Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ф. Шамир, А. Саед, О плоских симметричных решениях в $f(\mathcal{G}, T)$ -теории гравитации, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 3, 518–529

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:05:03

© 2018 г.

М. Ф. Шамир*, А. Саед*

О ПЛОСКИХ СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЯХ В $f(\mathcal{G}, T)$ -ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Получено несколько точных решений для плоско-симметричного пространства-времени в рамках недавно построенной $f(\mathcal{G}, T)$ -теории гравитации, где $f(\mathcal{G}, T)$ – функция общего вида инварианта Гаусса–Бонне $\mathcal{G}$ и следа тензора энергии-импульса T . Для получения решений была рассмотрена степенная $f(\mathcal{G}, T)$ -модель гравитации, результаты проанализированы графически. Кроме того, для обоснования метода реконструированы некоторые хорошо известные космологические результаты.

Ключевые слова: $f(\mathcal{G}, T)$ -теория гравитации, плоско-симметричное пространство-время, точные решения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9519>

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследователи проделали большую работу по усовершенствованию общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна. Причиной эволюции модифицированных теорий гравитации является то, что теория относительности не в состоянии достаточно полно объяснить такие загадочные явления, как расширение нашей Вселенной со все возрастающей скоростью, проблему плоской Вселенной, начальные сингулярности, темную материю и темную энергию (ТЭ), а некоторые ее предсказания необъяснимы. Соответственно, предполагается, что модифицированные теории позволят обнаружить различные скрытые причины расширения Вселенной. Они также могут помочь заполнить другие пробелы в ОТО.

Наша Вселенная расширяется со все возрастающей скоростью, и, чтобы объяснить это явление, необходимо использовать непротиворечивую физическую теорию. Было создано множество модифицированных теорий, включая $f(\mathcal{G})$ -, $f(\mathcal{G}, T)$ -, $f(R)$ -, $f(R, T)$ - и $f(R, \mathcal{G})$ -теории гравитации, где $\mathcal{G}$ – инвариант Гаусса–Бонне, T – след тензора энергии-импульса и R – скаляр Риччи. Из всех вышеупомянутых теорий наиболее развита модифицированная теория гравитации Гаусса–Бонне (ГБ), также называемая $f(\mathcal{G})$ -теорией гравитации, где $f(\mathcal{G})$ – функция общего вида инварианта ГБ [1], [2]. Обобщение ГБ теории гравитации содержит квадратичные

*National University of Computer and Emerging Sciences, Lahore, Pakistan.
E-mail: farasat.shamir@nu.edu.pk, atrooba_saeed@hotmail.com

естественные члены, включая инварианты кривизны второго порядка лагранжиана Эйнштейна–Гильберта [3], [4] (а именно, член ГБ, являющийся четырехмерным топологическим инвариантом). Возможно, этот класс модифицированных теорий гравитации помимо единообразного описания расширения и ТЭ поможет проследить историю расширения Вселенной с ранних времен до ускорения расширения на поздних временах [5], [6]. Согласованность обобщения ГБ с границами солнечной системы была показана в работе [7].

В статье Ноджири, Одинцова [8] $f(\mathcal{G})$ -теория гравитации рассматривалась как альтернатива ТЭ. Единое описание расширения на ранних временах и ускорения на поздних, космологическая реконструкция и сингулярности будущего в рамках $f(\mathcal{G})$ -теории обсуждались в работе [9]. В статье [10] в $f(\mathcal{G})$ -постановке были получены степенные решения. В работе [11] был предложен способ избавления от сингулярностей будущего при конечных временах, основанный на моделях ТЭ. Кроме того, в работе [11] для некоторых $f(\mathcal{G})$ -моделей теории гравитации была учтена согласованность диапазона изменения параметров с энергетическими условиями. В статье [12] были разработаны космологические модели в $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации в анизотропной постановке. В работе [13] в похожей постановке была исследована динамика $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации. Также в статье [14] применялся метод нетеровских симметрий в $f(\mathcal{G})$ -теории для модели Вселенной Фридмана–Робертсона–Уолкера (ФРУ).

Еще одна модификация ОТО – $f(R, \mathcal{G})$ -теория гравитации – привлекала внимание многих исследователей [15]. Условия, при которых $f(R, \mathcal{G})$ -теория может быть разумной альтернативой ОТО, обсуждались в работе [16] с использованием теории возмущений. В статье [17] были исследованы решения, использующие космологическую ТЭ. В работе [18] Капозиелло и др. применили метод нетеровских симметрий для модели Вселенной ФРУ и получили несколько частных моделей с целью продемонстрировать, что с его помощью можно найти точные решения благодаря тому, что существуют сохраняющиеся величины, и свертыванию космологической динамической системы. Аналогичный подход был использован в работе [19] для изучения локально вращательно-симметричной Вселенной типа Бианки-I, что привело к реконструкции решения Каснера и космологии Λ CDM. В статье [20] авторы, рассматривая точные решения с помощью разложения Тейлора некоторой общей функции в окрестности убывающих значений скаляра Риччи R и инварианта ГБ $\mathcal{G}$, исследовали сферическую симметрию в данной теории. В работе [21] были изучены энергетические условия в $f(R, \mathcal{G})$ -постановке. В статье [22] были реконструированы $f(R, \mathcal{G})$ -модели, реализующие сингулярности будущего при конечных временах.

