Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бертола, Д. А. Короткин, Дискриминантные расслоения окружностей над локальными моделями графов Штребеля и кривых Бутру, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 2, 163–207

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 18:08:18

© 2018 г.

М. Бертола^{*†}, Д. А. Короткин^{*}

ДИСКРИМИНАНТНЫЕ РАССЛОЕНИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ НАД ЛОКАЛЬНЫМИ МОДЕЛЯМИ ГРАФОВ ШТРЕБЕЛЯ И КРИВЫХ БУТРУ

Изучаются специальные “дискриминантные” расслоения окружностей над двумя элементарными пространствами $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ и $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ модулей мероморфных квадратичных дифференциалов с вещественными периодами. Пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ – это пространство модулей мероморфных квадратичных дифференциалов на сфере Римана с одним полюсом седьмого порядка и вещественными периодами. Оно возникает естественным образом при исследовании окрестности цикла Виттена W_5 в комбинаторной модели, основанной на квадратичных дифференциалах Дженкинса–Штребеля пространств модулей $\mathcal{M}_{g,n}$. Пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ – это пространство модулей мероморфных квадратичных дифференциалов на сфере Римана с двумя полюсами порядка не выше третьего и вещественными периодами. Оно возникает при описании окрестности границы Концевича $W_{1,1}$ комбинаторной модели. Применение формализма тау-функций Бергмана к комбинаторной модели для аналитического вычисления циклов, пуанкаре-дуальных определенным комбинациям тавтологических классов, требует изучения специальных сечений расслоений окружностей над $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ и $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$; в случае пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ сечение этого расслоения окружностей задается аргументом модулярного дискриминанта. Подробно изучаются пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ и $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$, также называемые пространствами кривых Бутру, и соответствующие расслоения окружностей.

Ключевые слова: пространства модулей, квадратичные дифференциалы, кривые Бутру, тау-функции, дифференциалы Дженкинса–Штребеля, ленточные графы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9513>

Исследование М. Бертолы частично поддержано Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (грант RGPIN-2016-06660). Исследование Д. Короткина частично поддержано Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (грант RGPIN/3827-2015), а также Alexander von Humboldt Stiftung и GNFM Gruppo Nazionale di Fisica Matematica. Оба автора поддержаны FQRNT (грант “Matrices Aléatoires, Processus Stochastiques et Systèmes Intégrables” (2013-PR-166790)). Д. Короткин благодарит International School of Advanced Studies, Триест, Италия, и Max-Planck Institute for Gravitational Physics (Albert Einstein Institute), Гольм, Германия, за гостеприимство и поддержку в процессе написания статьи.

^{*}Concordia University, Department of Mathematics and Statistics, Québec, Canada.
E-mail: Dmitry.Korotkin@concordia.ca, Marco.Bertola@concordia.ca

[†]International School for Advanced Studies (SISSA), Area of Mathematics, Trieste, Italy.
E-mail: mbertola@sissa.it

1. МОТИВАЦИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ И СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Комбинаторная модель $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{comb}}$ пространств модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ ($n \geq 1$), основанная на дифференциалах Дженкинса–Штребеля (ДШ) [1]–[4], является весьма полезной при изучении геометрии пространства модулей. В частности, она была использована Концевичем [5], [6] для доказательства гипотезы Виттена [7] о числах пересечения ψ -классов.

В рамках этого подхода комбинаторная модель предстает собой CW-комплекс, в котором каждая клетка гомеоморфна симплексу, отвечающему ленточному графу, вложенному в риманову поверхность. Как было показано в работах [8]–[11], авторы которых следовали более ранней работе [12] (где была использована комбинаторная модель пространства $\mathcal{M}_{g,n}$, основанная на гиперболической геометрии) и статье [13], естественные циклы в комбинаторной модели можно интерпретировать как пуанкаре-дуальные определенным комбинациям классов Миллера–Мориты–Мамфорда (κ -классов). Эти естественные циклы состоят из клеток, соответствующих ленточным графам с фиксированной нечетной валентностью вершин: клетки наивысшей размерности отвечают трехвалентным ленточным графам.

Если ленточный граф содержит только одну вершину с валентностью, отличной от 3, то такие циклы называются циклами Виттена; если число таких невырожденных вершин больше единицы, то объединение соответствующих клеток называется циклом Концевича. Особую роль играют следующие два цикла. Первый из них – цикл Виттена W_5 , содержащий ленточные графы с одной пятивалентной вершиной и остальными вершинами валентности 3. Второй цикл является границей Концевича $W_{1,1}$ комбинаторной модели, содержащей ленточные графы, которые имеют две одновалентные вершины и остальные вершины валентности 3. Граница Концевича $W_{1,1}$ – это подмножество границы Делиня–Мамфорда пространства $\mathcal{M}_{g,n}$ (некоторые компоненты границы Делиня–Мамфорда сопоставляются одной точке в $W_{1,1}$). Вообще говоря, цикл Концевича–Виттена $W_{(k_1, \dots, k_r)}$ содержит клетки, отвечающие графам Штребеля, у которых r вершин имеют валентность $2k_j + 3$ ($k_j \geq -1$), а остальные вершины имеют валентность 3 (см. работу [8]).

Отправной точкой расчетов, связывающих комбинаторные циклы с κ -классами и их комбинациями, служит явное выражение для форм связности в расслоениях окружностей (или $U(1)$ -расслоениях), отвечающих тавтологическим линейным расслоениям $\mathcal{L}_k$, ассоциированным с k -м проколом (см. детали в [5], [14], [8], [10], [11]).

Основной причиной, побудившей нас написать настоящую работу, является желание заложить аналитическую основу применения методов тау-функции Бергмана к комбинаторной модели $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{comb}}$ пространства $\mathcal{M}_{g,n}$. Тау-функция Бергмана впервые появилась в теории изомонодромных деформаций [15] и фробениусовых многообразий [16] в контексте пространств Гурвица. Затем теория была расширена до пространств модулей абелевых [17] и квадратичных [18] дифференциалов над римановыми поверхностями. С геометрической точки зрения тау-функция Бергмана есть (голоморфное или мероморфное) сечение произведения линейного расслоения Ходжа и других естественных линейных расслоений над соответствующим пространством модулей. Поэтому в рамках голоморфного подхода анализ структуры ее сингулярностей позволяет получить различные соотношения в группах Пикара

этих пространств модулей [19]–[21]. Прямое применение данной техники в контексте комбинаторной модели $\mathcal{M}_{g,n}$ на основе дифференциалов ДШ затруднительно из-за отсутствия естественной голоморфной структуры на клетках. Тау-функция Бергмана, надлежащим образом определенная на комбинаторной модели ДШ пространства $\mathcal{M}_{g,n}$, является только вещественной и аналитической в каждой ячейке; однако ее аргумент может использоваться для получения гладкого сечения расслоения окружностей. В свою очередь, изучение монодромии этих сечений позволяет найти циклы комбинаторной модели, пуанкаре-дуальные некоторым комбинациям стандартных тавтологических классов в пространстве $\mathcal{M}_{g,n}$ [22]. Реализация этой идеи требует изучения локального поведения тау-функции Бергмана и соответствующего ей расслоения окружностей в окрестности циклов W_5 и $W_{1,1}$.

Далее мы описываем окрестности циклов W_5 и $W_{1,1}$ в $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{comb}}$, применяя соответствующую *конформную спайку* (conformal welding), которую эквивалентным образом можно интерпретировать с помощью так называемой *конструкции вклейки трубки* (plumbing construction), используя плоскую структуру, вводящуюся на римановой поверхности дифференциалом ДШ.

Комбинаторные модели в окрестности циклов W_5 и $W_{1,1}$. Анализ окрестности цикла Виттена W_5 в пространстве $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{comb}}$ показывает, что возникает вещественное сечение $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ (пространство кривых Бутру) пространства модулей $\mathcal{Q}_0(-7)$ мероморфных квадратичных дифференциалов на сфере Римана с одним полюсом седьмого порядка.

Пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ возникает при изучении окрестности цикла $W_5 \subset \mathcal{M}_{g,n}^{\text{comb}}$ следующим образом: клетки, образующие цикл W_5 , получаются из клеток наивысшей размерности в пространстве $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{comb}}$ путем вырождения двух ребер с ровно одной общей вершиной; это вырождение приводит к возникновению так называемой *зоны вклейки трубки* (как это показано ниже на рис. 6), которая разделяет компоненту $\mathbb{CP}^1$, содержащую три нуля дифференциала Q , и его полюс седьмой степени в нодальной точке. Тогда квадратичный дифференциал Q , возникающий на отделенной сфере Римана, принадлежит пространству $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$.

Пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ естественным образом возникает в окрестности границы Концевича $W_{1,1}$: оно является пространством модулей квадратичных дифференциалов на сфере Римана с двумя полюсами третьего порядка. Клетки, образующие $W_{1,1}$, получаются из клеток наивысшей размерности путем одновременного вырождения двух ребер с двумя общими вершинами. Такое вырождение приводит к возникновению двух зон вклейки трубки (как это показано ниже на рис. 10). Тогда квадратичный дифференциал Q , возникающий на отделяющейся сфере Римана, принадлежит пространству $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2, [1]^2)$.

Оба пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ и $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ имеют вещественную размерность 2. К нашему удивлению, мы не нашли в литературе полного описания этих двух элементарных пространств модулей; одна из целей настоящей статьи – заполнить этот пробел. Стратификация данных пространств, а также их комплексифицированные версии $\mathcal{Q}_0(-7)$ и $\mathcal{Q}_0([-3]^2)$ детально рассмотрены в п. 5.1, 6.1.

Пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$. Элемент общего вида комплексного пространства $\mathcal{Q}_0(-7)$ можно задать как квадратичный дифференциал

$$Q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(dx)^2, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0. \quad (1.1)$$

Локальные гомологические координаты определяются интегралами от $v = \sqrt{Q}$ по двум независимым гомологическим циклам на эллиптической кривой (каноническом накрытии) $\hat{C}$, заданной уравнением $v^2 = Q$ (см. детали в п. 5.1). Вещественный слой $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ в пространстве $\mathcal{Q}_0(-7)$ задается условием, что все периоды дифференциала v вещественны, и тогда пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ состоит из клеток вещественной размерности 2, клетки размерности 1 (где два нуля дифференциала Q совпадают) и клетки нулевой размерности (когда $x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

Из вещественности всех периодов дифференциала v следует, что период σ кривой $\hat{C}$ принадлежит одномерному подмножеству $\mathcal{R}_1$ модулярной кривой, показанной ниже на рис. 11а.

Пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, [1]^3)$ расслаивается над множеством $\mathcal{R}_1$ со слоем $\mathbb{R}_+$. Бесконечно удаленная точка в множестве $\mathcal{R}_1$ отвечает пространству $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, 1, 2)$. Точка пересечения множества $\mathcal{R}_1$ с вещественной осью в плоскости J -инварианта (см. рис. 11б) соответствует $J \simeq 940.34$, и отвечает кривой Бутру–Кричевера [23]–[25]. Она является единственной кривой Бутру в $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, [1]^3)$, имеющей вещественную инволюцию $\star$, которая оставляет инвариантным дифференциал ДШ: $Q(x^{\star}) = Q(x)$.

Нули x_1 , x_2 и x_3 связаны двумя горизонтальными (т.е. параллельными) вещественной прямой в плоскости координаты $z(x) = \int^x v$ геодезическими в метрике $|Q|$. Мы всегда будем обозначать символом x_2 центральный ноль, который соединен геодезическими с двумя другими нулями. Оставшиеся нули x_1 и x_3 можно определить так, что при обходе начала координат в положительном направлении точка x_3 проходится после x_2 , а точка x_1 – после x_3 . Длины геодезических равны $A = |\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{Q}|$, $B = |\int_{x_2}^{x_3} \sqrt{Q}|$. Длины (A, B) задают отображение пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, [1]^3)$ в $\mathbb{R}_+^2$.

Дискриминантное расслоение окружностей на $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$. Рассмотрим сечение $U(1)$ -расслоения над $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([1]^3, -7)$, заданное аргументом модулярного дискриминанта, $\phi_5 = \text{Arg } \Delta_5$, где

$$\Delta_5 = [(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)]^2. \quad (1.2)$$

Дискриминант Δ_5 равен нулю на границе страта $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([1]^3, -7)$. Однако его аргумент ϕ_5 имеет корректно определенные пределы на лучах $A = 0$, $B = 0$ (т.е. при приближении к границе пространства модулей с двух разных сторон), причем эти пределы не зависят от точки на границе. Доказанная ниже теорема 2 показывает, что между $A = 0$ и $B = 0$ значение ϕ_5 увеличивается на $\pi/5$; этот результат технически нетривиален. Следовательно, величина $\pi/5$ является монодромией аргумента ϕ_5 при обходе клетки нулевой размерности (соответствующей дифференциалу $Q = x^3 dx^2$) в пространстве $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$.

Пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$. Комплексное пространство модулей $\mathcal{Q}_0([-3]^2)$ состоит из квадратичных дифференциалов Q на сфере Римана с двумя полюсами третьей степени. Общий дифференциал такого типа имеет вид

$$Q = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x^3} (dx)^2, \quad x_1 \neq x_2 \quad x_1 \neq 0 \neq x_2. \quad (1.3)$$

Интегралы от $\sqrt{Q}$ по путям в двух произвольных независимых гомологических классах канонического накрытия $y^2 = x(x - x_1)(x - x_2)$ являются локальными координатами на $\mathcal{Q}_0([-3]^2)$. Пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ задается условием, что все периоды

дифференциала $v = \sqrt{Q}$ вещественны; оно расслаивается над множеством $\mathcal{R}_{-1,-1}$ вещественной размерности 1, лежащим в модулярной кривой (см. ниже рис. 15, левая часть), со слоем $\mathbb{R}_+$.

Бесконечно удаленная точка в $\mathcal{R}_{-1,-1}$ отвечает пространству $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(2, [-3]^2)$. Множество $\mathcal{R}_{-1,-1}$ пересекает вещественную ось J -инварианта при $J \simeq \{-1690, 586, 7791\}$ (см. рис. 15, правая часть). Точки $J \simeq -1690$ и $J \simeq 586$ соответствуют кривым с вещественной инволюцией, но дифференциал Q неинвариантен относительно этой инволюции. Точка $J \simeq 7791$ ($x_1 \simeq 1.8037$, $x_2 \simeq -0.3797$) отвечает кривой, обладающей вещественной инволюцией $\star$ (действующей как стандартное комплексное сопряжение) $Q(x^\star) = Q(x)$. Она является естественным аналогом кривой Бутру–Кричевера в пространстве $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$.

Один из нулей, который мы обозначим через x_1 , связан бесконечными горизонтальными геодезическими в метрике $|Q|$ с полюсом $x = 0$, а другой ноль x_2 – с полюсом $x = \infty$. Нули x_1 и x_2 соединены двумя горизонтальными геодезическими, которые мы обозначим через e_1 и e_2 . Они определяются следующим образом: при достижении нуля x_1 вдоль горизонтальной геодезической, исходящей из $x = 0$, при повороте направо мы следуем по геодезической e_1 , а при повороте налево – по геодезической e_2 (см. ниже рис. 7). Длины геодезических e_1 и e_2 мы будем обозначать через A и B . Длины (A, B) задают отображение пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([1]^2, [-3]^2)$ в $\mathbb{R}_+^2$.

Дискриминантное расслоение окружностей над $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$. Сечения $\phi_{1,1}^\pm$ двух естественных $U(1)$ -расслоений над $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([1]^2, [-3]^2)$ задаются следующими выражениями:

$$\phi_{1,1}^\pm = \text{Arg } \Delta_{1,1}^\pm, \quad \Delta_{1,1}^+ := x_1^6 x_2^6 (x_1 - x_2)^2, \quad \Delta_{1,1}^- := x_1^6 x_2^6 (x_1 - x_2)^{26}. \quad (1.4)$$

Анализ, представленный в разделе 6, показывает, что между лучом $A = 0$ и лучом $B = 0$ в пространстве $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ (т. е. при приближении к границе с двух разных сторон) величины $\phi_{1,1}^+$ и $\phi_{1,1}^-$ возрастают на 13π и 25π соответственно. Следовательно, монодромии величин $\phi_{1,1}^+$ и $\phi_{1,1}^-$ при обходе по простой, замкнутой, нестягиваемой петле в $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ равны 13π и 25π соответственно (см. теорему 2).

Подводя итог, перечислим основные результаты статьи. Во-первых, мы показываем, что пространства модулей $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ и $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ возникают из графа Штребеля общего вида в результате вырождения смежных ребер. Во-вторых, мы аналитически исследуем пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ и $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ и естественные расслоения окружностей над ними. Эти результаты обеспечивают необходимые аналитические инструменты для применения формализма тау-функции Бергмана при описании различных тавтологических классов в комбинаторной модели пространства $\mathcal{M}_{g,n}$ [22].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем основные сведения о комбинаторной модели $\mathcal{M}_{g,n}$, основанной на дифференциалах ДШ. В разделе 3 мы описываем окрестность цикла Виттена W_5 в комбинаторной модели и показываем, как в этом контексте возникает пространство модулей $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$. В разделе 4 мы описываем окрестность границы Концевича $W_{1,1}$ пространства $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{comb}}$ и показываем, каким образом возникает пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$. В разделе 5 мы детально изучаем геометрию пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ и вычисляем монодromию аргумента аргумент модулярного дискриминанта Δ_5 на нем. Наконец, в разделе 6 мы изучаем геометрию пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ и вычисляем монодромии аргументов $\Delta_{1,1}^\pm$ в этом пространстве.

2. КОМБИНАТОРНАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВА $\mathcal{M}_{g,n}$ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ДШ

Вкратце напомним основные компоненты комбинаторной модели пространств модулей римановых поверхностей, основанной на дифференциалах ДШ.

