{(1-a_3-\ell+c')/2}}, \\ \Phi_2(a_1, a_2, a_3 | \ell, c, z) &= \\ &= \frac{1}{[z]^{(1+a_2+a_3+c)/2}} \int \frac{d^2 z_0}{[z_0-1]^{(1+a_1+\ell+c)/2} [-z_0]^{(1+a_2-a_3-c)/2} [z_1-z]^{(1-a_2+a_3-c)/2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

В работе [10] Исмагилов построил следующее представление для этой функции:

$$R_\ell(c, c') = \int d^2 z \Psi_2(a_1, a_2, a_3 | \ell, c, z) \overline{\Psi_1(a_1, a_2, a_3 | \ell, c', z)}, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_1(a_1, a_2, a_3 | \ell, c', z)} &= \\ &= \int \frac{d^2 y}{[1-y]^{(1-\ell-c'-a_3)/2} [y]^{(1+\ell-c'+a_3)/2} [z-y]^{(1-a_1+a_2+c')/2}}, \\ \Psi_2(a_1, a_2, a_3 | \ell, c, z) &= \\ &= \frac{1}{[z]^{(1+a_1-\ell+c)/2}} \int \frac{d^2 z_0}{[1-z_0]^{(1+a_1+\ell+c)/2} [z_0]^{(1+a_2-a_3-c)/2} [z-z_0]^{(1-a_2+a_3-c)/2}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Видно, что выражение (41) имеет ту же структуру, что и наш результат, но индексы некоторых пропагаторов отличаются (разница в знаках в аргументах $[1-y]$, $[y]$, $[1-z_0]$, $[z_0]$ несущественна благодаря ограничению на четности целых чисел m_j , m_c , $m_{c'}$, m_ℓ). Однако существует преобразование симметрии, связывающее эти два выражения. Соответствующая цепочка преобразований диаграмм изображена на рис. 9. На рис. 9а мы приводим более компактную форму нашей диаграммы на рис. 8. Затем мы пользуемся правилом интегрирования цепочек и соотношением звезда-треугольник из рис. 12. После этого мы приходим к правой нижней диаграмме, изображенной на рис. 9. Выписывая соответствующее интегральное представление, можно увидеть, что оно совпадает с выражением Исмагилова (41) после замены его параметра c' на $-c'$.

Рис. 9. Преобразование диаграммы.

Рис. 10. Диаграммы для представления Меллина–Барнса.

$$\xrightarrow[w]{\alpha} z = [z - w]^{-\alpha} = (-1)^{\alpha - \bar{\alpha}} \xleftarrow{\alpha}$$

Рис. 11. Пропагатор и изменение направления стрелки.

$$\xrightarrow{\alpha} \bullet \xrightarrow{\beta} = \pi(-1)^{\gamma - \bar{\gamma}} a(\alpha, \beta, \gamma) \xrightarrow{\alpha + \beta - 1}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \alpha \\ \swarrow \gamma \quad \searrow \beta \end{array} = \pi a(\alpha, \beta, \gamma) \begin{array}{c} \triangle \\ \swarrow 1 - \beta \quad \searrow 1 - \gamma \\ \leftarrow 1 - \alpha \end{array}$$

Рис. 12. Правило интегрирования цепочек и соотношение звезда-треугольник, $\alpha + \beta + \gamma = 2$.

Таким образом, наши результаты почти совпадают. Замена $c' \rightarrow -c'$ соответствует переходу от представления T_c в первом способе разложения (31) к эквивалентному представлению T_{-c} . Поскольку это нетривиальная операция, необходимо понять источник такого различия нашего результата с полученным в [10].

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕЛЛИНА–БАРНСА

В этом разделе мы выводим представление типа Меллина–Барнса для коэффициентов Рака, описанных в предыдущем разделе. Зафиксируем $s = (n + i\nu)/2$, $\bar{s} = (-n + i\nu)/2$. Существует хорошо известное представление для двумерной дельта-функции:

$$\int Ds \left[\frac{x}{y} \right]^s = (2\pi)^2 [x] \delta^2(x - y), \quad \int Ds := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\nu \in \mathbb{R}} d\nu. \quad (43)$$