Была установлена связь именно между инвариантом кривизны второго порядка и материей, а именно функцией $f(\mathcal{G}, T)$, приводящая к новой теории гравитации [23]. Эта область полна возможностей для получения новых результатов и разработки новых подходов к решению различных задач. В той же работе в рамках плоской модели ФРУ были исследованы движение массивных пробных частиц вдоль негеодезических траекторий, а также энергетические условия. В статье [24] Шариф и Икрам заново получили многие хорошо известные в этой теории космологические модели, а в другой работе [25] они с помощью параметризации областей устойчивости проанализировали устойчивость Вселенной Эйнштейна как для сохраняющегося, так и для несохраняющегося тензора $T_{\mu\nu}$. Те же авторы рассмотрели энергетические условия в $f(\mathcal{G}, T)$ -теории гравитации [26]. В недавней работе [27] Шамир и Ахмад использовали метод нетеровских симметрий в $f(\mathcal{G}, T)$ -теории, в котором были учтены две частные модели гравитации, и реконструировали модель де Ситтера. Они

же получили некоторые точные решения в рамках этой модели [28]. В недавней работе [29] были рассмотрены особенности анизотропной Вселенной в $f(\mathcal{G}, T)$ -теории гравитации. Также недавно была предпринята попытка применения этой теории в термодинамике. В работе [30] были исследованы законы неравновесной термодинамики и проверялось выполнение обобщенного второго закона термодинамики для реконструированных $f(\mathcal{G}, T)$ -моделей. Роль $f(\mathcal{G}, T)$ -теории в эволюции релятивистских звезд обсуждалась в недавней работе [31]. Можно предположить, что для некоторых частных моделей применение этой теории может привести к получению важных результатов, объясняющих ускоряющееся расширение Вселенной. Именно поэтому данная теория представляет интерес для исследования.

В настоящей работе усилия направлены на получение плоских симметричных решений в $f(\mathcal{G}, T)$ -теории. Для этого мы рассматриваем плоское симметричное пространство-время. Плоско-симметричное приближение считается следующим по точности после сферически- и цилиндрически-симметричных моделей в космологических задачах. Изучение плоско-симметричных решений в $f(R)$ - и $f(R, T)$ -теориях гравитации уже дало интересные результаты [32], [33]. В настоящей работе в разделе 2 мы приводим некоторые предварительные сведения относительно $f(\mathcal{G}, T)$ -теории гравитации, а также даем краткое введение в теорию уравнений поля. В разделе 3 приведены общие решения уравнений поля для некоторых частных $f(\mathcal{G}, T)$ -моделей. В разделе 4 подведен краткий итог проделанной работы.

2. $f(\mathcal{G}, T)$ -ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ: ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СХЕМА

Действие в $f(\mathcal{G}, T)$ -теории гравитации имеет вид [23]

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(\mathcal{G}, T)] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (1)$$

где κ , g и $\mathcal{L}_m$ – константа связи, определитель метрического тензора $g^{\mu\nu}$ и стандартный лагранжиан материи соответственно. Также член ГБ и след тензора энергии-импульса обозначены как $\mathcal{G}$ и T . Функция $f(\mathcal{G}, T)$ есть функция общего вида инварианта ГБ $\mathcal{G}$ и следа тензора энергии-импульса T . Тензор энергии-импульса $T_{\zeta\eta}$ связан с лагранжианом материи $\mathcal{L}_m$ и вычисляется по формуле

$$T_{\zeta\eta} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_m}{\delta g^{\zeta\eta}}. \quad (2)$$

Однако если распределение материи зависит только от метрического тензора $g_{\zeta\eta}$, то уравнение (2) принимает вид

$$T_{\zeta\eta} = g_{\zeta\eta} \mathcal{L}_m - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\zeta\eta}}. \quad (3)$$

Теперь, варьируя уравнение действия (1) относительно метрического тензора $g^{\mu\nu}$, получаем гравитационное уравнение поля

$$\begin{aligned} 0 = \partial \mathcal{S} = & \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x [(R + f(\mathcal{G}, T)) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} (\delta R + f_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}, T) \delta \mathcal{G} + f_T(\mathcal{G}, T) \delta T)] + \\ & + \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m), \end{aligned} \quad (4)$$

