Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Давыдов, Дискретность дион-дилатонных черных дыр, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 2, 311–327

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 13:51:00

© 2018 г.

Е. А. Давыдов^{*†}

ДИСКРЕТНОСТЬ ДИОН-ДИЛАТОННЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

Показано, что существуют два различных класса решений, описывающих статические сферически-симметричные дион-дилатонные черные дыры с несингулярными горизонтами. Первый класс включает в себя уже известные решения, которые возникают лишь для нескольких дискретных значений дилатонной константы связи. Решения, относящиеся ко второму классу, имеют существенно другие свойства. Они могут существовать при непрерывно изменяющихся значениях дилатонной константы связи, но при этом значение поля дилатона на горизонте должно быть не произвольным, а принимать некоторые дискретные значения. Для каждого заданного значения дилатонной константы связи могут существовать несколько решений второго класса, отличающихся количеством нулей дилатонной функции в области между горизонтами и разделяющих собой подмножества сингулярных решений.

Ключевые слова: дилатонная гравитация, неэкстремальные черные дыры, самогравитирующие дионы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9516>

1. ВВЕДЕНИЕ

После десятков лет чисто теоретических изысканий в области исследования черных дыр наконец начинается новая эпоха. Благодаря таким проектам, как LIGO, VIRGO, Телескоп горизонта событий (ЕНТ), можно получать реальные наблюдательные данные и проверять различные теоретические модели. Поэтому сейчас важно закрыть определенные пробелы в теориях и моделях черных дыр, которые еще остались к настоящему времени. К одному из таких не до конца изученных вопросов относится модель дионной черной дыры в присутствии поля дилатона.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (Соглашение № 02.а03.21.0008) и РФФИ (грант № 17-02-01299).

^{*}Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: davydov@theor.jinr.ru

[†]Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Статические сферически-симметричные черные дыры с электрическим и/или магнитным зарядом хорошо изучены, а решения для них представлены известной метрикой Райсснера–Нордстрема (РН). Однако при наличии поля дилатона ситуация становится намного более сложной.

Поле дилатона присутствует в большом количестве различных теорий: размерные редукции, низкоэнергетический предел теории струн, различные модели супергравитации и т. п. В этих теориях дилатон взаимодействует с калибровочными полями и за счет этого может влиять на различные физические процессы. Очень явно эффект присутствия дилатона проявляется в моделях черных дыр с калибровочными полями. Так, решения типа черных дыр, несущих по отдельности электрический или магнитный заряд уже не содержат метрику РН как частный случай. Точные аналитические решения для черных дыр с одним видом заряда построены для любого значения дилатонной константы связи [1], [2], и в неэкстремальном случае они все имеют сингулярность на внутреннем горизонте (кроме тривиального случая тождественно равной нулю дилатонной константы связи). Если же черная дыра имеет сразу два вида заряда – электрический и магнитный, то для нее все же существует нетривиальное решение с метрикой РН и постоянным значением для дилатона. Хотя дионные конфигурации подобно черным дырам с одним зарядом, как правило, сингулярны на одном из горизонтов, среди них встречаются и несингулярные решения. Исследование условий, при которых могут существовать такие регулярные решения (не имеющие сингулярностей на обоих горизонтах), – достаточно интересная задача. К настоящему времени эта задача не решена до конца, и в предлагаемой работе мы надеемся внести вклад в ее решение.

Отметим, что к настоящему времени известны лишь два точных решения [1], [3]–[5] для статических сферически-симметричных дион-дилатонных черных дыр. Они имеют место при особых значениях дилатонной константы связи: $a = 1$ и $a = \sqrt{3}$. Эти решения регулярны. При численном исследовании решений было найдено [6], что для значений дилатонной константы связи, близких (или совпадающих) к последовательности “треугольных” чисел,

$$a^2 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

соответствующие решения являются регулярными на обоих горизонтах. С учетом того, что первые два члена этой последовательности как раз совпадают со значениями a , соответствующими известным точным решениям, было сделано предположение, что решения типа регулярных черных дыр в дион-дилатонной системе возможны только при этих дискретных значениях дилатонной константы связи. Это предположение мы для краткости будем называть *треугольной гипотезой*.

Первые два значения дилатонной константы связи в этой треугольной последовательности имеют ясное физическое происхождение: они возникают в теории струн и при размерной редукции Калуцы–Клейна. Предпринимались попытки найти физические теории, в которых могли бы естественным образом возникнуть значения для дилатонной константы, соответствующие другим членам этой последовательности. Однако эти попытки не увенчались успехом [7], [8]. В результате треугольная гипотеза оказалась в “подвешенном” состоянии: без какого-либо физического обоснования, но при наличии разнообразных подтверждающих признаков чисто математической природы. Например, при изучении экстремальных дионных черных дыр

было обнаружено [9], что решение для дилатона аналитично на горизонте только в том случае, когда дилатонная константа связи принимает эти треугольные значения.

В настоящей работе мы проверяем истинность треугольной гипотезы и находим условия существования регулярных решений в модели статической сферически-симметричной дион-дилатонной черной дыры для произвольных значений дилатонной константы связи. В разделе 2 мы описываем исследуемую модель и находим причину возникновения треугольной последовательности (1). Поскольку все известные аналитические решения в этой модели связаны с решениями для некоторых решеток Тоды, в разделе 3 мы ищем все конфигурации, которые могут быть связаны с какими-либо решетками Тоды и строим соответствующие решения. Раздел 4 посвящен исследованию численных решений для значительно большего подмножества в пространстве параметров, чем это было сделано ранее в работе Полетти и др. [6]. В разделе 5 мы обсуждаем полученные результаты.

2. ИССЛЕДУЕМАЯ МОДЕЛЬ

Дионная конфигурация с полем дилатона в $D \geq 4$ измерениях описывается следующим действием [6]:

$$S = \int \left[R - \frac{D-2}{4(D-3)} (\nabla \varphi)^2 - \frac{e^{a\varphi}}{2} \left(F_{[2]}^2 + \frac{2}{(D-2)!} G_{[D-2]}^2 \right) \right] \sqrt{-g} d^D x. \quad (2)$$

Калибровочная часть действия (2) содержит стандартную 2-форму Максвелла $F_{\mu\nu}$ и дополнительную абелеву $(D-2)$ -форму $G_{\mu_1 \dots \mu_{D-2}}$. Калибровочные поля взаимодействуют с полем дилатона φ при помощи экспоненциального потенциала, характеризующегося константой связи a . В отличие от обозначений, которые часто встречаются в литературе, мы домножили дилатон на постоянный множитель $(D-2)/4\sqrt{D-3}$, зависящий от размерности пространства-времени D . Из-за этого у кинетического члена дилатона появляется непривычный множитель, но многие из последующих формул становятся менее громоздкими.