Обозначим пространство модулей римановой поверхности рода g с n отмеченными точками через $\mathcal{M}_{g,n}$, а его компактификацию Делиня–Мамфорда – через $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Пусть $\mathcal{C}$ – риманова поверхность рода g и Q – мероморфный квадратичный дифференциал с полюсами второго порядка в точках $y_1, \dots, y_n$. Обозначим нули дифференциала Q через $x_1, \dots, x_m$, а их кратности – через $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$; при этом $\sum_{i=1}^m d_i = 4g - 4 + 2n$. Пусть $\mathcal{Q}_{g,n}^{\mathbf{d}}$ – пространство модулей таких квадратичных дифференциалов; его размерность равна $2g - 2 + n + m$. Для страта наивысшей размерности, когда все нули простые и $m = 4g - 4 + 2n$, эта размерность равна $6g - 6 + 3n$.

Каноническое накрытие. Уравнение $v^2 = Q$ в $T^*\mathcal{C}$ определяет двулистное накрытие $\hat{\mathcal{C}}$ поверхности $\mathcal{C}$, в теории Тейхмюллера называющееся *каноническим накрытием* (в теории систем Хитчина $\hat{\mathcal{C}}$ известно как спектральное накрытие, а в суперсимметричной теории Янга–Миллса его называют кривой Зайберга–Виттена). Точки ветвления этого накрытия совпадают с полюсами нечетного порядка дифференциала Q , их количество мы обозначаем через m_{odd} , при этом род канонического накрытия равен $\hat{g} = 2g + m_{\text{odd}}/2 - 1$. В случае общего дифференциала Q , который имеет $4g - 4 + 2n$ простых нулей, $\hat{g} = 4g - 3 + n$. Удобно ввести обозначение

$$g_- = \hat{g} - g = g + \frac{m_{\text{odd}}}{2} - 1.$$

Обозначим через μ голоморфную инволюцию, переставляющую листы накрытия $\hat{\mathcal{C}}$. Абелев дифференциал v третьего рода на $\hat{\mathcal{C}}$ имеет $2n$ простых полюсов в точках $\{y_i, y_i^\mu\}$ (слегка злоупотребляя обозначениями, мы будем использовать символ y_i для координаты полюса как на $\mathcal{C}$, так и на $\hat{\mathcal{C}}$). Рассмотрим разложение пространства $H_1(\hat{\mathcal{C}} \setminus \{y_i, y_i^\mu\}_{i=1}^n, \mathbb{R})$ (его размерность равна $2\hat{g} + 2n - 1$) в прямую сумму четного и нечетного подпространств:

$$H_+ \oplus H_-, \quad \dim H_+ = 2g + n - 1, \quad \dim H_- = 2g_- + n. \quad (2.1)$$

Заметим, что $\dim H_- = \dim \mathcal{Q}_{g,n}^{\mathbf{d}}$. Следовательно, в пространстве $\mathcal{Q}_{g,n}^{\mathbf{d}}$ можно ввести систему локальных координат, которые называются гомологическими координатами, выбирая в H_- независимые циклы s_i , $i = 1, \dots, \dim H_-$, и интегрируя по ним дифференциал v :

$$\mathcal{P}_i = \int_{s_i} v. \quad (2.2)$$

Следующее определение дифференциала ДШ эквивалентно стандартному [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квадратичный дифференциал Q называется дифференциалом ДШ, если все гомологические координаты $\mathcal{P}_i$ вещественны.

Из вещественности всех координат $\mathcal{P}_i$ следует, что бивычеты дифференциала Q в полюсах y_j являются вещественными и отрицательными, т. е. существуют такие

числа $p_j \in \mathbb{R}_+$, что для любой локальной координаты ζ в окрестности точки y_j

$$Q(\zeta) = -\frac{(p_j/2\pi)^2}{\zeta^2}(1 + \mathcal{O}(\zeta))(d\zeta)^2. \quad (2.3)$$

Из результатов ДШ следует, что для заданных $p_i \in \mathbb{R}_+$ существует единственный дифференциал Q на заданной римановой поверхности с n отмеченными точками, все периоды $\int_{s_i} v$ которого вещественны при $s_i \in H_-$ (комбинация циклов вокруг z_i также образует часть подпространства H_- ; вещественность периодов дифференциала v в окрестности этих циклов гарантирована формой бивычетов в (2.3)). Это утверждение обеспечивает возможность комбинаторного описания пространства $\mathcal{M}_{g,n}$.

Для каждого заданного вектора $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ можно построить комбинаторную модель пространства модулей $\mathcal{M}_{g,n}$, которую мы будем обозначать через $\mathcal{M}_{g,n}[\mathbf{p}]$. А именно, рассмотрим для каждой римановой поверхности $\mathcal{C}$ рода g с n отмеченными точками $z_1, \dots, z_n$ единственный дифференциал ДШ Q , сингулярная часть которого в точках z_i имеет вид, заданный в (2.3).

Страт $\mathcal{M}_{g,n}^{\mathbf{d}}[\mathbf{p}]$ в $\mathcal{M}_{g,n}[\mathbf{p}]$ состоит из римановых поверхностей с проколами, таких что дифференциал ДШ Q имеет нули с кратностями $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$. Вещественная размерность $\mathcal{M}_{g,n}^{\mathbf{d}}[\mathbf{p}]$ задается формулой

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{g,n}^{\mathbf{d}}[\mathbf{p}] = 2g - 2 + m. \quad (2.4)$$

Максимальный страт соответствует дифференциалам ДШ с простыми нулями и имеет вещественную размерность $6g - 6 + 2n$ (в этом случае $m = 4g - 4 + 2n$), которая совпадает с вещественной размерностью пространства $\mathcal{M}_{g,n}$.

Ориентированные горизонтальные траектории 1-формы v на кривой $\hat{\mathcal{C}}$ (которые проецируются в неориентированные горизонтальные траектории дифференциала Q на римановой поверхности $\mathcal{C}$) соединяют нули x_i . Эти горизонтальные траектории на $\mathcal{C}$ образуют ребра вложенного графа (который также называется *ленточный граф*) Γ на $\mathcal{C}$ с вершинами в точках $x_1, \dots, x_m$, которые имеют валентности $d_1 + 2, \dots, d_m + 2$ соответственно. Таким образом, страт наивысшей размерности $6g - 6 + 2n$ отвечает ленточному графу на римановой поверхности $\mathcal{C}$ с трехвалентными вершинами.

Длина ℓ_e ребра e , соединяющего вершины v_1, v_2 , равна абсолютной величине интеграла от v по горизонтальной траектории, которая соединяет вершины. В свою очередь, с точностью до множителя $1/2$ эта длина совпадает с интегралом от v по целочисленным циклам в H_- , состоящим из траектории e на одном листе проекции $\hat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ и такой же траектории, но идущей в противоположном направлении на другом листе. Фиксируя вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^n$ мы налагаем n линейных условий на длины ребер: для j -й грани f_j , $j = 1, \dots, n$, мы имеем $\sum_{e \in \partial f_j} \ell_e = p_j$.

Простой пример ленточного графа на римановой поверхности рода 1 с одной отмеченной точкой показан на рис. 1. В плоской метрике $|Q|$ на $\mathcal{C}$ окрестность полюса y_i представляет собой бесконечный цилиндр периметра p_i .

Объединение всех стратов $\mathcal{M}_{g,n}^{\mathbf{d}}[\mathbf{p}]$ при фиксированном $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^n$ образует комбинаторную модель $\mathcal{M}_{g,n}[\mathbf{p}]$ пространства $\mathcal{M}_{g,n}$, которая с точки зрения теории множеств изоморфна $\mathcal{M}_{g,n}$.

Рис. 1. Ленточный граф на римановой поверхности рода 1, представляющий точку в пространстве $\mathcal{M}_{1,1}[p]$. Два простых нуля x_1 и x_2 дифференциала Q связаны тремя ребрами, длины которых суть ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 . Ленточный граф имеет единственную грань с периметром $p = 2(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)$. Длины ℓ_1 и ℓ_2 можно использовать как координаты в пространстве $\mathcal{M}_{1,1}[p]$.

Компактификация $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}[\mathbf{p}]$ данной комбинаторной модели строится путем добавления к $\mathcal{M}_{g,n}[\mathbf{p}]$ так называемой *границы Концевича*: страт $W_{1,1}$ границы Концевича, имеющий вещественную коразмерность 2, соответствует ленточным графам с ровно двумя одновалентными вершинами (т. е. двумя простыми полюсами дифференциала ДШ Q), в то время как валентность остальных вершин остается равной 3. В пространстве $\mathcal{M}_{g,n}$ граница Концевича “меньше”, чем граница Делиня–Мамфорда, поскольку комбинаторная модель ДШ неприменима для римановых поверхностей без проколов.

Каждой грани F_j ленточного графа Γ (грань F_j содержит полюс y_j) можно сопоставить единичный диск с помощью отображения

$$w_j(x) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p_j} \int_{x_j}^x v\right), \quad (2.5)$$

где x_j – произвольная вершина в грани F_j . При отображении (2.5) точке y_j сопоставляется начало координат, а точке x_j сопоставляется 1. Всегда можно выбрать ветвь дифференциала $v = \sqrt{Q}$, для которой вычет в y_j равен $p_j/2\pi i$. На грани F_j плоская метрика $|Q| = |v|^2$ римановой поверхности $\mathcal{C}$ записывается как

$$|Q| = \frac{p_j^2}{4\pi^2} \left| \frac{dw_j}{w_j} \right|^2. \quad (2.6)$$

В комбинаторной модели $\mathcal{M}_{1,1}^{\text{comb}}[p]$, показанной на рис. 1, ленточный граф, соответствующий страту наибольшей размерности, имеет только одну грань; эта грань может быть отображена в единичный диск. Условие для длин в этом случае имеет вид $2(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) = p$. Пример ленточного графа на римановой поверхности более высокого рода показан на рис. 2.

В обратную сторону, из ленточного графа с заданными длинами всех ребер можно построить полиэдральную риманову поверхность (т. е. риманову поверхность с плоской метрикой и с коническими особенностями) с помощью так называемой конформной спайки [2].

Все страты комбинаторной модели $\mathcal{M}_{g,n}[\mathbf{p}]$ можно получить из страта W наибольшей размерности (соответствующего ленточным графам, у которых все вершины

Рис. 2. Типичный вложенный граф Штребеля; в двух областях более темного цвета вырождение ребер приводит либо к клетке W_5 (левая область), либо к клетке $W_{1,1}$ (правая область).

Рис. 3. Движение Уайтхеда.

трехвалентные) путем вырождения одного или нескольких ребер. Различные компоненты страта W склеиваются вдоль границ (вещественной) коразмерности 1, которые соответствуют ленточным графам с одной четырехвалентной вершиной и всеми остальными вершинами валентности 3 (т. е. дифференциал ДШ, соответствующий такой границе, имеет один двойной ноль, а другие нули простые). Процедура пересечения границы при переходе из одной ячейки слоя W в другую (иногда таким способом можно попасть в одну и ту же ячейку, тогда ячейка граничит сама с собой) описывается так называемым движением Уайтхеда, показанным на рис. 3.

Наша цель состоит в том, чтобы подробно изучить вырождение двух ребер, имеющих одну общую вершину. В результате в зависимости от геометрии получаются либо клетки, образующие цикл Виттена W_5 (соответствующие ленточные графы имеют одну пятивалентную вершину, а другие вершины трехвалентные), либо клетки, образующие границу Концевича $W_{1,1}$ модели $\mathcal{M}_{g,n}[\mathbf{p}]$ (что соответствует ленточным графам с двумя одновалентными вершинами и всеми остальными вершинами валентности 3). Эти два типа вырождения показаны на рис. 2.

3. ЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ В ОКРЕСТНОСТИ ЦИКЛА ВИТТЕНА W_5 : ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$

Клетки цикла W_5 в комбинаторной модели $\mathcal{M}_{g,n}[\mathbf{p}]$ (во всех конструкциях, приведенных ниже, вектор $\mathbf{p}$ считается фиксированным) отвечают ленточным графам, все вершины которых имеют валентность 3, за исключением одной вершины с валентностью 5. Здесь мы рассматриваем риманову поверхность $\mathcal{C}$ с n проколами как элемент комбинаторной модели $\mathcal{M}_{g,n}[\mathbf{p}]$, следовательно, $\mathcal{C}$ единственным образом определяет дифференциал ДШ Q .

Точку цикла W_5 можно получить из трехвалентного ленточного графа путем вырождения двух ребер, имеющих одну общую вершину, и наоборот, любая риманова поверхность из окрестности поверхности $\mathcal{C}$ представляет собой двухпараметрическую деформацию поверхности $\mathcal{C}$ (с вещественными параметрами) в W . Далее мы покажем, как можно описать эту деформацию с помощью плоской перестройки римановой поверхности $\mathcal{C}$ и сферы Римана, оснащенной специальным квадратичным дифференциалом с вещественной нормировкой. Эта плоская перестройка также дает дифференциал ДШ в явном виде и ленточный граф на деформированной римановой поверхности. Понять, что такое плоская перестройка, можно также, используя так называемую конструкцию вклейки трубки, которая соединяет $\mathcal{C}$ со сферой Римана, наделенной соответствующей плоской метрикой.

Обозначим ноль третьего порядка дифференциала ДШ на $\mathcal{C}$ через $\tilde{x}$; также введем обозначение Γ для ленточного графа, соответствующего $\mathcal{C}$. Пусть ζ – выделенный локальный параметр на $\mathcal{C}$ в окрестности точки $\tilde{x}$: $\zeta(x) = [\frac{5}{2} \int_{\tilde{x}}^x v]^{2/5}$ (функция $\zeta(x)$ определена с точностью до корня пятой степени из единицы). При этом $Q(x)$ можно записать в терминах ζ как $Q(\zeta) = \zeta^3(d\zeta)^2$. Локальные координаты на каноническом накрытии $\hat{\mathcal{C}}$ в окрестности точки x_1 задаются как $\zeta^{1/2}$.

Также (и на $\mathcal{C}$, и на $\hat{\mathcal{C}}$) введем плоскую координату $z(x) = \int_{\tilde{x}}^x v$; в окрестности точки $\tilde{x}$ плоская координата выражается через локальную координату ζ следующим образом: $z = \frac{2}{5}\zeta^{5/2}$. Мы имеем $Q(x) = (dz(x))^2$ на $\mathcal{C}$, а на $\hat{\mathcal{C}}$ получаем $v = dz$. Метрика $|Q(x)|$ имеет коническую точку в $\tilde{x}$ с углом 5π , в то время как в остальных вершинах угол равен 3π .

3.1. Разрешение пятивалентной вершины путем плоской перестройки.

Из вершины x_1 исходят пять ребер ленточного графа Γ в направлениях, заданных углами $2\pi k/5$, $k = 0, 1, \dots, 4$, в плоскости переменной ζ . Обозначим их длины (начав с ребра, идущего вдоль положительной части действительной оси) через $\ell_1, \dots, \ell_5$. Построим в явном виде деформацию $\mathcal{C}^{\alpha, \beta}$ поверхности $\mathcal{C}$, содержащую два вещественных (малых) параметра α и β , изменяя длины следующим образом:

$$(\ell_1, \dots, \ell_5) \rightarrow (\ell_1 - (\alpha + \beta), \ell_2 + \beta, \ell_3 - \beta, \ell_4 - \alpha, \ell_5 + \alpha). \quad (3.1)$$

Разумеется, (циклическая) нумерация пяти ребер выбирается любым из пяти возможных способов. Тройной ноль $\tilde{x}$ дифференциала Q на $\mathcal{C}$ расщепляется на три простых нуля (x_1, x_2, x_3) дифференциала ДШ $Q^{\alpha, \beta}$ на $\mathcal{C}^{\alpha, \beta}$. Предположим, что новые ребра длины $\ell_1 - (\alpha + \beta)$ и $\ell_2 + \beta$ встречаются в x_1 ; вершина x_1 соединена с x_2 ребром длины α , вершина x_2 – конечная точка ребра длины $\ell_2 + \beta$, эта вершина также связана с x_3 ребром длины β ; ребра с длинами $\ell_4 - \alpha$ и $\ell_5 + \alpha$ встречаются друг с другом в x_3 . Получающаяся в результате конфигурация показана на рис. 4.

Зафиксируем некоторый радиус R , считая, что $R < \ell_i$ для $i = 1, \dots, 5$. Рассмотрим диск $\mathcal{D}_R$ на поверхности $\mathcal{C}$, заданный условием $|z(x)| \leq R$ (см. рис. 4); в терминах выделенной локальной координаты ζ диск $\mathcal{D}_R$ задается неравенством $|\zeta| \leq (5R/2)^{2/5}$. Пять ребер ленточного графа Γ внутри диска $\mathcal{D}_R$ образуют пять отрезков $[0, (5R/2)^{2/5}]e^{2i\pi k/5}$, $k = 0, \dots, 4$, в плоскости переменной ζ . Периметр диска $\mathcal{D}_R$ в плоской метрике $|Q|$ равен $5\pi R$.

Рис. 4. Риманова поверхность $\mathcal{C}^{\alpha, \beta}$ получается заменой пятивалентной вершины тремя трехвалентными вершинами и двумя ребрами длины α и β между ними при соответствующей корректировке длин ребер оригинального ленточного графа. Предел $\alpha, \beta \rightarrow 0$ воспроизводит исходную риманову поверхность. Пять дуг на границе (см. врезку) представляют собой пять полуокружностей радиуса R в плоских координатах любой из метрик.

Теперь вырежем область $\mathcal{D}_R$ из римановой поверхности $\mathcal{C}$ и получим риманову поверхность с границей, эту поверхность обозначим через $\mathcal{C}_R$. Пусть $\hat{\mathcal{C}}_R$ – каноническое накрытие $\hat{\mathcal{C}}$, в котором диск $\mathcal{D}_R$ удален на обеих копиях поверхности $\mathcal{C}$. Предположим, что разрез, соединяющий тройной ноль $\hat{x}$ с некоторым другим нулем на поверхности $\mathcal{C}$, идет вдоль положительной части вещественной оси координаты ζ . Разрез можно выбрать пятью способами, и этот выбор определяет, как вклеивается диск $\mathcal{D}_R^{\alpha, \beta}$ (описанный ниже), давая, таким образом, пять различных семейств деформаций. Обозначим через $\mathcal{C}^{\alpha, \beta}$ одно из этих пяти семейств.