где индексы $\mathcal{G}$ при $f_{\mathcal{G}}$ и T в функции f_T обозначают частичное варьирование функции f относительно $\mathcal{G}$ и T соответственно. Варьируя различные переменные, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\zeta\eta}\delta g^{\zeta\eta}, & \delta R_{\mu\eta\nu}^{\zeta} &= \nabla_{\eta}(\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\zeta}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\mu\eta}^{\zeta}), \\ \delta R_{\mu\nu} &= \delta R_{\mu\zeta\nu}^{\zeta}, & \delta R &= (R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\nabla^2 - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu})\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь символ ∇_{μ} означает ковариантное дифференцирование, а $\Gamma_{\nu\mu}^{\zeta}$ – символы Кристоффеля. Аналогично, имеем

$$\delta\mathcal{G} = 2R\delta R - 4\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) + \delta(R_{\xi\mu\nu\eta}R^{\xi\mu\nu\eta}), \quad \delta T = (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}. \quad (6)$$

Применяя все эти соотношения в уравнении (4), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} R_{\zeta\eta} - \frac{1}{2}Rg_{\zeta\eta} &= -[2Rg_{\zeta\eta}\nabla^2 - 2R\nabla_{\zeta}\nabla_{\eta} - 4g_{\zeta\eta}R^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - 4R_{\zeta\eta}\nabla^2 + 4R_{\zeta}^{\mu}\nabla_{\eta}\nabla_{\mu} + \\ &+ 4R_{\eta}^{\mu}\nabla_{\zeta}\nabla_{\mu} + 4R_{\zeta\mu\eta\nu}\nabla^{\mu}\nabla^{\nu}]f_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}, T) + \frac{1}{2}g_{\zeta\eta}f(\mathcal{G}, T) - [T_{\zeta\eta} + \Theta_{\zeta\eta}]f_T(\mathcal{G}, T) - \\ &- [2RR_{\zeta\eta} - 4R_{\zeta}^{\mu}R_{\mu\eta} - 4R_{\zeta\mu\eta\nu}R^{\mu\nu} + 2R_{\zeta}^{\mu\nu\delta}R_{\eta\mu\nu\delta}]f_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}, T) + \kappa^2 T_{\zeta\eta}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь также $\Theta_{\zeta\eta} = g^{\mu\nu}\delta T_{\mu\nu}/\delta g_{\zeta\eta}$. Можно проверить, что подходящие подстановки сводят уравнение (7) к уравнениям для $f(\mathcal{G})$ и обычным уравнениям поля в ОТО. Для удобства положим $f(\mathcal{G}, T) \equiv f$, $f_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}, T) \equiv f_{\mathcal{G}}$ и т. д. След уравнения (7) имеет вид

$$R + \kappa^2 T - (T + \Theta)f_T + 2f + 2\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - 2R\nabla^2 f_{\mathcal{G}} + 4R^{\zeta\eta}\nabla_{\zeta}\nabla_{\eta}f_{\mathcal{G}} = 0. \quad (8)$$

Из вышеприведенного соотношения следует, что, в отличие от ОТО, здесь связь между R , $\mathcal{G}$ и T является дифференциальной, а не алгебраической, в силу чего можно предположить существование большего числа решений, чем в ОТО. Дивергенция ковариантного типа уравнения (7)

$$\nabla^{\zeta}T_{\zeta\eta} = \frac{f_T}{\kappa^2 - f_T} \left[(T_{\zeta\eta} + \Theta_{\zeta\eta})\nabla^{\zeta}(\ln f_T) + \nabla^{\zeta}\Theta_{\zeta\eta} - \frac{g_{\zeta\eta}}{2}\nabla^{\zeta}T \right] \quad (9)$$

не обращается в нуль благодаря присутствию производных высших порядков тензора энергии-импульса. Чтобы получить стандартное уравнение сохранения [23], нужно наложить определенные условия на уравнение (9). Это позволяет минимизировать вероятность того, что при использовании теории на больших масштабах мы столкнемся с расходимостями.

Для начала выпишем выражение, задающее стандартное статическое плоско-симметричное пространство-время [33]:

$$ds^2 = A(x)dt^2 - dx^2 - B(x)[dy^2 + dz^2], \quad (10)$$

где A и B – метрические функции переменной x . Далее, рассмотрим соответствующие инвариант ГБ и скаляр Риччи:

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{2} \left[\frac{A'^2 B'^2}{A^2 B^2} - 4 \frac{A' B' B''}{A B^2} - 2 \frac{A'' B'^2}{A B^2} + 2 \frac{A' B'^3}{A B^3} \right], \quad (11)$$

$$R = \frac{1}{2} \left[2 \frac{A''}{A} - \frac{A'^2}{A^2} + 2 \frac{A' B'}{A B} + 4 \frac{B''}{B} - \frac{B'^2}{B^2} \right], \quad (12)$$

где штрих означает вариацию по x . Тензор энергии-импульса зададим следующим образом, подразумевая, что Вселенная заполнена идеальной жидкостью:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (13)$$

где u_μ , ρ и p имеют обычный смысл. Скаляры расширения θ и сдвига σ задаются как

$$\theta = u^\mu_{;\mu} = \frac{A'}{A} + 2\frac{B'}{B}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{3}\left[\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right]^2. \quad (14)$$

