Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Шаловалов, Симметрия и классификация уравнения Дирака–Фока, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 2, 208–229

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:52:21

© 2018 г.

В. Н. Шаповалов*

СИММЕТРИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА–ФОКА

Рассмотрены свойства уравнения Дирака–Фока, обладающего дифференциальными операторами симметрии первого порядка. Описаны ковариантные свойства уравнения Дирака в произвольном римановом пространстве V_4 с сигнатурой $(-1, -1, -1, 1)$ для релятивистской частицы в электромагнитном поле. Приведен общий вид дифференциального оператора симметрии первого порядка и дана характеристика пары таких операторов, коммутирующих друг с другом; перечислены все пространства, в которых свободное уравнение Дирака допускает хотя бы один дифференциальный оператор симметрии первого порядка; проведена симметричная классификация тензоров электромагнитного поля; построены полные наборы операторов симметрии.

Ключевые слова: операторы симметрии, риманово пространство, уравнение Дирака, уравнение Дирака–Фока.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9514>

1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые уравнение Дирака в римановом пространстве и электромагнитном поле было введено Фоком в 1929 г. [1]. Существенно отметить, что и формулировку уравнения, и его структурные свойства автор реализовал в специальном базисе пространства. Этим можно объяснить отсутствие в его работе некоторых свойств уравнения (например, нет коммутатора ковариантной производной и матрицы Дирака), которые играют существенную роль при симметричном анализе уравнения. Отметим, что Фок не занимался симметрией уравнения, в частности, групповым (алгебраическим) анализом этого уравнения с произвольным метрическим тензором и тензором электромагнитного поля.

В книге Бете [2] при изучении структурных свойств уравнения Дирака в пространстве Минковского сформулировано и доказано несколько теорем, которые справедливы, как легко видеть, и для уравнения Дирака–Фока.

Одним из основных вопросов, рассматриваемых в настоящей статье, является классификация римановых пространств и электромагнитных полей, в которых уравнение Дирака–Фока имеет хотя бы один нетривиальный оператор симметрии; эта

---

*Калмыцкий государственный университет им. Б. Б. Городовикова, Элиста, Россия.
E-mail: ppa@kalmsu.ru

задача решена здесь полностью. В работах других авторов рассматриваются вопросы, отличные от поставленных в этой статье, а именно – поиска частных решений уравнения Дирака–Фока в конкретных пространствах и полях.

2. УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ПРОСТРАНСТВЕ V_4

Введем следующие обозначения: $g_{\nu\mu}(x)$ – ковариантные компоненты метрического тензора пространства V_4 в системе координат x , $g^{\nu\alpha}g_{\alpha\mu} = \delta_{\mu}^{\nu}$, тензор с компонентами $a_{\alpha\mu}$ будем обозначать как “тензор a ”, $R_{\nu\mu\alpha\beta}(x)$ – компоненты тензора кривизны пространства, ∂_{ν} – оператор ковариантной производной по переменной с номером ν , $\hat{R}_{\nu\mu} = [\partial_{\nu}, \partial_{\mu}]$, $e_{\nu\mu\alpha\beta}(x)$ – антисимметричный единичный псевдотензор, (γ) – набор $E, \gamma, \gamma_{\nu}, \gamma\gamma_{\nu}, [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]$ матриц четвертого порядка. Здесь $4!\gamma = -e_{\nu\mu\alpha\beta}\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$, матрицы γ_{ν} – произвольное (фиксированное) решение системы

$$\gamma_{\nu}(x)\gamma_{\mu}(x) + \gamma_{\mu}(x)\gamma_{\nu}(x) = 2g_{\nu\mu}(x)E. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Справедливы тождества

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= -E, & \gamma\gamma_{\alpha} + \gamma_{\alpha}\gamma &= 0, & [\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}, \gamma_{\alpha}] &= 2g_{\alpha\mu}\gamma_{\nu} - 2g_{\alpha\nu}\gamma_{\mu}, \\ \gamma_{\alpha}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} &= e_{\alpha\mu\nu\sigma}\gamma\gamma^{\sigma} + \gamma_{\alpha}g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu}g_{\alpha\nu} + \gamma_{\nu}g_{\alpha\mu}. \end{aligned}$$

Мы считаем $\gamma_{\mu}(x)$ ковариантными компонентами матричного вектора в системе координат x .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Шпур любой матрицы из набора (γ) , за исключением E , равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Матрицы из набора (γ) линейно несвязанны. Таким образом, базис (γ) есть базис в пространстве матриц четвертого порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Только скалярная матрица коммутирует со всеми матрицами γ_{ν} .

Доказательства замечаний фактически содержатся в монографии [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Базисы $(\tilde{\gamma})$ и (γ) эквивалентны: $(\tilde{\gamma}) \sim (\gamma)$, если существует матрица $S(x)$ такая, что $\det S(x) = 1$, с которой $\tilde{\gamma}_{\nu}(x) = S^{-1}(x)\gamma_{\nu}(x)S(x)$.

ЛЕММА 1. Любые базисы $(\tilde{\gamma})$ и (γ) эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем с использованием инструментария теории матриц [3], что обеспечивает лаконичность. Пусть $\lambda_{\alpha|}$ суть векторы репера:

$$g_{\nu\mu}(x) = e_{\alpha}\lambda_{\alpha|\nu}(x)\lambda_{\alpha|\mu}(x), \quad e_1 = e_2 = e_3 = -e_4 = -1, \quad \gamma_{\nu}(x) \equiv \sqrt{e_{\alpha}}\Gamma_{\alpha}(x)\lambda_{\alpha|\nu}(x).$$

Из уравнения (1) имеем

$$\Gamma_{\nu}\Gamma_{\mu} + \Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} = 2\delta_{\nu\mu}E. \quad (2)$$

Так как $\Gamma_4^2 = E$, то элементарные делители матрицы Γ_4 в поле K просты. Следовательно, существуют инволютивная диагональная матрица D и неособенная матрица S_1 , с которыми $\Gamma_4 = S_1^{-1}DS_1$. Так как $\text{Sp } \gamma_{\nu} = 0$, то $\text{Sp } \Gamma_4 = 0$. Следовательно, существует неособенная матрица S_2 , с которой $S_2D = (\sigma_3 \otimes \sigma_0)S_2$. Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – матрицы Паули, σ_0 – единичная матрица второго порядка. Таким образом,

$(\Gamma) \sim (\bar{\Gamma})$, где $\bar{\Gamma}_4 = (\sigma_3 \otimes \sigma_0)$, $\bar{\Gamma}_\nu \bar{\Gamma}_\mu + \bar{\Gamma}_\mu \bar{\Gamma}_\nu = 2\delta_{\nu\mu}E$. Следовательно, существует матрица N такая, что

$$\bar{\Gamma}_3 = \begin{vmatrix} O & N \\ N^{-1} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & O \\ O & N^{-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} O & I \\ I & O \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I & O \\ O & N \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $(\Gamma) \sim (\Gamma')$. В силу равенства (2) $\Gamma'_4 = (\sigma_3 \otimes \sigma_0)$, $\Gamma'_3 = (\sigma_1 \otimes \sigma_0)$, $\Gamma'_a = (\sigma_2 \otimes B_a)$, $B_a B_b + B_b B_a = 2\delta_{ab}$, $a, b = 1, 2$. Отсюда вытекает существование матрицы V , с которой $B_1 = V^{-1}\sigma_1 V$, $B_2 = V^{-1}\sigma_3 V$. Имея это в виду, заключаем, что $\Gamma'_\alpha = S^{-1}\Gamma_\alpha^o S$, где $S = \sigma_0 \otimes V$, $\Gamma_1^o = \sigma_2 \otimes \sigma_1$, $\Gamma_2^o = \sigma_2 \otimes \sigma_3$, $\Gamma_3^o = \sigma_1 \otimes \sigma_0$, $\Gamma_4^o = \sigma_3 \otimes \sigma_0$. Лемма доказана.

Это утверждение известно как фундаментальная теорема Паули. В монографии [3] приведено ее весьма громоздкое доказательство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Базис (γ) назовем каноническим, если можно указать такой ортонормированный репер, в котором

$$\gamma_\nu(x) = \varepsilon_\alpha e_\alpha \lambda_{\alpha|\nu}(x). \quad (3)$$

Таким образом, скалярные компоненты вектора (γ_ν) канонического базиса в ортонормированном репере риманова пространства есть матрицы Дирака в пространстве Минковского. Очевидно, что канонический базис существует и множество всех таких базисов описывается следующей леммой.

ЛЕММА 2. *Общего вида канонический базис $(\bar{\gamma})$ задается следующей формулой: $\bar{\gamma}_\nu(x) = C^{-1}f_{\nu\alpha}(x)\gamma^\alpha(x)C$. Здесь (γ) – фиксированный канонический базис, C – произвольная постоянная матрица, f – тензор вида $f_{\nu\alpha}(x)f_{\mu\beta}(x)g^{\alpha\beta}(x) = g_{\nu\mu}(x)$, $f_{\nu\alpha}^* = f_{\nu\alpha}$.*

Отметим некоторые свойства тензора f . Очевидно, множество $\mathcal{F}$ решений является группой с естественным законом умножения, в которой тензор g – единица. Пусть $F = \{f \in \mathcal{F} : \det f = \det g\}$. Ясно, что F является подгруппой в $\mathcal{F}$, причем значения элементов из F в любой (фиксированной) точке пространства образуют шестипараметрическую группу, изоморфную однородной группе Лоренца. Так как любой (фиксированный) элемент $f \in F$ принадлежит некоторой однопараметрической группе, то существует антисимметричный дважды ковариантный тензор m , с которым $f = ge^{g^{-1}m}$. Фиксируем какой-либо единичный вектор $\vec{h}$. Пусть $h_{\nu\mu}(x) = 2h_\nu(x)h_\mu(x) - g_{\nu\mu}(x)$. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что тензор $h \in \mathcal{F}$, $\det h = -\det g$. Очевидно, $\mathcal{F} = F \otimes \{g, h\}$. Теперь нетрудно доказать следующее утверждение: система

$$f_{\nu\alpha}(x)\gamma^\alpha(x) = U^{-1}(x)\gamma_\nu(x)U(x) \quad (4)$$

с искомыми матрицей U и тензором f имеет общее решение, которое определяется формулами

$$\begin{aligned} f &= ge^{g^{-1}m}, & U &= ue^{m_{\nu\mu}\gamma^\nu\gamma^\mu/4}, & m &= -m^T, \\ f &= h, & U &= uh_\alpha\gamma^\alpha, & h^\alpha h_\alpha &= 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где u – произвольная c -функция.

Если пространство допускает движение, то формулы (4) и (5) характеризуют инвариантность уравнения Дирака–Фока относительно такого преобразования.

Известно, что $[\partial_\alpha, g_{\nu\mu}] = 0$. Покажем, что существует векторный матричный линейный оператор p_ν вида $[p_\nu, \gamma_\mu] = 0$, $[p_\nu, a_{\alpha_1 \dots \alpha_r}] = i a_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \nu}$. Здесь $a_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x)$ – компоненты r -валентного произвольного c -тензора. Будем искать оператор в виде $p_\nu = i(\partial_\nu E + q_\nu)$, где $q_\nu(x)$ – компоненты некоторого вектора. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3. *В пространстве V_4 существует вектор q вида*

$$\text{Sp } q_\nu = 0, \quad \gamma_{\alpha, \nu} = [\gamma_\alpha, q_\nu], \quad [p_\nu, q_\alpha] = 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы получить условия совместности системы (6), умножим обе ее части слева на γ_β и симметризуем результат по α, β : $\gamma_\beta \gamma_{\alpha, \nu} + \gamma_\alpha \gamma_{\beta, \nu} = -\gamma_{\beta, \nu} \gamma_\alpha - \gamma_{\alpha, \nu} \gamma_\beta$. Эти условия выполнены в силу формулы (1). Таким образом, система (6) совместна. В силу замечания 4 общее решение системы $[\gamma_\alpha, q_\nu] = 0$ имеет вид $a_\nu(x)E$, где a – произвольный c -вектор. Поэтому общее решение (6) имеет вид $q_\nu(x) = q_\nu^0(x) + a_\nu(x)E$, где q_ν^0 – частное решение, разложение которого по базису (γ) не содержит слагаемого вида $a_\nu E$. Из первого условия (6) находим, что $a_\nu = 0$. Таким образом, доказано существование и единственность вектора q , удовлетворяющего условиям леммы.