Рассмотрим элемент пространства модулей $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}[-7]$, такой что квадратичный дифференциал Q_0 на $\mathbb{CP}^1$ задается как

$$Q_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(dx)^2, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0. \quad (3.2)$$

Абелев дифференциал $v_0 = \sqrt{Q_0}$ определен на каноническом накрытии $\hat{\mathcal{C}}_0$ сферы Римана, т. е. является эллиптической кривой с точками ветвления в x_1, x_2, x_3 и ∞ .

Предположим, что все периоды дифференциала v_0 на $\hat{\mathcal{C}}_0$ вещественны. Тогда на $\mathbb{CP}^1$ существуют две горизонтальные траектории дифференциала v_0 , которые соединяют точки x_1, x_2 и x_3 . Предположим, что x_2 – центральный ноль, т. е. он соединен горизонтальными траекториями с x_1 и x_3 . Проведем разрез на $\hat{\mathcal{C}}_0$, чтобы соединить горизонтальными траекториями точку x_2 с x_1, x_3 и ∞ . Предположим, что нумерация точек x_1 и x_3 введена так, что разрезы $[x_2, \infty)$, $[x_2, x_1]$ и $[x_2, x_3]$, сходящиеся в точке x_2 , расположены в указанном порядке, если их отсчитывать против

Рис. 5. Ленточный граф в пространстве $\mathbb{CP}^1$, отвечающий квадратичному дифференциалу Q_0 , и геодезический диск радиуса R в плоскости координаты x ; помечены расстояния в метрике $|Q_0|$ вдоль траекторий (а). Пять полудисков в верхней полуплоскости отображаются с помощью плоской координаты (б).

часовой стрелки, как показано на рис. 5а (этот рисунок изображен в плоскости координаты x).

Введем в $\hat{\mathcal{C}}_0$ канонический базис циклов (a, b) такой, что a -цикл окружает точки ветвления x_1 и x_2 , а b -цикл окружает точки ветвления x_2 и x_3 . Вещественные периоды дифференциала v_0 по циклам a и b выражаются через длины α и β разрезов $[x_2, x_1]$ и $[x_2, x_3]$ следующим образом:

$$\left| \int_a v_0 \right| = 2\alpha, \quad \left| \int_b v_0 \right| = 2\beta. \quad (3.3)$$

Эти равенства задают точки ветвления x_i с точностью до умножения всех x_i на корень пятой степени из единицы (см. теорему 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Основываясь на рис. 5, можно показать, что гомологические координаты $\int_a v_0$, $\int_b v_0$ имеют одинаковый знак. Для этого достаточно проверить знак плоской координаты, отсчитываемой от x_2 , с учетом того, что три разреза сходятся в x_2 . Следовательно, модуль в выражениях (3.3) можно не писать, если определить дифференциал v_0 так, что оба интеграла положительны.

Квадратичный дифференциал Q_0 , имеющий на $\mathbb{CP}^1$ три простых нуля и один полюс седьмого порядка, является элементом пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([1]^3, -7)$; это аналог дифференциала ДШ в случае, когда полюс имеет порядок выше двух.

Мы выбираем разрезы вдоль ребер $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_2]$ и $[x_2, \infty]$ (жирные линии на рис. 5а). Ребра ленточного графа Γ_0 делят плоскость переменной x на пять областей, как показано на рис. 5а. Пять горизонтальных траекторий дифференциала v_0 , которые соединяют x_1 , x_2 и x_3 с ∞ , уходят на ∞ вдоль лучей $\arg x = 2\pi k/5$. В плоской метрике $|Q_0|$ на $\mathbb{CP}^1$ любая из этих пяти областей в терминах плоской координаты z превращается в одну и ту же полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$.

На каждом из пяти лучей, соединяющих бесконечно удаленную точку с точками x_i , вырежем отрезки, длины которых выберем как $R - \alpha - \beta$, $R + \beta$, $R - \beta$, $R - \alpha$ и $R + \alpha$ (если вести нумерацию лучей против часовой стрелки, начав с $[x_2, \infty)$). Затем в каждой области рассмотрим полукруг (в плоской метрике $|Q_0|$), который соединяет конечные точки выбранных отрезков (см. рис. 5б). Легко видеть, что диаметры всех этих пяти полукругов совпадают и равны $2R$. Таким способом мы получаем пять областей, имеющих в плоской координате z вид полудисков; обозначим их через $\Pi_1, \dots, \Pi_5$, а их объединение – через $\mathcal{D}_R^{\alpha, \beta}$.

В каждой из областей Π_i плоские координаты определяются с точностью до знака и сдвига, глобальная координата на всем $\mathcal{D}_R^{\alpha, \beta}$ задается следующим образом. Пусть начальная точка пути интегрирования есть x_2 , выберем систему трех разрезов внутри области $\mathcal{D}_R^{\alpha, \beta}$, как показано на рис. 5а, тогда плоская координата на $\mathcal{D}_R^{\alpha, \beta}$ с тремя удаленными разрезами есть

$$w(x) = \alpha + \beta + \int_{x_2}^x v_0, \quad (3.4)$$

где дифференциал v_0 должен быть определен так, чтобы образом области Π_4 была верхняя полуплоскость переменной z . Нетрудно проверить, что в соответствии с ориентацией a - и b -циклов на $\mathcal{C}_0$, показанной на рис. 5а, значения координаты $w(x)$ на разных сторонах разреза $[x_2, \infty)$ отличаются знаком.

Обозначим каноническое двулистное накрытие области $\mathcal{D}_R^{\alpha, \beta}$ с разрезами вдоль горизонтальных траекторий $[x_2, x_1]$, $[x_2, x_3]$ и $[x_2, \infty)$ через $\widehat{\mathcal{D}}_R^{\alpha, \beta}$.

Граница области $\mathcal{D}_R^{\alpha, \beta}$ в глобальной плоской координате представляет собой границу конуса углового размера 5π , а ее периметр равен $5\pi R$. Положение точек, где исходящие ребра (в координате z) пересекают границу области $\mathcal{D}_R^{\alpha, \beta}$, совпадают с положением точек на $\mathcal{D}_R$. В частности, периметр области $\mathcal{D}_R^{\alpha, \beta}$ также равен $5\pi R$. Следовательно, мы можем отождествить границу поверхности $\mathcal{C}_R$ и границу области $\mathcal{D}_R^{\alpha, \beta}$ (эта процедура в монографии [2] названа конформной спайкой), чтобы получить новую риманову поверхность $\mathcal{C}^{\alpha, \beta}$ вместе с ее каноническим накрытием $\widehat{\mathcal{C}}^{\alpha, \beta}$.

Рис. 6. Отделение сферы Римана с тремя простыми нулями и полюсом седьмого порядка в дифференциале Q в окрестности цикла W_5 .

Длины пяти ребер, изначально сходящихся в нуле третьего порядка на $\mathcal{C}$, в результате изменяются в соответствии с (3.1). Заметим, что эта деформация сохраняет периметры всех граней ленточного графа, поэтому риманова поверхность $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$ и соответствующий ленточный граф принадлежат к той же комбинаторной модели $\mathcal{M}_{g,n}[\mathbf{p}]$, что и исходная поверхность $\mathcal{C}$.

Кроме того, результат конформной спайки не зависит от радиуса R вырезанного диска, пока это радиус остается достаточно малым по сравнению с $\ell_1, \dots, \ell_5$ и достаточно большим по сравнению с α и β .

3.2. Конструкция вклейки трубки. Для изучения предела $\alpha, \beta \rightarrow 0$ в рассмотренной выше схеме конформной спайки нужно преобразовать квадратичный дифференциал (3.2) на $\mathbb{CP}^1$. Представленная в данном пункте эквивалентная конструкция вклейки трубки позволяет сохранить $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_0$ фиксированными.

Чтобы деформировать поверхность $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$ (и наоборот, чтобы изучить предел $\alpha, \beta \rightarrow 0$ для $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$), введем параметр трубки $t = \alpha + \beta$ и величины

$$A = \frac{\alpha}{t} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad B = \frac{\beta}{t} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \quad A + B = 1. \quad (3.5)$$

Теперь вырежем из поверхности $\mathcal{C}$ диск $\mathcal{D}_{2t}$ радиуса $R = 2t$ с центром в точке x_1 . Рассмотрим квадратичный дифференциал Q_0 в виде (3.2), при этом абсолютные величины периодов соответствующего абелева дифференциала v_0 равны $2A$ и $2B$ (вместо 2α и 2β , как выше), так что длины конечных ребер соответствующего ленточного графа равны A и B .

Аналогично конструкциям предыдущего пункта вырежем из сферы Римана область $\mathcal{D}_{2/t}^{A,B}$. Радиус дырки в $\mathcal{C} \setminus \mathcal{D}_{2t}$ равен $2t$, а радиус области $\mathcal{D}_{2/t}^{A,B}$ равен $2/t$. Таким образом, обозначив, как и выше, плоскую координату на $\mathcal{C}$ в окрестности $\tilde{x}$ через z , а плоскую координату вблизи границы области $\mathcal{D}_{2/t}^{A,B}$ — через w , зададим границу уравнением $z/w = t^2$. В то же время выделенная координата на $\mathcal{C}$ в окрестности $\tilde{x}$ (в терминах плоской координаты $z = \int_{\tilde{x}}^x v$) есть $\zeta = (\frac{5}{2}z)^{2/5}$. На сфере Римана рассмотрим локальную координату, записывающуюся в терминах глобальной плоской координаты $w(x) = 1 + \int_{x_2}^x v_0$ (аналогичной (3.4)) как $\xi(x) = (\frac{5}{2}w(x))^{-2/5}$.

Далее рассмотрим на множестве $\mathcal{C} \setminus \mathcal{D}_{2t}$ малое кольцо A_ϵ , заданное условием $2t < |z(x)| < 2t + \epsilon$ (с координатой ζ в A_ϵ). Тогда кольца A_ϵ и A_ϵ^0 , необходимые в стандартной конструкции вклейки трубки, задаются соотношением $\xi(x)\zeta(y) = t^{4/5}$, где $x \in A_\epsilon$, $y \in A_\epsilon^0$.

Подход, связанный с конструкцией вклейки трубки, проиллюстрирован на рис. 6. Заметим следующее отличие нашего подхода от стандартной картины. Обычно параметр трубки является комплексным и может использоваться в качестве локальной координаты вблизи границы. В нашем подходе мы имеем два вещественных параметра деформации: один из них является параметром трубки, а второй есть отношение $B/A \in [0, \infty]$, которое определяет мероморфный дифференциал на приклеенной сфере Римана.

4. ЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ В ОКРЕСТНОСТИ ГРАНИЦЫ КОНЦЕВИЧА $W_{1,1}$ И ПРОСТРАНСТВО $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$

Клетки главного страта $W_{1,1}$ границы Коцевича комбинаторной модели $\mathcal{M}_{g,n}[\mathbf{p}]$ отвечают ленточным графам, у которых все вершины техвалентные, кроме двух вершин с валентностью 1. Одновалентные вершины появляются в результате разрешения нодальной точки. Соответствующая риманова поверхность $\mathcal{C}$ представляет собой нодальную кривую, лежащую на границе Делиня–Мамфорда пространства $\mathcal{M}_{g,n}$. Дифференциал ДШ Q на $\mathcal{C}$ имеет простые полюсы в точках x_1^0 и x_2^0 , возникающие при разрешении нодальной точки кривой $\mathcal{C}$. Плоская метрика $|Q(x)|$ имеет в x_i^0 конические точки с углом π .

Введем выделенные локальные координаты ξ_i , $i = 1, 2$, в окрестности x_i^0 так, чтобы дифференциал Q в окрестности точки x_i^0 имел вид

$$Q(\xi_i) = \frac{(d\xi_i)^2}{\xi_i} \quad \text{при } x \rightarrow x_i^0. \quad (4.1)$$

Точки x_i^0 , $i = 1, 2$, являются точками ветвления канонического накрытия $\hat{\mathcal{C}}$ с локальными параметрами на $\hat{\mathcal{C}}$, заданными как $\hat{\xi}_i = \xi_i^{1/2}$; при этом $v = 2d\hat{\xi}_i$ вблизи x_i^0 . Таким образом, абелев дифференциал $v = \sqrt{Q}$ не имеет особенностей и не обращается в нуль на $\hat{\mathcal{C}}$ в точках x_i^0 . Плоские координаты в окрестности точек x_i^0 записываются как

$$z_i(x) = \int_{x_i^0}^x v = 2\xi_i^{1/2},$$

в результате $Q(x) = (dz_i)^2$ вблизи x_i^0 . В обратную сторону, $\xi_i(x) = z_i^2/4$.

Обозначим длины ребер с концами в x_i^0 через ℓ_i и предположим, что разрезы, оканчивающиеся в точках x_i^0 , проходят вдоль этих ребер.

4.1. Разделение двух одновалентных вершин путем плоской перестройки. Чтобы деформировать риманову поверхность $\mathcal{C}$ в риманову поверхность $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$, которая отвечает дифференциалу ДШ со всеми простыми нулями, зафиксируем некоторый радиус R , считая, что $R < \ell_i$, $i = 1, 2$. Обозначим плоский диск $|z_i(x)| < R$ с центром в x_i^0 через $\mathcal{D}_{R,i}$, введем также обозначение $\mathcal{D}_R = \mathcal{D}_{R,1} \cup \mathcal{D}_{R,2}$. Вырезав диски $\mathcal{D}_{R,i}$, $i = 1, 2$, из $\mathcal{C}$, получим открытую риманову поверхность $\mathcal{C}_R$ с двумя дырками периметра πR в метрике $|Q|$. Каноническое накрытие $\hat{\mathcal{C}}$ с вырезанными прообразами дисков $\mathcal{D}_{R,i}$ превращается в двулистное накрытие $\hat{\mathcal{C}}_R$ поверхности $\mathcal{C}_R$, которое также является римановой поверхностью с двумя дырками.

Построим деформацию $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$ с двумя вещественными малыми параметрами α и β так, чтобы ленточный граф, отвечающий поверхности $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$, имел две трехвалентные вершины (т. е. дифференциал Q имел два простых нуля) вместо двух одновалентных вершин x_1^0 и x_2^0 . При такой деформации появляются два новых ребра длины α и β , в то время как ℓ_1 и ℓ_2 изменяются следующим образом:

$$(\ell_1, \ell_2) \rightarrow \left(\ell_1 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \ell_2 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right), \quad (4.2)$$

в результате периметры обеих граней, содержащих вершины x_1^0 и x_2^0 , остаются неизменными.

Для построения $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$ мы присоединим к $\mathcal{C}_R$ кольцообразную область следующего вида. Рассмотрим точку в пространстве $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([1]^2, [-3]^2)$, т. е. квадратичный дифференциал Q_0 на $\mathbb{CP}^1$ с двумя полюсами третьего порядка (которые мы отождествим с $x = 0$ и $x = \infty$), с двумя простыми нулями и вещественными периодами:

$$Q_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x^3} (dx)^2. \quad (4.3)$$

Каноническое накрытие, соответствующее дифференциалу Q_0 , является эллиптической кривой $\hat{\mathcal{C}}_0$ с точками ветвления x_1 , x_2 , 0 и ∞ на плоскости переменной x . Мероморфный абелев дифференциал $v_0 = \sqrt{Q_0}$,

$$v_0 = \frac{\sqrt{(x - x_1)(x - x_2)}}{x^{3/2}} dx, \quad (4.4)$$

имеет на этом каноническом накрытии нули второго порядка в x_1 и x_2 и полюсы второго порядка в 0 и ∞ .

Предположим, что разрезы выбираются вдоль горизонтальных геодезических в метрике $|Q_0|$, соединяющих точку 0 с x_1 и точку x_2 с ∞ . Приближаясь к x_1 вдоль геодезической, исходящей из 0 , мы можем повернуть либо налево (это ребро обозначим через e_2), либо направо (ребро e_1). Длины ребер e_1 и e_2 будем обозначать через α и β соответственно.

Плоские координаты на $\mathbb{CP}^1$ и на $\hat{\mathcal{C}}_0$ задаются как обычные абелевы интегралы от v_0 ; начальную точку интегрирования можно выбрать произвольно (кроме 0 и ∞). Ленточный граф на $\mathbb{CP}^1$, отвечающий дифференциалу Q_0 , имеет два ребра конечных длин α и β , которые двумя разными способами соединяют точки x_1 и x_2 , и два ребра бесконечной длины, при этом мы нумеруем точки x_1 и x_2 так, чтобы эти ребра соединяли 0 с x_1 и ∞ с x_2 (см. рис. 7).

Рис. 7. Разрезы (жирные линии) и другие горизонтальные геодезические на поверхности $\hat{\mathcal{C}}$. Также показаны ребра e_1 и e_2 .

Рис. 8. Закрашенная область на плоскости переменной x конформно отображается в два полудиска в плоских координатах. Траектории на плоскости переменной x построены по результатам численных расчетов.

Рассмотрим кольцевую область $\mathcal{D}_R^{\alpha,\beta}$, которая состоит из двух полудисков Π_1 и Π_2 радиуса R в плоской метрике $|Q_0|$, склеенных друг с другом вдоль отрезков длины α и β на их диаметрах (см. рис. 8). Оставшиеся части диаметра каждого полудиска (имеющие длины $R - (\alpha + \beta)/2$) склеиваются друг с другом на каждом полудиске по отдельности, как показано на рис. 8. Поднятие $\hat{\mathcal{D}}_R^{\alpha,\beta}$ области $\mathcal{D}_R^{\alpha,\beta}$ в каноническое накрытие $\hat{\mathcal{C}}_0$ имеет два исходящих разреза, совпадающих с частями диаметров полудисков длины $R - (\alpha + \beta)/2$. Плоская координата в диске Π_i задается как $z(x) = \int_{x_i}^x v$ для $i = 1, 2$, тогда граница области $\mathcal{D}_R^{\alpha,\beta}$ определяется уравнением $|z(x)| = R$.