Статическая сферически-симметричная метрика может быть записана в виде

$$ds^2 = -h(r) dt^2 + h(r) s^2(r) dr^2 + \rho^{2/(D-2)}(r) d\Omega_{D-2}^2, \quad (3)$$

где $d\Omega_{D-2}^2 = g_{MN}(y) dy^M dy^N$ – метрика на $(D-2)$ -мерной сфере. Переменная $s(r)$ представляет собой остаточную степень свободы, которая будет зафиксирована ниже. Для этой метрики тензорная плотность скалярной кривизны

$$R\sqrt{-g} = \frac{h'\rho'}{hs} + (D-3)(D-2)hs\rho^{(D-4)/(D-2)} + \frac{(D-3)\rho'^2}{(D-2)\rho s} + \text{tot.div.} \quad (4)$$

Уравнения движения для калибровочных полей достаточно просты:

$$\nabla_\mu (e^{a\varphi} F^{\mu\nu}) = 0, \quad (5)$$

$$\nabla_{\mu_1} (e^{a\varphi} G^{\mu_1 \dots \mu_{D-2}}) = 0. \quad (6)$$

Подходящий полевой анзац, совместимый со сферической симметрией, может быть найден в следующем виде:

$$F_{\text{tr}} = \frac{Q}{\rho} h s e^{-a\varphi} \varepsilon_{\text{tr}}, \quad G_{M_1 \dots M_{D-2}} = P \varepsilon_{M_1 \dots M_{D-2}}, \quad (7)$$

где Q и P – некоторые константы, которые мы будем для простоты называть электрическим и магнитным зарядами; ε_{tr} и $\varepsilon_{M_1 \dots M_{D-2}}$ являются антисимметричными тензорами соответствующих рангов. Мы будем рассматривать только дионные конфигурации, т. е. такие, для которых оба заряда ненулевые. Заметим, что в случае $D = 4$ можно считать, что $F_{[2]}$ и $G_{[2]}$ идентичны и описывают одно и то же электромагнитное поле.

Для анзаца (7) члены, описывающие калибровочное поле в действии (2), могут быть заменены эффективным потенциалом. В результате получается эффективное одномерное действие для дион-дилатонной модели (2):

$$S_{\text{eff}} = \int \left(\frac{h' \rho'}{sh} + \frac{(D-3)\rho'^2}{(D-2)\rho s} - \frac{(D-2)\rho \varphi'^2}{4(D-3)s} - hs U(\rho, \varphi) \right) dr, \quad (8)$$

где

$$U(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} (P^2 e^{a\varphi} + Q^2 e^{-a\varphi}) - (D-3)(D-2)\rho^{(D-4)/(D-2)}. \quad (9)$$

Варьируя это действие по метрике и дилатону, мы получаем оставшиеся уравнения движения. Поскольку переменная s входит как множитель Лагранжа, вариация по ней дает условие связи (равенство нулю гамильтониана)

$$H = \frac{h' \rho'}{sh} + \frac{(D-3)\rho'^2}{(D-2)\rho s} - \frac{(D-2)\rho \varphi'^2}{4(D-3)s} + hs U(\rho, \varphi) = 0. \quad (10)$$

Теперь можно выбрать калибровку для метрики. Чаще всего выбирается калибровка Шварцшильда: $s = h^{-1}$, в которой уравнения движения для ρ , h и φ записываются следующим образом:

$$h'' + \frac{2(D-3)}{D-2} \left(\frac{h \rho'}{\rho} \right)' = - \frac{(D-3)h \rho'^2}{(D-2)\rho^2} - \frac{(D-2)h \varphi'^2}{4(D-3)} - U_\rho, \quad (11)$$

$$\rho'' = \frac{(D-3)\rho'^2}{(D-2)\rho} - \frac{(D-2)\rho \varphi'^2}{4(D-3)}, \quad (12)$$

$$(h \rho \varphi')' = \frac{2(D-3)}{D-2} U_\varphi. \quad (13)$$

Как обычно, U_ρ и U_φ представляют собой соответствующие частные производные от U .

Ключевое свойство дионной конфигурации заключается в том, что производная потенциала

$$U_\varphi = \frac{a}{\rho} (P^2 e^{a\varphi} - Q^2 e^{-a\varphi}) \quad (14)$$

обращается в нуль при

$$\varphi = a^{-1} \ln \left| \frac{Q}{P} \right| \equiv \bar{\varphi}. \quad (15)$$

Поэтому дилатон, принимающий постоянное значение $\varphi = \bar{\varphi}$, является решением для дилатонного уравнения движения (13); для конфигурации с одним видом заряда это невозможно. В результате модель дион-дилатонной черной дыры допускает решение в виде метрики РН в качестве частного случая.

Это можно проверить явно. Так, уравнение движения для ρ запишется как

$$\rho'' = \frac{(D-3)\rho'^2}{(D-2)\rho}. \quad (16)$$

Оно легко интегрируется, а решение с плоской асимптотикой – это $\rho = r^{D-2}$. Тогда из связи (10) можно найти оставшуюся компоненту метрики:

$$h = 1 - \frac{2M}{r^{D-3}} + \frac{2|QP|}{(D-3)(D-2)r^{2(D-3)}}, \quad (17)$$

где M – константа интегрирования.

В калибровке Шварцшильда горизонт событий возникает, когда h обращается в нуль. Уравнение (17) при $h = 0$ имеет два решения $r = r_{\pm}$:

$$r_{\pm} = \left(\frac{M}{A_1 \mp A_2} \right)^{1/(D-3)}, \quad \text{где} \quad A_1 \equiv \frac{(D-3)(D-2)M^2}{2|QP|}, \quad A_2 \equiv \sqrt{A_1^2 - A_1}. \quad (18)$$

Если $A_2^2 < 0$, это будет голая сингулярность, а при $A_2^2 = 0$ получается экстремальная черная дыра РН, оба горизонта которой совпадают. Но наше исследование посвящено исключительно неэкстремальному случаю с двумя горизонтами, поэтому в дальнейшем мы принимаем, что $A_2 > 0$.

2.1. “Квантование” дилатона на фоновой метрике РН. Как мы видим, статическое решение для поля дилатона совместимо с метрикой РН. Но что произойдет в случае плавного перехода к динамическому решению? Пусть дилатон может незначительно отклоняться от статического решения: $\varphi = \bar{\varphi} + \delta\varphi$, где $\delta\varphi \ll \bar{\varphi}$. Здесь мы не будем проводить полноценный анализ устойчивости для полной системы. Вместо этого проследим за поведением решений для малых отклонений дилатона $\delta\varphi$ на фоне фиксированной метрики РН.