Возьмем действительную переменную $\varepsilon = \bar{\varepsilon} > 0$, которая будет служить параметром, регуляризующим инфракрасные расходимости. Тогда с помощью формулы (43) мы можем записать равенства

$$\begin{aligned} \frac{|y|^{2\varepsilon}}{[z - y]^\alpha} &= \int d^2x \frac{|x|^{2\varepsilon}}{[z - x]^\alpha} \delta^2(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int Ds \int d^2x \frac{1}{[z - x]^\alpha [x]^{1-s-\varepsilon}} \frac{1}{[y]^s} = \\ &= \frac{\pi a(\alpha)}{(2\pi)^2} \int Ds \frac{a(1-s-\varepsilon, 1+s+\varepsilon-\alpha)}{[-z]^{\alpha-s-\varepsilon} [y]^s}, \end{aligned}$$

где мы применили правило интегрирования цепочек (50). Пусть $\alpha = (n_\alpha + i\nu_\alpha)/2$, $\bar{\alpha} = (-n_\alpha + i\nu_\alpha)/2$, где $n_\alpha \in \mathbb{Z}$, $\nu_\alpha \in \mathbb{R}$. Полюсы интегрируемой функции лежат на вертикальных полюсах в точках

$$\nu = i(-n + 2\varepsilon + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad \nu_\alpha + i(n - n_\alpha + 2\varepsilon - 2\mathbb{Z}_{\geq 0}).$$

Явно видно, что для допустимых значений $n \in \mathbb{Z}$ при $0 < \varepsilon < 1/2$ на контуре интегрирования $\text{Im } \nu = 0$ не лежат никакие особенности. Поэтому мы можем заменить его на любой контур, лежащий в полосе $\text{Im } \nu \in]0, -1[$. После этого возьмем предел $\varepsilon \rightarrow 0$ и получим следующее представление типа Меллина–Барнса для пропагатора с произвольным индексом α :

$$\frac{1}{[z-y]^\alpha} = \frac{1}{4\pi a(1-\alpha)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_L d\nu \frac{a(1-s, 1+s-\alpha)}{[z]^\alpha s [-y]^s}, \quad (44)$$

где L может быть любым контуром, лежащим в полосе $\text{Im } \nu \in]0, -1[$.

Теперь применим формулу (44) к линии, соединяющей точки y и z , в правой нижней диаграмме на рис. 9. Это приводит к “интегралу” по переменной s в диаграмме, представленной на рис. 10а. Однако последняя диаграмма может быть явно вычислена с помощью правила интегрирования цепочек (50). Опуская детали вычислений, мы получаем следующее представление типа Меллина–Барнса для $6j$ -символов:

$$\begin{aligned} R_\ell(c, c') = & (-1)^{c'-\bar{c}'} \frac{\pi^2}{4} \frac{a\left(\frac{1-a_3-\ell+c'}{2}, \frac{1+a_1+c+\ell}{2}\right)}{a\left(\frac{1+a_1-a_2+c'}{2}, \frac{1+a_2-a_3+c}{2}\right)} \times \\ & \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_L d\nu \frac{a\left(\frac{1+a_1-a_2+c'}{2} + s, \frac{1-a_1-a_2+c'}{2} + s, \frac{1+a_3+\ell+c'}{2} + s, \frac{1-a_3+\ell+c'}{2} + s\right)}{a\left(s, c' + s, \frac{c'+\ell-a_2-c}{2} + s, \frac{c+c'+\ell-a_2}{2} + s\right)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Можно проверить, что подынтегральные функции в (45) и во входящей в представление Меллина–Барнса функции S из теоремы 2 работы [11] совпадают после сдвига переменной $s \rightarrow s + (a_2 - a_1 - c')/2$ (т.е. после соответствующих сдвигов индекса суммирования n и переменной интегрирования ν) и введения обозначения $z = i\nu/2$. Однако выражение перед функцией S в [11] не содержит численного множителя $\pi^2/2i$ и отличается от нашего заменой $c' \rightarrow -c'$, как и выше.

Эквивалентным образом можно применить формулу (44) к линии, соединяющей z и z_0 , в правой нижней диаграмме на рис. 9. Это приводит к диаграмме на рис. 10б, которая также может быть вычислена с использованием правила (50). Это приводит ко второму интересующему нас представлению типа Меллина–Барнса:

$$\begin{aligned} R_\ell(c, c') = & (-1)^{c'-\bar{c}'} \frac{\pi^2}{4} \frac{a\left(\frac{1-a_3-\ell+c'}{2}, \frac{1+a_1+c+\ell}{2}\right)}{a\left(\frac{1+a_1-a_2+c'}{2}, \frac{1+a_2-a_3+c}{2}\right)} \times \\ & \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_L d\nu \frac{a\left(\frac{1+a_2-a_3+c}{2} + s, \frac{1+a_1-\ell+c}{2} + s, \frac{1+a_2+a_3+c}{2} + s, \frac{1-a_1-\ell+c}{2} + s\right)}{a\left(s, c + s, \frac{a_2+c-\ell-c'}{2} + s, \frac{a_2+c-\ell+c'}{2} + s\right)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Видно, что это выражение получается из формулы (45) простым сдвигом переменной $s \rightarrow s + (a_2 - \ell - c' + c)/2$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы вычислили $6j$ -символы для унитарных представлений основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$, которые описываются формулами (39), (40). Они совпадают с коэффициентами Рака, полученными Исмагиловым [10], с точностью до замены в его выражениях параметра представлений c' на $-c'$. Отметим,