Рис. 9. Разрешение двойной точки $x_{1,2}^0$ на поверхности $\mathcal{C}$ путем вклейки кольца с двумя простыми нулями x_1 и x_2 .

Периметры обеих граничных компонент области $\mathcal{D}_R^{\alpha,\beta}$ в плоской метрике $|Q_0|^2$ равны πR . Кроме того, обе граничные компоненты в этой метрике имеют постоянный радиус R ; разрезы идут вдоль вещественной оси плоской координаты. По аналогии с процедурой разделения пятивалентной вершины мы склеиваем область $\mathcal{D}_R^{\alpha,\beta}$ и риманову поверхность $\mathcal{C}_R$ с двумя дырками так, чтобы разрезы на $\mathcal{C}_R$ склеивались с исходящими разрезами на $\mathcal{D}_R^{\alpha,\beta}$.

Таким образом мы получаем гладкую риманову поверхность $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$ рода g . Ленточный граф на $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$ получается из ленточного графа для $\mathcal{C}$ путем замены ребер в $\mathcal{C}$, имеющих длины ℓ_1 и ℓ_2 , на ребра длины $\ell_i - (\alpha + \beta)/2$ (см. формулу (4.2)) и введения двух новых ребер, имеющих длины α и β . Две одновалентные вершины x_1^0 и x_2^0 на $\mathcal{C}$ при этом заменяются двумя трехвалентными вершинами x_1 и x_2 на $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$.

4.2. Конструкция вклейки трубок. Как и в случае разделения точки цикла W_5 , чтобы изучить предел $\alpha, \beta \rightarrow 0$, необходимо рассмотреть вырождение квадратичного дифференциала (4.3) в пределе $x_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2$. Альтернативным образом конструкция вклейки трубок позволяет сохранить поверхности $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_0$ (вместе с соответствующими дифференциалами ДШ) фиксированными, контролируя вырождение с помощью параметра трубки t . Появление двух зон вклейки трубки вместо одной – это новая черта, присущая случаю $W_{1,1}$.

Чтобы деформировать поверхность $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$ (и наоборот, изучить предел $\alpha, \beta \rightarrow 0$ для $\mathcal{C}^{\alpha,\beta}$), снова введем параметр трубки $t = \alpha + \beta$ и зададим два параметра

$$A = \frac{\alpha}{t} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad B = \frac{\beta}{t} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \quad A + B = 1. \quad (4.5)$$

Как и выше, построим поверхность $\mathcal{C}_R$, вырезав из $\mathcal{C}$ два диска радиуса $R = 2t$ (в плоской метрике $|Q|$) с центрами в точках x_i^0 , $i = 1, 2$, при этом выберем R меньше длин ℓ_i ребер ленточного графа на $\mathcal{C}$, имеющих концами точки x_i^0 . Рассмотрим квадратичный дифференциал Q_0 вида (4.3) такой, что периоды соответствующего

Рис. 10. Разрешение точки границы Концевича $W_{1,1}$ с помощью вклейки трубок: сфера Римана с двумя трехвалентными и двумя одновалентными вершинами вклеивается между двумя одновалентными вершинами с помощью двух трубок.

абелева дифференциала v_0 по циклам, показанным на рис. 7, равны $2A$ и $2B$ (вместо 2α и 2β , как выше); при этом в соответствующем ленточном графе на $\mathbb{CP}^1$ длины ребер, соединяющих x_1 и x_2 , равны A и B .

Аналогично конструкции предыдущего раздела вырежем из сферы Римана кольцевую область $\mathcal{D}_{2/t}^{A,B}$, общая длина границ которой в метрике $|Q_0|$ равна $2\pi/t$. В данном случае диаметр дырок в $\mathcal{C}_{2t}$ отличается от диаметра границы $\mathcal{D}_{2/t}^{A,B}$ на множитель t^2 . Вновь обозначим плоские координаты на $\mathcal{C}$ в окрестности x_i через z_i , $i = 1, 2$. Плоские координаты в окрестности границы области $\mathcal{D}_{2/t}^{A,B}$ обозначим через w_i ; эти координаты нужно отождествить с $t^2 z_i$. Однако выделенными локальными координатами в окрестности x_i на $\mathcal{C}$ являются $\zeta_i = z_i^2/4$. В то же время, на сфере Римана в окрестности границ области $\mathcal{D}_{2/t}^{A,B}$ мы рассматриваем локальные координаты $\xi_i(x) = 4[\int_{x_i}^x v_0]^{-2}$. Координата z_i используется как плоская координата в области Π_i , $i = 1, 2$.

Теперь рассмотрим на $\mathcal{C}_{2t}$ два малых кольца $A_{\epsilon i}$, $i = 1, 2$, заданных неравенствами $2t < z_i(x) < 2t + \epsilon$ (в координатах ζ_i на $A_{\epsilon i}$). На сфере Римана рассмотрим кольцо $A_{\epsilon i}^0$, заданное неравенствами $2/t < w_i(x) < 2/t + \epsilon/t^2$ (в координатах $\xi(x)$ на $A_{\epsilon i}^0$). Тогда отождествление колец $A_{\epsilon i}$ и $A_{\epsilon i}^0$, которое требуется в стандартной конструкции вклейки трубки, задается соотношением $\xi_i(x)\zeta_i(y) = t^4$, где $x \in A_{\epsilon i}$, $y \in A_{\epsilon i}^0$.

Подход, связанный с конструкцией вклейки двух трубок, проиллюстрирован на рис. 10. Вновь, в отличие от стандартного подхода, параметр трубок t вещественный, а второй параметр деформации B/A спрятан в модуле поверхности $\mathcal{C}_0$.

5. МОДУЛЯРНЫЙ ДИСКРИМИНАНТ Δ_5 НА $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$

5.1. Пространство $\mathcal{Q}_0(-7)$.

Стратификация. Обозначим через $\mathcal{Q}_0(-7)$ комплексное пространство модулей квадратичных дифференциалов Q (здесь и далее мы не пишем индекс 0 у Q) на $\mathbb{CP}^1$, имеющих один полюс порядка 7. Если существует преобразование Мёбиуса μ такое, что $\mu^*Q_1 = Q_2$, то дифференциалы Q_1 и Q_2 эквивалентны. Следовательно, без потери общности можно считать, что полюс дифференциала Q находится в точке $x = \infty$; с помощью сдвига и изменения масштаба переменной x дифференциал Q может быть представлен как

$$Q = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(dx)^2, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad (5.1)$$

где точки берутся с точностью до перестановок. Дифференциалы вида (5.1) эквивалентны друг другу, если и только если множества нулей одного и другого дифференциала суть $\{x_i\}$ и $\{\epsilon x_i\}$, где ϵ – корень пятой степени из единицы.

Пространство $\mathcal{Q}_0(-7)$ имеет комплексную размерность два; оно стратифицируется в соответствии с кратностями нулей квадратичного дифференциала Q следующим образом:

$$\mathcal{Q}_0(-7) = \mathcal{Q}_0(-7, [1]^3) \cup \mathcal{Q}_0(-7, 2, 1) \cup \mathcal{Q}_0(-7, 3). \quad (5.2)$$

Здесь $\mathcal{Q}_0(-7, [1]^3)$ – страт комплексной размерности два,

$$\mathcal{Q}_0(-7, [1]^3) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3: x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_i \neq x_j\} / (S_3 \times \mathbb{Z}_5). \quad (5.3)$$

Рассмотрим каноническое накрытие $\hat{\mathcal{C}}$, определенное дифференциалом Q :

$$y^2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad (5.4)$$

Введем на $\hat{\mathcal{C}}$ некоторый базис канонических циклов (a, b) и определим гомологические координаты путем интегрирования дифференциала $v = y dx$ по этим циклам: $2A = \int_a v$, $2B = \int_b v$.

Страт $\mathcal{Q}_0(-7, 2, 1)$ появляется при слиянии двух нулей x_i . Пусть $x_2 = x_3$, так что $x_1 = -2x_2$. Тогда точка страта $\mathcal{Q}_0(-7, 2, 1)$ представляется дифференциалом вида

$$Q = (x + 2x_2)(x - x_2)^2(dx)^2. \quad (5.5)$$

Наконец, страт $\mathcal{Q}_0(-7, 3)$ содержит только одну точку и представляется квадратичным дифференциалом $Q = x^3(dx)^2$.

Система координат. Периоды (A, B) можно использовать как локальные координаты в пространстве $\mathcal{Q}_0(-7, [1]^3)$ в соответствии со следующей леммой.

ЛЕММА 1. *Якобиан перехода от (x_1, x_2) к (A, B) имеет вид*

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(x_1, x_2)} = 2\pi i \Delta_5^{1/2}, \quad (5.6)$$

где Δ_5 – модулярный дискриминант,

$$\Delta_5 = [(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)]^2. \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(x_1, x_2)} = \oint_a \frac{\partial v}{\partial x_1} \oint_b \frac{\partial v}{\partial x_2} - \oint_b \frac{\partial v}{\partial x_1} \oint_a \frac{\partial v}{\partial x_2}. \quad (5.8)$$

Чтобы вычислить этот определитель, мы заменим дифференциал $\partial v / \partial x_1$ на

$$w := \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} = -\frac{(2x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{2\sqrt{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}} dx, \quad (5.9)$$

определитель при этом не меняется. Теперь вычисление выражения (5.8) сводится к билинейным соотношениям Римана между голоморфным дифференциалом w и $\partial v / \partial x_2$, при этом единственный вклад дается вычетом в $x = \infty$. Его нетрудно найти, получаем (если использовать $t = 1/\sqrt{z}$ как локальный параметр в окрестности бесконечной точки)

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = \left(\frac{x_1 + 2x_2}{t^2} + \mathcal{O}(1) \right) dt, \quad w = ((2x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + \mathcal{O}(t)) dt,$$

что приводит к (5.6). Лемма доказана.

Канонический базис (a, b) определяется с точностью до преобразований из группы $SL(2, \mathbb{Z})$. Поэтому периоды $2A$, $2B$, как и периоды $2\omega_1 = \int_a v_0$, $2\omega_2 = \int_b v_0$ голоморфного дифференциала $v_0 = dx/y$, тоже определяются с точностью до действия группы $SL(2, \mathbb{Z})$.

Группа $SL(2, \mathbb{Z})$ действует на отношение $\kappa = B/A$ так же, как на период $\sigma = \omega_2/\omega_1$ эллиптической кривой $\mathcal{C}$. Но в отличие от σ , для которого всегда выполнено условие $\text{Im } \sigma > 0$ (в частности, ω_1 и ω_2 не могут одновременно быть вещественными), для κ такого условия не существует.

Сопоставляя период σ соответствующего канонического накрытия и дифференциал Q , мы получаем естественное расслоение пространства $\mathcal{Q}_0(-7, [1]^3)$ над модулярной кривой Ω . Слой можно отождествить с $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}_5$, поскольку $\mathbb{C}^*$ -действие $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, оставляет σ инвариантным, но при этом, вообще говоря, приводит в новую точку пространства $\mathcal{Q}_0(-7, [1]^3)$, если только λ не является корнем пятой степени из единицы, $\lambda^5 = 1$.

5.2. Вещественный срез пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$: кривые Бутру. Эллиптические кривые, соответствующие вещественным периодам дифференциала v , известны как кривые Бутру [26], [27].

Пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ представляет собой вещественный срез пространства $\mathcal{Q}_0(-7)$, где все слои содержатся в соответствующих слоях пространства $\mathcal{Q}_0(-7)$, и задается условием, что все периоды дифференциала $v = y dx$ на эллиптической кривой $v^2 = Q$ вещественны. Таким образом, стратификация этого пространства имеет вид

$$\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7) = \underbrace{\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, [1]^3)}_{\dim_{\mathbb{R}}=2} \sqcup \underbrace{\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, 2, 1)}_{\dim_{\mathbb{R}}=1} \sqcup \underbrace{\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, 3)}_{\dim_{\mathbb{R}}=0}. \quad (5.10)$$

Поскольку страт $\mathcal{Q}_0(-7, 3)$ состоит только из одной точки, $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, 3) = \mathcal{Q}_0(-7, 3)$.

Докажем для начала следующую лемму, описывающую конфигурацию точек ветвления кривых Бутру.

ЛЕММА 2 ($\mathbb{Z}_5$ - и $\mathbb{R}_+$ -ДЕЙСТВИЕ). *Предположим, что все периоды дифференциала $v = \sqrt{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} dx$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, вещественны. Тогда все периоды дифференциалов*

$$\sqrt{(x - e^{2i\pi k/5}x_1)(x - e^{2i\pi k/5}x_2)(x - e^{2i\pi k/5}x_3)} dx, \quad k = 1, \dots, 4, \quad (5.11)$$

и

$$\sqrt{(x - \lambda x_1)(x - \lambda x_2)(x - \lambda x_3)} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (5.12)$$

также вещественны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Под действием преобразования $x_i \mapsto \lambda e^{2i\pi k/5}x_i$, $i = 1, 2, 3$, периоды изменяются как $P \mapsto \lambda^{5/2}e^{i\pi k}P$. Следовательно, периоды умножаются на вещественное число и остаются вещественными.

ЛЕММА 3. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Если $Q \in \mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, [1]^3)$, то точки x_1 , x_2 и x_3 не лежат на одной прямой, проходящей через центр плоскости переменной x .

2. Если $Q \in \mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, 2, 1)$, то $\arg x_1$, $\arg x_2$ принимают значения из множества $\{2i\pi k/5, k = 0, \dots, 4\}$, а $\arg x_3 = \arg x_i + \pi$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Покажем, что условие, согласно которому все x_i лежат на одной прямой $e^{i\theta}\mathbb{R}$, несовместно с тем, что все периоды дифференциала v вещественны. Используя $\mathbb{R}_+$ -масштабирование, без потери общности можно предположить, что $x_1 = e^{i\theta}$, $x_2 = \lambda x_1$ и, следовательно, $x_3 = -(1 + \lambda)x_1$ при некотором $\lambda > 1$. Тогда периоды дифференциала v задаются интегралами

$$\oint_{\gamma} v = e^{5i\theta/2} \oint_{\gamma} \sqrt{(\tilde{x} - 1)(\tilde{x} - \lambda)(\tilde{x} + 1 + \lambda)} d\tilde{x}, \quad (5.13)$$

где γ – произвольный цикл, идущий вокруг точек ветвления 1, λ и $-1 - \lambda$ в плоскости переменной $\tilde{x}$. Интеграл в (5.13) по пути вокруг разреза $[1, \lambda]$ мнимый, а интеграл по пути вокруг отрезка $[-1 - \lambda, 1]$ вещественный. Поэтому не существует такого значения θ , что оба этих периода одновременно вещественны, если только некоторые точки ветвления не совпадают. Пусть они совпадают, скажем, $\lambda = 1$, тогда вещественность выражения $e^{5i\theta/2} \int_{-2}^1 (\tilde{x} - 1)\sqrt{(\tilde{x} + 2)} d\tilde{x}$ влечет $5\theta/2 = 0 \pmod{\pi}$, что доказывает п. 2 леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $Q \in \mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, 2, 1)$ таков, что его двойной ноль лежит на одном из лучей $e^{2i\pi k/5}\mathbb{R}_+$. Тогда для любой инфинитезимальной деформации дифференциала Q , сохраняющей условие Бутру, двойной ноль расщепляется на два нуля, лежащих по направлениям, образующим углы $\pm\pi/4$ с лучом $e^{2i\pi k/5}\mathbb{R}_+$; центральный ноль возникает по направлению $\pm 5\pi/4$, где угол отсчитывается от луча $e^{2i\pi k/5}\mathbb{R}_+$ в положительную сторону.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через x_2 , x_3 два простых нуля, возникающих из двойного нуля, а через A – период дифференциала v вдоль малого цикла, окружающего эти нули. Используя $\mathbb{Z}_5$ -действие (лемма 2), без потери общности можно предположить, что если $x_2 = x_3$, то $\arg x_2 = \arg x_3 = 2\pi/5$ и $\arg x_1 = 7\pi/5$. Чтобы

найти предел величины $\arg(x_3 - x_2)$ при $x_3 \rightarrow x_2$, поступим следующим образом. Пусть $x_3 = x_2 + \delta$ и $x_1 = -2x_2 - \delta$, где $x_2(\delta) = x_0 + \mathcal{O}(\delta)$ при некотором $x_0 = |x_0|e^{2\pi i/5}$. Тогда с точностью до высших порядков по δ

$$\begin{aligned} A &= \pm \int_{x_2}^{x_2+\delta} [(x - x_2)(x - x_2 - \delta)(x + 2x_2 + \delta)]^{1/2} dx \sim \\ &\sim \pm (3x_0)^{1/2} \int_{x_0}^{x_0+\delta} [(x - x_0)(x - x_0 - \delta)]^{1/2} dx = \pm (3x_0)^{1/2} \frac{i\pi}{8} \delta^2. \end{aligned}$$

Поскольку $A \in \mathbb{R}$ и $\arg(x_0) = 2\pi/5$, отсюда мы имеем (при $\delta \rightarrow 0$)

$$2 \arg \delta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} \rightarrow 0 \pmod{\pi},$$

следовательно, $\arg \delta \rightarrow 2\pi/5 \pm \pi/4$ при $\delta \rightarrow 0$. Это доказывает п. 1 леммы.