В этом случае можно линеаризовать по переменной $\delta\varphi$ уравнение движения для дилатона (13) при заданной метрике РН:

$$\{[(Mr^{3-D} - A_1)^2 - A_2^2]r^{D-2}\delta\varphi'\}' = 2(D-3)^2M^2a^2r^{2-D}\delta\varphi. \quad (19)$$

При выводе этого уравнения мы учли, что из соотношений (17) и (18) следует $A_1h = (Mr^{3-D} - A_1)^2 - A_2^2$. После перехода к новой переменной $x \equiv Mr^{3-D} - A_1$ уравнение (19) принимает исключительно простую форму:

$$\frac{d}{dx} \left[(x^2 - A_2^2) \frac{d}{dx} \delta\varphi \right] = 2a^2\delta\varphi. \quad (20)$$

В неэкстремальном случае $A_2^2 > 0$ это дифференциальное уравнение Лежандра. Как известно, его несингулярные решения в области $x^2 \leq A_2^2$ между горизонтами – это полиномы Лежандра P_n :

$$\delta\varphi = \delta\varphi_{\text{hor}} P_n(A_2^{-1}x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Здесь $\delta\varphi_{\text{hor}}$ – новая константа интегрирования; $\delta\varphi$ равно $\pm\delta\varphi_{\text{hor}}$ на горизонтах, которые расположены при $|x| = A_2$. Из уравнения Лежандра (20) автоматически

получается, что неотрицательный целый параметр n должен быть связан с дилатонной константой связи следующим образом:

$$a^2 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Таким образом, мы получили треугольную последовательность для дилатонной константы связи. Ранее в литературе эта последовательность возникала при изучении разложения решений в степенные ряды и при построении численных решений. В нашем случае появление треугольных чисел прослеживается более наглядно: это такие значения дилатонной константы связи, при которых малые отклонения дилатона $\delta\varphi$ от точного статического решения несингулярны на фоне метрики РН.

Если же рассматривать метрику РН с вырожденным горизонтом, $A_2 = 0$, то несингулярные решения уравнения (20) могут существовать для произвольных значений дилатонной константы связи:

$$\delta\varphi = Cx^\nu, \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{\nu(\nu+1)}{2}, \quad C = \text{const.} \quad (23)$$

Решение (23) аналитично лишь при треугольных значениях a . В работе [9] этот результат был получен путем рассмотрения степенных разложений решения на вырожденном горизонте для полной системы уравнений (11)–(13). Но, как теперь понятно, аналитичность дилатонного решения для $\nu \neq n$ может быть исследована при рассмотрении одного лишь дилатона на фиксированном фоне метрики РН как для экстремальной, так и для неэкстремальной черной дыры.

3. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Результаты, полученные в линейном приближении, могут измениться при учете нелинейности модели. Рассмотрим теперь полную дион-дилатонную модель. Вместо того чтобы решать достаточно громоздкую систему уравнений (11)–(13), мы преобразуем действие (8) к более удобному виду. Нетрудно заметить, что кинетическая часть в этом действии упрощается в специфической калибровке $s = \rho$; в этой калибровке горизонты $h = 0$ расположены в асимптотической области $r \rightarrow \pm\infty$. Теперь кинетический член квадратичен по выражениям h'/h и ρ'/ρ . Значит, будет удобно перейти к экспоненциальному представлению для компонент метрики:

$$\sigma e^\chi = \frac{2(D-3)}{D-2} |QP|h, \quad \sigma e^\gamma = 2(D-3)^2 h \rho^{2(D-3)/(D-2)}, \quad \sigma \equiv \text{sgn}(h). \quad (24)$$

Кроме того, вместо дилатонной функции φ можно рассматривать ее отклонение от статического решения:

$$\psi = \varphi - \bar{\varphi}. \quad (25)$$

В новых переменных эффективное действие выглядит так:

$$\frac{2(D-3)}{D-2} S_{\text{eff}} = \int L_1(\gamma, \gamma') dr - \int L_2(\chi, \chi', \psi, \psi') dr. \quad (26)$$

Это не что иное, как сумма двух независимых действий, каждое из которых описывает одно- и двумерное движение частицы в экспоненциальном потенциале:

$$L_1 = \frac{\gamma'^2}{2} + \sigma e^\gamma, \quad (27)$$

$$L_2 = \frac{\chi'^2}{2} + \frac{\psi'^2}{2} + \sigma(e^{\chi+a\psi} + e^{\chi-a\psi}), \quad (28)$$

если считать, что координата r играет роль времени. Проявляющаяся здесь связь с действием для молекулы Тоды давно известна [1], [4]. Также упомянем, что область пространства, внешняя по отношению к черной дыре, соответствует выбору $h > 0$, а область между двумя горизонтами – выбору $h < 0$. Так что на самом деле каждый из двух лагранжианов (27), (28) различен в этих двух областях.

Нетрудно заметить, что в обеих системах L_1 и L_2 должна сохраняться энергия. Законы сохранения имеют вид

$$E_1 = \frac{\gamma'^2}{2} - \sigma e^\gamma = \text{const}, \quad (29)$$

$$E_2 = \frac{\chi'^2}{2} + \frac{\psi'^2}{2} - \sigma(e^{\chi+a\psi} + e^{\chi-a\psi}) = \text{const}. \quad (30)$$

Но константы E_1 и E_2 не являются независимыми: они входят в гамильтонову связь (10) для полной системы:

$$H = E_1 - E_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2 \equiv E. \quad (31)$$

Одномерная система (27) может быть легко проинтегрирована:

$$h < 0, \text{ между горизонтами : } e^\gamma = E \operatorname{ch}^{-2} \left[\sqrt{\frac{E}{2}} (r - r_0) \right], \quad (32)$$

$$h > 0, \text{ снаружи черной дыры : } e^\gamma = E \operatorname{sh}^{-2} \left[\sqrt{\frac{E}{2}} (r - r_0) \right]. \quad (33)$$

Между горизонтами, когда $h < 0$, константа интегрирования r_0 не играет особой роли. Решение обращается в нуль при $r \rightarrow \pm\infty$, что соответствует горизонтам $h = 0$. В области $h > 0$ внешний горизонт черной дыры располагается при $r \rightarrow +\infty$ или $r \rightarrow -\infty$, когда решение стремится к нулю. Асимптотика пространства Минковского соответствует области вблизи границы $r \rightarrow r_0$. Действительно, при $h \rightarrow 1$, $r \rightarrow r_0$ выражение для интервала в терминах решения (33) может быть записано в виде

$$ds^2 = -dt^2 + d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad \text{где} \quad \tilde{r} \equiv [(D-3)|r - r_0|]^{-1/(D-3)}, \quad (34)$$

что действительно является плоской метрикой.