Здесь

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(u_{\mu;\alpha}h^\alpha_\nu + u_{\nu;\alpha}h^\alpha_\mu) - \frac{1}{3}\theta h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\nu u_\mu. \quad (15)$$

Теперь, используя выражение (10), приводим уравнения поля (7) к виду

$$2\left(-\frac{B''}{B} + \frac{B'^2}{4B^2}\right) + 2\left(\frac{B'^3}{B^3} - 2\frac{B'B''}{B^2}\right)f'_G - 2\frac{B'^2}{B^2}f''_G - 2(\rho + p)f_T + \mathcal{G}f_G - f = 2\kappa^2\rho, \quad (16)$$

$$2\left(\frac{B'^2}{4B^2} + \frac{A'B'}{2AB}\right) + 3\frac{A'B'^2}{AB^2}f'_G - \mathcal{G}f_G + f = 2\kappa^2 p, \quad (17)$$

$$2\left(\frac{A'B'}{4AB} + \frac{A''}{2A} + \frac{B''}{2B} - \frac{A'^2}{4A^2} - \frac{B'^2}{4B^2}\right) + \left(2\frac{A'B''}{AB} - \frac{A'B'^2}{AB^2} + 2\frac{A''B'}{AB} - \frac{A'^2B'}{A^2B}\right)f'_G + 2\frac{A'B'}{AB}f''_G - \mathcal{G}f_G + f = 2\kappa^2 p. \quad (18)$$

Чтобы получить решения этих в высшей степени нелинейных и очень сложных дифференциальных уравнений с пятью неизвестными, нужно наложить некоторые дополнительные ограничения. Пропорциональность скаляра сдвига σ и скаляра расширения θ приводит к равенству

$$A = B^n, \quad n \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Согласно недавним наблюдениям можно добиться изотропности космологического расширения, если считать отношение скаляра сдвига к скаляру расширения постоянной величиной; таким образом, это физическое условие является весьма важным в космологической теории [34]. Многие исследователи действовали аналогичным образом для решения уравнений поля [35]–[40]. Применяя условие (19), мы приводим уравнения поля (16)–(18) к виду

$$2\left[\frac{-B''}{B} + \frac{B'^2}{4B^2}\right] + 2\left[\frac{B'^3}{B^3} - \frac{2B'B''}{B^2}\right]f'_G - \frac{2B'^2}{B^2}f''_G - 2(\rho + p)f_T + \mathcal{G}f_G - f = 2\kappa^2\rho, \quad (20)$$

$$2(2n + 1)\frac{B'^2}{4B^2} + 3n\frac{B'^3}{B^3}f'_G - \mathcal{G}f_G + f = 2\kappa^2 p, \quad (21)$$

$$2(n^2 - n - 1)\frac{B'^2}{4B^2} + 2(n + 1)\frac{B''}{2B} + \left[4n\frac{B'B''}{B^2} + n(n - 3)\frac{B'^3}{B^3}\right]f'_G + 2n\frac{B'^2}{B^2}f''_G - \mathcal{G}f_G + f = 2\kappa^2 p. \quad (22)$$

В следующем разделе мы постараемся найти несколько общих решений этих уравнений поля.

3. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ: РЕШЕНИЯ

Рассмотрим $f(\mathcal{G}, T)$ -модель вида [29]

$$f(\mathcal{G}, T) = \alpha f_1(\mathcal{G}) + \beta f_2(T), \quad (23)$$

где α и β – произвольные постоянные. Далее в качестве $f_1(\mathcal{G})$ мы используем общеизвестную $f(\mathcal{G})$ -модель, которая имеет вид

$$f_1(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^{m+1}, \quad (24)$$

где m – произвольная постоянная. Выбор такой модели весьма важен, так как ее использование позволяет избежать сингулярности Большого разрыва. Модель является содержательной и в ней отсутствуют нерегулярные духи со спином, равным двум [2], [41]–[43]. При таком выборе определяющую роль играет кривизна, поэтому слагаемое Эйнштейна преобладает над $f(\mathcal{G})$ -членами и, таким образом, сингулярность Большого разрыва исчезает [44]. Вычитая уравнение (21) из уравнения (22), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение общего вида

$$(n^2 - 3n - 2) \frac{B'^2}{4B^2} + (n+1) \frac{B''}{2B} + \frac{1}{2} \left(4n \frac{B'B''}{B^2} + n(n-6) \frac{B'^3}{B^3} \right) f'_\mathcal{G} + n \frac{B'^2}{B^2} f''_\mathcal{G} = 0. \quad (25)$$

Из уравнения (24) следует, что

$$f_\mathcal{G} = \alpha(m+1)\mathcal{G}^m. \quad (26)$$

Для простоты положим $\alpha = 1/(m+1)$, чтобы записать уравнение (25) в виде

$$(n^2 - 3n - 2) \frac{B'^2}{4B^2} + (n+1) \frac{B''}{2B} + \frac{1}{2} n m \mathcal{G}^m \left[\left(4 \frac{B'B''}{B^2} + (n-6) \frac{B'^3}{B^3} \right) \frac{\mathcal{G}'}{\mathcal{G}} + 2 \frac{B'^2}{B^2} \left((m-1) \frac{\mathcal{G}'^2}{\mathcal{G}^2} + \frac{\mathcal{G}''}{\mathcal{G}} \right) \right] = 0. \quad (27)$$

Это дифференциальное уравнение общего вида может иметь много содержательных решений. В настоящей статье мы рассматриваем только два из них.