ЛЕММА 4. *Решение уравнений (6) в каноническом базисе имеет вид*

$$4q_\nu(x) = \gamma^\alpha(x) \gamma_{\alpha, \nu}(x). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеет место разложение (3). Отсюда с учетом равенства (7) получаем, что

$$\gamma_{\alpha, \nu} = e_\beta \lambda_{\beta|\mu} \lambda_{\beta|\alpha, \nu} \gamma^\mu, \quad q_\nu = \frac{1}{4} e_\beta \lambda_{\beta|}^\alpha \lambda_{\beta|\nu}^\mu \gamma_\mu \gamma_\alpha. \quad (8)$$

Имея это в виду и учитывая тождества из замечания 1, имеем выражение $[\gamma_\alpha, q_\nu] = e_\beta \lambda_{\beta|\nu}^\mu \lambda_{\beta|}^\sigma (\gamma_\mu g_{\sigma\alpha} - \gamma_\sigma g_{\mu\alpha})/2$. Из определения репера λ вытекает следующее тождество: $e_\beta \lambda_{\beta|\mu} \lambda_{\beta|\sigma, \nu} + e_\beta \lambda_{\beta|\sigma} \lambda_{\beta|\mu, \nu} = 0$. Поэтому предыдущее условие принимает вид $[\gamma_\alpha, q_\nu] = e_\beta \lambda_{\beta|\mu} \lambda_{\beta|\alpha, \nu} \gamma^\mu$. Это равенство и равенства (8) равносильны условиям (6), поэтому лемма доказана.

Выясним, как преобразуется вектор q при переходе к новому базису $(\bar{\gamma})$. В силу леммы 1 и условий (6) существует матрица S вида

$$S(x) \bar{\gamma}^\nu(x) = \gamma^\nu(x) S(x), \quad \det S(x) = 1, \quad S \bar{q}^\nu = q_\nu S + S_{, \nu}. \quad (9)$$

Напомним, что вектор $\bar{q}$ определен набором $(\bar{\gamma})$ и условиями (6).

Согласно статье [4] оператором Дирака в V_4 назовем оператор

$$\mathcal{D} = \gamma^\nu \mathcal{P}_\nu - \varepsilon, \quad \mathcal{P}_\nu = p_\nu + \mathcal{A}_\nu, \quad (10)$$

где $\mathcal{A}_\nu(x)$ – компоненты c -вектора, который называют потенциалом поля, ε – параметр, причем потенциал и вектор γ не зависят от ε . Естественно считать потенциал инвариантом относительно преобразования (9). Оператор Дирака “ковариантен”

относительно преобразования эквивалентности, $\bar{\gamma}^\nu \bar{\mathcal{P}}_\nu - \varepsilon = S^{-1} \mathcal{D} S$, $\bar{\mathcal{P}}_\nu = \bar{p}_\nu + \mathcal{A}_\nu$. Вычислим коммутатор операторов $\mathcal{P}$:

$$[\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\mu] = iF_{\nu\mu}E - E\hat{R}_{\nu\mu} + q_{\nu\cdot\mu} - q_{\mu\cdot\nu} - [q_\nu, q_\mu] \equiv iF_{\nu\mu}E - E\hat{R}_{\nu\mu} + Q_{\nu\mu}.$$

Здесь $F_{\nu\mu} = \mathcal{A}_{\mu\cdot\nu} - \mathcal{A}_{\nu\cdot\mu}$ есть тензор поля. Для вычисления $Q_{\nu\mu}$ подействуем на обе части (6) оператором ∂_μ и антисимметризуем результат по (ν, μ) . В результате имеем $R_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\beta = [\gamma^\alpha, Q_{\nu\mu}]$. Отсюда находим, что $4Q_{\nu\mu} = R_{\nu\mu\alpha\beta}\gamma^\beta\gamma^\alpha + a_{\nu\mu}E$. Из определения $Q_{\nu\mu}$ и требования (6) следует равенство $\text{Sp } Q_{\nu\mu} = 0$. Таким образом, $a_{\nu\mu} = 0$. Окончательно имеем

$$[\mathcal{P}_\nu, \mathcal{P}_\mu] = iF_{\nu\mu}E - E\hat{R}_{\nu\mu} + \frac{1}{4}R_{\nu\mu\alpha\beta}\gamma^\beta\gamma^\alpha. \quad (11)$$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СИММЕТРИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Запишем определяющее уравнение алгебры уравнения Дирака–Фока

$$\mathcal{D}(x)\Psi(x) \equiv \{\gamma^\nu(x)\mathcal{P}_\nu - \varepsilon\}\Psi(x) = 0$$

в системе координат x и базисе (γ) :

$$[X(x), \mathcal{D}(x)] = \Phi(x)\mathcal{D}(x).$$

Ранее было условлено рассматривать $\mathcal{D}$ как скалярный оператор. Чтобы определяющее уравнение было ковариантно относительно произвольных преобразований системы координат, базиса (γ) по формуле (9) и преобразования вида (14), будем считать $X(x)$ компонентой скалярного оператора в системе координат x , ковариантного относительно указанных преобразований. Запишем скалярный дифференциальный оператор первого порядка в виде

$$X(x) = X^\nu(x)\mathcal{P}_\nu + \chi(x). \quad (12)$$

Координатами оператора X в базисе (γ) назовем коэффициенты разложения матричных компонент $X^\nu(x)$ и скаляра $\chi(x)$ по базису. Ясно, что координаты оператора инвариантны относительно преобразований вида (9), (14) и являются компонентами соответствующих тензоров относительно произвольных преобразований переменных. Так как определяющие уравнения для координат оператора X могут содержать только ковариантные производные от координат и согласно (11) – тензор поля, то ковариантная форма записи обеспечена.

Для уравнения Дирака можно указать два варианта расчета операторов симметрии. Первый связан с тем, что оператор (10) имеет вид $\mathcal{D} = H - \varepsilon$. Следовательно, для построения аналитических по ε в окрестности $\varepsilon = 0$ элементов алгебры достаточно знать общее решение уравнения

$$[X, H] = 0. \quad (13)$$

Вторая возможность связана с тем, что оператор (10) можно переписать в подходящей системе координат в виде $\mathcal{D} = \gamma^4\{p_4 + \bar{H}\}$, $\det \gamma^4 \neq 0$. Таким образом,

достаточно найти общее решение уравнения $[X, (\gamma^4)^{-1}\mathcal{D}] = 0$, где оператор X не зависит от p_4 .

Результаты расчетов по обеим схемам по существу совпадают, однако во второй схеме не приходится говорить о ковариантных свойствах оператора симметрии и ковариантной форме соответствующих определяющих уравнений. Поэтому проведем вычисление операторов симметрии из уравнения (13). Предварительно сделаем следующее замечание: при выводе определяющих уравнений для координат операторов симметрии уравнения Дирака (Шредингера и др.) полезно иметь в виду лемму, сформулированную ниже.

ЛЕММА 4а. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Произвольный дифференциальный оператор X можно записать в виде*

$$X = \sum_{r=0}^n X^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x) \mathcal{P}_{\alpha_1} \dots \mathcal{P}_{\alpha_r},$$

где $X^{\nu_1 \dots \nu_r}(x)$ при фиксированном индексе r являются контравариантными компонентами полностью симметричного тензора валентности r (нормальные коэффициенты оператора X).

2. *Верно равенство*

$$\tilde{X} \equiv s^{-1} X s = \sum_{r=0}^n X^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(x) \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha_1} \dots \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha_r}, \quad (14)$$

где $\tilde{\mathcal{P}}_\nu = p_\nu + E\mathcal{A}_\nu + iE(\ln s)_{,\nu}$, s – любая s -функция. Так как $\tilde{F}_{\nu\mu}(x) = F_{\nu\mu}(x)$, назовем оператор X ковариантным относительно указанного преобразования.

3. $X \equiv 0$, если и только если нормальные коэффициенты оператора равны нулю.

Итак, подставим в (13) операторы H и X из (10) и (12), приравняем к нулю нормальные коэффициенты коммутатора $[H, X]$. В результате получаем, что

$$\begin{aligned} [\gamma^\nu, X^\mu] + [\gamma^\mu, X^\nu] &= 0, & [\gamma^\nu, \chi] + \gamma^\alpha [p_\alpha, X^\nu] &= 0, \\ 2\gamma^\alpha [p_\alpha, \chi] + (X^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu X^\mu) [p_\nu, \mathcal{P}_\mu] &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Дальнейшие вычисления удобно проводить, принимая во внимание следующее тождество: $H\gamma + \gamma H = 0$. Можно записать, что $X = V + X_+$, где операторы X_+ и V удовлетворяют (13) и условиям $[X_+, \gamma]_- = 0$, $[V, \gamma]_+ = 0$. Подставим разложения X_+^ν и χ_+ по базису (γ) в (15) и приравняем к нулю коэффициенты разложения левых частей. В результате простых преобразований получаем равенства

$$X_+ = U_u + W_w,$$

$$U_u \equiv u^\nu \mathcal{P}_\nu + \frac{1}{4} i \gamma^\nu \gamma^\mu u_{\mu\nu} + u, \quad (16)$$

$$W_w \equiv \gamma \left\{ [\gamma^\nu, \gamma^\mu] w_{,\mu} \mathcal{P}_\nu + \frac{3i}{4} \Delta_2(w) \right\}, \quad (17)$$

где s -функции u и w , ковариантные компоненты u_ν s -вектора удовлетворяют уравнениям

$$u_{\nu,\mu} + u_{\mu,\nu} = 0, \quad u_{,\nu} = u^\alpha F_{\alpha\nu}, \quad (18)$$

$$w_{,\nu\mu} = \frac{1}{4} g_{\nu\mu} \Delta_2(w), \quad w_{,\alpha} F_\nu^\alpha = 0, \quad (19)$$

где Δ_2 – оператор Бельтрами второго рода. Часто оператор вида (16) называют лиевским. Оператор V можно записать следующим образом:

$$V = hH + \gamma_\mu \{ \gamma v^{\mu\nu} \mathcal{P}_\nu + i v^\mu E \} \equiv hH + V_v, \quad (20)$$

где h – произвольная постоянная, а компоненты c -вектора v_μ и c -псевдотензора $v_{\mu\nu}$ удовлетворяют уравнениям

$$v_{\mu\nu} + v_{\nu\mu} = 0, \quad v_{\nu\mu\cdot\alpha} = e_{\nu\mu\alpha\beta} v^\beta, \quad v_{\nu\cdot}^\alpha F_{\alpha\mu} = v_{\mu\cdot}^\alpha F_{\alpha\nu}. \quad (21)$$

Оператор вида V_v назовем оператором Киллинга–Яно. Таким образом, уравнения (18), (19), (21) являются определяющими уравнениями для координат дифференциального оператора симметрии первого порядка уравнения Дирака в пространстве V_4 . Отметим очевидные следствия из этих уравнений.