Для доказательства второго утверждения необходимо проанализировать критические траектории, выходящие из x_2, x_3 , при малых δ . Для этого положим

$$\zeta = e^{-2i\pi/5} \frac{x - |x_0|}{|\delta|}, \quad q(\zeta; |\delta|) = |\delta|^{-4} Q(x), \quad (5.14)$$

так что точки x_2, x_3 сопоставляются двум точкам в плоскости переменной ζ , находящимся на единичном расстоянии от начала координат, а точка x_1 сопоставляется точке, находящейся на расстоянии $\mathcal{O}(\delta^{-1})$ от начала координат (см. далее рис. 14). Тогда непосредственное вычисление дает

$$q(\zeta; |\delta|) = (|\delta|\zeta + 3r)(\zeta^2 - e^{2i \arg \delta - 4i\pi/5}) d\zeta^2. \quad (5.15)$$

Заметим, что q также является квадратичным дифференциалом с вещественными периодами, и структура его траектории имеет ту же топологию, что и в случае дифференциала Q (с точностью до аффинного преобразования). Луч $e^{2i\pi/5}\mathbb{R}_+$ сопоставляется действительной оси на плоскости переменной ζ . Теперь при $|\delta| \rightarrow 0$ (т. е. при $A \rightarrow 0$) мы получаем (равномерно по всем компактным множествам в плоскости переменной ζ)

$$\lim_{A \rightarrow 0+} q(\zeta; |\delta|) = 3r(\zeta^2 \pm i) d\zeta^2. \quad (5.16)$$

Рассмотрим случай знака плюс в правой части, случай знака минус рассматривается аналогично. Простой анализ структуры геодезических в метрике, заданной модулем квадратичного дифференциала (5.16), показывает, что траектория, которая ведет к $\operatorname{Re} \zeta = -\infty$, выходит из $e^{5i\pi/4}$ (см. рис. 14 ниже). Таким образом, центральный ноль x_2 – это тот ноль, который сопоставляется $e^{5i\pi/4}$. Лемма доказана.

Вещественность периодов дифференциала v на $\hat{\mathcal{C}}$ позволяет соединить точки x_1, x_2 и x_3 двумя горизонтальными траекториями дифференциала v . Тогда один из нулей (скажем, x_2) соединяется с x_1 и x_3 . Два других нуля x_3 и x_1 нумеруются в соответствии со значениями своих аргументов: двигаясь против часовой стрелки вокруг начала координат, мы полагаем $\arg x_2 < \arg x_3 < \arg x_1$.

Все периоды дифференциала v вещественны. С учетом замечания 1 можно задать v так, что оба интеграла

$$A = \int_{x_2}^{x_3} v, \quad B = \int_{x_2}^{x_1} v \quad (5.17)$$

положительны; здесь контуры интегрирования проходят по горизонтальным траекториям дифференциала v и отвечают $a/2$ и $b/2$ в группе гомологий. Следовательно, A и B являются длинами горизонтальных геодезических, соединяющих x_2 с x_3 и x_1 соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В выражениях (3.5) дифференциал выбирается так, чтобы было выполнено условие $A + B = 1$. Это требование всегда можно удовлетворить, применяя $\mathbb{R}_+$ -масштабирование согласно лемме 2.

Плоская координата $z(x)$ на $\widehat{C}$ задается как интеграл от v с начальной точкой x_2 ,

$$z(x) = \int_{x_2}^x v, \quad (5.18)$$

где разрез проходит по объединению траекторий $[x_2, \infty)$, $[x_1, x_2]$ и $[x_2, x_3]$.

Следующая теорема является аналогом теоремы Штребеля, позволяющей восстановить риманову поверхность с проколами, зная длины ребер и топологию соответствующего ленточного графа.

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место следующие утверждения.*

1. Упорядоченная пара длин (A, B) (5.17) определяет взаимно однозначное отображение пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, [1]^3)$ в $\mathbb{R}_+^2$.

2. Диагональ $A = B$ соответствует кривым Бутру с антиголоморфной инволюцией (локус Бутру–Кричевера). С помощью $\mathbb{Z}_5$ -действия из леммы 2 центральный ноль x_2 можно всегда сделать вещественным и положительным, в то время как остальные нули всегда можно считать комплексно сопряженными: $x_1 = \bar{x}_3$.

3. Границы $A = 0$ и $B = 0$, будучи отождествленными, соответствуют точкам пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, 2, 1)$. Оставшаяся ненулевая длина параметризует пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, 2, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Якобиан $\partial(A, B)/\partial(x, y)$ координат (A, B) , заданных формулой (5.17), никогда не равен нулю в силу (5.6). Однако этого недостаточно, чтобы доказать, что данная функция двух переменных глобально взаимно однозначна. Чтобы доказать обратимость, нам нужно восстановить тройку (x_1, x_2, x_3) единственным образом (с точностью до $\mathbb{Z}_5$ -действия) по известным периодам A и B (5.17). Зная длины A и B критического графа, мы строим полиэдральную поверхность (т. е. поверхность с плоской метрикой и коническими особенностями) путем склеивания пяти полуплоскостей, как показано на рис. 5. Это однозначно определяет конформную структуру, т. е. J -инвариант накрытия $\widehat{C}$. Кроме того, поскольку мы считаем ноль x_2 центральным и однозначно нумеруем остальные нули x_1 и x_3 , можно выбрать пару различных канонических a - и b -циклов, предполагая, что a окружает критическую траекторию, соединяющую x_2 и x_3 . Далее зафиксируем направление a -цикла так, что $A = \frac{1}{2} \int_a v$. Тогда b -цикл окружает критическую траекторию, соединяющую x_2 и x_1 , и имеет надлежащую ориентацию. Это определяет период σ кривой $\widehat{C}$, отвечающей такой выбранной маркировке Торелли. В свою очередь, это позволяет выразить отношение между точками x_i а терминах соответствующих те-та-констант по формуле Томэ. Это отношение обозначим через t :

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = t. \quad (5.19)$$

Вводя новую переменную $\tilde{x} = (x - x_1)/(x_3 - x_1)$, мы можем переписать первое из равенств (5.17) как

$$(x_3 - x_1)^{5/2} \int_t^1 \sqrt{\tilde{x}(\tilde{x} - 1)(\tilde{x} - t)} d\tilde{x} = A, \quad (5.20)$$

откуда вытекает связь между x_1 и x_3 :

$$x_3 - x_1 = \left[\frac{A}{\int_t^1 \sqrt{\tilde{x}(\tilde{x} - 1)(\tilde{x} - t)} d\tilde{x}} \right]^{2/5}, \quad (5.21)$$

где правая часть известна с точностью до множителя $e^{4\pi i/5}$. Это позволяет сделать вывод о том, что система линейных уравнений (5.19), (5.21) и $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ определяет все x_i однозначно с точностью до $\mathbb{Z}_5$ -действия. Таким образом доказано, что отображение периодов задает изоморфизм между пространством $\widehat{\mathcal{Q}}_0^{\mathbb{R}}(-7, [1]^3)$ и первым квадрантом на плоскости (A, B) .

2. Пусть $A = B$. Тогда эллиптическая кривая $\mathcal{C}$ допускает антиголоморфную инволюцию τ , действующую по правилу $z \rightarrow \bar{z}$ в терминах плоской координаты z . При этом дифференциал $v = dz$ удовлетворяет соотношению $\overline{v(x^\tau)} = v(x)$. Инволюция τ должна действовать на плоскости переменной x как отражение относительно прямой, проходящей через начало координат (поскольку $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, кроме того, точка $x = \infty$ должна оставаться неподвижной при действии τ). Таким образом, τ должна переставлять x_1 и x_3 , оставляя x_2 неподвижным (все x_i не могут быть инвариантными относительно этой инволюции, так как они не лежат на одной прямой в соответствии с леммой 3, п. 1).

Следовательно, существует вещественное число θ такое, что $x_i = e^{i\theta} \bar{x}_i$, в то время как $\bar{x}'_1 = x'_3$ и $x'_2 \in \mathbb{R}$. Делая замену переменных $x = e^{i\theta} x'$, мы видим, что τ действует на x' по правилу $x'^\tau = \bar{x}'$, следовательно, $\tau(x) = e^{-2i\theta} \bar{x}$. Тогда

$$Q(x) = (x - e^{i\theta} x'_1)(x - e^{i\theta} \bar{x}'_1)(x - e^{i\theta} x'_2)(dx)^2$$

и $\overline{Q(x^\tau)} = e^{10i\theta} Q(x)$. Поскольку мы предположили, что не только дифференциал Q , но и $v = dz = \sqrt{Q}$ удовлетворяют уравнению $\overline{v(x^\tau)} = v(x)$, значение 5θ должно быть кратным 2π . Кроме того, в силу предположения, что для невырожденных кривых $0 \leq \arg x_2 < 2\pi/5$, мы заключаем, что $x_2 \in \mathbb{R}_+$ и $x_3 = \bar{x}_1$.

3. Рассмотрим точку пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, 2, 1)$, где, например, $x_2 = x_3 = re^{2i\pi/5}$ и $x_1 = -2re^{2i\pi/5}$. Тогда можно найти в явном виде оставшийся ненулевой период B :

$$B = \left| \int_{x_2}^{x_1} (x - re^{2i\pi/5}) \sqrt{x - 2re^{-3i\pi/5}} dx \right| = \left| \int_{-2r}^r (r - z) \sqrt{z + 2r} dz \right| = \frac{12\sqrt{3}}{5} r^{5/2}.$$

Это показывает, что период $B \in \mathbb{R}_+$ является глобальной координатой пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7, 2, 1)$. Теорема доказана.

J -инвариант кривых Бутру лежит на кривой $\mathcal{R}_1$, результат численного расчета которой показан на рис. 11б. Точка пересечения $\mathcal{R}_1$ с вещественной осью переменной J отвечает единственной кривой, которая одновременно является вещественной (т.е. допускает антиголоморфную инволюцию) и кривой Бутру. Для этой кривой

Рис. 11. Пространство кривых Бутру $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ расслоено со слоем $\mathbb{R}_+$ над штриховой кривой $\mathcal{R}_1$ в пространстве модулей эллиптических кривых (а). Множество $\mathcal{R}_1$ на плоскости J -инварианта (б); точка $J = 1728$ соответствует значению $\sigma = i$, а точка $J = 0$ – значению $\sigma = e^{2\pi i/3}$.

(известной как кривая Бутру–Кричевера [23]) значение J -инварианта приблизительно равно 940.34. Значения x_i , отвечающие этой кривой, таковы:

$$x_1 \simeq -1 - 6.492i, \quad x_2 = 2, \quad x_3 \simeq -1 + 6.492i$$

(или любые кратные этим величинами с произвольным положительным множителем). Множество $\mathcal{R}_1$ в плоскости периодов σ кривой $\mathcal{C}$ показано на рис. 11а.

Обсудим, какие конфигурации нулей (x_1, x_2, x_3) отвечают заданной паре периодов (A, B) . Следующее предложение является обратным к некоторым утверждениям леммы 3 и теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что все периоды дифференциала*

$$v = \sqrt{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} dx, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

вещественны. Тогда один из корней x_i принадлежит одному из лучей $e^{2i\pi k/5}\mathbb{R}_+$, если и только если выполнено одно из двух условий:

- 1) либо x_i – двойной корень (т. е. кривая является вырожденной);
- 2) либо кривая является невырожденной и допускает антиголоморфную инволюцию, меняющую местами два других корня, т. е. $\hat{\mathcal{C}}$ – кривая Бутру–Кричевера из п. 2 теоремы 1; в этом случае x_i – центральный ноль, который мы обозначаем через x_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что кривая $\hat{\mathcal{C}}$ является кривой Бутру–Кричевера. Тогда в соответствии с п. 2 теоремы 1 центральный ноль принадлежит одному из лучей $e^{2i\pi k/5}\mathbb{R}_+$. Предположим, что кривая вырожденна, и запишем

дифференциал как $v = (x - x_2)\sqrt{x + 2x_2} dx$. Тогда прямой расчет дает

$$\int_{x_2}^{-2x_2} v = \frac{12\sqrt{3}}{5} x_2^{5/2},$$

и правая часть равенства является вещественной, если и только если x_2 принадлежит одному из лучей.

Используя $\mathbb{Z}_5$ -действие и $\mathbb{R}_+$ -масштабирование из леммы 2, мы можем считать, что интересующий нас корень $x_j = 2$. Тогда два других корня (так как сумма равна нулю) должны иметь вид $-1 \pm \rho$ при некотором $\rho \in \mathbb{C}$. Перепишем дифференциал как

$$v = \sqrt{(x - 2)(x + 1 + \rho)(x + 1 - \rho)} dx.$$

Кривая является вырожденной, если $\rho = 0$ или $\rho = \pm 3$. Случай $\rho = 0$ исключается, так как тогда периоды не являются вещественными. В обоих случаях $\rho = \pm 3$ периоды вещественны.

Пусть теперь кривая невырожденна, покажем, что $\rho \in i\mathbb{R}$, откуда также будет следовать, что $x_j = x_2 = 2$ есть центральный корень.

Чтобы узнать, для каких значений $\rho \neq 0$, $\rho \neq \pm 3$ оба периода вещественны, рассмотрим интегралы

$$A_{\pm}(\rho) = \int_2^{-1 \pm \rho} v dx, \quad (5.22)$$

такие что $A_-(\rho) = A_+(-\rho)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в верхней полуплоскости существует единственное решение системы

$$\operatorname{Im} A_+(\rho) = \operatorname{Im} A_-(\rho) = 0 \quad (5.23)$$

и это решение лежит на оси $\operatorname{Re} \rho = 0$. При этом функции $A_+(\rho)$ и $A_-(\rho)$ аналитичны в областях $\mathcal{D}_+ = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и $\mathcal{D}_- = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ соответственно, и обе эти функции удовлетворяют условию симметрии Шварца: $\overline{A_{\pm}(\bar{\rho})} = A_{\pm}(\rho)$. Логика дальнейшего доказательства такова.

1. Рассмотрим кривую (возможно, состоящую из нескольких компонент), заданную уравнением $\Phi = 0$, где $\Phi = \operatorname{Im} A_+(\rho)$; решения системы (5.23) лежат на пересечении двух кривых $\{\Phi = 0\}$ и $-\{\Phi = 0\}$. С учетом условия симметрии Шварца для функций $A_{\pm}(\rho)$ достаточно проанализировать верхнюю полуплоскость.

2. Ограничившись верхней полуплоскостью, покажем, что множество $\Phi = 0$ содержится в объединении двух секторов $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}_L$:

$$\{\rho: \Phi(\rho) = 0\} \subset \underbrace{\left\{ \arg(\rho - 3) \in \left[\frac{3\pi}{5}, \frac{3\pi}{4} \right] \right\}}_{\mathcal{S}_L} \cup \underbrace{\left\{ \arg(\rho - 3) \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \right\}}_{\mathcal{S}_R} \quad (5.24)$$

(на рис. 12 эти сектора закрашены), и каждый из двух секторов содержит ровно одну гладкую ветвь кривой $\Phi = 0$, начинающуюся из точки $\rho = 3$.

3. Поскольку

$$\mathcal{S}_L \cap (-\overline{\mathcal{S}_L}) = \emptyset = \mathcal{S}_R \cap (-\overline{\mathcal{S}_L}) = (-\overline{\mathcal{S}_R}) \cap \mathcal{S}_L,$$

Рис. 12. Множества нулевого уровня функций $\text{Im}(A_+(\rho))$ (жирные линии) и $\text{Im}(A_-(\rho))$ (тонкие линии), рассчитанные численно.

все решения уравнений (5.23) должны лежать в области $\mathcal{S}_L \cap (-\overline{\mathcal{S}_L})$ (ромбовидной области на рис. 12).

4. Покажем, что существует только одна точка пересечения кривой $\Phi = 0$ с положительной мнимой осью и эта точка лежит внутри ромбовидной области.

5. Наконец, докажем, что внутри области $\mathcal{S}_L$ ветвь кривой $\Phi = 0$ есть функция от $y = \text{Im } \rho$, для чего покажем, что никакая касательная к слоям $\Phi = \text{const}$ не может быть горизонтальной в $\mathcal{S}_L$. Вместе с предыдущим пунктом это сразу влечет единственность решения уравнений (5.23).

Теперь обсудим эти пункты более подробно. Пункт 1 очевиден. Рассмотрим п. 2. Параметризуя интеграл $A_+(\rho)$ переменной $s \in [0, 1]$ такой, что $x = 2 + (\rho - 3)\frac{1-s}{1+s}$, получаем для него два выражения:

$$A_+(\rho) = i(\rho - 3)^2 \int_0^1 \sqrt{\rho + 3s} \frac{\sqrt{s(1-s^2)}}{(1+s)^4} ds, \quad (5.25)$$

$$A_+(\rho) = i(\rho - 3)^{5/2} \int_0^1 \sqrt{1 + 3\frac{s+1}{\rho-3}} \frac{\sqrt{s(1-s^2)}}{(1+s)^4} ds. \quad (5.26)$$

Из представления (5.26) мы видим, что при $|\rho| \rightarrow +\infty$ четыре ветви имеют углы наклона $\pm\pi/5, \pm 3\pi/5$. Кроме того, существует пятая ветвь, состоящая из луча $\rho \in (-\infty, -3]$ (интеграл является чисто мнимым, следовательно, выражение (5.26) вещественное), но эта пятая ветвь не играет никакой роли в наших рассуждениях. Представление (5.26) также полезно при анализе аргумента функции A_+ в конечной области; с этой целью рассмотрим этот аргумент при $\text{Im } \rho > 0$. Имеем

$$\arg(A_+(\rho)) = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2} \arg(\rho - 3) + \arg\left(\int_0^1 \sqrt{1 + 3\frac{s+1}{\rho-3}} \frac{\sqrt{s(1-s^2)}}{(1+s)^4} ds\right). \quad (5.27)$$

Теперь изучим, где аргумент функции A_+ может равняться 0 или π ; если последнее слагаемое в правой части равенства (5.27) отсутствует, то множество $\Phi = 0$ будет

просто состоять из лучей $\arg(\rho - 3) \in \{3\pi/5, \pi/5\}$. Учитывая, что интегралы по положительным мерам сохраняют конусы, мы имеем приблизительную оценку, что последнее слагаемое в (5.27) принадлежит интервалу $(-\frac{\arg(\rho-3)}{2}, 0)$. Из соотношения (5.27) и этой оценки получаем

$$\frac{\pi}{2} + 2 \arg(\rho - 3) < \arg A_+(\rho) < \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2} \arg(\rho - 3). \quad (5.28)$$

Чтобы описать секторы $\mathcal{S}_R$ и $\mathcal{S}_L$, нужно проверить, что в дополнение к этим секторам аргумент функции $A_+(\rho)$ не может быть равен 0 или π . Например, в секторе $\arg(\rho - 3) \in [\pi/4, 3\pi/5]$, лежащем между $\mathcal{S}_L$ и $\mathcal{S}_R$, из неравенства (5.28) мы получаем, что $\pi < \arg A_+ < 2\pi$ и, следовательно, значения функции A_+ в этом секторе не могут быть вещественными. Аналогично, в секторе $\arg(\rho - 3) \in [3\pi/4, \pi]$ имеем $2\pi < \arg A_+ < 3\pi$, следовательно, функция A_+ и в этом секторе не может принимать вещественные значения.