Считается, что степенные решения играют важную роль в космологии. Рассмотрим степенной закон вида [29]

$$B(x) = \gamma x^k, \quad (28)$$

где γ и k – произвольные константы. Применяя это соотношение в уравнении (27), получаем следующие условия:

$$k = \frac{2(n+1)}{n(n-1)}, \quad m(2n^3m + n^3 + 1 - 2nm) = 0. \quad (29)$$

В соответствии с двумя корнями второго соотношения в (29) модели $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации имеют вид

$$f(\mathcal{G}) = \mathcal{G} + c_1, \quad f(\mathcal{G}) = \frac{2n(n-1)}{n^2 - n - 1} \mathcal{G}^{(n^2 - n - 1)/(2n(n-1))} + c_2, \quad (30)$$

Рис. 1. Поведение плотности энергии ρ при $m = -\frac{1}{2} \frac{n^2 - n + 1}{n(n-1)}$.

где c_1 и c_2 – константы интегрирования. Первая тривиальная модель соответствует случаю $c_1 = 0$ и $f_2(T) = 0$. Вторая может привести к весьма важным содержательным результатам. Рассмотрение различных форм $f_2(T)$ приводит к реконструкции различных известных решений.

3.1. Линейная модель $f_2(T)$. Рассмотрим линейную функцию $f_2(T) = T$, что позволяет нам значительно уменьшить вычислительную сложность. Уравнения (20)–(22) дают следующие выражения для плотности энергии и давления во Вселенной:

$$\begin{aligned} \rho = & -\frac{n+1}{(m+1)(n-1)^4 n^3 x^4 \kappa^2 (\kappa^2 + 1)} \left[2^{3+4m} m(1+n)(-1 + \kappa^2(3 + 8m^2(n-1)^2 n + \right. \\ & + n(2 + n(7n-18)) + 2m(n-1)(-2 + n(7n-9)) + \\ & + n(4m^2(n-1)^2 n + n(2 + n(2n-9)) + \\ & + 2m(2 + n(4 + 3(n-3)))) \left(-\frac{(1+n)^3(-1 + n(n-3))}{(n-1)^4 n^3 x^4} \right)^m + \\ & \left. + (1+m)n(n-1)^2(-1 + \kappa^2(n-3) - n)(2n+1)x^2 \right] - \frac{\beta f_T(T)}{2\kappa^2}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} p = & \frac{1}{(1+m)(n-1)^4 n^3 x^4 \kappa^2} \left[2^{3+4m} m(n+1)^2(-1 + n(4m^2(n-1)^2 n + \right. \\ & + n(2 + n(2n-9)) + 2m(2 + n(4 + 3(n-3)n)))) \left(-\frac{(n+1)^3(-1 + (n-3)n)}{(n-1)^4 n^3 x^4} \right)^m + \\ & \left. + (1+m)n(2n+1)(n^2 - 1)^2 x^2 \right] + \frac{\beta f_T(T)}{2\kappa^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из выражений (35) и (36) с очевидностью следует, что они определены при всех $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, где $m = (-1/2)(n^2 - n + 1)/(n(n-1))$. Из полученных соотношений для плотности энергии и давления вытекает, что влияние параметра уравнения состояния ω является преобладающим (его значение близко к -1), в силу чего сингулярность Большого разрыва не возникает со временем [2]. Графики изменения плотности энергии и давления при $0 < n < 1$ и $1 < n$ показаны на рис. 1 и 2.

Рис. 2. Поведение давления p при $m = -\frac{1}{2} \frac{n^2 - n + 1}{n(n-1)}$.

3.2. Модель $f_2(T)$ типа Старобинского. Рассмотрим модель $f_2(T) = T + \epsilon T^2$, где ϵ – произвольная константа. Преобразования уравнений поля (20)–(22) приводят к соотношению

$$\begin{aligned}
 21\epsilon p^2 - \rho(3 + 2\kappa^2 + 5\epsilon\rho) - p(5 + 22\epsilon\rho) = \\
 = \frac{1}{(1+m)(-1+n)^4 n^3 x^4} \left[2(1+n)(2^{3+4m} m(1+n)(-3 + 8m^2(-1+n)^3 n + \right. \\
 \left. + n(-6 + n(26 + n(-15 + 4n))) + 2m(-1+n)(2 + n(11 + n(-13 + 6n)))) - \right. \\
 \left. - \left(\frac{((1+n)^3(-1 + (-3+n)n))}{((-1+n)^4 n^3 x^4)} \right)^m + (1+m)(-3+n)(-1+n)^2 n(1+2n)x^2 \right]. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Оно имеет различные решения при разных физических условиях. Благодаря сложной природе этого соотношения при различных значениях параметра уравнения состояния ω можно получить квадратичное уравнение относительно либо плотности энергии ρ , либо давления во Вселенной p . Возможно, оно приведет нас к важным догадкам, касающимся космологической структуры Вселенной, проблемы ТЭ, загадки космологического расширения и других пробелов в существующей литературе, посвященной ОТО. Метрика решения, как правило, имеет вид

$$ds^2 = \gamma^n x^{(2(n+1))/(n-1)} dt^2 - dx^2 - \gamma x^{(2(n+1))/(n(n-1))} [dy^2 + dz^2]. \quad (34)$$