СЛЕДСТВИЕ 1. *В любом пространстве наибольшее число операторов симметрии имеет свободное ($F_{\nu\mu} = 0$) уравнение Дирака.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любых пространства и поля верно выражение*

$$[U_u + W_w + V_v, H] = 0 \iff [U_u, H] = [W_w, H] = [V_v, H] = 0.$$

Отметим, что коммутатор дифференциальных операторов симметрии первого порядка есть оператор симметрии, вообще говоря, второго порядка. Однако коммутатор лиевских операторов имеет первый порядок. Точнее, справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если U_n и $U_u + W_w + V_v$ удовлетворяют (13), то*

$$[U_n, U_u + W_w + V_v] = iU_{L_n(u)} + iW_{L_n(w)} + iV_{L_n(v)}.$$

Здесь L_n – производная L_u по направлению вектора n .

Так как операторы вида $h_1 E + hH$ (h_1, h – произвольные постоянные) образуют идеал алгебры уравнения Дирака, то далее мы рассматриваем алгебру вычетов полной алгебры по этому идеалу. Другими словами, функцию u в операторе U определяем с точностью до постоянного слагаемого, а постоянную h в V считаем равной нулю.

Допустим, тензор поля задан. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 5. 1. *Линейно независимые решения $\vec{u}$ и $\vec{u}'$ системы (18) линейно несвязанны.*

2. *Линейно независимые решения ∇w и $\nabla w'$ системы (19) линейно несвязанны.*

3. *Линейно независимые решения $v_{\nu\mu}$ и $v'_{\nu\mu}$ системы (21) линейно несвязанны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное.

1. Пусть $\vec{u}'(x) = \alpha \vec{u}(x)$, $\nabla \alpha \neq 0$. Из (16), (18) имеем $\alpha_{\cdot\nu} u_\mu + \alpha_{\cdot\mu} u_\nu = 0$, поэтому $\vec{u} = 0$.

2. Пусть $\nabla w'(x) = \lambda(x) \nabla w(x)$, $\nabla \lambda \neq 0$. Из (17), (19) вытекает равенство $4\lambda_{\cdot\nu} w_{\cdot\mu} = \{\Delta_2(w') - \lambda \Delta_2(w)\} g_{\nu\mu}$, поэтому $\nabla w = 0$.

3. Пусть $v'_{\nu\mu}(x) = \delta(x) v_{\nu\mu}(x)$, $\nabla \delta \neq 0$. Из (20), (21) имеем $\delta_{\cdot\alpha} v_{\nu\mu} + \delta_{\cdot\mu} v_{\nu\alpha} = 0$, поэтому $v_{\nu\mu} = \varphi_\nu \delta_{\cdot\mu}$, следовательно, $\varphi_\nu = 0$, откуда $v_{\nu\mu} = 0$. Так как векторы u , ∇w и тензор v ненулевые, то сделанные допущения неверны. Лемма доказана.

Использование симметрии при интегрировании уравнения Дирака включает построение наборов попарно коммутирующих операторов симметрии. Поэтому значение имеет следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Если дифференциальные операторы X и $\bar{X}$ первого порядка удовлетворяют уравнению (13) и коммутируют друг с другом, то существуют не равные одновременно нулю числа c и $\bar{c}$, с которыми оператор $cX + \bar{c}\bar{X}$ является лиевским.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая формулы (16)–(20), из условия $[X, \bar{X}] = 0$ на старшие нормальные коэффициенты коммутатора получаем уравнения

$$\{e^{\nu\alpha\lambda\sigma}(w_{,\sigma}\bar{v}_{\lambda}^{\mu} - \bar{w}_{,\sigma}v_{\lambda}^{\mu})\}^{(\nu,\mu)} = 0, \quad (22)$$

$$v^{\nu\alpha}\bar{v}^{\mu\beta} - v^{\nu\beta}\bar{v}^{\mu\alpha} + 4w_{,\gamma}\bar{w}_{,\sigma}(e^{\nu\alpha\gamma\lambda}e_{\lambda}^{\mu\beta\sigma} - e^{\nu\beta\gamma\lambda}e_{\lambda}^{\mu\alpha\sigma})^{(\nu,\mu)} = 0, \quad (23)$$

где символ (ν, μ) означает симметризацию по индексам ν, μ . Система (22) равносильна системе

$$\bar{w}_{,\alpha}v_{\nu\mu} - w_{,\alpha}\bar{v}_{\nu\mu} = g_{\alpha\mu}\psi_{\nu} - g_{\alpha\nu}\psi_{\mu}, \quad 3\psi_{\alpha} = w^{,\sigma}\bar{v}_{\sigma\alpha} - \bar{w}^{,\sigma}v_{\sigma\alpha}. \quad (24)$$

Очевидно, теорема требует доказательства лишь в следующих случаях:

- 1) тензоры v и $\bar{v}$, векторы ∇w и $\nabla \bar{w}$ ненулевые;
- 2) тензоры v и $\bar{v}$ ненулевые, векторы $\nabla w = \nabla \bar{w} = 0$;
- 3) тензоры v и $\bar{v}$ нулевые, векторы $\nabla w, \nabla \bar{w}$ ненулевые.

Рассмотрим эти случаи.

1. Из второго уравнения (24) получаем равенства $3w_{,\sigma}\psi^{\sigma} = w_{,\sigma}\bar{v}^{\sigma\lambda}\bar{w}_{,\lambda}$, $3\bar{w}_{,\sigma}\psi^{\sigma} = w_{,\sigma}v^{\sigma\lambda}\bar{w}_{,\lambda}$. Учитывая их и умножая первое уравнение (24) на $w^{,\nu}w^{,\mu}$, находим, что $\bar{w}_{,\alpha}\{3\bar{w}_{,\sigma}\psi^{\sigma} - w_{,\sigma}\psi^{\sigma}\} = w_{,\alpha}\{3w_{,\sigma}\psi^{\sigma} - \bar{w}_{,\sigma}\psi^{\sigma}\}$. Отсюда и из предыдущих условий следует, что $w_{,\sigma}\psi^{\sigma} = \bar{w}_{,\sigma}\psi^{\sigma} = 0$. Имея это в виду, из первого уравнения (24) выводим равенства $\bar{w}_{,\alpha}(\psi_{\mu} + \bar{w}_{,\sigma}v_{\mu}^{\sigma}) - w_{,\alpha}\bar{w}_{,\sigma}\bar{v}_{\mu}^{\sigma} = 0$, $\bar{w}_{,\alpha}w_{,\sigma}v_{\mu}^{\sigma} + w_{,\alpha}(\psi_{\mu} - w_{,\sigma}\bar{v}_{\mu}^{\sigma}) = 0$. Из этого и из второго уравнения (24) вытекает, что $\psi_{\alpha} = 0$. Отсюда и из первого уравнения (24) получаем, что $\bar{v}_{\nu\mu} = \delta v_{\nu\mu}$, $\nabla \bar{w} = \delta \nabla w$. Используя лемму 5, находим, что $\nabla \delta = 0$. С учетом условий (17), (19), (21) заключаем, что $W_{\bar{w}} = \delta W_w$, $V_{\bar{v}} = \delta V_v$. Таким образом, в первом случае теорема верна.

2. Из уравнения (23) получаем выражение $v_{\nu\alpha}\bar{v}_{\mu\beta} + v_{\mu\alpha}\bar{v}_{\nu\beta} = v_{\nu\beta}\bar{v}_{\mu\alpha} + v_{\mu\beta}\bar{v}_{\nu\alpha}$. Эта система равносильна следующей:

$$z_{\alpha}(\lambda)\bar{z}_{\beta}(\lambda) = z_{\beta}(\lambda)\bar{z}_{\alpha}(\lambda), \quad z_{\alpha}(\lambda) \equiv \lambda_{\nu}v_{\nu\alpha}, \quad \bar{z}_{\alpha}(\lambda) \equiv \lambda_{\nu}\bar{v}_{\nu\alpha}. \quad (25)$$

Здесь λ – произвольные постоянные. Ясно, что хотя бы для одного индекса, скажем, $\alpha = 1$, верно равенство $z_1(\lambda) \equiv 0$. Из системы (25) имеем $z_{\nu}(\lambda)\bar{z}_1(\lambda) \mid \{z_1(\lambda) = 0\} \equiv 0$. Если $\bar{z}_1(\lambda) \mid \{z_1(\lambda) = 0\} \equiv 0$, то из предыдущего условия получаем для любого значения индекса ν , что $z_{\nu}(\lambda) \mid \{z_1(\lambda) = 0\} \equiv 0$. Следовательно, $z_{\nu}(\lambda) = c_{\nu}z_1(\lambda)$, $c_{\alpha} = \text{const}$, $c_1 = 1$. Это означает, что $v_{\alpha\nu} = v_{\alpha 1}c_{\nu}$, откуда в силу антисимметрии тензора v записываем равенство $v_{\alpha 1} = 0$. Следовательно, $v_{\alpha\nu} = 0$, что противоречит исходным данным рассматриваемого случая. Следовательно, $\bar{z}_1(\lambda) \mid \{z_1(\lambda) = 0\} \equiv 0$, откуда имеем $\bar{z}_1(\lambda) = c z_1(\lambda)$, $c = \text{const}$. Теперь из условия (25) получаем, что $\bar{z}_{\alpha}(\lambda) = c z_{\alpha}(\lambda)$, поэтому $\bar{v}_{\nu\alpha} = c v_{\nu\alpha}$. Учитывая равенства (20), (21) заключаем, что $V_{\bar{v}} = c V_v$. Таким образом, в данном случае теорема верна.

3. Умножая уравнение (23) на $g_{\nu\mu}$, получаем равенство $w_{\cdot\alpha}\bar{w}_{\cdot\nu} = w_{\cdot\nu}\bar{w}_{\cdot\alpha}$. Отсюда имеем $\nabla\bar{w} = \lambda\nabla w$. Используя лемму 5, видим, что $\nabla\lambda = 0$, а учитывая равенства (17) и (19), заключаем, что $W_{\bar{w}} = \lambda W_w$. Таким образом, теорема доказана полностью.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для интегрирования уравнения Дирака достаточно построить наборы, каждый из которых содержит не более одного нелиевского оператора. Точнее, следует построить наборы попарно коммутирующих операторов симметрии трех типов:

- 1) набор содержит только лиевские операторы;
- 2) набор включает кроме лиевских один оператор типа W ;
- 3) набор включает кроме лиевских один оператор типа V .

Справедливость следствия 4 вытекает из теоремы 1, следствия 3 и очевидного утверждения: для операторов U, W, V вида (16), (17), (20) из равенства $U+W+V=0$ вытекает, что $U=0, W=0, V=0$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Верно утверждение

$$[W_w, H] = 0, \quad \Delta_2(w) = 0 \iff [U_{\nabla w}, H] = 0, \quad U_{\nabla w} = w_{\cdot\alpha}P^\alpha.$$

ЛЕММА 6. Если векторы $\vec{u}$ и ∇w удовлетворяют соответственно уравнениям (18), (19), то верно утверждение $\nabla w(x) = c(x)\vec{u}(x) \implies \Delta_2(w) = 0, \nabla c = 0$.

ЛЕММА 7. Если векторы ∇w и $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots$ удовлетворяют соответственно уравнениям (18) и (19), то верно утверждение $\nabla w(x) = c_a(x)\vec{u}_a(x) \implies \Delta_2(w) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (19) принимает вид $g_{\nu\mu}\Delta_2(w)/4 = c_{a\nu}u_{a|\mu} + c_a u_{a|\mu\nu}$. Отсюда вытекает в силу (15), (16), (18), что $g_{\nu\mu}\Delta_2(w)/2 = c_{a\nu}u_{a|\mu} + c_{a\mu}u_{a|\nu}$. Если $\Delta_2(w) \neq 0$, то вышеприведенное уравнение задает метрический тензор с сигнатурой $(-1, -1, 1, 1)$. Таким образом, в рассматриваемом пространстве V_4 можно записать равенство $\Delta_2(w) = 0$, и лемма доказана.