Двумерная система (28), по-видимому, неинтегрируема в общем случае. На сегодня известны только два точных решения при $a = 1$ и $a = \sqrt{3}$. В первом случае решение легко записать в переменных $\chi \pm \psi$. С точностью до постоянных интегрирования оно совпадает с выражениями для γ в формулах (32), (33). Второй интегрируемый случай $a = \sqrt{3}$ уже заметно сложнее: решение было найдено при

помощи преобразования уравнений движения к системе уравнений для интегрируемой цепочки Тоды [4], [5]. В настоящей работе мы изучаем обратную задачу: вместо нахождения эквивалентной цепочки Тоды для дион-дилатонной системы с заданной константой связи мы определяем, при каких значениях дилатонной константы связи такое соответствие между дион-дилатонными черными дырами и цепочками Тоды имеет место.

3.1. Решения, связанные с цепочками Тоды. Рассмотрим наиболее общий случай, когда дилатон может по-разному взаимодействовать с двумя калибровочными формами $F_{[2]}$ и $G_{[D-2]}$; обзор такой системы представлен, например, в работе [1]. В этом случае изменение коснется двумерного лагранжиана, который можно представить в виде

$$L_2 = \frac{\chi'^2}{2} + \frac{\psi'^2}{2} + \sigma(e^{\chi+a_2\psi} + e^{\chi-a_1\psi}) \quad (35)$$

с двумя независимыми дилатонными константами связи a_1 и a_2 . Поскольку ключевая черта исследуемой дионной конфигурации – это наличие статического решения для дилатона, нам нужно сохранить это свойство и для этой более широкой системы. Нетрудно видеть, что константы связи должны быть в таком случае одного знака. Кроме того, лагранжиан инвариантен относительно замены $a_1 \leftrightarrow a_2$, $\psi \rightarrow -\psi$. Так что без ограничения общности можно считать $a_1 \geq a_2 > 0$.

Для упрощения дальнейших формул введем вектор $X = (\chi, \psi)$; тогда гамильтониан системы (35) принимает вид

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 P_i^2 - \sigma \sum_{i=1}^2 e^{A_{ik}X^k}, \quad (36)$$

где

$$P_i = \frac{dX^i}{dr}, \quad A_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

а свертка $A_{ik}X^k$, как обычно, подразумевает сумму по $k = 1, 2$. Гамильтонианы в точности такого вида активно изучались при рассмотрении обобщенных цепочек Тоды. Не все такие системы являются интегрируемыми, однако достаточные условия интегрируемости хорошо известны. Для того чтобы проверить выполнимость этих условий, нужно вначале найти следующую матрицу:

$$C_{ik} = 2 \frac{\{A_{kl}X^l, \{A_{im}X^m, H_2\}\}}{\{A_{kl}X^l, \{A_{km}X^m, H_2\}\}}, \quad (38)$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ представляет собой скобку Пуассона. В теории цепочек Тоды было установлено, что если C_{ik} является матрицей Картана для некоторой алгебры Ли, то система (36) может быть проинтегрирована в явном виде [10].

Для гамильтониана (36) мы получаем

$$C_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2(1-a_1a_2)}{1+a_1^2} \\ \frac{2(1-a_1a_2)}{1+a_2^2} & 2 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Отсюда нетрудно найти, что C_{ik} может быть матрицей Картана лишь в четырех случаях. Соответствующие алгебры и значения дилатонных констант связи перечислены ниже:

$A_1 \oplus A_1$	A_2	C_2	G_2
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
$a_1 a_2 = 1$	$a_1 = a_2 = \sqrt{3}$	$a_1 = 3, a_2 = 2$	$a_1 = 3\sqrt{3}, a_2 = 5/\sqrt{3}$

(40)

Точно такой же список алгебр Ли и значений дилатонной константы связи (с точностью до несущественных множителей) был получен с помощью другого подхода в серии работ Иващука и соавторов [11]–[13]. Обратим внимание, что за исключением случая $A_1 \oplus A_1$ лишь отдельные значения дилатонных констант связи соответствуют интегрируемым решениям. Если же $a_1 = a_2$, то возможны лишь два значения: 1 и $\sqrt{3}$. Конечно, такое рассмотрение не позволяет утверждать, что других интегрируемых случаев не может быть. Однако мы видим, что треугольная последовательность $a^2 = n(n+1)/2$ или любая другая никоим образом не вытекает из наличия двух интегрируемых случаев.

В отличие от работ Иващука и др. [11]–[13], в которых было построено только решение во внешней области, нам нужно иметь решение в области между горизонтами черной дыры, чтобы убедиться в регулярности обоих горизонтов. Кроме того, в перечисленных работах не были построены явные решения для случаев C_2 и G_2 . Поэтому мы не только воспроизвели, но и расширяем результаты, полученные этими авторами, при помощи разработанного ими подхода в работах [14], [15].

Запишем уравнения движения для системы (35):

$$\frac{d^2 X^i}{dr^2} = \sigma \sum_{k=1}^2 (A^T)^{ik} e^{A_{kl} X^l}, \quad i = 1, 2. \quad (41)$$

Вначале нужно найти линейные преобразования переменных $X = KY$ с постоянной матрицей K_{ik} , которые приведут систему уравнений движения к следующему виду:

$$\frac{d^2 Y^i}{dr^2} = - \sum_{k=1}^2 B^{ik} e^{C_{kl} Y^l}, \quad i = 1, 2, \quad (42)$$

где B^{ik} – некоторая диагональная постоянная матрица. Эти уравнения в точности совпадают с уравнениями для открытой цепочки Тоды, соответствующей алгебре Ли с матрицей Картана C_{ik} .

Нетрудно найти, что

$$K = A^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{2}{1+a_2^2} & \frac{2}{1+a_1^2} \\ \frac{2a_2}{1+a_2^2} & -\frac{2a_1}{1+a_1^2} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$B = -\sigma C^{-1}AA^T = -\frac{\sigma}{2} \text{diag}(1+a_2^2, 1+a_1^2).$$

Важными параметрами решения являются компоненты дважды дуального вейлевского вектора в базисе простых корней соответствующей алгебры Ли:

$$n_i = 2 \sum_{k=1}^2 (C^{-1})^{ik}. \quad (44)$$

Для матрицы Картана вида (39) мы получаем

$$n = \left(\frac{a_1(1+a_2^2)}{a_1+a_2}, \frac{a_2(1+a_1^2)}{a_1+a_2} \right), \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & A_1 \oplus A_1 & A_2 & C_2 & G_2 \\ \hline n_1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ n_2 & 1 & 2 & 4 & 10 \end{array} \quad (45)$$

Точное решение строится из полиномов особого вида:

$$H_i(z) = c_i + \sum_{k=1}^{n_i} p_{ik} z^k(r), \quad i = 1, 2, \quad z \equiv -\frac{2\sigma}{E} e^{-\sqrt{2E}(r-r_1)}. \quad (46)$$

Четыре константы $c_i > 0$, $E > 0$ и r_1 являются свободными параметрами в решении, которые могут быть найдены из начальных или граничных условий. Например, E – это общий параметр для систем L_1 и L_2 , а r_1 должно зависеть от r_0 , чтобы получить правильную асимптотику (пространства Минковского) для компоненты метрики ρ . Анзац для системы (42) выглядит следующим образом:

$$Y^i = -n_i \sqrt{\frac{E}{2}} (r - r_1) - \ln H_i(z), \quad i = 1, 2. \quad (47)$$

Подставляя его в уравнения, мы получаем алгебраическую систему уравнений для параметров p_{ik} . Получающиеся полиномы (II.1)–(II.4) приведены в приложении.