однако, что наш результат немного более общий, чем в [10], поскольку мы не подразумеваем, что целочисленные параметры представлений m_j являются четными.

Как показано в работе [10], представление Меллина–Барнса для $R_\ell(c, c')$ можно переписать в эквивалентной форме как сумму произведений двух гипергеометрических функций ${}_4F_3$ с различными аргументами. Мы не приводим здесь соответствующего громоздкого выражения.

Ожидается, что полученная функция $R_\ell(c, c')$ описывает больцмановские веса некоторой двумерной интегрируемой модели IRF в статистической механике и, таким образом, удовлетворяет соответствующему уравнению Янга–Бакстера. На основе представленного в настоящей работе подхода можно построить более общие $6j$ -символы, связанные с совершенно уравновешенным рядом ${}_9F_8$. В принципе, следуя результатам работы [18], можно установить связь с эллиптическими $6j$ -символами, которые описываются V -функцией из статьи [25] (эллиптическим расширением гипергеометрической функции Эйлера–Гаусса), что является предметом отдельного рассмотрения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В использующейся диаграммной технике ядра операторов представляются в виде двумерных фейнмановских интегралов. Пропагатор, который описывается линией, направленной от w к z , с прикрепленным к ней индексом α , как это изображено на рис. 11, задается следующим выражением:

$$\frac{1}{[z-w]^\alpha} \equiv \frac{1}{(z-w)^\alpha (\bar{z}-\bar{w})^{\bar{\alpha}}} = \frac{(\bar{z}-\bar{w})^{\alpha-\bar{\alpha}}}{|z-w|^{2\alpha}} = \frac{(-1)^{\alpha-\bar{\alpha}}}{[w-z]^\alpha}, \quad (47)$$

где $\alpha - \bar{\alpha} = n_\alpha$ является целым числом. На рис. 11 мы также приводим результат изменения направления линии.

После преобразования Фурье получаем пропагатор в импульсном представлении:

$$\int d^2 z \frac{e^{i(pz + \bar{p}\bar{z})}}{[z]^\alpha} = \pi i^{\alpha-\bar{\alpha}} a(\alpha) \frac{1}{[p]^{1-\alpha}}, \quad (48)$$

где

$$a(\alpha) = \frac{\Gamma(1-\bar{\alpha})}{\Gamma(\alpha)}, \quad a(\bar{\alpha}) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\bar{\alpha})}, \quad a(\alpha, \beta, \gamma, \dots) := a(\alpha)a(\beta)a(\gamma)\dots \quad (49)$$

Функция $a(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} a(\alpha)a(1-\bar{\alpha}) &= 1, & \frac{a(1+\alpha)}{a(\alpha)} &= -\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}, \\ a(\alpha)a(1-\alpha) &= (-1)^{\alpha-\bar{\alpha}}, & a(\alpha) &= (-1)^{\alpha-\bar{\alpha}}a(\bar{\alpha}). \end{aligned}$$

Вычисление фейнмановских диаграмм основано на следующих правилах:

- правило интегрирования цепочек

$$\int d^2 w \frac{1}{[z_1-w]^\alpha [w-z_2]^\beta} = \frac{\pi a(\alpha, \beta, \gamma)}{[z_2-z_1]^{\alpha+\beta-1}}, \quad (50)$$

где $\gamma = 2 - \alpha - \beta$, $\bar{\gamma} = 2 - \bar{\alpha} - \bar{\beta}$;

• соотношение звезда-треугольник

$$\int d^2w \frac{1}{[z_1 - w]^\alpha [z_2 - w]^\beta [z_3 - w]^\gamma} = \frac{\pi a(\alpha, \beta, \gamma)}{[z_2 - z_1]^{1-\gamma} [z_1 - z_3]^{1-\beta} [z_3 - z_2]^{1-\alpha}}, \quad (51)$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 2$ и $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = 2$.