Итак, кривая $\Phi = 0$, т.е. множество, где $\arg A_+(\rho) \in \{0, \pi\}$, лежит в объединении секторов $\mathcal{S}_L$ и $\mathcal{S}_R$ (5.24) (см. рис. 12). Кроме того, в каждом из двух секторов существует ровно одна ветвь кривой $\Phi = 0$, которая проходит от $\rho = 3$ до бесконечности. Это утверждение справедливо в силу того, что множества уровней гармонических функций не могут образовывать ограниченные кривые, если они не окружают особенность; при этом функция $A_+(\rho)$ является гармонической во всей верхней полуплоскости. Кроме того, из выражения (5.25) в окрестности $\rho = 3$ видно, что существуют четыре ветви кривой $\Phi = 0$, исходящие из точки $\rho = 3$, углы наклона которых равны $\pm\pi/4 \pm \pi$. Это доказывает п. 2 нашего плана и, как следствие, п. 3.

Таким образом, все решения системы (5.23) принадлежат ромбовидной области пересечения $(-\overline{\mathcal{S}_L}) \cap \mathcal{S}_L$ (см. рис. 12), лежащей в полуплоскости $\text{Im } \rho \geq 3$.

4. Покажем, что множество $\Phi = 0$ при $\text{Im } \rho > 3$ пересекается с мнимой ось $i\mathbb{R}_+$ переменной ρ в единственной точке $\rho = i\rho_*$. Это означает, что при $\text{Im } \rho < \rho_*$ множество $\Phi = 0$ целиком лежит в правой полуплоскости, в то время как ветвь в $\mathcal{S}_L$ при $\text{Im } \rho > \rho_*$ целиком лежит в левой полуплоскости. Другими словами, интересующая нас ветвь не пересекает луч $i\mathbb{R}_+$ зигзагами несколько раз.

Запишем $A_+(iy)$ в более явном виде: мы имеем $\Phi(iy) = \text{Im } A_+(iy)$ и

$$A_+(iy) = -i(iy - 3)^2 \int_0^1 \sqrt{3s + iy} d\mu(s), \quad d\mu(s) = \frac{\sqrt{s(1-s^2)}}{(1+s)^4} ds.$$

Тогда

$$\Phi(3i) = \text{Im} \left(-9i(i-1)^2 \int_0^1 \sqrt{3s + 3i} d\mu(s) \right) = -18 \int_0^1 \text{Im} \sqrt{3s + 3i} d\mu(s) < 0$$

(при этом $\Phi(3i) \simeq -2.2438$). Далее, при $y \rightarrow +\infty$ имеем

$$\Phi(iy) \sim y^{5/2} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 d\mu(s) \rightarrow +\infty,$$

так что при $y \in [3, +\infty)$ существует хотя бы одно решение $\Phi(iy) = 0$.

Чтобы показать единственность этого решения, предположим, что существует несколько решений уравнений (5.23), лежащих на мнимой оси; в каждой из этих

точек оба интеграла $A_{\pm}$ вещественны. Тогда для каждой из этих точек мы имеем $A = B$, и каждая порождает некоторую кривую Бутру–Кричевера. Но из теоремы 1, п. 2, мы знаем, что кривая Бутру–Кричевера единственна (с точностью до изменения масштаба, которое уже использовалось для фиксации центрального корня в п. 2). Таким образом, приходим к противоречию.

5. Изучим углы наклона векторов, касательных к кривым уровня, и покажем, что касательная не может быть горизонтальной. Другими словами, здесь мы покажем, что в области S_L аргумент производной $dA_+/d\rho$ никогда не равен 0 или π . Для этого в секторе $S_L = \{\arg(\rho - 3) \in [3\pi/5, 3\pi/4]\}$ проанализируем аргумент выражения

$$\begin{aligned} \frac{dA_+(\rho)}{d\rho} &= \oint \frac{dv}{d\rho} dz = i\rho(\rho - 3) \int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{t(1-t^2)(\rho + 3\frac{1-t}{t+1})}} = \\ &= -i\rho(\rho - 3) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\rho + 3s}} \frac{(1-s) ds}{(s+1)\sqrt{s(1-s^2)}}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Чтобы определить угол наклона кривой $\Phi = 0$, рассмотрим $\arg(dA_+/d\rho)$ по модулю π (т.е. с точностью до знака). Опять же используем тот факт, что интеграл по положительной мере сохраняет конусы: заметим, что для всех $s \in [0, 1]$, $\rho \in S_L$ выполняются следующие неравенства:

$$\arg(\rho + 3) < \arg(\rho + 3s) < \arg \rho < \arg(\rho - 3) \Rightarrow -\arg \rho < -\arg(\rho + 3s) < -\arg(\rho + 3).$$

Отсюда

$$-\frac{\arg \rho}{2} < \arg \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\rho + 3s}} \frac{(1-s) ds}{(s+1)\sqrt{s(1-s^2)}} \right) < -\frac{\arg(\rho + 3)}{2}.$$

Учитывая формулу (5.29) и приведенные выше оценки, находим ограничение снизу:

$$\arg \frac{dA_+}{d\rho} > -\frac{\pi}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} \arg \rho}_{\geq 0} + \underbrace{\arg(\rho - 3)}_{\geq 3\pi/5} \geq \frac{\pi}{10}.$$

Аналогично можно получить ограничение сверху:

$$\arg \frac{dA_+}{d\rho} < -\frac{\pi}{2} + \underbrace{\arg \rho}_{< \arg(\rho - 3)} - \underbrace{\frac{\arg(\rho + 3)}{2}}_{< 0} + \arg(\rho - 3) < -\frac{\pi}{2} + 2 \underbrace{\arg(\rho - 3)}_{\leq 3\pi/4} \leq \pi.$$

Конус $\frac{\pi}{10} < \arg \frac{dA_+}{d\rho} < \pi$ не содержит вещественной оси, следовательно, касательные наших кривых уровня не могут быть горизонтальными. Таким образом, мы можем параметризовать кривые уровня $\Phi = 0$ в секторе S_L значением мнимой части. Пункт 5 нашего плана и предложение в целом доказаны.

Теперь предположим, что $A \leq B$, противоположный случай можно рассмотреть, используя симметрию. Применяя $\mathbb{Z}_5$ -действие (см. лемму 2), сделаем так, что центральный ноль x_2 лежит в секторе $S_2 = \{0 \leq \arg x_2 < 2\pi/5\}$. Следующая лемма описывает диапазон аргументов нулей x_1 и x_3 при таком предположении.

Рис. 13. Секторы S_1 , S_2 и S_3 .

ЛЕММА 5. Пусть для центрального нуля x_2 выполнено неравенство

$$0 \leq \arg x_2 < \frac{2\pi}{5}, \quad (5.30)$$

а нули x_1 и x_3 пронумерованы так, что $A < B$ (т.е. расстояние по метрике $|Q|$ от x_2 до x_1 больше расстояния от x_2 до x_3). Тогда нули x_1 и x_3 лежат в секторах S_1 и S_3 (см. рис. 13),

$$S_1 = \left\{ \frac{6\pi}{5} \leq \arg x_1 \leq \frac{8\pi}{5} \right\}, \quad S_3 = \left\{ \frac{2\pi}{5} \leq \arg x_3 \leq \frac{4\pi}{5} \right\}. \quad (5.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО использует непрерывность аргумента и предложение 1. Применяя масштабирование с помощью $\mathbb{R}_+$ -действия, всюду в этой лемме мы считаем без потери общности, что $A + B = 1$.

Пусть $A = 0$, $B = 1$, тогда из предложения 1 следует, что ноль $x_3 = x_2$ лежит на одном из лучей $e^{2i\pi k/5}\mathbb{R}_+$. Используя $\mathbb{Z}_5$ -действие, мы можем положить $k = 1$. По мере возрастания величины A корни $x_2 = x_3$ расходятся по направлению, которое найдено в лемме 4 и из которой следует, что эти корни движутся в двух смежных секторах. Рассмотрим случай, когда центральный ноль x_2 движется в секторе $(0, 2\pi/5)$; это отвечает знаку минус в правой части равенства (5.16) (другой случай соответствует другой клетке).

Известно, что при малых A корни x_i лежат в соответствующих секторах S_i , $i = 1, 2, 3$, как на рис. 13. Однако из предложения 1 мы знаем, что никакой из нулей по мере возрастания величины A (напомним, $A + B = 1$) не может пересечь луч $e^{2i\pi k/5}\mathbb{R}_+$, если только он не является центральным нулем (что возможно только при $A = B$), или если кривая вырождается (когда $A = 0$ или $B = 0$). Таким образом, корни x_i , $i = 1, 2, 3$, с необходимостью остаются в указанных секторах. Лемма доказана.

5.3. Вариация величины $\arg \Delta_5$ на $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$. Целью данного пункта является изучение вариации аргумента модулярного дискриминанта Δ_5 (5.7) на пространстве модулей $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$.

Аргумент дискриминанта Δ_5 не изменяется при одновременном умножении всех значений x_i на положительную вещественную постоянную. Следовательно, $\arg \Delta_5$

постоянен вдоль любого луча, исходящего из начала координат в первом квадранте плоскости (A, B) . В частности, $\arg \Delta_5$ постоянен на каждом из лучей $A = 0$, $B = 0$ и $A = B$.

ЛЕММА 6. Пусть, как и выше, аргумент центрального нуля x_2 лежит между 0 и $2\pi/5$. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Аргументы разностей $x_i - x_j$ при $A \rightarrow 0$ ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} \arg(x_3 - x_2) &\rightarrow \frac{13\pi}{20}, & \arg(x_3 - x_1) &\rightarrow \frac{2\pi}{5}, & \arg(x_2 - x_1) &\rightarrow \frac{2\pi}{5}, \\ \arg \Delta_5 &\rightarrow \frac{29\pi}{10}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

2. При $A = B$ мы имеем

$$\begin{aligned} \arg(x_3 - x_2) &= \pi - \alpha, & \arg(x_3 - x_1) &= \frac{\pi}{2}, & \arg(x_2 - x_1) &= \alpha, \\ \arg \Delta_5 &= 3\pi, \end{aligned} \quad (5.33)$$

где α – угол, который образует прямая, соединяющая точки x_2 и x_3 с горизонтальной осью ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$).

3. Аргументы разностей $x_i - x_j$ при $B \rightarrow 0$ ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} \arg(x_3 - x_2) &\rightarrow \frac{3\pi}{5}, & \arg(x_3 - x_1) &\rightarrow \frac{3\pi}{5}, & \arg(x_2 - x_1) &\rightarrow \frac{7\pi}{20}, \\ \arg \Delta_5 &\rightarrow \frac{31\pi}{10}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пределы (5.33) тривиальны: они вытекают из симметрии $x_1 = \bar{x}_3$ при $A = B$ и условия $x_2 \in \mathbb{R}$; это доказывает п. 2.

Рассмотрим пределы (5.32), возникающие при $A \rightarrow 0$, когда $x_2 \rightarrow x_3$. При $x_2 = x_3$ мы имеем $\arg x_2 = \arg x_3 = 2\pi/5$ и $\arg x_1 = 7\pi/5$. Поскольку все x_i лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, в данном случае $\arg(x_i - x_1) = 2\pi/5$ для $i = 2, 3$.

Углы между касательными к траекториям точек x_2, x_3 , возникающие при разделении двойного нуля, рассчитаны в лемме 4: из нее следует, что при $x_3 \rightarrow x_2$ мы имеем

$$\lim_{A \rightarrow 0} \arg(x_3 - x_2) = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{20}, \quad \lim_{A \rightarrow 0} \arg(x_3 - x_1) = \lim_{A \rightarrow 0} \arg(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{5},$$

следовательно,

$$\arg \Delta_5 = \lim_{A \rightarrow 0} 2 \arg((x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)) = \frac{13\pi}{10} + \frac{8\pi}{5} = \frac{29\pi}{10}.$$

Доказательство соотношений (5.34) аналогично. Лемма доказана.

Теперь мы можем сформулировать первый основной аналитический результат.

ТЕОРЕМА 2. Вариация величины $\phi_5 = \arg \Delta_5$ в пространстве $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ при переходе от границы $B = 0$ к границе $A = 0$ равна $\pi/5$. Другими словами, монодромия величины ϕ_5 при обходе точки $Q = x^3 dx$ в пространстве $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(-7)$ равна $\pi/5$.

Рис. 14. Движение корней $\{x_i\}$, когда точка (A, B) пересекает клетку, двигаясь из точки $(0, 1)$ в точку $(1, 0)$ по прямой $A + B = 1$. На врезке показан угол, под которым x_1 и x_3 приближаются к лучу $\arg x = 2\pi/5$ при $(A, B) \rightarrow (0, 1)$. Лучи ϖ_k отвечают $\arg x = 2\pi k/5$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Доказательство теоремы почти немедленно следует из леммы 6. Чтобы показать, что при вычислении вариации не возникает дополнительного вклада, кратного 2π , достаточно заметить, что с учетом положения нулей x_1 и x_3 , если $\arg x_2$ лежит между 0 и $2\pi/5$ (см. рис. (13)), выполнены неравенства

$$\frac{\pi}{5} \leq \arg(x_3 - x_1) \leq \frac{4\pi}{5}, \quad \frac{2\pi}{5} \leq \arg(x_3 - x_2) \leq \pi, \quad 0 \leq \arg(x_2 - x_1) \leq \frac{3\pi}{5},$$

которые подтверждают, что вариация величины $\arg \Delta_5$ между осью $A = 0$ и диагональю $A = B$ в самом деле равна $\pi/10$. Таким образом, вариация величины $\arg \Delta_5$ между осями $A = 0$ и $B = 0$ равна $\pi/5$. Теорема доказана.

Заметим, что путь в теореме 2 ориентирован положительно по отношению к форме объема $dA \wedge dB$; выбор этой симплектической формы является естественным в том смысле, что он соответствует индексу пересечения на пространстве H_- , заданном в (2.1).

6. АРГУМЕНТЫ ВЕЛИЧИН $\Delta_{1,1}^{\pm}$ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$

В этом разделе мы изучаем пространство $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$, которое представляет собой локальную модель границы Концевича $W_{1,1}$ комбинаторной модели Штребеля пространства $\mathcal{M}_{g,n}$. Мы находим монодромии аргументов величин

$$\Delta_{1,1}^+ = x_1^6 x_2^6 (x_1 - x_2)^2, \quad \Delta_{1,1}^- = x_1^6 x_2^6 (x_1 - x_2)^{26}, \quad (6.1)$$

являющихся естественными аналогами модулярного дискриминанта в $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$. Мотивацией для изучения этих выражений послужила теория тау-функций Бергмана $\tau_{\pm}$ в пространстве квадратичных дифференциалов [21], [18].

6.1. Пространство $\mathcal{Q}_0([-3]^2)$. Элементами пространства $\mathcal{Q}_0([-3]^2)$ являются квадратичные дифференциалы Q на сфере Римана с двумя полюсами третьего порядка. Комплексная размерность пространства $\mathcal{Q}_0([-3]^2)$ равна 2, и его стратификация имеет следующий вид:

$$\mathcal{Q}_0([-3]^2) = \mathcal{Q}_0([-3]^2, [1]^2) \sqcup \mathcal{Q}_0([-3]^2, 2). \quad (6.2)$$

Используя преобразование Мёбиуса, мы можем считать, что полюсы расположены в точках $x = 0$ и $x = \infty$; домножение дифференциала Q на константу позволяет представить его как

$$Q = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x^3} (dx)^2, \quad x_1 \neq x_2, \quad (6.3)$$

где x_1, x_2 — два комплексных параметра.

Таким образом, мы можем провести следующее отождествление пространств:

$$\mathcal{Q}_0([-3]^2, [1]^2) \simeq \{(x_1, x_2) \in (\mathbb{C}^*)^2: x_1 \neq x_2\} / S_2. \quad (6.4)$$

Введем для каждого $Q \in \mathcal{Q}_0([-3]^2, [1]^2)$ каноническое накрытие $\widehat{\mathcal{C}}$, заданное уравнением $v^2 = Q$; оно представляет собой эллиптическую кривую $y^2 = x(x - x_1)(x - x_2)$, снабженную мероморфным дифференциалом

$$v = \sqrt{\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x^3}} dx, \quad (6.5)$$

который имеет нули второго порядка на $\widehat{\mathcal{C}}$ в точках x_1, x_2 и полюсы второго порядка в $x = 0$ и $x = \infty$.

Выбирая два канонических цикла (a, b) на $\widehat{\mathcal{C}}$ и интегрируя по ним дифференциал v , мы получаем периоды A и B , которые, как обычно, заданы с точностью до преобразования из группы $SL(2, \mathbb{Z})$.

Следующая лемма показывает, что периоды (A, B) можно использовать как локальные координаты в пространстве $\mathcal{Q}_0([1]^2, [-3]^2)$.