Все коэффициенты полиномов (II.1)–(II.4) оказываются положительными при $c_1, c_2 > 0$. Сами же полиномы зависят от аргумента z , который неотрицателен между горизонтами. Поэтому функции $\ln H_i(z)$ являются корректно определенными на всем интервале между двумя горизонтами. Во внешней же области мы имеем $z \leq 0$ и полиномы $H_i(z)$ могут принимать отрицательные значения. Однако $H_i(0) > 0$ на горизонте $r \rightarrow +\infty$, поэтому всегда существует такой интервал $r_s < r < +\infty$, на котором $H_i(z) > 0$. Заметим, что в нашей калибровке $s = \rho$ внешняя область (от внешнего горизонта до плоской асимптотики) соответствует интервалу $r_0 \leq r < +\infty$, как следует из уравнения (33). При подходящем выборе параметров r_0 и c_i всегда можно достичь выполнения условия $r_s < r_0$, так что решения Y^i будут корректно определенными и во внешней области.

Вследствие своей конструкции асимптотики Y^i на обоих горизонтах идентичны:

$$Y^i|_{r \rightarrow \pm\infty} = -n_i \sqrt{\frac{E}{2}} |r|. \quad (48)$$

Теперь запишем решение в виде начальных функций χ и ψ . Осуществляя преобразование $X = KY$, мы получаем

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{a_1 + a_2} \sum_{i=1}^2 a_i \ln \left(\frac{-\sigma E}{2} z H_i^{-2/n_i}(z) \right), \\ \psi &= \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2} \ln (H_1^{-1/n_1}(z) H_2^{1/n_2}(z)). \end{aligned} \quad (49)$$

Как и следует, функция χ стремится к $-\infty$ на обоих горизонтах:

$$\chi|_{r \rightarrow \pm\infty} = -\sqrt{2E}|r|, \quad (50)$$

а дилатонная функция на обоих горизонтах стремится к константам:

$$\begin{aligned} r \rightarrow -\infty : \quad \psi &\rightarrow \psi_{\text{in hor}} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \ln(p_{1n_1}^{-1/n_1} p_{2n_2}^{1/n_2}), \\ r \rightarrow +\infty : \quad \psi &\rightarrow \psi_{\text{out hor}} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \ln(c_1^{-1/n_1} c_2^{1/n_2}). \end{aligned} \quad (51)$$

Мы видим, что точные решения не содержат сингулярностей ни снаружи черной дыры, ни в области между горизонтами.

Стоит отметить, что при $a_1 = a_2$ лагранжиан L_2 становится инвариантным относительно отражения $\varphi \rightarrow -\varphi$. Из-за этого дилатонная функция ψ принимает одинаковые по модулю значения на двух горизонтах. Используя явный вид полиномов (П.1), (П.2), можно найти, что для конфигурации $A_1 \otimes A_1$ эти значения равны $\psi_{\text{out hor}} = -\psi_{\text{in hor}} = \ln(c_2/c_1)$; а для случая A_2 имеем $\psi_{\text{in hor}} = \psi_{\text{out hor}} = \ln(c_2/c_1)$.

Можно посчитать температуру Хокинга для черной дыры. Мы приводим результаты для случая $D = 4$, чтобы не выписывать громоздкие множители, зависящие от размерности пространства-времени:

$$\begin{aligned} T_H &= \frac{1}{2\pi} \left(\sqrt{g^{rr}} \frac{\partial \sqrt{-g_{tt}}}{\partial r} \right)_{r \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2\pi} (e^{\chi-\gamma} \chi')_{r \rightarrow +\infty} = \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{2E}} c_1^{-2/(1+a_2^2)} c_2^{-2/(1+a_1^2)}. \end{aligned} \quad (52)$$

При совпадающих дилатонных константах связи, $a_1 = a_2 = a$, получается $T = (4\pi\sqrt{2E})^{-1} e^{a^{-1}\psi_{\text{out hor}}}$.

Итак, мы видим, что в случае одной дилатонной константы связи лишь для конфигураций с $a = 1$ и $a = \sqrt{3}$ прослеживается явная связь с обобщенными цепочками Тоды и алгебрами Ли. Поэтому, вообще говоря, нет причин ожидать, что свойства этих двух особых решений должны распространяться на случаи решений, соответствующих другим значениям дилатонной константы связи. В разделе 4 мы покажем, что решения с другими значениями параметра a действительно имеют совершенно другие свойства.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

В общем случае дион-дилатонная система (8), вероятнее всего, неинтегрируема при произвольных значениях дилатонной константы связи. Но ее можно разделить на две независимые подсистемы (27) и (28), первая из которых оказывается интегрируемой. Поэтому при построении численных решений достаточно ограничиться численным интегрированием для второй подсистемы. В этом разделе мы исследуем численные решения для динамической системы, задаваемой лагранжианом L_2 . Наша цель – построить регулярные решения, для которых функции, описывающие поле дилатона и метрику, а также все их производные, являются конечными на обоих горизонтах. Для этого достаточно ограничиться областью между горизонтами, где $h \leq 0$, т.е. мы выбираем $\sigma = -1$ в выражении (28) для L_2 .

Ранее мы интерпретировали систему L_2 как молекулу Тоды, но сейчас более наглядной будет другая интерпретация. Будем считать, что эта динамическая система описывает двумерное движение частицы на плоскости (χ, ψ) в потенциале $e^{\chi-a\psi} + e^{\chi+a\psi}$. Это позволит сразу предсказать основные свойства решений. Свободное асимптотическое движение при $r \rightarrow \pm\infty$ происходит в том направлении, где потенциал стремится к нулю. А потенциал стремится к нулю в области $\chi \rightarrow -\infty$ и $a|\psi| < |\chi|$. Поэтому асимптотическое движение частицы происходит с постоянной скоростью $\chi', \psi' = \text{const}$, а направление вектора скорости может быть любым, при условии, что $a|\psi'| < |\chi'|$. Регулярность горизонта дион-дилатонной системы означает, что при $\chi \rightarrow -\infty$ (условие горизонта) выполняется $\psi \equiv \psi_{\text{hor}} = \text{const}$ (отсутствие сингулярности дилатона). А это соответствует случаю, когда вектор скорости в асимптотической области строго параллелен оси χ . Начальные условия всегда можно выбрать таким образом, чтобы удовлетворить этому требованию на одном из горизонтов: $\psi'|_{r \rightarrow -\infty} = 0$ и $\psi|_{r \rightarrow -\infty} = \psi_{\text{hor}}$. Однако в общем случае асимптотическое движение при $r \rightarrow +\infty$ (вблизи второго горизонта) будет описываться вектором скорости, который не параллелен оси χ . Конечно, скрытая симметрия потенциала может гарантировать переход от одной несингулярной асимптотики к другой. Но в разделе 3 мы выяснили, что такие симметрии маловероятны, за исключением двух известных случаев.