3.3. Некоторые важные космологические параметры. Скаляр Риччи R и инвариант ГБ $\mathcal{G}$ принимают вид

$$R = -\frac{16(1+n)^2(-1-4n-2n^2+n^3)}{n^3(-1+n)^4 x^4}, \quad (35)$$

$$\mathcal{G} = \frac{2(9n^2 + 2n^3 + 3 + 10n)}{n^2(n-1)^2 x^2}. \quad (36)$$

Скаляры расширения и сдвига определяются как

$$\theta = \frac{2(n+1)(n+2)}{n(n-1)x}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{2(n+1)}{xn} \right]^2. \quad (37)$$

Рис. 3. Поведение параметра изотропии $\frac{\sigma^2}{\theta}$ при $m = -\frac{1}{2} \frac{n^2 - n + 1}{n(n-1)}$.

В рассматриваемом случае условие изотропии также выполнено: $\sigma^2/\theta \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Поведение параметра изотропии при $0 < n < 1$ и $1 < n$ показано на рис. 3.

4. РЕКОНСТРУКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ОБЩЕИЗВЕСТНЫХ РЕШЕНИЙ

Плоская симметрия ранее рассматривалась с различных точек зрения многими исследователями [45]–[50]. Аналогичным способом мы получили несколько решений для плоско-симметричного пространства-времени в $f(\mathcal{G})$ -постановке. Метрика решения (34) соответствует знаменитой метрике Тауба [51] при $n = -1/2$:

$$ds^2 = \gamma^{-1/2} x^{-2/3} dt^2 - dx^2 - \gamma x^{4/3} [dy^2 + dz^2]. \quad (38)$$

Это решение также имеет особенность в точке $x = 0$.

Другой подход основан на замечании, что уравнение (27) может иметь решение экспоненциального типа

$$B(x) = e^x, \quad (39)$$

и одновременно выполняется уравнение связи

$$n(n-1) = 0. \quad (40)$$

Метрика решения в этом случае ($n = 1$) имеет вид

$$ds^2 = e^x [dt^2 - dy^2 - dz^2] - dx^2. \quad (41)$$

Эти выражения соответствуют случаю общеизвестного пространства-времени анти-де Ситтера в ОТО [52], которое является точным решением уравнений поля Эйнштейна в вакууме с отрицательной космологической константой. В этом случае скаляр Риччи и инвариант ГБ постоянны.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Считается, что описываемое степенным законом замедляющееся расширение Вселенной сменилось позднее ускорением. В силу этого степенные законы чрезвычайно важны в космологии, поскольку они описывают фазы развития Вселенной с преобладающей материей, затем сменяющиеся фазой ускорения. В настоящей статье

степенной подход в $f(\mathcal{G}, T)$ -теории гравитации был использован для статического плоско-симметричного пространства-времени. Мы считаем, что результаты статьи – это первая попытка исследования таких решений в постановке $f(\mathcal{G}, T)$ -теории гравитации. Для получения решений уравнений поля мы использовали соотношения между метрическими коэффициентами, в частности – пропорциональность между скаляром сдвига σ и скаляром расширения θ .

Сначала была рассмотрена $f(\mathcal{G}, T)$ -модель в виде линейной комбинации $f(\mathcal{G})$ -и $f(T)$ -моделей. Далее в качестве $f(\mathcal{G})$ -модели мы взяли степенную модель, известную в существующей литературе [2], [41]–[43]. Выбор степенного закона позволяет избежать сингулярности Большого разрыва. Следует отметить, что между сингулярностями Большого взрыва и Большого разрыва есть существенная разница. Большой взрыв – это начальная сингулярность, возникающая на основе гипотезы о том, что Вселенная в начальный момент имеет бесконечную концентрированную плотность, затем во время Большого взрыва резко расширяется и продолжает расширяться до наших дней. Тогда как сингулярность Большого разрыва – это финальная сингулярность, предсказывающая окончательную судьбу Вселенной, т. е. то, что наша постоянно ускоренно расширяющаяся Вселенная со временем будет разорвана. Для $f(T)$ мы рассмотрели два случая. Мы вывели общее дифференциальное уравнение (27), которое может иметь множество решений. Для получения искомых решений были использовали методы, основанные на степенном и экспоненциальном законах. Решениям, полученным при степенном подходе, соответствуют две $f(\mathcal{G})$ -модели теории гравитации. Одна из них тривиальна при $c_1 = 0$ и $f_2(T) = 0$. Однако другая модель заслуживает внимания. Полученные результаты графически представлены для возможных областей изменения параметров. Вновь возникает хорошо известная метрика Тауба [51], а член ГБ и скаляр Риччи в этом случае постоянны. Решения, полученные при использовании экспоненциального подхода, позволяют реконструировать другое известное пространство-время анти-де Ситтера [52].