Естественно поставить следующие две задачи.

1. Пусть заданы метрический тензор g и тензор поля F . Требуется вычислить операторы симметрии уравнения Дирака (эта задача относительно проста и не представляет особого интереса с точки зрения алгебраических свойств уравнения). В настоящей работе эта задача не рассматривается.

2. Требуется определить все тензоры g и F , с которыми уравнения (18) и (19) имеют нетривиальные решения. Другими словами, нужно провести алгебраическую классификацию пространств и полей. Подчеркнем, что для решения этой задачи следует вначале классифицировать пространства по “свободным” ($F=0$) уравнениям, а затем найти из соответствующих уравнений (18), (19) допустимые поля. Этим вопросам посвящены следующие разделы.

Выпишем свободные определяющие уравнения для координат оператора симметрии:

$$u_{\nu\cdot\mu} + u_{\mu\cdot\nu} = 0, \tag{26}$$

$$4w_{\cdot\nu\mu} = \Delta_2(w)g_{\nu\mu}, \tag{27}$$

$$v_{\nu\mu} + v_{\mu\nu} = 0, \quad v_{\nu\mu\alpha} = e_{\nu\mu\alpha\sigma}v^\sigma. \tag{28}$$

Чтобы найти общий вид пространства, в котором “свободное” уравнение Дирака допускает один оператор симметрии, следует решать уравнения (26)–(28) независимо друг от друга.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Рассматривая систему (26) в качестве классификационного признака, мы считаем решением этой системы пару (g, u) , где g – неособенный симметричный тензор с сигнатурой $(-1, -1, -1, 1)$, u – ненулевой вектор. Назовем пары (g, u) и $(\bar{g}, \bar{u})$ эквивалентными, если существуют функции $f^\alpha(x)$ такие, что $\det(\partial f^\alpha / \partial x^\nu) \neq 0$, с которыми

$$\bar{g}_{\nu\mu}(x) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\mu} \bar{g}_{\alpha\beta}(f), \quad \bar{u}_\nu(x) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\nu} u_\alpha(f).$$

Очевидно, если заданная пара является решением, то каждая эквивалентная ей пара есть решение той же системы. Таким образом, все решения можно разбить на классы эквивалентности, поэтому достаточно указать по одному представителю из каждого класса (впрочем, иногда мы указываем несколько представителей одного класса). Аналогично следует поступать, имея дело с системами (27) и (28). Как и в работе [5], здесь также опущены соответствующие расчеты. Перейдем непосредственно к рассмотрению свободного уравнения с лиевским оператором.

4. СВОБОДНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЛИЕВСКИМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть система (26) – уравнение Киллинга – имеет нетривиальное решение u . Как известно, в системе координат, где $u^\alpha = \delta_1^\alpha$, метрический тензор не зависит от переменной x^1 . Это и есть ответ на поставленный вопрос. Рассмотрим подробнее свободный оператор Дирака. Напомним, что неособенное гладкое преобразование $x' = f(x)$ называется движением V_4 , если выполнены тождества

$$\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}(x) = g^{\nu\mu}(f). \quad (29)$$

Оказывается, для матриц $\gamma^\alpha(x)$ можно получить аналогичное соотношение. Точнее, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 8. Система

$$S^{-1}(x) \gamma^\alpha(x) S(x) \frac{\partial f^\nu(x)}{\partial x^\alpha} = \gamma^\nu(f), \quad \det S(x) = 1, \quad (30)$$

имеет гладкое решение S , если и только если функции f удовлетворяют условию (29).

Очевидно, в силу равенств (6) и (30) для матриц g_ν

$$S^{-1}(x) g_\nu(x) S(x) + S^{-1}(x) S_{,\nu} = g_\alpha(f) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\nu}.$$

Принимая во внимание это равенство и условие (30), заключаем, что оператор Дирака для свободной частицы является инвариантным скаляром относительно комбинированного преобразования $S^{-1}(x) \gamma^\nu(x) p_\nu S(x) = \gamma^\nu(x') p'_\nu$. Здесь функция f и матрица S удовлетворяют соответственно условиям (29) и (30).

Обратимся к однопараметрической группе движений, определяемой вектором Киллинга u с помощью уравнения

$$\frac{\partial f^\nu}{\partial t} = u^\nu(f), \quad f(x, t = 0) = x^\nu.$$

ЛЕММА 9. Система

$$S^{-1} \gamma^\alpha S \frac{\partial f^\nu(x, t)}{\partial x^\alpha} = \gamma^\nu(f), \quad \det S(x, t) = 1, \quad \text{Sp } S(x, 0) = 4, \quad (31)$$

имеет единственное гладкое по (x, t) решение S , причем

$$S^{-1} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = u^\alpha(f) g_\alpha(f) + \frac{1}{4} u_{\alpha, \beta}(f) \gamma^\beta(f) \gamma^\alpha(f), \quad S(x, 0) = E. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность решения очевидны. Докажем выполнение условия (30). Дифференцируя тождество (31) по t и учитывая уравнение на функции f , получаем, что

$$u_{\nu, \alpha}(f) \gamma^\alpha(f) = \left[S^{-1} \frac{\partial S}{\partial t}, \gamma_\nu(f) \right] + u^\alpha(f) \gamma_{\nu, \alpha}(f).$$

Учитывая равенство (6) и легко проверяемое тождество

$$4u_{\nu, \alpha}(x) \gamma^\alpha(x) = [u_{\alpha, \beta}(x) \gamma^\beta \gamma^\alpha, \gamma_\nu],$$

предыдущее равенство записываем в виде

$$\left[S^{-1} \frac{\partial S}{\partial t} - u_\alpha(f) \gamma^\alpha(f) - \frac{1}{4} u_{\alpha, \beta}(f) \gamma^\beta(f) \gamma^\alpha(f), \gamma_\nu(f) \right] = 0.$$

Отсюда с учетом равенства $\det S(x, t) = 1$ имеем первое из равенств (32). Из первого равенства (31) получаем, что $S(x, 0) = s(x)E$. Из второго равенства (31) находим, что $s(x) = 1$. Таким образом, лемма доказана.

Обозначим через $Z_u(x)$ какое-либо гладкое решение системы

$$\left[u^\alpha(x) p_\alpha + \frac{i}{4} u_{\alpha, \beta}(x) \gamma^\beta(x) \gamma^\alpha(x) \right] Z_u(x) = 0, \quad \det Z_u(x) = 1. \quad (33)$$

Ясно, что общее решение этой системы можно записать в виде $Z_u(x)C(x)$, где $C(x)$ – любая матрица вида $\det C(x) = 1$, $C(x) = C(f(x, t))$.

ЛЕММА 10. Решение системы (32) имеет вид $S = Z_u(x)Z_u^{-1}(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим решение уравнения (32) в виде $S = YZ_u^{-1}(f)$ и перепишем это уравнение для матрицы S^{-1} :

$$-\frac{\partial S^{-1}}{\partial t}(x, t)S(x, t) = u^\alpha(f)g_\alpha(f) + \frac{1}{4}u_{\alpha, \beta}(f)\gamma^\beta(f)\gamma^\alpha(f).$$

Отсюда с учетом (33) находим, что $\partial Y(x, t)/\partial t = 0$. Используя начальное условие для S , получаем равенство $Y(x, t) = Z_u(x)$, что и требовалось доказать.

Введем базис (Γ) по формуле

$$\Gamma^\nu(x) = Z_u^{-1}(x)\gamma^\nu(x)Z_u(x), \quad (34)$$

тогда равенства (31), (33) принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha(x) \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\alpha} &= \Gamma^\nu(f(x, t)) \iff u^\alpha \Gamma_{,\alpha}^\nu = \Gamma^\alpha u_{,\alpha}^\nu, \\ u^\alpha(x) G_\alpha(x) + \frac{1}{4} u_{\nu,\mu}(x) \Gamma^\mu(x) \Gamma^\nu(x) &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где матричный вектор G есть решение уравнения (6) в базисе (Γ) . Из уравнения (35) следует, что в системе координат, где $u^\alpha(x) = \delta_1^\alpha$, элементы базиса (Γ) не зависят от первой переменной, поэтому мы назовем этот базис u -инвариантным. Согласно (15), (35) оператор симметрии U_u уравнения Дирака для частицы в поле в u -инвариантном базисе имеет вид $u^\alpha i \partial_\alpha + u^\alpha A_\alpha + u$. В разделе 5 показано, что существует такая функция s , что $u + u^\alpha A_\alpha = u^\alpha s_{,\alpha}$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть U_u – лиевский оператор симметрии вида (16) уравнения Дирака для частицы в поле с потенциалом A . Тогда:

- 1) существуют $s, a_\alpha : A_\alpha = s_{,\alpha} + a_\alpha$, $u^\nu a_{\alpha,\nu} = a_\nu u_{\alpha,\nu}$;
- 2) верны выражения $e^{-is} Z_u^{-1} U_u e^{is} = i u^\alpha \partial_\alpha$, $e^{-is} Z_u^{-1} H Z_u e^{is} = \Gamma^\alpha \{p_\alpha + a_\alpha\}$;
- 3) свободное уравнение Дирака с потенциалом $A_\alpha = s_{,\alpha}$ имеет оператор симметрии U_u .

СЛЕДСТВИЕ 6. В условиях теоремы 2 уравнение Дирака допускает частичное разделение переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, система

$$U_u \Psi = \varepsilon_1 \Psi, \quad H \Psi = \varepsilon \Psi$$

в привилегированной системе координат после замены $\Psi = e^{is} Z_u \Phi$ согласно теореме 2 принимает вид

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} = \varepsilon_1 \Phi, \quad \Gamma^\alpha \left\{ i \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + G_\alpha \right) + a_\alpha \right\} \Phi = \varepsilon \Phi,$$

где функции a_α , матрицы G_α и Γ_α не зависят от x^1 (последние – в силу условий (35)). Таким образом, следствие доказано (в настоящей работе используются результаты теории разделения переменных в линейных системах первого порядка [6], [7]).

В заключение сформулируем важное для построения полных наборов свойство коммутирующих векторов Киллинга.

ЛЕММА 11. Линейно независимые попарно коммутирующие векторы Киллинга u , $u_{|1}$, $u_{|2}$ линейно несвязанны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: $\vec{u}(x) = c_a(x) \vec{u}_{|a}|$. Так как вектор u коммутирует с векторами $\vec{u}_{|a}|$, то $u_{|a}| c_{b,\nu} u_{|b}|^\mu = 0$. В силу леммы 5 векторы $u_{|1}|$, $u_{|2}|$ линейно

несвязанны, поэтому из вышеприведенного равенства получаем, что $u_{a|}^{\nu} c_{b,\nu} = 0$. Так как $\vec{u}$ есть вектор Киллинга, то

$$c_{a,\nu} u_{a|\mu} + c_{a,\mu} u_{a|\nu} = 0. \quad (36)$$

Отсюда в силу предыдущего равенства находим, что

$$G_{ab} c_{b,\nu} = 0, \quad G_{ab} \equiv u_{a|}^{\alpha} u_{b|\alpha}. \quad (37)$$

Поскольку в пространстве с сигнатурой $(-1, -1, -1, 1)$ изотропные взаимно ортогональные векторы линейно связаны между собой, то из линейной независимости векторов $u_{a|}$ следует, что (G_{ab}) – ненулевая матрица.