Потенциал $e^{\chi-a\psi} + e^{\chi+a\psi}$ имеет форму симметричной долины. Поэтому частица на своем пути от $r \rightarrow -\infty$ до $r \rightarrow +\infty$ осциллирует в направлении оси χ какое-то количество раз. Количество пересечений траектории с осью χ разбивает множество решений на непересекающиеся семейства, каждое из которых характеризуется определенным числом пересечений n . Решения, которые разделяют семейства с n и $n+1$ пересечениями, будут сепаратриссами. Они разделяют решения, обладающие различной асимптотикой в области $r \rightarrow +\infty$, потому что если n нечетно, то знаки асимптотических значений $\psi|_{r \rightarrow +\infty}$ и $\psi'|_{r \rightarrow +\infty}$ будут противоположны знаку начального значения ψ_{hor} ; если n четно, то знаки будут совпадать. Сепаратриссы, начинающиеся в точке $(-\infty, \psi_{\text{hor}})$, оканчиваются в точке $(-\infty, (-1)^n \psi_{\text{hor}})$ вследствие симметрии лагранжиана L_2 относительно обращения знаков дилатона $\psi \rightarrow -\psi$ и координаты $r \rightarrow -r$. Получается, что вдоль сепаратрисс координата ψ всюду конечна, что соответствует решению для дион-дилатонной черной дыры с двумя регулярными горизонтами. Значит, наша цель заключается в построении сепаратрисс при помощи численных методов и определении условий на параметры системы, при которых такие решения могут существовать.

Параметр E можно положить равным единице за счет изменения масштаба $\chi \rightarrow \chi + \ln E$, $r \rightarrow r/\sqrt{E}$. Остаются лишь два параметра, от которых зависит поведение решения — ψ_{hor} и a . Для удобства проверки треугольной гипотезы мы будем использовать параметр ν вместо a : $\nu(\nu+1)/2 = a^2$. Если бы треугольная гипотеза была верна, решения-сепаратриссы получались бы при выборе натуральных значений для параметра ν .

На рис. 1 мы отобразили множество точек в пространстве параметров (плоскость (ν, ψ_{hor})), которым соответствуют искомые решения-сепаратриссы, полученные при помощи численных методов. Легко видеть, что это множество представляет собой набор кривых, каждая из которых соответствует семейству решений с $n = 1, 2, 3, \dots$

пересечений траектории с осью χ . Однако эти семейства могут быть сгруппированы в два разных класса.

1. К первому классу относятся две вертикальные прямые $\nu = 1$ и $\nu = 2$. Соответствующие решения – это известные интегрируемые случаи ($a = 1, \sqrt{3}$). Фактически эти два семейства описываются двумя дискретными значениями дилатонной константы связи, в то время как параметр ψ_{hor} может быть произвольным.

2. Кривые, относящиеся ко второму классу, при малых значениях параметра ψ_{hor} также близки к вертикальным прямым $\nu = 3, 4, 5, \dots$, но с увеличением ψ_{hor} эти линии все заметнее отклоняются от вертикали. В результате регулярные решения при $\nu > 2$ существуют на последовательности полуинтервалов $\nu_n^{\min} \leq \nu < n$, где n – это число пересечений с осью χ для данного семейства решений. При $\psi_{\text{hor}} \rightarrow 0$ кривые приближаются к прямым $\nu = n$, что соответствует решениям, полученным в линейном пределе для дилатона. Однако при больших ψ_{hor} нелинейность деформирует кривые, которые начинают в пределе стремиться к прямым $\nu = \nu_n^{\min} < n$. В случае достаточно малых значений дилатонной константы связи ($\nu \leq 6$) интервалы $(\nu_n^{\min}, n)$ очень малы. Видимо поэтому в свое время было сделано предположение, что это вовсе не интервалы, а отдельные точки $\nu = n$. Однако при больших ν эти интервалы становятся достаточно широкими.

Свойства решений также существенно зависят не только от параметра ν , но и от ψ_{hor} . Для заданного ν существует конечное множество значений $\{\psi_{\text{hor}}^1, \dots, \psi_{\text{hor}}^k\}$, $k = k(\nu) = 0, 1, 2, \dots$, при которых существуют регулярные решения. Это множество может быть и пустым при $\nu \lesssim 12.07$, потому что между интервалами $(\nu_n^{\min}, \nu = n)$ остаются промежутки, на которых нет регулярных решений. Однако начиная с $\nu \gtrsim 12.07$ интервалы уже полностью покрывают ось ν и затем начинают перекрывать друг друга при $\nu \gtrsim 12.96$. Так что может быть уже одно или два различающихся регулярных решения при заданном ν . В случае такого перекрытия интервалов соответствующие регулярные решения различаются числом нулей дилатонной функции, которые будут равны соответственно $[\nu + 1]$ и $[\nu + 2]$; $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. При $\nu \gtrsim 30$ перекрытие получается уже двойным, что приводит к трем разным регулярным решениям с $[\nu + 1]$, $[\nu + 2]$ и $[\nu + 3]$ числом нулей дилатонной функции, и так далее. Скорее всего, при $\nu \rightarrow \infty$ степень перекрытия стремится к бесконечности, хотя это и невозможно точно установить при помощи численных методов.

Результаты численных исследований можно сформулировать следующим образом: спектр значений дилатонной константы связи, соответствующих регулярным значениям, является дискретным при $n \leq 2$, кусочно-непрерывным при $2 < \nu \lesssim 12$ и непрерывным при $\nu \gtrsim 12.07$. Это опровергает треугольную гипотезу, заключающуюся в том, что спектр должен быть дискретным. Вместо этого результаты численных расчетов предполагают выдвижение гипотезы о том, что спектр значений параметра ψ_{hor} (соответствующих регулярным решениям) должен быть дискретным, за исключением двух особых случаев $a = 1, \sqrt{3}$, когда этот спектр непрерывный.

Важно отметить, что сами авторы треугольной гипотезы в своей работе [6] писали, что точное численное значение a начинает демонстрировать некоторую зависимость от начальных данных при больших значениях ψ_{hor} (в их работе использовались другие обозначения для дилатонной константы связи и значения поля дилатона

Рис. 1. Кривые $\psi_{\text{hor}}(\nu)$, соответствующие неэкстремальным регулярным решениям типа черной дыры. Области между кривыми соответствуют решениям, которые сингулярны хотя бы на одном из горизонтов.