ЛЕММА 7. *Якобиан перехода от (x_1, x_2) к (A, B) задается формулой*

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(x_1, x_2)} = \pm 2\pi i \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}. \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству формулы (5.6). А именно, чтобы найти определитель

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(x_1, x_2)} = \oint_a \frac{\partial v}{\partial x_1} \oint_b \frac{\partial v}{\partial x_2} - \oint_b \frac{\partial v}{\partial x_1} \oint_a \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad (6.7)$$

где

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^{3/2}} \left(\frac{x - x_2}{x - x_1} \right)^{1/2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^{3/2}} \left(\frac{x - x_1}{x - x_2} \right)^{1/2}, \quad (6.8)$$

заменим $\partial v / \partial x_1$ голоморфным дифференциалом

$$w = \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{b}{a} \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1}{2x_1} \frac{dx}{[x(x - x_1)(x - x_2)]^{1/2}} \quad (6.9)$$

(это преобразование не меняет определитель). Тогда равенство (6.7) можно получить, применяя билинейные соотношения Римана к голоморфному дифференциалу w и мероморфному дифференциалу $\partial v / \partial x_2$, который имеет полюс второго порядка в $x = 0$. Найдем вычет функции $(\int^x w) \frac{\partial v}{\partial x_2}$ в точке $x = 0$ в терминах локального параметра $\sqrt{x}$, отсюда получим $(x_1 x_2)^{-1} (x_1 - x_2)$ и в результате придем к (6.6).

6.2. Вещественный срез $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$: кривые Бутру. Пусть $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ – пространство кривых Бутру, т. е. срез пространства $\mathcal{Q}_0([-3]^2)$, в котором все периоды дифференциала $v = \sqrt{Q}$ являются вещественными. Стратификация пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ задается как

$$\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2) = \mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2, [1]^2) \cup \mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2, 2),$$

где страт $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([1]^2, [-3]^2)$ имеет вещественную размерность 2, а страт $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(2, [-3]^2)$ имеет вещественную размерность 1 и отвечает дифференциалам $v = x^{-3/2} (x - x_1) dx$, у которых период $\int_{x_1^{(1)}}^{x_1^{(2)}} v = 8x_1^{1/2}$ веществен (здесь $x_1^{(1)}$ и $x_1^{(2)}$ – точки, лежащие на различных листах римановой поверхности функции $x^{1/2}$, проекции которых на плоскость переменной x совпадают с точкой x_1), т. е. $x_1 \in \mathbb{R}_+$.

Для определения периодов дифференциала v рассмотрим его горизонтальные траектории, которые имеют вид, показанный на рис. 7: две горизонтальные геодезические всегда соединяют x_1 и x_2 , в то время как две другие траектории соединяют один из нулей (а именно ноль x_1) с $x = 0$ и другой ноль x_2 с $x = \infty$. Мы обозначаем геодезические следующим образом. Пусть e_0 – горизонтальная траектория, соединяющая точки 0 и x_1 . Когда мы приближаемся к точке x_1 вдоль e_0 , мы обозначаем через e_1 первую, если отсчитывать против часовой стрелки, горизонтальную траекторию, исходящую из точки x_1 , а оставшуюся траекторию обозначаем через e_2 . Обе эти траектории заканчиваются в x_2 . Обозначим длины траекторий e_1 и e_2 (в метрике $|Q|$) через A и B (см. рис. 7). Аналогично замечанию 2 и лемме 2 нетрудно показать, что всегда можно удовлетворить условие $A + B = 1$ из (4.5) с помощью надлежащего $\mathbb{R}_+$ -масштабирования переменной x .

Рис. 15. Множество $\mathcal{R}_{-1,-1}$ на плоскости J -инварианта; три вещественные кривые отвечают значениям J -инварианта $J_1 \simeq -1690$, $J_2 \simeq 586$, $J_3 \simeq 7791$.

ТЕОРЕМА 3. Упорядоченная пара длин (A, B) определяет взаимно однозначное отображение пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([1]^2, [-3]^2)$ в $\mathbb{R}_+^2$. Полуоси $A = 0$ и $B = 0$ в $\mathbb{R}_+^2$ отождествляются с пространством $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2, 2)$. Оставшийся период определяет взаимно однозначное отображение пространства $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}(2, [-3]^2)$ в $\mathbb{R}_+$. Множество $A = B$ отвечает вещественным кривым, если $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (численный анализ показывает, что приближенное значение J -инварианта для этих кривых равно $J \simeq 7791$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать, что отображение периодов обратимо в пространстве $\widehat{\mathcal{Q}}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2, [1]^2)$, необходимо единственным образом восстановить (x_1, x_2) по известным периодам A и B . Длины A и B задают полиэдральную поверхность (т. е. поверхность с плоской метрикой и коническими особенностями) путем склеивания двух полуплоскостей, как показано на рис. 8. Это однозначно определяет конформную структуру, т. е. J -инвариант накрытия $\widehat{\mathcal{C}}$. Кроме того, поскольку фиксирована нумерация нулей x_1 и x_2 , отношение $t = x_1/x_2$ задается единственным образом.

Выберем канонический a -цикл на $\widehat{\mathcal{C}}$ так, что $2A = \int_a v$. Тогда период

$$2A = \int_{\alpha} \left[\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{x^3} \right]^{1/2} dx$$

после подстановки $\tilde{x} = x/x_2$ можно записать как

$$2A = x_2^{1/2} \int_1^t \left[\frac{(\tilde{x} - t)(\tilde{x} - 1)}{\tilde{x}^3} \right]^{1/2} d\tilde{x},$$

и это соотношение фиксирует x_2 единственным образом, поскольку t уже известно.

Таким образом, мы показали, что существует изоморфизм между $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([1]^2, [-3]^2)$ и первым квадрантом $\mathbb{R}_+^2$ в плоскости (A, B) . Теорема доказана.

Периоды σ канонических накрытий $\widehat{\mathcal{C}}$, отвечающие точкам из $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([1]^2, [-3]^2)$, принадлежат одномерному подмножеству $\mathcal{R}_{1,1}$ пространства модулей $\mathcal{M}_1$, показанному штриховой линией на рис. 15 слева. Множество $\mathcal{R}_{1,1}$ в плоскости J -инварианта показано на рис. 15 справа. Оно пересекается с вещественной осью в следующих трех

точках:

$$\begin{aligned} J_1 &\simeq -1690, & (x_1 &\simeq 1.5538 + 0.2514i, x_2 \simeq 0.1650 - 0.4893i), \\ J_2 &\simeq 586.3, & (x_1 &\simeq 1.2551 + 0.1883i, x_2 \simeq 0.6865 - 0.2986i), \\ J_3 &\simeq 7791, & (x_1 &\simeq 1.8037, x_2 = -0.3797). \end{aligned}$$

Все эти три точки J_i отвечают кривым $\widehat{C}$ с вещественной инволюцией. Однако только точка J_3 отвечает кривой Бутру, для которой абелев дифференциал $v = \sqrt{Q}$ инвариантен относительно этой инволюции, т.е. $v(\bar{x}) = \overline{v(x)}$.

6.3. Вариации величин $\arg \Delta_{1,1}^\pm$ на $\mathcal{Q}_0^\mathbb{R}([-3]^2)$. Цель данного пункта – изучить вариации аргументов величин (6.1) в пространстве $\mathcal{Q}_0^\mathbb{R}([-3]^2)$. Формулы (6.1) естественным образом возникают в формализме тау-функций Бергмана [15], [17], [20], [21].

Как и в предыдущем случае, аргументы величин $\Delta_{1,1}^\pm$ (6.1) не изменяются при одновременном умножении всех x_i на положительную вещественную постоянную. Следовательно, $\arg \Delta_{1,1}^\pm$ постоянны вдоль любого луча, проходящего через начало координат в первом квадранте плоскости (A, B) . В частности, $\arg \Delta_{1,1}^\pm$ постоянны на каждом из лучей $A = 0$, $B = 0$ и $A = B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $Q = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x^3} dx^2 \in \mathcal{Q}_0^\mathbb{R}([-3]^2)$, тогда имеют место следующие утверждения.

1. Один из корней x_i веществен, если и только если все остальные тоже вещественны. Более того, либо два корня совпадают ($x_1 = x_2 > 0$), либо один из них, (скажем, x_2) положителен, а другой (x_1) отрицателен, в последнем случае горизонтальные траектории соединяют точку x_1 с 0 вдоль отрицательной оси и точку x_2 с $+\infty$ вдоль положительной оси.

2. Если один из корней лежит в верхней полуплоскости, то другой лежит в нижней полуплоскости.

Доказательство этого утверждения чисто техническое, оно содержится в приложении. На рис. 16 показана эволюция точек ветвления x_i и горизонтальных траекторий при движении точки (A, B) по прямой от $(1, 0)$ до $(0, 1)$.

Из предложения 2 вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Имеют место следующие утверждения.

1. При $A \rightarrow 0$

$$\arg x_1 \rightarrow 0, \quad \arg x_2 \rightarrow 0, \quad \arg(x_2 - x_1) \rightarrow \frac{\pi}{4}. \quad (6.10)$$

2. При $A = B$

$$\arg x_1 = 0, \quad \arg x_2 = \pi, \quad \arg(x_2 - x_1) = 0. \quad (6.11)$$

3. При $B \rightarrow 0$

$$\arg x_1 \rightarrow 2\pi, \quad \arg x_2 \rightarrow 0, \quad \arg(x_2 - x_1) \rightarrow -\frac{\pi}{4}. \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. При вырождении кривой $\widehat{C}$ из п. 1 предложения 2 следует, что $\arg x_i \rightarrow 0$ и $x_i \rightarrow x_0 > 0$, $i = 1, 2$; в этом предельном случае плоской координатой

Рис. 16. Когда периоды (A, B) движутся по прямой от точки $(1, 0)$ к точке $(0, 1)$, ноль x_1 движется против часовой стрелки вокруг начала координат. Это движение соответствует монодромии при обходе вокруг точки $Q = (dx)^2/x$ в пространстве $\widehat{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$.

является $z(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x_0}{2\sqrt{x}}$, а критические траектории $\operatorname{Re} z = 0$, как легко заметить, имеют вид $\mathbb{R}_+ \cup \{|x| = x_0\}$.

В силу предложения 2 два корня остаются в противоположных полуплоскостях. При нашем выборе A, B очевидно, что если A убывает, то точка x_1 смещается в нижней полуплоскости от оси $\mathbb{R}_-$, а точка x_2 смещается в верхней полуплоскости от оси $\mathbb{R}_+$. Мы знаем, что при $A \rightarrow 0$ кривая вырождается и оба нуля сходятся к точке на $\mathbb{R}_+$. При этом, поскольку их положение ограничено соответствующими полуплоскостями, отсюда немедленно вытекает утверждение о возрастании $\arg x_i$, $i = 1, 2$. Анализ предела $A \rightarrow 0_+$ полностью идентичен рассуждениям из леммы 4 (которые мы не повторяем), и он показывает, что $\lim_{A \rightarrow 0_+} \arg(x_2 - x_1) = \pi/4$ (см. также численно точный рис. 16).

2. Из п. 2 предложения 2 следует, что при $A = B$ мы имеем $x_1 \in \mathbb{R}_-, x_2 \in \mathbb{R}_+$, следовательно, $\arg(x_2 - x_1) = 0$.

Пункт 3 получается из п. 1 настоящего предложения путем замены $v(x) \mapsto \overline{v(\bar{x})}$.

Наконец, мы готовы сформулировать второй основной аналитический результат.

ТЕОРЕМА 4. *Монодромии величин $\arg \Delta_{1,1}^+$ и $\arg \Delta_{1,1}^-$ в пространстве $\mathcal{Q}_0^{\mathbb{R}}([-3]^2)$ при обходе по элементарной несжимаемой петле равны 13π и 25π соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вычисления вариации $\arg \Delta_{1,1}^{\pm}$ при движении от диагонали $A = B$ к оси $A = 0$ достаточно сослаться на предложение 3. А именно, при $A = B$ мы имеем $\arg x_1 = -\pi$, $\arg x_2 = 0$, $\arg(x_2 - x_1) = 0$, а при $A = 0$ мы имеем (в пределе) $\arg x_{1,2} = 0$, $\arg(x_2 - x_1) = \pi/4$. Следовательно, вариации равны $\frac{\pi}{2} + 6\pi = \frac{13}{2}\pi$ для $\Delta_{1,1}^+$ и $\frac{13}{2}\pi + 6\pi = \frac{25}{2}\pi$ для $\Delta_{1,1}^-$. Чтобы получить монодромию при пересечении всей клетки, мы должны удвоить эти вариации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

(

Доказательство предложения 2) Доказательство предложения 2

1. Свойство Бутру (т. е. вещественность всех периодов) инвариантно относительно $\mathbb{R}_+$ -действия $x \mapsto \lambda x$, $x_j \mapsto \lambda x_j$, $Q \mapsto \lambda Q$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Предположим, что один из корней x_j является вещественным; в зависимости от его знака, используя вышеуказанное масштабирование, мы можем ограничиться случаями $x_j = \pm 1$. Поэтому изучим дифференциалы

$$v_+ = \sqrt{\frac{(x-q)(x-1)}{x}} \frac{dx}{x}, \quad v_- = \sqrt{\frac{(x-q)(x+1)}{x}} \frac{dx}{x}. \quad (\text{П.1})$$

Вырожденный случай. Пусть $q = 1$ для v_+ или $q = -1$ для v_- , тогда интегралы можно вычислить явно:

$$\int_1^x v_+ = 2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 \right), \quad \int_{-1}^x v_- = 2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 2i \right). \quad (\text{П.2})$$

В первом случае мы легко замечаем, что горизонтальные траектории (где действительная часть интеграла равна нулю) суть $|x| = 1$ и $\mathbb{R}_+$. Во втором случае отсутствует траектория, соединяющая точку $x = -1$ с самой собой; это видно, если вычислить интеграл по замкнутому пути из $x = -1$ в $x = -1$ вокруг начала координат: результат в самом деле получается мнимый.

Невырожденный случай. Покажем, что условие Бутру заставляет q быть вещественным и иметь противоположный знак по сравнению с $v_{\pm}$ (т. е. q отрицательна в случае v_+ и положительна в случае v_-). Рассмотрим эти два случая по отдельности.

(. Случай дифференциала v_- {+} \$) Случай дифференциала v_+ Преобразуем периоды, интегрируя по частям:

$$H(q) := \frac{1}{2} \int_{\gamma_1} \sqrt{\frac{(x-1)(x-q)}{x}} \frac{dx}{x} \stackrel{\text{b.p.}}{=} \int_0^1 \frac{q+1-2x}{\sqrt{x(1-x)(q-x)}} dx, \quad (\text{П.3})$$

$$J(q) := \frac{1}{2} \int_{\gamma_q} \sqrt{\frac{(x-1)(x-q)}{x}} \frac{dx}{x} \stackrel{\text{b.p.}}{=} \int_0^1 \frac{1+(1-2x)q}{\sqrt{x(1-x)(1-qx)}} dx, \quad (\text{П.4})$$

Рис. 17. Контуры интегрирования γ_1 , γ_q .

где контуры интегрирования γ_1 , γ_q изображены на рис. 17.

Теперь докажем, что уравнения $\operatorname{Im} I(q) = 0$, $\operatorname{Im} J(q) = 0$ имеют единственное решение $q^* \in \mathbb{R}_-$. Прежде всего покажем, что решение уравнения $\operatorname{Im} J = 0$ лежит на луче $q \in (-\infty, 1]$. Функция $J(q)$ заведомо аналитична в области $\mathcal{D} = q \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ и имеет точку ветвления $q = 1$. Простой анализ интеграла (II.4) показывает, что:

1) имеют место соотношения

$$\lim_{q \rightarrow 0+i0} J(q) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi, \quad \lim_{q \rightarrow 1+i0} J(q) = 4, \quad (\text{II.5})$$

$$J((-\infty, 1] + i0) = (-\infty, 4];$$

2) при $q > 1$ мнимая часть интеграла $J(q)$ (с граничным значением в верхней полуплоскости) положительна (см. оценку (II.7) ниже).

В области $\mathcal{D}$ мы также имеем симметрию Шварца $\overline{J(\bar{q})} = J(q)$, следовательно, достаточно провести анализ только в верхней полуплоскости.

Множество решений уравнения $\operatorname{Im} J = 0$ представляет собой объединение, возможно, нескольких гладких дуг, каждая из которых должна допускать бесконечное расширение до тех пор, пока не будет достигнута особенность функции $J(q)$ или ноль производной $J'(q)$. Покажем, что $J'(q) \neq 0$ в $\mathcal{D}$ с помощью следующих простых выкладок:

$$J'(q) = -\frac{1}{4} \int_{\gamma_q} \sqrt{\frac{x-1}{x(x-q)}} \frac{dx}{x} dx \stackrel{\text{b.p.}}{=} -\frac{1}{4q} \int_{\gamma_q} \sqrt{\frac{q-x}{x(1-x)}} dx \stackrel{\text{b.p.}}{=} -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t(1-qt)}} dt. \quad (\text{II.6})$$

Последний интеграл, очевидно, отличен от нуля при всех $q \in \mathcal{D}$.

Поскольку производная $J'(q)$ не имеет нулей в $\mathcal{D}$, всякая ветвь обратного преобразования $J^{-1}(\mathbb{R})$, лежащая в $\mathbb{H}$, должна стремиться к ∞ вдоль некоторого направления или быть ограниченной кривой, начинающейся и заканчивающейся в точке $q = 1$. Последний случай исключается, потому что $\operatorname{Im} J$ – гармоническая и ограниченная в $q = 1$ функция, не имеющая особенностей в $\mathcal{D}$.