Рассмотрим возможные ситуации.

1. Пусть $\det(G_{ab}) \neq 0$. Тогда из системы (37) находим, что $\nabla c_a = 0$,
2. Пусть $\det(G_{ab}) = 0$. Тогда из системы (37) вытекает коллинеарность векторов ∇c_1 и ∇c_2 , поэтому $c_1 = \varphi(c_2)$. Теперь уравнение (36) принимает следующий вид: $c_{2,\mu}(\varphi' u_{1|\nu} + u_{2|\nu}) + c_{2,\nu}(\varphi' u_{1|\mu} + u_{2|\mu}) = 0$. Так как векторы $u_{a|}$ линейно несвязаны, имеем равенство $\nabla c_2 = 0$, в силу которого последнее уравнение дает равенство $\nabla c_a = 0$. Итак, всегда c_a являются числами, т.е. векторы u , $u_{1|}$, $u_{2|}$ линейно независимы, что противоречит условию леммы. Сделанное допущение неверно и лемма доказана.

5. СВОБОДНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОПЕРАТОРОМ ВИДА W

Пусть система (27) имеет нетривиальное решение $\nabla w \neq 0$. В системе координат, где $w^{\alpha} = \delta_1^{\alpha}$, метрический тензор имеет следующий вид.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $\Delta_1(w) = 0$, тогда $g_{1\nu} = \delta_{4\nu}$, $g_{4\nu} = \delta_{1\nu} + a\delta_{4\nu}$, $\partial g_{\nu\mu}/\partial x^1 = 0$. В этом случае из (27) имеем $\Delta_2(w) = 0$, поэтому в пространстве существует градиентный изотропный вектор Киллинга ∇w .

СЛУЧАЙ 2. Пусть $\Delta_1(w) = e = \pm 1$, тогда $g_{1\nu} = e\delta_{1\nu}$, $g_{4\nu} = G\delta_{4\nu}$, $\partial g_{\nu\mu}/\partial x^1 = 0$. И в этом случае $\Delta_2(w) = 0$, поэтому в пространстве существует градиентный единичный вектор Киллинга ∇w .

СЛУЧАЙ 3. Пусть $\Delta_1(w) = ee^{2\lambda(x^1)}$, тогда

$$g_{\nu\mu} = e^{2\lambda} \bar{g}_{\nu\mu}, \quad \lambda'(x^1) \neq 0, \quad \bar{g}_{1\nu} = e\delta_{1\nu}, \quad \bar{g}_{4\nu} = c\delta_{4\nu}, \quad \frac{\partial \bar{g}_{\nu\mu}}{\partial x^1} = 0. \quad (38)$$

В этом случае $\Delta_2(w) = 4\lambda'$, т.е. в пространстве существует градиентный неизотропный конформный вектор Киллинга ∇w . Очевидно, уравнения геодезических допускают первый интеграл второго порядка вида

$$I = e^{4\lambda} \sum_{i,j>1} \bar{g}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j,$$

следовательно, V_4 принадлежит классу почти приводимых штеккелевых пространств типа $(0, 0/1, 3)$ (см. работу [8]).

Рассмотрим некоторые свойства оператора симметрии W_w уравнения Дирака для частицы в поле. Пусть Z – некоторое решение системы

$$w^{\cdot\alpha} p_\alpha(Z) = 0, \quad \det Z = 1. \quad (39)$$

Очевидно, общее решение этой системы можно записать как ZC , где C – любая матрица вида $\det C(x) = 1$, $w^{\cdot\alpha} C_{\cdot\alpha} = 0$. Легко установить тождество

$$W_w = 2\gamma w^{\cdot\alpha} \mathcal{P}_\alpha + \frac{3}{4} i \gamma \Delta_2 w - 2\gamma w_{\cdot\alpha} \gamma^\alpha H.$$

Теперь, имея в виду теорему 2, нетрудно убедиться в справедливости утверждения, сформулированного ниже.

ТЕОРЕМА 3. *Если W_w – оператор симметрии вида (17) с векторным потенциалом $\mathcal{A}$, то*

- 1) *существуют $s_{\cdot\alpha}$ такие, что $\mathcal{A}_\alpha = s_{\cdot\alpha} + a_\alpha$, $a_\alpha w_{\cdot\alpha} = 0$, $w^{\cdot\alpha} a_{\nu\cdot\alpha} = a^\alpha w_{\cdot\nu\alpha}$;*
- 2) *имеет место равенство $\gamma W_w/2 = w_{\cdot\alpha} \gamma^\alpha H - Z w^{\cdot\alpha} (i\partial_\alpha + s_{\cdot\alpha}) Z^{-1} - 3i\Delta_2(w)/8$;*
- 3) *существует такое решение системы (39), что базис, определяемый вектором $\Gamma_\nu = Z^{-1} \gamma_\nu Z$, является каноническим, а ∇w – конформно инвариантным, т. е. $L_{\nabla w}(\Gamma) + \Delta_2(w)\Gamma_\nu = 0$;*
- 4) *в случае $\Delta_2(w) = 0$ выполняются равенства $[U_{\nabla w}, H] = [U_{\nabla w}, W_w] = 0$.*

СЛЕДСТВИЕ 7. *В условиях теоремы 3 уравнение Дирака допускает частичное разделение переменных.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется внимания лишь случай $\Delta_2 w \neq 0$. Система

$$W_w \Psi = \varepsilon_1 \Psi, \quad H \Psi = \varepsilon \Psi \quad (40)$$

в привилегированной системе координат, где $w^{\cdot\alpha} = \delta_1^\alpha$, после замены $\Psi = e^{is} Z \Phi$ принимает вид системы двух уравнений на Φ , в которой коэффициенты первого уравнения зависят только от переменной x^1 , а коэффициенты второго уравнения не зависят от x^1 , что и требовалось доказать.

В заключение сформулируем важное для построения полных наборов следствие из леммы 7 и леммы 11: линейно независимые попарно коммутирующие векторы $u_1, u_2, \nabla w$, удовлетворяющие соответствующим уравнениям (18), (19), линейно несвязанны.

6. СВОБОДНОЕ УРАВНЕНИЕ С ОПЕРАТОРОМ КИЛЛИНГА–ЯНО

6.1. Общие замечания. Приведем другие формы системы (28). Очевидно, из этой системы следует система

$$v_{\nu\mu} + v_{\mu\nu} = 0, \quad v_{\nu\mu\cdot\alpha} = v_{\nu\alpha\cdot\mu}. \quad (41)$$

Последняя равносильна исходной в V_4 , однако представляет известный интерес для классификации римановых пространств произвольной размерности. Пусть v^* – дуальный тензор к тензору v :

$$2v_{\nu\mu}^* = e_{\nu\mu\alpha\beta} v^{\alpha\beta} \iff 2v_{\nu\mu} = -e_{\nu\mu\alpha\beta} v^{*\alpha\beta}.$$

Тогда из (28) получаем, что

$${}^*v_{\nu\mu} + {}^*v_{\nu\mu} = 0, \quad {}^*v_{\nu\mu,\alpha} = v_\nu g_{\mu\alpha} - v_\mu g_{\nu\alpha}. \quad (42)$$

Эта система равносильна исходной в V_4 , однако в пространстве произвольной размерности системы (41), (42) не равносильны, точнее, представляют различные классификационные признаки пространств. При изучении уравнений (28) большую роль играют скалярные характеристики v , ${}^*v$, k , ${}^*k$ тензора v :

$$8v = -{}^*v_{\nu\mu}v^{\mu\nu}, \quad 8{}^*v = v_{\nu\mu}v^{\mu\nu} = -{}^*v_{\nu\mu}{}^*v^{\mu\nu}, \quad k^2 - {}^*k^2 = {}^*v, \quad 2k{}^*k = v.$$

Отметим тождества

$${}^*v_{\mu\alpha}v^{\alpha\nu} = -2v\delta_\mu^\nu, \quad (v^2)_{\nu\mu} - ({}^*v^2)_{\nu\mu} = 4{}^*v g_{\nu\mu}. \quad (43)$$

Таким образом, справедливо заключение $\det(v_{\nu\mu}) = 0 \iff v = 0$. Для неособенного тензора v из системы (28) находим (при $\ln \det v \equiv h$), что

$$v_{\nu\mu} + v_{\mu\nu} = 0, \quad v_{\nu\mu,\alpha} = v_{\nu\mu}h_{,\alpha} + v_{\alpha\nu}h_{,\mu} + v_{\mu\alpha}h_{,\nu}. \quad (44)$$

Очевидно, любое решение этой системы является решением исходной системы (41) в пространстве любой размерности. Однако обратное утверждение, скорее всего, неверно. Система (44) дает еще один классификационный признак пространств V_n , $n > 2$.

Отметим полезные в дальнейшем соотношения, вытекающие из системы (42):

$$2v_{,\nu} = -v_{\nu\alpha}v^\alpha, \quad 2{}^*v_{,\nu} = -{}^*v_{\nu\alpha}v^\alpha. \quad (45)$$

Отсюда в случае $v \neq 0$ вытекает, что $v_{\nu\alpha}v^\alpha_\mu = v_{\mu\alpha}v^\alpha_\nu$, $v^{\nu\alpha}v^\mu_\alpha = v^{\mu\alpha}v^\nu_\alpha$. Следовательно, в этом случае тензор Киллинга–Яно v -инвариантен:

$$v^\alpha v^\nu_\alpha = v^{\nu\alpha}v^\mu_\alpha - v^{\mu\alpha}v^\nu_\alpha. \quad (46)$$

Обсудим важное свойство решений системы (28). Легко показать, что имеет место равенство $(v^2)_{\nu\mu,\alpha} + (v^2)_{\alpha\nu,\mu} + (v^2)_{\mu\alpha,\nu} = 0$, т.е. тензор v^2 задает первый интеграл второго порядка уравнений геодезических в V_4 . Теперь нетрудно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 12. *Пространство с тензором Киллинга–Яно является штекелевым.*

6.2. Список решений системы (28). Задача классификации пространств, допускающих тензор Киллинга–Яно, рассматривалась в работе [7], затем – в работах [9], [10]. Совокупность решений этой системы есть сумма двух непересекающихся множеств, первое из которых определяется условием $k{}^*k = 0$, второе – условием ${}^*k{}^*k \neq 0$. В свою очередь первое из указанных множеств есть сумма трех непересекающихся подмножеств, которые мы нумеруем индексом $(0.r)$, $r = 1, 2, 3$, и определяем следующим образом: при индексе (0.1) $k = {}^*k = 0$; при индексе (0.2) $k \neq 0$, ${}^*k = 0$; при индексе (0.3) $k = 0$, ${}^*k \neq 0$.

Второе множество ($k^* \neq 0$) есть сумма восьми непересекающихся подмножеств, которые мы нумеруем индексом $(a.\nu)$, $a = 1, 2$, $\nu = 1, \dots, 4$, и определяем так: при индексе (1.1) $\nabla^* k = 0$, $\nabla k = 0$; при индексе (1.2) $\Delta_1^*(k) = 0$, $\nabla k = 0$; при индексе (1.3) $\Delta_1^*(k) > 0$, $\nabla k = 0$; при индексе (1.4) $\Delta_1^*(k) < 0$, $\nabla k = 0$; при индексе (2.1) $\nabla^* k = 0$, $\nabla k \neq 0$; при индексе (2.2) $\Delta_1^*(k) = 0$, $\nabla k \neq 0$; при индексе (2.3) $\Delta_1^*(k) > 0$, $\nabla k \neq 0$; при индексе (2.4) $\Delta_1^*(k) < 0$, $\nabla k \neq 0$.