Здесь следует отметить, что полученные результаты и их представленное на графиках поведение хорошо согласуются с уже известными фактами [53] для того же самого пространства-времени в $f(\mathcal{G})$ -теории гравитации. Их можно получить, положив $\beta = 0$ в уравнении (23).

Список литературы

- [1] S. Nojiri, S. D. Odintsov, “Modified Gauss–Bonnet theory as gravitational alternative for dark energy”, *Phys. Lett. B*, **631**:1–2 (2005), 1–6; S. Nojiri, S. D. Odintsov, O. G. Gorbunova, “Dark energy problem: from phantom theory to modified Gauss–Bonnet gravity”, *J. Phys. A*, **39**:21 (2006), 6627–6633, arXiv: hep-th/0510183.
- [2] G. Congnola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, S. Zerbini, “Dark energy in modified Gauss–Bonnet gravity: late-time acceleration and the hierarchy problem”, *Phys. Rev. D*, **73**:8 (2006), 084007, 16 pp., arXiv: hep-th/0601008; “String-inspired Gauss–Bonnet gravity reconstructed from the universe expansion history and yielding the transition from matter dominance to dark energy”, *Phys. Rev. D*, **75**:8 (2007), 086002, 17 pp., arXiv: hep-th/0611198.
- [3] S. M. Carroll, A. De Felice, V. Duvvuri, D. A. Easson, M. Trodden, M. S. Turner, “Cosmology of generalized modified gravity models”, *Phys. Rev. D*, **71**:6 (2005), 063513, 11 pp., arXiv: astro-ph/0410031.
- [4] B. M. N. Carter, I. P. Neupane, “Dynamical relaxation of dark energy: a solution to early inflation, late-time acceleration and the cosmological constant problem”, *Phys. Lett. B*, **638**:2–3 (2006), 94–99, arXiv: hep-th/0510109.