на горизонте). Согласно их результатам даже при больших a и ψ_{hor} наибольшие отклонения a от треугольной последовательности составляют порядка 0.1%. При этом в их работе были проверены значения a только до $\sqrt{21}$. В итоге авторы сделали заключение, что это отклонение от треугольной последовательности – результат нарастающих численных погрешностей. В настоящей работе мы проверили значения дилатонной константы связи в диапазоне до $a = \sqrt{465}$ и также при значительно больших значениях ψ_{hor} . Например, на рис. 1 представлена часть результатов до $a \leq \sqrt{105}$. Легко заметить, что в интервале $a \leq \sqrt{21}$ ($\nu \leq 6$), рассмотренном в работе [6], отклонения от треугольной последовательности действительно едва заметны. Однако затем они становятся все более и более значительными, и их никоим образом нельзя списать на погрешности численного интегрирования.

Действительно, выбор калибровки $s = \rho$ значительно облегчает задачу численного интегрирования, поскольку наиболее проблемные области вблизи горизонтов сдвигаются на пространственную бесконечность. Это благоприятно сказывается на сходимости численного метода. Например, для каждого численного решения мы проверяли выполнимость закона сохранения (30). Если бы решение получалось с численной ошибкой, оно бы не удовлетворило ему. Однако для всех решений это условие выполняется с очень хорошей точностью. Мы использовали стандартные инструменты программы MAPLE для численного интегрирования с абсолютными и относительными погрешностями не более 10^{-13} .

Рассмотрим переход неэкстремальной черной дыры в экстремальную, когда расстояние между горизонтами стремится к нулю. Однако для любого регулярного решения число пересечений с осью χ (число нулей дилатонной функции) не зависит от расстояния между горизонтами. В результате частота осцилляций дилатонной функции будет стремиться к бесконечности. Соответствующий вклад в плотность энергии от кинетического члена $\psi'^2/2$ будет также стремиться к бесконечности, если

амплитуда осцилляций, пропорциональная параметру ψ_{hor} , не будет одновременно стремиться к нулю. Однако устремить к нулю этот параметр, не выходя за рамки регулярного решения, можно только при $a = 1, \sqrt{3}$. При других значениях дилатонной константы связи спектр ψ_{hor} дискретный для регулярных решений, и любой переход к экстремальной черной дыре будет неизбежно содержать сингулярности.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы исследовали решения типа статических сферически-симметричных неэкстремальных черных дыр в дион-дилатонной системе. Оказалось, что условие существования регулярных решений (несингулярных на обоих горизонтах и обладающих асимптотикой пространства Минковского) приводит к дискретизации пространства параметров модели. Множество регулярных решений подразделяется на два существенно различных класса.

К первому классу относятся решения, существующие при нескольких уникальных значениях дилатонной константы связи (или двух различных констант) и имеющие связь с цепочками Тоды. В случае двух разных констант дилатонной связи существуют лишь четыре семейства решений, соответствующие алгебрам Ли $A_1 \oplus A_1$, A_2 , C_2 и G_2 . Соответственно эти частные случаи не допускают обобщения и не могут служить подтверждающими примерами для треугольной гипотезы.

Для существования регулярных решений, относящихся ко второму классу, не требуется, чтобы дилатонная константа связи принимала какие-то уникальные значения. Если параметр a достаточно мал, то существуют интервалы (по этому параметру), при которых регулярных решений не существует. Но эти “пустоты” исчезают при $a \gtrsim 8.9$. Количество семейств решений во втором классе, скорее всего, счетно. Действительно, в отличие от решений первого класса, решения из второго класса являются сепаратриссами, разделяющими решения с различным числом нулей дилатонной функции. При заданном значении дилатонной константы связи могут существовать одновременно несколько регулярных решений, с разным количеством нулей дилатонной функции. Поэтому при неизменном значении дилатонной константы связи невозможно трансформировать одно такое регулярное решение в другое за счет непрерывного изменения других параметров системы.

Такое свойство регулярных решений похоже на некое квантование дион-дилатонной черной дыры. В самом деле, дилатонная константа связи является внешним параметром модели: в реальном мире ее значение, скорее всего, задается некоторой фундаментальной теорией. И если ее значение достаточно велико, например $a = 9.52$, то могут существовать регулярные черные дыры с 12 и 13 нулями дилатонной функции в области между горизонтами. Возникает нетривиальный вопрос: как может происходить переход от одной регулярной конфигурации к другой, если они разделены сингулярными конфигурациями? Безусловно, нестационарные процессы лежат далеко за рамками нашего исследования статических решений. Тем не менее процессу перехода между регулярными состояниями, разделенными сингулярными состояниями, могут сопутствовать интересные физические явления. Поскольку дион-дилатонные модели также находят применение и при изучении конденсированных сред [16], [17], конфигурации с регулярными состояниями, разделенные сингулярными состояниями, подобные рассмотренным в настоящей работе, могут найти применение и в этой области.

Дискретность в пространстве параметров, соответствующая регулярным решениям, наблюдается и в различных модификациях исследуемой модели: например, в присутствии космологической постоянной [6] или высших поправок по кривизне [18]. Это вполне естественно, поскольку дискретность изначально возникает при рассмотрении дилатона на фоне метрики РН, и плавное включение малых дополнительных членов в систему будет неизбежно сосуществовать какое-то время с этой дискретностью.

Интересной темой для дальнейших исследований может быть изучение вращающихся дион-дилатонных черных дыр [19], [20]. В такой системе тоже присутствует уникальное значение дилатонной константы связи $a = \sqrt{3}$ [21]. Вполне вероятно, что в случае вращающихся решений дискретность также проявит себя неким нетривиальным образом. Также представляется полезным исследовать систему дионных двойных черных дыр [22], [23] в присутствии поля дилатона.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Полиномы

Здесь мы приводим явный вид полиномов, из которых получаются решения (47) для уравнений открытой цепочки Тоды (42), соответствующих алгебрам Ли, которые возникают в модели дион-дилатонных черных дыр.