Далее приведены линейный элемент пространства, тензор Киллинга–Яно и соответствующий вектор v , векторы Киллинга (если они существуют) и штеккелев тип пространства.

Индекс (0.1). Здесь $ds^2 = 2e^{2\lambda(x_3, x_4)} dx_4 (dx_1 + \psi(x_2, x_3, x_4) dx_4) - e^{2\lambda} (dx_2^2 + dx_3^2)$, $v_{\nu\mu} = e^{3\lambda}(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 2})$, $v^\nu = e^{-\lambda}\lambda_{,3}\delta_1^\nu$. Существует изотропный вектор Киллинга $u^\nu = \delta_1^\nu$, причем $v^2 = \vec{u} \otimes \vec{u}$, $v\vec{u} = 0$. Таким образом, V_4 есть специальное штеккелево пространство типа $(1, 1/3)$. Верно соотношение (46), и ясно, что $k = k^* = 0$.

Индекс (0.2). Элемент $ds^2 = \psi^2(x_1, x_2)\varphi_2^2(x_3, x_4)(dx_4^2 - dx_3^2) - \varphi_1^2(x_1, x_2)(dx_2^2 + dx_1^2)$, тензор $v_{\nu\mu} = \psi^3\varphi_2^2(\delta_{\nu 4}\delta_{\mu 3} - \delta_{\nu 3}\delta_{\mu 4})$, вектор $v^\nu = \varphi_1^{-2}(\delta_2^\nu\psi_{,1} - \delta_1^\nu\psi_{,2})$. Легко видеть, что сигнатура тензора v^2 равна $(0, 0, -1, 1)$. В общем случае не существует вектор Киллинга, т.е. V_4 есть почти приводимое пространство Штеккеля типа $(0, 0/2, 2)$.

Имеет место соотношение (46), и легко видеть, что $2k = \psi$, $k^* = 0$.

Индекс (0.3). Элемент $ds^2 = \varphi_2^2(x_3, x_4)(dx_4^2 - dx_3^2) - \psi^2(x_3, x_4)\varphi_1^2(x_1, x_2)(dx_1^2 + dx_2^2)$, тензор $v_{\nu\mu} = \psi^3\varphi_1^2(\delta_{\nu 1}\delta_{\mu 2} - \delta_{\nu 2}\delta_{\mu 1})$, вектор $v^\nu = \varphi_2^{-2}(\delta_4^\nu\psi_{,3} - \delta_3^\nu\psi_{,4})$. Легко видеть, что сигнатура тензора v^2 равна $(1, 1, 0, 0)$. В общем случае не существует вектор Киллинга, т.е. V_4 есть почти приводимое пространство Штеккеля типа $(0, 0/2, 2)$.

Верно соотношение (46), нетрудно видеть, что $k = 0$, $2k^* = \psi$.

Индекс (1.1). Здесь элемент $ds^2 = \varphi_2^2(x_3, x_4)(dx_4^2 - dx_3^2) - \varphi_1^2(x_1, x_2)(dx_2^2 + dx_1^2)$, тензор $v_{\nu\mu} = 2k\varphi_2^2(\delta_{\nu 3}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 3}) + 2k^*\varphi_1^2(\delta_{\nu 1}\delta_{\mu 2} - \delta_{\nu 2}\delta_{\mu 1})$, вектор $v^\nu = 0$. В общем случае не существует вектор Киллинга, таким образом, V_4 есть приводимое пространство Штеккеля типа $(0, 0/2, 2)$. Здесь $k, k^* - \text{const} \neq 0$.

Индекс (1.2). Элемент $ds^2 = 2dx_4(dx_1 - l(x_2, x_3)dx_3) - (1 + x_4^2)l_{,2}/2(dx_2^2 + dx_3^2)$, тензор $v_{\nu\mu} = 2l(\delta_{\nu 3}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 3}) - 2(\delta_{\nu 1}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 1}) + x_4(1 + x_4^2)l_{,2}(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 3} - \delta_{\nu 3}\delta_{\mu 2})$, вектор $v^\nu = -2\delta_{\nu 4}$. Существует изотропный вектор Киллинга $u_{|1}^\nu = \delta_1^\nu$, причем $v^2\vec{u}_{|1} = 4\vec{u}_{|1}$.

Таким образом, V_4 есть пространство Штеккеля типа $(1, 1/1, 2)$, а $k = 1$, $k^* = x_4$. Дополнительной лиевской симметрией пространства обладают в двух случаях, перечисленных ниже.

1. Если $l = x_2$, то допустимы векторы Киллинга $u_{|1}^\nu = \delta_1^\nu$, $u_{|2}^\nu = \delta_2^\nu + x_3\delta_1^\nu$, $u_{|3}^\nu = \delta_3^\nu$, $u_{|4}^\nu = (x_3^2 - x_2^2)\delta_1^\nu/2 + x_3\delta_2^\nu - x_2\delta_3^\nu$. Для коммутаторов векторов имеют место равенства $\{u_{|1}, u_{|\alpha}\} = 0$, $\{u_{|2}, u_{|3}\} = -u_{|1}$, $\{u_{|4}, u_{|2}\} = u_{|3}$, $\{u_{|3}, u_{|4}\} = u_{|2}$. Каждый вектор $u_{|\alpha}$ коммутирует с тензором Киллинга–Яно, т.е. удовлетворяет условию (46). К тому же мы имеем $(\vec{u}_{|1}, \vec{u}_{|2}) = 0$, $v^2\vec{u}_{|\alpha} = a_\alpha\vec{u}_{|1} + b_\alpha\vec{u}_{|\alpha}$. Следовательно, V_4 есть пространство Штеккеля типа $(2, 1/1, 1)$.

2. Если $l = l(x_2 - x_3)$, то допустим также вектор Киллинга $u_{|2}^\nu = \delta_2^\nu + \delta_3^\nu$, при этом $\vec{u}_{|1}$ и $\vec{u}_{|2}$ коммутируют друг с другом и с тензором Киллинга–Яно. К тому

же мы имеем $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$, $v^2 \vec{u}_2 = -4x_4^2 \vec{u}_2$. Следовательно, V_4 – пространство Штеккеля типа $(2, 1/1, 1)$.

Индекс (1.3). Здесь

$$ds^2 = e^{-2\xi(x_4)} dx_4^2 - \frac{1}{2}(1 + x_4^2)l_{.2}(dx_2^2 + dx_3^2) - e^{2\xi}(dx_1 - l(x_2, x_3)dx_3)^2,$$

тензор $v_{\nu\mu} = 2l(\delta_{\nu 3}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 3}) - 2(\delta_{\nu 1}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 1}) + x_4(1 + x_4^2)l_{.2}(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 3} - \delta_{\nu 3}\delta_{\mu 2})$, вектор $v^\nu = -2\delta_1^\nu$. Существует вектор Киллинга $u_1^\nu = \delta_1^\nu$, причем $(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = -e^{2\xi}$, $v^2 \vec{u}_1 = 4\vec{u}_1$. Таким образом, V_4 есть пространство Штеккеля типа $(1, 0/1, 2)$ и $k = 1$, $\overset{*}{k} = x_1$. Дополнительной лиевской симметрией обладают пространства в двух следующих случаях.

1. Если $l = x_2$, то допустимы векторы Киллинга $u_1^\nu = \delta_1^\nu$, $u_2^\nu = \delta_2^\nu + x_3\delta_1^\nu$, $u_3^\nu = \delta_3^\nu$, $u_4^\nu = (x_4^2 - x_2^2)\delta_1^\nu/2 + x_3\delta_2^\nu - x_2\delta_3^\nu$. Для коммутаторов векторов имеем $\{u_1, u_\alpha\} = 0$, $\{u_2, u_3\} = -u_1$, $\{u_4, u_2\} = u_3$, $\{u_3, u_4\} = u_2$. Каждый вектор u_α коммутирует с тензором Киллинга–Яно, к тому же для любой пары линейно независимых векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u} = c_\alpha \vec{u}_\alpha$ (c – постоянные) верны формулы $(\vec{u}_1, \vec{u}_1)(\vec{u}, \vec{u}) \neq (\vec{u}_1, \vec{u})^2$, $v^2 \vec{u}_\alpha = a_\alpha \vec{u}_1 + b_\alpha \vec{u}_\alpha$. Следовательно, V_4 – пространство Штеккеля типа $(2, 0/1, 1)$.

2. Если $l = l(x_2 - x_3)$, то допустим также вектор Киллинга $u_2^\nu = \delta_2^\nu + \delta_3^\nu$, при этом $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ коммутируют друг с другом и с тензором Киллинга–Яно. К тому же мы имеем $(\vec{u}_1, \vec{u}_1)(\vec{u}_2, \vec{u}_2) \neq (\vec{u}_1, \vec{u}_2)^2$, $v^2 \vec{u}_2 = -4x_4^2 \vec{u}_2$. Таким образом, V_4 – пространство Штеккеля типа $(2, 0/1, 1)$.

Индекс (1.4). Теперь

$$ds^2 = e^{2\xi(x_4)} \{dx_1 - l(x_2, x_3)dx_3\}^2 - e^{-2\xi} dx_4^2 - \frac{1}{2}(1 + x_4^2)l_{.2}(dx_2^2 + dx_3^2),$$

$v_{\nu\mu} = 2l(\delta_{\nu 3}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 3}) - 2(\delta_{\nu 1}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 1}) + x_4(1 + x_4^2)l_{.2}(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 3} - \delta_{\nu 3}\delta_{\mu 2})$, $v^\nu = -2\delta_1^\nu$. Существует вектор Киллинга $u_1^\nu = \delta_1^\nu$, причем $(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = e^{2\xi}$, $v^2 \vec{u}_1 = 4\vec{u}_1$, т. е. V_4 – пространство Штеккеля типа $(I, 0/I, 2)$. Здесь $k = 1$, $\overset{*}{k} = x_4$. Дополнительной симметрией пространство обладает в тех же двух случаях, что и в случае пространства с индексом (1.3).

Индекс (2.1). Здесь $ds^2 = (1 + x_2^2)l_{.1}(x_1, x_4)dx_1dx_4 - e^{-2\xi(x_2)}dx_2^2 - e^{2\xi}\{dx_3 + ldx_4\}^2$, $v_{\nu\mu} = 2l(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 2}) + 2(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 3} - \delta_{\nu 3}\delta_{\mu 2}) + x_2(1 + x_2^2)l_{.1}(\delta_{\nu 4}\delta_{\mu 1} - \delta_{\nu 1}\delta_{\mu 4})$, $v^\nu = -2\delta_3^\nu$. Существует вектор Киллинга $u_1^\nu = \delta_3^\nu$, причем $(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = -e^{2\xi}$, $v^2 \vec{u}_1 = -4\vec{u}_1$. Таким образом, V_4 есть пространство Штеккеля типа $(1, 0/1, 2)$. В данном случае $k = x_2$, $\overset{*}{k} = 1$. При $l = x_1$ допустимы векторы Киллинга $u_1^\nu = \delta_3^\nu$, $u_2^\nu = \delta_1^\nu - x_4\delta_3^\nu$, $u_3^\nu = \delta_4^\nu$, $u_4^\nu = x_1\delta_1^\nu - x_4\delta_4^\nu$, а для коммутаторов векторов имеем $\{u_1, u_\alpha\} = 0$, $\{u_2, u_3\} = u_1$, $\{u_2, u_4\} = u_2$, $\{u_4, u_3\} = u_3$. Каждый вектор коммутирует с тензором Киллинга–Яно, к тому же верны равенства $(\vec{u}_1, \vec{u}_1)(\vec{u}_2, \vec{u}_2) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)^2$, $(\vec{u}_1, \vec{u}_1)(\vec{u}_3, \vec{u}_3) = (\vec{u}_1, \vec{u}_3)^2$, $(\vec{u}_1, \vec{u}_1)(\vec{u}_4, \vec{u}_4) = (\vec{u}_1, \vec{u}_4)^2$, $v^2 \vec{u}_\alpha = a_\alpha \vec{u}_1 + b_\alpha \vec{u}_\alpha$. При $l = l(x_1 - x_4)$ допустим также вектор Киллинга $u_2^\nu = \delta_1^\nu + \delta_4^\nu$, при этом u_1 и u_2 коммутируют друг с другом и с тензором Киллинга–Яно, $(\vec{u}_1, \vec{u}_1)(\vec{u}_2, \vec{u}_2) \neq (\vec{u}_1, \vec{u}_2)^2$, $v^2 \vec{u}_2 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_\alpha$. Таким образом, V_4 – пространство Штеккеля типа $(2, 0/1, 1)$.