Заметим, что если $|q| \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости, то из (II.4) мы получаем, что $J(q) \sim i\sqrt{q} \ln(1-q) \sim \sqrt{-q} \ln(-q)$, а $\operatorname{Re} J(q)$ (в ведущем порядке по $|q|$), как нетрудно видеть, не меняет знак при $0 < \arg q < \pi$. Следовательно, $J^{-1}(\mathbb{R})$ не имеет ветвей, уходящих на ∞ .

Для доказательства указанного выше свойства 2 интеграла (П.4), заметим, что мы имеем для $q > 1$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} J(q) &= \sqrt{q} \int_{q^{-1}}^1 \frac{q^{-1} + 1 - 2x}{\sqrt{x(1-x)(x-q^{-1})}} dx = \\ &= \sqrt{q} \int_{q^{-1}}^{(q^{-1}+1)/2} \underbrace{\frac{q^{-1} + 1 - 2x}{\sqrt{x(1-x)(x-q^{-1})}}}_{>0} dx + \sqrt{q} \int_{(q^{-1}+1)/2}^1 \underbrace{\frac{q^{-1} + 1 - 2x}{\sqrt{x(1-x)(x-q^{-1})}}}_{<0} dx. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Приведем простые оценки двух интегралов, которые показывают, что $\operatorname{Im} J(q) > 0$:

$$\int_{q^{-1}}^{(q^{-1}+1)/2} \frac{q^{-1} + 1 - 2x}{\sqrt{x(1-x)(x-q^{-1})}} dx > \int_{q^{-1}}^{(q^{-1}+1)/2} \frac{q^{-1} + 1 - 2x}{\sqrt{\frac{q^{-1}+1}{2}(1-x)(x-q^{-1})}} dx \quad (\text{П.8})$$

и

$$\begin{aligned} \int_{(q^{-1}+1)/2}^1 \frac{q^{-1} + 1 - 2x}{\sqrt{x(1-x)(x-q^{-1})}} dx &> \int_{(q^{-1}+1)/2}^1 \frac{q^{-1} + 1 - 2x}{\sqrt{\frac{q^{-1}+1}{2}(1-x)(x-q^{-1})}} dx \stackrel{x \mapsto 1+q^{-1}-x}{=} \\ &\stackrel{x \mapsto 1+q^{-1}-x}{=} \int_{(q^{-1}+1)/2}^{q^{-1}} \frac{q^{-1} + 1 - 2x}{\sqrt{\frac{q^{-1}+1}{2}(1-x)(x-q^{-1})}} dx = \\ &= - \int_{q^{-1}}^{(q+1)/2} \frac{q^{-1} + 1 - 2x}{\sqrt{\frac{q^{-1}+1}{2}(1-x)(x-q^{-1})}} dx. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Таким образом, сумма интегралов (П.7) строго положительна. В итоге единственной ветвью решения уравнения $\operatorname{Im} J = 0$ является $(-\infty, 1]$. Это завершает доказательство того, что $J(q)$ вещественна только на $(-\infty, 1]$.

Теперь проведем анализ интеграла $H(q)$ (П.3) на вещественной оси переменной q и покажем, что он принимает вещественные значения только при $q \in [1, +\infty) \cup \{q^*\}$, где $q^* < 0$. Для $q \geq 1$ подынтегральная функция принимает вещественные значения при $x \in (0, 1)$.

Покажем, что $\operatorname{Im} H(q) > 0$ для $q \in [0, 1)$. В самом деле, при $0 < x < q$ подынтегральная функция принимает вещественные значения, и поэтому мнимая часть имеет вид (эти соотношения аналогичны (П.8), (П.9) с заменой $q^{-1} \mapsto q$)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} H(q) &= \int_q^1 \frac{q + 1 - 2x}{\sqrt{x(1-x)(x-q)}} dx = \\ &= \int_q^{(q+1)/2} \underbrace{\frac{q + 1 - 2x}{\sqrt{x(1-x)(x-q)}}}_{>0} dx + \int_{(q+1)/2}^1 \underbrace{\frac{q + 1 - 2x}{\sqrt{x(1-x)(x-q)}}}_{<0} dx. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Приведем простые оценки двух интегралов, которые показывают, что $\operatorname{Im} H(q) > 0$:

$$\begin{aligned} \int_q^{(q+1)/2} \frac{q+1-2x}{\sqrt{x(1-x)(x-q)}} dx &> \int_q^{(q+1)/2} \frac{q+1-2x}{\sqrt{\frac{q+1}{2}(1-x)(x-q)}} dx, \\ \int_{(q+1)/2}^1 \frac{q+1-2x}{\sqrt{x(1-x)(x-q)}} dx &> \int_{(q+1)/2}^1 \frac{q+1-2x}{\sqrt{\frac{q+1}{2}(1-x)(x-q)}} dx \stackrel{z \mapsto 1+q-x}{=} \\ &= \int_q^{(q+1)/2} \frac{q+1-2x}{\sqrt{\frac{q+1}{2}(1-x)(x-q)}} dx, \end{aligned}$$

таким образом, сумма интегралов (П.10) строго положительна, поэтому $\operatorname{Im} H(q) > 0$ при $q \in [0, 1)$.

Пусть теперь $q < 0$, тогда интеграл

$$H(q) = i \int_0^1 \frac{x + |q| + (x-1)}{\sqrt{x(1-x)(|q|+x)}} dx$$

является чисто мнимым. Мнимая часть этой функции монотонна:

$$\frac{d}{dq} \operatorname{Im} H(q) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{|q|+1}{\sqrt{x(1-x)(|q|+x)(x+|q|)}} dx < 0.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{q \rightarrow -\infty} H(q) = i \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = i\pi,$$

в то время как при $q \rightarrow 0_-$ значения функции $H(q)$ логарифмически расходятся и стремятся к $-\infty$. Следовательно, $H(q) = 0$ в единственной точке $q^* < 0$. Численный анализ показывает, что $q^* \simeq -0.21048557$.

(• Случай дифференциала $\$v_{-}\{-\}\$$) Случай дифференциала v_{-} Две независимые гомологические координаты задаются интегралами

$$\hat{H}(q) := \frac{1}{2} \int_{\gamma_{-1}} \sqrt{\frac{(x+1)(x-q)}{x}} \frac{dx}{x} \stackrel{\text{b.p.}}{x \mapsto -x} \int_0^1 \frac{1-q+2x}{\sqrt{x(1-x)(q+x)}} dx, \quad (\text{П.11})$$

$$\hat{J}(q) := \frac{1}{2} \int_{\gamma_q} \sqrt{\frac{(x+1)(x-q)}{x}} \frac{dx}{x} \stackrel{\text{b.p.}}{x \mapsto qx} i\sqrt{q} \int_0^1 \frac{1-q^{-1}-2x}{\sqrt{x(x+q^{-1})(1-x)}} dx. \quad (\text{П.12})$$

Сначала покажем, что из $\operatorname{Im} q > 0$ следует $\operatorname{Im} \hat{H}(q) < 0$, кроме того, $\hat{H}(q) \in \mathbb{R}$ только при $q > 0$. Это нетрудно понять, переписав $\hat{H}(q)$ как

$$\hat{H}(q) = \int_0^1 \frac{1+3x}{\sqrt{x(1-x)(q+x)}} dx + \int_0^1 \frac{-\sqrt{q+x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx. \quad (\text{П.13})$$

Предположим, что $\operatorname{Im} q > 0$, простой анализ фаз подтверждает, что подынтегральные выражения в обоих интегралах имеют отрицательную мнимую часть. Следовательно, требование $\operatorname{Im} \hat{H} = 0$ влечет $q \in \mathbb{R}$. Предположим, что $q < 0$, тогда интегралы в (П.13) (граничное значение берется в $\operatorname{Im} q > 0$) получают мнимые вклады от

интегрирования по $x \in [0, \min(1, -q)]$, при этом оба вклада имеют отрицательную мнимую часть. Отсюда заключаем, что $q \in \mathbb{R}_+$.

Ограничивая теперь q на $\mathbb{R}_+$, мы должны понять, когда $\hat{J}(q)$ является вещественным для $q \in \mathbb{R}_+$. При $q > 0$ очевидно, что $\hat{J}(q) \in i\mathbb{R}$, поэтому мы рассматриваем нули функции $\hat{J}(q)$ для $q \in \mathbb{R}_+$. Элементарный анализ показывает, что функция $\text{Im } \hat{J}(q)$ возрастает при $q \in \mathbb{R}_+$ и меняет знак только один раз. Следовательно, значение $\hat{J}(q)$ вещественно в единственной точке $\tilde{q}r$, которую нужно найти, применяя к предыдущему случаю преобразования гомотетии, так что $\tilde{q} = -1/q^* > 0$.

Наконец, мы покажем, что отрицательный корень связан с началом координат горизонтальной траекторией, поскольку набор всех траекторий должен быть инвариантным относительно преобразования $z \mapsto \bar{z}$. Если траектория, исходящая от одного из корней, проходит вдоль вещественной оси, то она должна быть либо отрезком с одним из концов в нуле, либо лучом, уходящим на бесконечность. Элементарный локальный анализ показывает, что асимптотические направления каждой критической траектории, нисходящей к нулю, идут вдоль $\mathbb{R}_-$, а те, которые приближаются к ∞ , идут вдоль луча $\arg z = 0$. Таким образом, с необходимостью отрицательный корень связан с 0, а положительный — с $+\infty$.

Выше мы доказали, что либо оба корня имеют ненулевую мнимую часть, либо оба они вещественны. Поэтому, если они не являются вещественными, то они либо находятся в одной (верхней или нижней) полуплоскости, либо в противоположных. Покажем, что имеет место последний случай. Чтобы это увидеть, достаточно вычислить дифференциал по периодам в точке, где оба корня вещественны.

Итак, пусть $v = \sqrt{(x - x_1)(x - x_2)/x} dx$, где $x_1 = 1$, $x_2 = q^*$. Мы хотим узнать, что произойдет при бесконечно малой деформации Бутру точек x_0 , x_1 (имеется в виду деформация, сохраняющая условие Бутру). Тривиальное вычисление дает (точка обозначает производную по некоторому вещественному параметру деформации t при $t = 0$)

$$\dot{v} = \frac{-x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 + (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)x}{2x\sqrt{x(x-x_1)(x-x_2)}} dx, \quad (\text{П.14})$$

где $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ ограничены требованием вещественности всех периодов: например, если деформация имеет вид $\dot{A} = 1$, $\dot{B} = 0$, тогда потребуем, чтобы периоды функции $\dot{v}$ были заданы, и это однозначно определяет коэффициенты $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$. Поскольку мы вычисляем деформацию при $x_1 = 1$, $x_2 = q^* \in \mathbb{R}_-$, можно записать выражение

$$\dot{v} = \frac{-\dot{x}_2 - q^* \dot{x}_1 + (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)x}{2x\sqrt{x(x-1)(x-q^*)}} dx. \quad (\text{П.15})$$

Рассмотрим период от $x = 1$ до $x = \infty$;

$$-(\dot{x}_2 + q^* \dot{x}_1)C_0 + (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)C_1 = \alpha \in \mathbb{R},$$

$$C_j = \int_1^\infty \frac{x^j dx}{\sqrt{x(x-1)(x-q^*)}}, \quad j = 0, 1. \quad (\text{П.16})$$

Очевидно, что постоянные C_j являются вещественными и имеют один знак, зависящий от выбранного знака квадратного корня (скажем, положительны). Кроме того,

очевидно, что $|C_1| > |C_0|$, поскольку интегрирование ведется по лучу $[1, \infty)$. Взяв мнимую часть выражения (П.16), получаем

$$-C_1 \operatorname{Im}(q^* \dot{x}_1 + \dot{x}_2) + C_0 \operatorname{Im}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} \dot{x}_2 = \frac{C_0 - q^* C_1}{C_0 - C_1} \operatorname{Im} \dot{x}_1.$$

Коэффициент $\frac{C_0 - q^* C_1}{C_0 - C_1}$ отрицателен, поскольку C_0, C_1 имеют один знак, величина $q^* \simeq -0.2$ отрицательна и $|C_1| > |C_0|$. При этом начальные направления движения двух корней указывают на противоположные полуплоскости. В силу простой непрерывности точки x_1, x_2 не могут пересекать вещественную ось, не попадая при этом в случай, описанный в предыдущем анализе. Поэтому они остаются в различных полуплоскостях.

Итак, предположение 2 доказано.

Благодарности. Д. Короткин благодарит П. Г. Зографа за интересные обсуждения. Авторы выражают благодарность рецензенту за внимательное чтение рукописи.

Список литературы

- [1] J. Jenkins, “On the existence of certain general extremal metrics”, *Ann. of Math.* (2), **66**:3 (1957), 440–453.
- [2] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **5**, Springer, Berlin, 1984.
- [3] J. Harer, “The cohomology of the moduli space of curves”, *Theory of Moduli* (Montecatini Terme, Italy, June 21–29, 1985), Lecture Notes in Mathematics, **1337**, ed. E. Sernesi, Springer, Berlin, 1988, 138–221.
- [4] J. L. Harer, “The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface”, *Invent. Math.*, **84**:1 (1986), 157–176.
- [5] M. Kontsevich, “Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function”, *Commun. Math. Phys.*, **147**:1 (1992), 1–23.
- [6] M. Kontsevich, “Feynman diagrams and low-dimensional topology”, *First European Congress of Mathematics*, v. II: *Invited Lectures (Part 2)* (Paris, July 6–10, 1992), Progress in Mathematics, **120**, eds. A. Joseph, F. Mignot, F. Murat, B. Prum, R. Rentschler, Birkhäuser, Basel, 1994, 97–121.
- [7] E. Witten, “Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space”, *Surveys in Differential Geometry* (Harvard University, Cambridge, MA, USA, April 27–29, 1990), Supplement to the Journal of Differential Geometry, **1**, eds. C. C. Hsiung, S. T. Yau, H. Lawson, H. Blaine, Jr., AMS, Providence, RI, 1991, 243–310.
- [8] K. Igusa, “Graph cohomology and Kontsevich cycles”, *Topology*, **43**:6 (2004), 1469–1510.
- [9] K. Igusa, “Combinatorial Miller–Morita–Mumford classes and Witten cycles”, *Algebr. Geom. Topol.*, **4**:1 (2004), 473–520.
- [10] G. Mondello, “Riemann surfaces, ribbon graphs and combinatorial classes”, *Handbook of Teichmüller theory*, v. II, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, **13**, ed. A. Papadopoulos, European Math. Soc. Publ. House, Zürich, 2009, 151–215.
- [11] G. Mondello, “Combinatorial classes on $\mathcal{M}_{g,n}$ are tautological”, *Int. Math. Res. Notices*, **2004**:44 (2004), 2329–2390.
- [12] R. Penner, “The simplicial compactification of Riemann’s moduli space”, *Topology and Teichmüller spaces* (Katinkulta, Finland, 24–28 July, 1995), eds. S. Kojima, Y. Matsumoto, K. Saito, M. Seppälä, World Sci., Singapore, 1996, 237–252.

- [13] E. Arbarello, M. Cornalba, “Combinatorial and algebro-geometric cohomology classes on the moduli spaces of curves”, *J. Algebraic Geom.*, **5**:4 (1996), 705–749.
- [14] D. Zvonkine, *Strebel differentials on stable curves and Kontsevich’s proof of Witten’s conjecture*, arXiv:math/0209071.
- [15] D. Korotkin, “Solution of matrix Riemann–Hilbert problems with quasi-permutation monodromy matrices”, *Math. Ann.*, **329**:2 (2004), 335–364.
- [16] B. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable systems and quantum groups* (Montecatini Terme, June 14–22, 1993), Lecture Notes in Mathematics, **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, Heidelberg, 1996, 120–348.
- [17] A. Kokotov, D. Korotkin, “Tau-functions on spaces of Abelian differentials and higher genus generalization of Ray–Singer formula”, *J. Differ. Geom.*, **82**:1 (2009), 35–100.
- [18] A. Kokotov, D. Korotkin, “Tau-functions on spaces of Abelian and quadratic differentials and determinants of Laplacians in Strebel metrics of finite volume”, Preprint No. 46, 2004, arXiv:math/0405042.
- [19] A. Kokotov, D. Korotkin, P. Zograf, “Isomonodromic tau function on the space of admissible covers”, *Adv. Math.*, **227**:1 (2011), 586–600.
- [20] D. Korotkin, P. Zograf, “Tau function and moduli of differentials”, *Math. Res. Lett.*, **18**:3 (2011), 447–458.
- [21] D. Korotkin, P. Zograf, “Tau-function and Prym class”, *Algebraic and Geometric Aspects of Integrable Systems and Random Matrices*, Contemporary Mathematics, **593**, eds. A. Dzhamay, K. Maruno, V. U. Pierce, AMS, Providence, RI, 2013, 241–261.
- [22] M. Bertola, D. Korotkin, “Hodge and Prym tau-functions, Jenkins–Strebel differentials and combinatorial model of $\mathcal{M}_{g,n}$ ”, arXiv:1804.02495.
- [23] S.-Y. Lee, R. Teodorescu, P. Wiegman, “Shocks and finite-time singularities in Hele–Shaw flow”, *Physica D*, **238**:14 (2009), 1113–1128.
- [24] I. M. Krichever, “The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories”, *Commun. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475.
- [25] M. Bertola, “Boutroux curves with external field: equilibrium measures without a variational problem”, *Anal. Math. Phys.*, **1**:2–3 (2011), 167–211.
- [26] P. Boutroux, “Recherches sur les transcendentes de M. Painlevé et l’étude asymptotique des équations différentielles du second ordre”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. Ser. 3*, **30** (1913), 255–375; “Recherches sur les transcendentes de M. Painlevé et l’étude asymptotique des équations différentielles du second ordre (suite)”, **31** (1914), 99–159.
- [27] A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapaev, V. Yu. Novokshenov, *Painlevé Transcendents: The Riemann–Hilbert Approach*, Mathematical Surveys and Monographs, **128**, AMS, Providence, RI, 2006.

Поступила в редакцию 24.11.2017,
после доработки 9.02.2018