Случай $A_1 \oplus A_1$:

$$H_1 = c_1 + \frac{1 + a_2^2}{8c_1}z, \quad H_2 = c_2 + \frac{1 + a_1^2}{8c_2}z, \quad \text{где } a_1 a_2 = 1. \quad (\text{П.1})$$

Случай A_2 :

$$H_1 = c_1 + \frac{c_2}{2c_1}z + \frac{1}{16c_2}z^2, \quad H_2 = c_2 + \frac{c_1}{2c_2}z + \frac{1}{16c_1}z^2. \quad (\text{П.2})$$

Случай C_2 :

$$\begin{aligned} H_1 &= c_1 + \frac{5c_2}{8c_1}z + \frac{5^2 c_1}{27c_2}z^2 + \frac{5^3}{2^{10}3^2 c_1}z^3, \\ H_2 &= c_2 + \frac{5c_1^2}{4c_2}z + \frac{5^2}{2^6}z^2 + \frac{5^3 c_2}{2^8 3^2 c_1^2}z^3 + \frac{5^4}{2^{14}3^2 c_2}z^4. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Случай G_2 :

$$\begin{aligned} H_1 &= c_1 + \frac{7c_2}{6c_1}z + \frac{7^2 c_1^2}{48c_2}z^2 + \frac{7^3}{2^4 3^4}z^3 + \frac{7^4 c_2}{2^8 3^5 c_1^2}z^5 + \frac{7^5 c_1}{2^9 3^5 5^2 c_2}z^5 + \frac{7^6}{2^{12} 3^7 5^2 c_1}z^6, \\ H_2 &= c_2 + \frac{7c_1^3}{2c_2}z + \frac{7^2 c_1}{16}z^2 + \frac{7^3 c_2}{2^3 3^3 c_1}z^3 + \frac{7^4 (c_1^5 + c_2^3)}{2^8 3^3 c_1^3 c_2}z^4 + \frac{7^6}{2^8 3^4 5^2}z^5 + \\ &+ \frac{7^6 (3^3 c_1^5 + 5^2 c_2^3)}{2^{12} 3^7 5^2 c_1^3 c_2^2}z^6 + \frac{7^7 c_1}{2^{11} 3^7 5^2 c_2}z^7 + \frac{7^8}{2^{16} 3^8 5^2 c_1}z^8 + \\ &+ \frac{7^9 c_2}{2^{17} 3^{12} 5^2 c_1^3}z^9 + \frac{7^{10}}{2^{20} 3^{12} 5^4 c_2}z^{10}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Список литературы

- [1] G. W. Gibbons, K. Maeda, “Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields”, *Nucl. Phys. B*, **298** (1988), 741–775.
- [2] D. Garfinkle, G. T. Horowitz, A. Strominger, “Charged black holes in string theory”, *Phys. Rev. D*, **43**:10 (1991), 3140–3143; Erratum, *Phys. Rev. D*, **45**:10 (1992), 3888.
- [3] P. Dobiasch, D. Maison, “Stationary, spherically symmetric solutions of Jordan’s unified theory of gravity and electromagnetism”, *Gen. Rel. Grav.*, **14**:3 (1982), 231–242.
- [4] G. W. Gibbons, “Antigravitating black hole solitons with scalar hair in $N = 4$ supergravity”, *Nucl. Phys. B*, **207**:2 (1982), 337–349.
- [5] S.-C. Lee, “Kaluza–Klein dyons and the Toda lattice”, *Phys. Lett. B*, **149**:1–3 (1984), 98–99.
- [6] S. J. Poletti, J. Twamley, D. L. Wiltshire, “Dyonic dilaton black holes”, *Class. Quant. Grav.*, **12**:7 (1995), 1753–1769, arXiv: hep-th/9502054; Erratum, **12**:9 (1995), 2355.
- [7] G. W. Gibbons, D. Kastor, L. A. J. London, P. K. Townsend, J. H. Traschen, “Supersymmetric self-gravitating solitons”, *Nucl. Phys. B*, **416**:3 (1994), 850–880, arXiv: hep-th/9310118.
- [8] M. Nozawa, “On the Bogomol’nyi bound in Einstein–Maxwell-dilaton gravity”, *Class. Quant. Grav.*, **28**:17 (2011), 175013, 28 pp., arXiv: 1011.0261.
- [9] D. Gal’tsov, M. Khramtsov, D. Orlov, “‘Triangular’ extremal dilatonic dyons”, *Phys. Lett. B*, **743** (2015), 87–92, arXiv: 1412.7709.
- [10] B. Kostant, “The solution to a generalized Toda lattice and representation theory”, *Adv. Math.*, **34**:3 (1979), 195–338.
- [11] V. D. Ivashchuk, “Black brane solutions governed by fluxbrane polynomials”, *J. Geom. Phys.*, **86** (2014), 101–111.
- [12] M. E. Abishev, K. A. Boshkayev, V. D. Dzhunushaliev, V. D. Ivashchuk, “Dilatonic dyon black hole solutions”, *Class. Quant. Grav.*, **32**:16 (2015), 165010, 15 pp., arXiv: 1504.07657.
- [13] M. E. Abishev, K. A. Boshkayev, V. D. Ivashchuk, “Dilatonic dyon-like black hole solutions in the model with two Abelian gauge fields”, *Eur. Phys. J. C*, **77**:3 (2017), 180, 10 pp., arXiv: 1701.02029.
- [14] V. D. Ivashchuk, “Composite fluxbranes with general intersections”, *Class. Quant. Grav.*, **19**:11 (2002), 3033–3047, arXiv: hep-th/0202022.
- [15] A. A. Golubtsova, V. D. Ivashchuk, “On calculation of fluxbrane polynomials corresponding to classical series of Lie algebras”, arXiv: 0804.0757.
- [16] N. Kundu, P. Narayan, N. Sircar, S. P. Trivedi, “Entangled dilaton dyons”, *JHEP*, **03** (2013), 155, 31 pp., arXiv: 1208.2008.
- [17] A. Amoretti, M. Baggioli, N. Magnoli, D. Musso, “Chasing the cuprates with dilatonic dyons”, *JHEP*, **06** (2016), 113, 29 pp., arXiv: 1603.03029.
- [18] C. M. Chen, D. V. Gal’tsov, D. G. Orlov, “Extremal dyonic black holes in $D = 4$ Gauss–Bonnet gravity”, *Phys. Rev. D*, **78**:10 (2008), 104013, arXiv: 0809.1720.
- [19] G. Clément, “Rotating Kaluza–Klein monopoles and dyons”, *Phys. Lett. A*, **118**:1 (1986), 11–13.
- [20] D. Rasheed, “The rotating dyonic black holes of Kaluza–Klein theory”, *Nucl. Phys. B*, **454**:1–2 (1995), 379–401, arXiv: hep-th/9505038.
- [21] D. V. Galtsov, A. A. Garcia, O. V. Kechkin, “Symmetries of the stationary Einstein–Maxwell-dilaton system”, *Class. Quant. Grav.*, **12**:12 (1995), 2887–2903, arXiv: hep-th/9504155.
- [22] J. A. Cázares, H. García-Compeán, V. S. Manko, “On the physical parametrization and magnetic analogs of the Emparan–Teo dihole solution”, *Phys. Lett. B*, **662**:2 (2008), 213–216, arXiv: 0711.4802; Erratum, *Phys. Lett. B*, **665**:5 (2008), 426.
- [23] G. Clément, D. Gal’tsov, “On the Smarr formula for rotating dyonic black holes”, *Phys. Lett. B*, **773** (2017), 290–294.