Индекс (2.2). Теперь

$$ds^2 = 2 dx_4(dx_3 - x_2^2 dx_1) - e^{2\varphi(x_2)}(x_2^2 + x_4^2) dx_2^2 - e^{-2\varphi}(x_2^2 + x_4^2)^{-1} \{dx_3 + x_4^2 dx_1\}^2, \\ v_{\nu\mu} = 2x_2(\delta_{\nu 4}\delta_{\mu 3} - \delta_{\nu 3}\delta_{\mu 4}) + 2x_4(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 3} - \delta_{\nu 3}\delta_{\mu 2}) + 2x_2^3(\delta_{\nu 1}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 1}) + \\ + 2x_4^3(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 1} - \delta_{\nu 1}\delta_{\mu 2}),$$

$v^\nu = -2\delta_3^\nu$, $k = x_2$, $\overset{*}{k} = x_4$. Существуют коммутирующие друг с другом и с тензором Киллинга–Яно векторы Киллинга $u_{1|}^\nu = \delta_3^\nu$ и $u_{2|}^\nu = \delta_1^\nu$, причем $(\vec{u}_{1|}, \vec{u}_{1|}) < 0$, $(\vec{u}_{2|}, \vec{u}_{2|}) < 0$, $\det((\vec{u}_{i|}, \vec{u}_{j|})) = 0$, $v^2 \vec{u}_{i|} = a_{ij} \vec{u}_{j|}$. Следовательно, V_4 есть пространство Штеккеля типа $(2, 1/1, 1)$.

Индекс (2.3). Здесь

$$ds^2 = e^{2\psi(x_4)}(x_2^2 + x_4^2) dx_4^2 - e^{-2\psi}(x_2^2 + x_4^2)^{-1} \{x_2^2 dx_1 - dx_3\}^2 - \varphi^2(x_2)(x_2^2 + x_4^2) dx_2^2 - \\ - \varphi^{-2}(x_2^2 + x_4^2)^{-1} (dx_3 + x_4^2 dx_1)^2, \\ v_{\nu\mu} = 2x_2(\delta_{\nu 4}\delta_{\mu 3} - \delta_{\nu 3}\delta_{\mu 4}) + 2x_4(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 3} - \delta_{\nu 3}\delta_{\mu 2}) + 2x_2^3(\delta_{\nu 1}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 1}) + \\ + 2x_4^3(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 1} - \delta_{\nu 1}\delta_{\mu 2}),$$

$v^\nu = -2\delta_3^\nu$, $k = x_2$, $\overset{*}{k} = x_4$. Существуют коммутирующие друг с другом и с тензором Киллинга–Яно векторы Киллинга $u_{1|}^\nu = \delta_3^\nu$ и $u_{2|}^\nu = \delta_1^\nu$, причем $(\vec{u}_{1|}, \vec{u}_{1|}) < 0$, $(\vec{u}_{2|}, \vec{u}_{2|}) < 0$, $\det((\vec{u}_{i|}, \vec{u}_{j|})) \neq 0$, $v^2 \vec{u}_{i|} = a_{ij} \vec{u}_{j|}$. Таким образом, V_4 – пространство Штеккеля типа $(2, 0/1, 1)$.

Индекс (2.4). Наконец, здесь

$$ds^2 = \psi^{-2}(x_4)(x_2^2 + x_4^2)^{-1} (dx_3 - x_2^2 dx_1)^2 - \psi^2(x_2^2 + x_4^2) dx_4^2 - \varphi^2(x_2)(x_2^2 + x_4^2) dx_2^2 - \\ - \varphi^{-2}(x_2^2 + x_4^2)^{-1} (dx_3 + x_4^2 dx_1)^2, \\ v_{\nu\mu} = 2x_2(\delta_{\nu 4}\delta_{\mu 3} - \delta_{\nu 3}\delta_{\mu 4}) + 2x_4(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 3} - \delta_{\nu 3}\delta_{\mu 2}) + 2x_2^3(\delta_{\nu 1}\delta_{\mu 4} - \delta_{\nu 4}\delta_{\mu 1}) + \\ + 2x_4^3(\delta_{\nu 2}\delta_{\mu 1} - \delta_{\nu 1}\delta_{\mu 2}),$$

$v^\nu = -2\delta_3^\nu$, $k = x_2$, $\overset{*}{k} = x_4$. Существуют коммутирующие друг с другом и с тензором Киллинга–Яно векторы Киллинга $u_{1|}^\nu = \delta_3^\nu$ и $u_{2|}^\nu = \delta_1^\nu$, причем $(\vec{u}_{1|}, \vec{u}_{1|}) = q^2(\varphi - \psi)$, $(\vec{u}_{2|}, \vec{u}_{2|}) = p^2(\varphi - \psi + \ln x_2^2 - \ln x_4^2)$, $\det((\vec{u}_{i|}, \vec{u}_{j|})) \neq 0$, $v^2 \vec{u}_{i|} = a_{ij} \vec{u}_{j|}$. Таким образом, V_4 – пространство Штеккеля типа $(2, 0/1, 1)$.

6.3. Обсуждение результатов. Мы получили следующие результаты.

1. Пространство с тензором Киллинга–Яно является штеккелевым, поэтому свободное уравнение Гамильтона–Якоби $\triangle_1(S) = h$ допускает соответствующее частичное разделение переменных.

2. Пространства с индексами (2.2), (2.3), (2.4) допускают полный набор интегралов уравнений геодезических, поэтому свободное уравнение Гамильтона–Якоби допускает полное разделение переменных.

3. Если общего вида пространство с заданным индексом допускает вектор Киллинга, то этот вектор коммутирует с соответствующим тензором Киллинга–Яно.

4. В пространствах с индексами (1.2), (1.3), (1.4), $(2, \nu)$, $\nu = 1, \dots, 4$, вектором Киллинга является $\vec{v}$. Пространство с индексом (0.1) обладает, вообще говоря, вектором Киллинга, не равным $\vec{v}$.

5. В пространствах с любым индексом вектор $\vec{v}$ коммутирует с соответствующим тензором Киллинга–Яно.

6. На наш взгляд, интересен вопрос о принадлежности плоского пространства (пространства постоянной кривизны $\mathcal{K}_4$, и т. п.) множеству с заданным индексом. Ответ дает следующая лемма.

ЛЕММА 13. *Пространства с индексами (1.2), (1.3), (1.4), (2.1), (2.2) не являются плоскими. Множества (0.1), (0.2), (0.3), (1.1) содержат плоское пространство. Пространство с индексом (2.3) является плоским, если и только если $\varphi^{-2} = c^2 x_2^2 + c_0^2$, $\psi^{-2} = c^2 x_4^2 - c_0^2$. Пространство с индексом (2.4) является плоским, если и только если $\varphi^{-2} = c_0^2 + c^2 x_2^2$, $\psi^{-2} = c_0^2 - c^2 x_4^2$.*

Доказательство мы опускаем, отметим лишь, что оно опирается на очевидный факт: в плоском пространстве из (28) следует равенство $v_{\nu\mu} = 0$. Более того, в плоском (и только в таком пространстве) существуют четыре ковариантно постоянных линейно независимых вектора (так что $\vec{v}$ – один из них). Для ответа на вопрос о принадлежности пространства $\mathcal{K}_4$ множеству с заданным индексом полезно иметь в виду следующее: либо в пространстве $\mathcal{K}_4$ справедливо представление $k v_{\nu\mu}^* = v_{\mu\nu}$, либо V_4 есть $\mathcal{K}_4$, если и только если можно указать постоянную k , с которой вполне интегрируема система $f_{\nu\mu} + k g_{\nu\mu} f = 0$, где k – гауссова кривизна. Итак, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 14. *Множества с индексами (1.1), (1.2), (2.2) (и только такие множества) не содержат $\mathcal{K}_4$.*

7. ДОПУСТИМЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

7.1. Уравнение с лиевским оператором. Здесь следует рассмотреть уравнение (18). В системе координат, где $u^\nu = \delta_1^\nu$, имеем $\partial u / \partial x^\nu = \partial \mathcal{A}_\nu / \partial x^1 - \partial \mathcal{A}_1 / \partial x^\nu$. Отсюда вытекает, что $\partial F_{\nu\mu} / \partial x^1 = 0$, следовательно, справедливо представление

$$\mathcal{A}_\nu(x) = s_{,\nu}(x) + a_\nu(x^2, x^3, x^4), \quad u = u^\nu s_{,\nu} - u^\nu \mathcal{A}_\nu. \quad (47)$$

7.2. Уравнение с оператором вида W . Следует рассмотреть уравнение (19). В системе координат, где $w^\alpha = \delta_1^\alpha$, имеем $\partial \mathcal{A}_\nu / \partial x^1 = \partial \mathcal{A}_1 / \partial x^\nu$. Отсюда вытекает, что $\partial F_{\nu\mu} / \partial x^1 = 0$, следовательно, справедливо представление

$$\mathcal{A}_\nu(x) = s_{,\nu}(x) + a_\nu(x^2, x^3, x^4), \quad a_1 = 0, \quad a^\alpha w_{,\alpha} = 0. \quad (48)$$

7.3. Уравнение с оператором Киллинга–Яно. Следует рассмотреть третье уравнение (21). Мы приводим решения этого уравнения в пространстве с заданным индексом.

Индекс (0.1). Решение $\mathcal{A}_\nu(x) = \mathcal{A}(x_2, x_3, x_4) \delta_{\nu 4} + s_{,\nu}(x)$. В предыдущем разделе отмечено, что в этом случае существует вектор Киллинга $u_{1|}^\alpha = \delta_1^\alpha$. Очевидно, выполнено условие $u_{1|}^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$.

Индекс (0.2). Здесь $\mathcal{A}_\nu(x) = \mathcal{A}(x_1, x_2) \delta_{\nu 2} + \mathcal{B}(x_3, x_4) \delta_{\nu 4} + s_{,\nu}(x)$.

Индекс (0.3). Решение $\mathcal{A}_\nu(x) = \mathcal{A}(x_1, x_2) \delta_{\nu 2} + \mathcal{B}(x_3, x_4) \delta_{\nu 4} + s_{,\nu}(x)$.

Индекс (1.1). Решение $\mathcal{A}_\nu(x) = \mathcal{A}(x_2, x_3) \delta_{\nu 2} + \mathcal{B}(x_1, x_4) \delta_{\nu 4} + s_{,\nu}(x)$.

Индекс (1.2). Здесь $\mathcal{A}_\nu(x) = \mathcal{A}(x_4)\delta_{\nu 1} + \{\mathcal{B}(x_2, x_3) - \mathcal{A}\}\delta_{\nu 3} + s_{\cdot\nu}(x)$. В предыдущем разделе отмечено, что в данном случае существует вектор Киллинга u_1 . Легко видеть, что $u_1^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$.