Эти тождества изображены графически на рис. 12, где жирная точка означает интегрирование по координате вершины.

Список литературы

- [1] G. Racah, “Theory of complex spectra. II”, *Phys. Rev.*, **62**:9–10 (1942), 438–462.
- [2] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, v. 71, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [3] Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, Л., 1975.
- [4] И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, *Унитарные представления классических групп*, Тр. МИАН СССР, **36**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1950.
- [5] Л. Н. Липатов, “Затравочный померон в квантовой хромодинамике”, *ЖЭТФ*, **90**:5 (1986), 1536–1552.
- [6] L. N. Lipatov, “High-energy asymptotics of multicolor QCD and two-dimensional conformal field theories”, *Phys. Lett. B*, **309**:3–4 (1993), 394–396.
- [7] L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky, “High-energy QCD as a completely integrable model”, *Phys. Lett. B*, **342**:1–4 (1995), 311–322, arXiv: hep-th/9404173.
- [8] Л. Н. Липатов, “Асимптотика многоцветной КХД при больших энергиях и точно решаемые спиновые модели”, *Письма в ЖЭТФ*, **59**:9 (1994), 571–574.
- [9] М. А. Наймарк, “Разложение тензорного произведения неприводимых представлений собственной группы Лоренца на неприводимые представления. Часть I. Случай тензорного произведения представлений основной серии”, *Тр. ММО*, **8** (1959), 121–153.
- [10] Р. С. Исмагилов, “Об операторах Рака”, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:3 (2006), 69–72.
- [11] Р. С. Исмагилов, “Об операторах Рака для представлений основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$ ”, *Матем. сб.*, **198**:3 (2007), 77–90.
- [12] W. Groenevelt, “Wilson function transforms related to Racah coefficients”, *Acta Appl. Math.*, **91**:2 (2006), 133–191.
- [13] С. Э. Деркачёв, А. Н. Манапов, “Общее решение уравнения Янга–Бакстера с группой симметрии $SL(n, \mathbb{C})$ ”, *Алгебра и анализ*, **21**:4 (2009), 1–94.
- [14] L. D. Faddeev, “Modular double of a quantum group”, *Conférence Moshé Flato 1999. Quantization, Deformations, and Symmetries*, v. I, Mathematical Physics Studies, **21**, eds. G. Dito, D. Sternheimer, Kluwer, Dordrecht, 2000, 149–156.
- [15] B. Ponsot, J. Teschner, “Clebsch–Gordan and Racah–Wigner coefficients for a continuous series of representations of $U_q(sl(2, \mathbb{R}))$ ”, *Commun. Math. Phys.*, **224**:3 (2001), 613–655.
- [16] M. Pawelkiewicz, V. Schomerus, P. Suchanek, “The universal Racah–Wigner symbol for $U_q(osp(1|2))$ ”, *JHEP*, **04** (2014), 079, 25 pp., arXiv: 1307.6866.
- [17] S. É. Derkachov, A. N. Manashov, “Spin chains and Gustafson’s integrals”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**:29 (2017), 294006, 20 pp.
- [18] S. É. Derkachov, A. N. Manashov, P. A. Valinevich, “Gustafson integrals for $SL(2, \mathbb{C})$ spin magnet”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**:29 (2017), 294007, 12 pp.
- [19] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции*, т. 5: *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений*, Физматлит, М., 1962.

- [20] D. Chicherin, S. E. Derkachov, V. P. Spiridonov, “From principal series to finite-dimensional solutions of the Yang–Baxter equation”, *SIGMA*, **12** (2016), 028, 34 pp.
- [21] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory”, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [22] S. É. Derkachov, L. D. Faddeev, “ $3j$ -symbol for the modular double of $SL_q(2, \mathbb{R})$ revisited”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **532**:1 (2014), 012005, 14 pp.
- [23] L. Hadasz, M. Pawelkiewicz, V. Schomerus, “Self-dual continuous series of representations for $U_q(sl(2))$ and $U_q(osp(1|2))$ ”, *JHEP*, **10** (2014), 091, 29 pp.
- [24] С. Г. Горишний, А. П. Исаев, “Об одном подходе к вычислению многопетлевых безмассовых фейнмановских интегралов”, *Theoret. and Math. Phys.*, **62**:3 (1985), 345–358.
- [25] В. П. Спиридонов, “Очерки теории эллиптических гипергеометрических функций”, *УМН*, **63**:3(381) (2008), 3–72.

Поступила в редакцию 20.11.2017,
после доработки 20.11.2017,
принята к печати 23.04.2018