Индекс (1.3). Здесь $\mathcal{A}_\nu(x) = \mathcal{A}(x_4)\delta_{\nu 1} + \{\mathcal{B}(x_2, x_3) + \mathcal{A}\}\delta_{\nu 3} + s_{\cdot\nu}(x)$. В данном случае справедливо равенство $u_1^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$.

Индекс (1.4). Решение $\mathcal{A}_\nu(x) = \mathcal{A}(x_1)\delta_{\nu 4} + \{\mathcal{B}(x_2, x_3) + \mathcal{A}\}\delta_{\nu 3} + s_{\cdot\nu}(x)$. В данном случае также справедливо равенство $u_1^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$.

Индекс (2.1). Решение $\mathcal{A}_\nu(x) = \mathcal{A}(x_2)\delta_{\nu 3} + \{\mathcal{B}(x_1, x_4) + \mathcal{A}\}\delta_{\nu 4} + s_{\cdot\nu}(x)$. Здесь также $u_1^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$.

Индекс (2.2). Верно равенство

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\nu(x) = & \frac{x_2^2 q - x_4^2 p}{(x_2^2 + x_4^2)} \delta_{\nu 1} - \frac{p(x_2) + q(x_4)}{(x_2^2 + x_4^2)} \delta_{\nu 3} + \frac{c(x_3 + x_1 x_4^2)^2 x_2}{(x_2^2 + x_4^2)^2} \delta_{\nu 2} + \\ & + \frac{c(x_3 - x_1 x_2^2)^2 x_4}{(x_2^2 + x_4^2)^2} \delta_{\nu 4} + s_{\cdot\nu}(x).\end{aligned}$$

В этом случае существуют векторы Киллинга $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Легко видеть, что равенства $u_1^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$, $u_2^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$ справедливы, если и только если $c = 0$.

Индекс (2.3). Верно равенство

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\nu(x) = & \frac{x_4^2 p - x_2^2 q}{(x_2^2 + x_4^2)} \delta_{\nu 1} + \frac{p(x_2) + q(x_4)}{(x_2^2 + x_4^2)} \delta_{\nu 3} + \frac{c(x_3 + x_1 x_4^2)^2 x_2}{(x_2^2 + x_4^2)^2} \delta_{\nu 2} \\ & + \frac{c(x_3 - x_1 x_2^2)^2 x_4}{(x_2^2 + x_4^2)^2} \delta_{\nu 4} + s_{\cdot\nu}(x).\end{aligned}$$

В данном случае заключаем, что равенства $u_1^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$, $u_2^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$ справедливы, если и только если $c = 0$.

Индекс (2.4). Наконец, здесь решение имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\nu(x) = & \frac{x_2^2 p - x_1^2 q}{(x_1^2 + x_2^2)} \delta_{\nu 4} - \frac{p(x_1) + q(x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)} \delta_{\nu 3} + \frac{c(x_3 - x_4 x_2^2)^2 x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \delta_{\nu 1} \\ & + \frac{c(x_3 + x_4 x_1^2)^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \delta_{\nu 2} + s_{\cdot\nu}(x).\end{aligned}$$

Теперь равенства $u_1^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$, $u_2^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$ справедливы, если и только если $c = 0$.

8. НАБОРЫ ОПЕРАТОРОВ СИММЕТРИИ

8.1. Дополнительная симметрия. Сделаем несколько замечаний о наборе операторов симметрии уравнения в пространстве с заданным индексом и с допустимым потенциалом общего вида. В набор входит соответствующий оператор вида (16), (18), (20), который использован в классификации пространств и потенциалов. Однако в некоторых случаях набор содержит дополнительный лиевский оператор симметрии, который легко построить, принимая во внимание замечания о дополнительной лиевской симметрии соответствующих пространств и допустимого потенциала. Перечислим эти случаи.

1. Если уравнение допускает оператор W_w вида $\Delta_2(w) = 0$, то допустим оператор $U_{\nabla w} = w^\alpha \mathcal{P}_\alpha$. Очевидно, операторы W_w и $U_{\nabla w}$ коммутируют между собой.

2. Уравнение в пространствах с индексами (0.1), (1.2), (1.3), (1.4), (2.1) имеет оператор симметрии $U = u_{1|}^\alpha \mathcal{P}_\alpha + iu_{1|\nu,\mu} \gamma^\mu \gamma^\nu / 4$, коммутирующий с соответствующим оператором Киллинга–Яно.

8.2. Полные наборы. Естественно требовать, чтобы полный набор содержал четыре линейно независимых попарно коммутирующих оператора, причем $X_4 = H$. Интересные результаты в этом направлении содержит работа [11]. Главную роль при построении наборов играет следствие 4. Укажем ограничения на метрику пространства и потенциал, при которых уравнение допускает полный набор.

1. Пусть набор содержит три оператора U_j (лиевский набор). Тогда существует система координат, в которой $g_{\nu\mu} = g_{\nu\mu}(x_4)$, $A_\nu = A_\nu(x_4) + s_{,\nu}(x)$, $u_j^\nu = \delta_j^\nu$.

2. Пусть набор содержит операторы U_a , $a = 1, 2$, и W_w . Если $\Delta_2(w) = 0$, то следует требовать линейной независимости векторов $u_{1|}$, $u_{2|}$, ∇w . При этом операторы U_a и $U_{\nabla w}$ образуют лиевский набор, каждый элемент которого коммутирует с W_w . Если $\Delta_2(w) \neq 0$, то в силу леммы 7 векторы $u_{1|}$, $u_{2|}$, ∇w линейно несвязанны. Поэтому существует система координат, в которой $u_{a|}^\nu = \delta_a^\nu$, $w^\alpha = \delta_1^\alpha$, $A_\nu = a_\nu(x_4) + s_{,\nu}(x)$, $a_3 = a_4 = 0$, $g_{\nu\mu}(x) = e^{2\lambda(x_3)} \bar{g}_{\nu\mu}(x_4)$, $\bar{g}_{\nu 3} = e \delta_{\nu 3}$, $e = \pm 1$.

3. Пусть набор содержит операторы U_a , $a = 1, 2$, и V_v . Имея в виду лемму 12 и используя набор для полного разделения переменных в уравнении Дирака, следует дополнительно потребовать, чтобы выражения $g_{\nu\mu}(x) \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu$, $(v^2)_{\nu\mu}(x) \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu$, $u_{1|\nu}(x) \dot{x}^\nu$, $u_{2|\nu}(x) \dot{x}^\nu$ составляли полный набор интегралов уравнений геодезических пространства любого индекса, кроме (0.1).

Итак, получаем следующие результаты.

Индекс (0.1). Из условия $[U_a, V_v] = 0$ получаем $u_{a|}$ -инвариантность тензора v^2 , откуда с учетом равенства $v^2 = \vec{u} \otimes \vec{u}$ (здесь $\vec{u}$ – вектор Киллинга пространства общего вида) заключаем, что $u_{a|}$ инвариантен относительно вектора $\vec{u}$. Теперь с учетом равенства $u^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$ имеем $[U_a, U] = 0$. Ясно, что надо потребовать линейной независимости u , $u_{1|}$, $u_{2|}$. Таким образом, в данном случае имеем лиевский полный набор, каждый элемент которого коммутирует с оператором V_v . Для метрики и потенциала имеем а) $\lambda = 0$, $\psi = \psi(x_2)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x_2)$; б) $\lambda = \lambda(x_3)$, $\psi = \psi(x_3)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x_3)$; в) $\lambda = \lambda(x_4)$, $\psi = 0$, $\mathcal{A} = 0$.

Индекс (0.2). Для метрики и потенциала справедливы формулы $\psi = \psi(x_1)$, $\varphi_1 = \varphi_1(x_1)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x_1)$, а) $\varphi_2 = \varphi_2(x_3)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x_3)$; б) $\varphi_2 = \varphi_2(x_4)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x_4)$; в) $\varphi_2 = 1$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x_4 - x_3)$.

Индекс (0.3). Ограничения для потенциала такие же, как и для индекса (0.2). Для метрики имеем $\varphi_1 = \varphi_1(x_1)$, а) $\varphi_2 = \varphi_2(x_3)$, $\psi = \psi(x_3)$; б) $\varphi_2 = \varphi_2(x_4)$, $\psi = \psi(x_4)$; в) $\varphi_2 = 1$, $\psi = \psi(x_4 - x_3)$.

Индекс (1.1). Ограничения на метрику и потенциал такие же, как в предыдущем случае.

Индексы (1.2)–(1.4), (2.1). Условия на метрику указаны в разделе 6. Вид потенциала из раздела 7 зависит от того, какой именно вектор $\vec{u}$ из указанных в разделе 6 допустимых векторов Киллинга включен вместе с вектором $\vec{u}_{1|}$ в полный набор. Так как в рассматриваемых случаях выполнено условие $u_{1|}^\alpha F_{\alpha\nu} = 0$, то ограничимся общим требованием u -инвариантности тензора поля без его дешифровки.

Индексы (2.2)–(2.4). Метрика указана в разделе 6, соответствующий потенциал из раздела 7 обязан удовлетворять условию $c = 0$.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прежде всего отметим, что в настоящей работе используются ковариантные формы уравнения Дирака–Фока, определяющих уравнений для координат операторов симметрии и свойств множества операторов симметрии. Значимые результаты можно сформулировать следующим образом.

1. Получены определяющие уравнения для координат дифференциальных операторов симметрии первого порядка.

2. Изучены свойства множества таких операторов.

3. Вычислены все метрические тензоры римановых пространств и потенциалы электромагнитного поля, с которыми уравнение Дирака–Фока допускает хотя бы один оператор симметрии.

4. Построены полные наборы операторов симметрии.

Выводы, изложенные в разделах 3 и 4, ранее не публиковались в научных журналах, эти результаты позволяют провести частичное (полное) разделение переменных в уравнении Дирака–Фока.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своей коллеге доценту Т. Б. Гольдварг за ценные замечания и помощь в оформлении статьи.

Список литературы

- [1] V. Fock, “Geometrisierung der Diracschen Theorie des Electrons”, *Z. Phys.*, **57**:3–4 (1929), 261–277.
- [2] Г. Бете, *Квантовая механика*, Мир, М., 1965.
- [3] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Физматлит, М., 2004.
- [4] В. Н. Шаповалов, “К групповым свойствам линейных уравнений”, *Изв. вузов СССР. Физика*, 1968, № 6, 75–80.
- [5] В. Н. Шаповалов, “Симметрии уравнения Дирака–Фока”, *Изв. вузов СССР. Физика*, 1975, № 6, 57–63.
- [6] В. Н. Шаповалов, Г. Г. Экле, “Полные наборы и интегрирование линейной системы первого порядка. 1”, *Изв. вузов СССР. Физика*, 1974, № 2, 83–88.
- [7] В. Н. Шаповалов, Г. Г. Экле, “Полные наборы и интегрирование линейной системы первого порядка. 2”, *Изв. вузов СССР. Физика*, 1974, № 2, 88–92.
- [8] В. Н. Шаповалов, “Пространства Штеккеля”, *Сиб. матем. журнал*, **20**:5 (1979), 1117–1130.
- [9] W. Dietz, R. Rudiger, “Space-time admitting Killing–Yano tensors. II”, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **381**:1781 (1982), 315–322.
- [10] W. Dietz, R. Rudiger, “Space-time admitting Killing–Yano tensors. I”, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **375**:1762 (1981), 361–378.
- [11] R. Rüdiger, “Separable systems for the Dirac equation in curved space-times”, *J. Math. Phys.*, **25**:3 (1984), 649–654.

Поступила в редакцию 21.11.2017,
после доработки 15.02.2018