- [5] S. Nojiri, S. D. Odintsov, “Modified $f(R)$ gravity consistent with realistic cosmology: from a matter dominated epoch to a dark energy universe”, *Phys. Rev. D*, **74**:8 (2006), 086005, 13 pp., arXiv: hep-th/0608008.
- [6] S. Nojiri, S. D. Odintsov, P. V. Tretyakov, “From inflation to dark energy in the non-minimal modified gravity”, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **172** (2008), 81–89, arXiv: 0710.5232.
- [7] A. De Felice, S. Tsujikawa, “Solar system constraints on $f(\mathcal{G})$ gravity models”, *Phys. Rev. D*, **80**:6 (2009), 063516, 15 pp., arXiv: 0907.1830.
- [8] S. Nojiri, S. D. Odintsov, “Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy”, *eConf*, **C0602061** (2006), 06; *Internat. J. Geom. Meth. Modern Phys.*, **4**:1 (2007), 115–145.
- [9] S. Nojiri, S. D. Odintsov, “Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models”, *Phys. Rep.*, **505**:2–4 (2011), 59–144, arXiv: 1011.0544.
- [10] V. Fayaz, H. Hossienkhani, A. Aghamohammadi, “Power-law solution for anisotropic universe in $f(G)$ gravity”, *Astrophys. Space Sci.*, **357**:2 (2015), 136.
- [11] N. M. Garcia, T. Harko, F. S. N. Lobo, J. P. Mimoso, “Energy conditions in modified Gauss–Bonnet gravity”, *Phys. Rev. D*, **83**:10 (2011), 104032, 8 pp., arXiv: 1011.4159.
- [12] M. F. Shamir, “Anisotropic cosmological models in $f(G)$ gravity”, *Astrophys. Space Sci.*, **361**:4 (2016), 147, 8 pp.
- [13] M. F. Shamir, “Dynamics of anisotropic universe in $f(G)$ gravity”, *Astrophys. Space Sci.*, **362**:4 (2017), 67, 8 pp.
- [14] M. Sharif, H. I. Fatima, “Noether symmetries in $f(G)$ gravity”, *ЖЭТФ*, **149**:1 (2016), 121–130.
- [15] S. Nojiri, S. D. Odintsov, M. Sami, “Dark energy cosmology from higher-order, string-inspired gravity, and its reconstruction”, *Phys. Rev. D*, **74**:4 (2006), 046004, 14 pp., arXiv: hep-th/0605039; S. Nojiri, S. D. Odintsov, “Modified gravity and its reconstruction from the universe expansion history”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **66** (2007), 012005, 22 pp.
- [16] A. De Felice, T. Suyama, T. Tanaka, “Stability of Schwarzschild-like solutions in $f(R, \mathcal{G})$ gravity models”, *Phys. Rev. D*, **83**:10 (2011), 104035, 12 pp., arXiv: 1102.1521.
- [17] S. Capozziello, A. N. Makarenko, S. D. Odintsov, “Gauss–Bonnet dark energy by Lagrange multipliers”, *Phys. Rev. D*, **87**:8 (2013), 084037, 14 pp., arXiv: 1302.0093.
- [18] S. Capozziello, M. De Laurentis, S. D. Odintsov, “Noether symmetry approach in Gauss–Bonnet cosmology”, *Modern Phys. Lett. A*, **29**:30 (2014), 1450164, 13 pp.
- [19] M. F. Shamir, F. Kanwal, “Noether symmetry analysis of anisotropic universe in modified gravity”, *Eur. Phys. J. C*, **77**:5 (2017), 286, 7 pp., arXiv: 1704.06653.
- [20] B. Wu, B. Ma, “Spherically symmetric solution of $f(R, \mathcal{G})$ gravity at low energy”, *Phys. Rev. D*, **92**:4 (2015), 044012, 17 pp., arXiv: 1510.08552.
- [21] K. Atazadeh, F. Darabi, “Energy conditions in $f(R, G)$ gravity”, *Gen. Rel. Grav.*, **46**:2 (2014), 1664, 14 pp., arXiv: 1302.0466.
- [22] L. Sebastiani, “Finite-time singularities in modified $F(R, G)$ -gravity and singularity avoidance”, *Cosmology, Quantum Vacuum and Zeta Functions*, Springer Proceedings in Physics, **137**, eds. D. Odintsov, D. Sáez-Gómez, S. Xambó-Descamps, Springer, Berlin, 2011, 261–270, arXiv: 1008.3041.
- [23] M. Sharif, A. Ikram, “Energy conditions in $f(\mathcal{G}, T)$ gravity”, *Eur. Phys. J. C*, **76**:11 (2016), 640, 13 pp., arXiv: 1608.01182.
- [24] M. Sharif, A. Ikram, “Stability analysis of some reconstructed cosmological models in $f(\mathcal{G}, T)$ gravity”, *Phys. Dark Univ.*, **17** (2017), 1–9, arXiv: 1612.02037.
- [25] M. Sharif, A. Ikram, “Stability analysis of Einstein universe in $f(\mathcal{G}, T)$ gravity”, *Internat. J. Modern Phys. D*, **26**:8 (2017), 1750084, 15 pp., arXiv: 1704.05759.
- [26] M. Sharif, A. Ikram, “Energy conditions in $f(\mathcal{G}, T)$ gravity”, *Eur. Phys. J. C*, **76**:11 (2016), 640, 13 pp., arXiv: 1608.01182.
- [27] M. F. Shamir, M. Ahmad, “Noether symmetry approach in $f(\mathcal{G}, T)$ gravity”, *Eur. Phys. J. C*, **77** (2017), 55, 6 pp., arXiv: 1611.07338.

- [28] M. F. Shamir, M. Ahmad, “Some exact solutions in $f(\mathcal{G}, T)$ gravity via Noether symmetries”, *Modern Phys. Lett. A*, **32**:16, 1750086, 16 pp.
- [29] M. F. Shamir, “Anisotropic universe in $f(\mathcal{G}, T)$ gravity”, *Adv. High Energy Phys.*, **2017** (2017), 6378904, 10 pp.
- [30] M. Sharif, A. Ikram, *Adv. High Energy Phys.*, **2018** (2018), 2563871, 11 pp.
- [31] Z. Bhatti, M. Sharif, Z. Yousaf, M. Ilyas, “Role of $f(\mathcal{G}, T)$ gravity on the evolution of relativistic stars”, *Internat. J. Modern Phys. D*, **27**:4 (2018), 1850044, 15 pp.
- [32] M. Sharif, M. F. Shamir, “Plane symmetric solutions in $f(R)$ gravity”, *Modern Phys. Lett. A*, **25**:15 (2010), 1281–1288, arXiv:0912.1393.
- [33] M. F. Shamir, “Plane Symmetric solutions in $f(R, T)$ gravity”, *Commun. Theor. Phys.*, **65**:3 (2016), 301–307.
- [34] R. Kantowski, R. K. Sachs, “Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models”, *J. Math. Phys.*, **7** (1966), 443–446.
- [35] W. Xing-Xiang, “Bianchi type-III string cosmological model with bulk viscosity in general relativity”, *Chinese Phys. Lett.*, **22**:1 (2005), 29–32.
- [36] K. S. Thorne, “Primordial element formation, primordial magnetic fields, and the isotropy of the universe”, *Astrophys. J.*, **148**:1 (1967), 51–67.
- [37] C. B. Collins, S. W. Hawking, “Why is the universe isotropic?”, *Astrophys. J.*, **180** (1973), 317–334.
- [38] S. R. Roy, S. K. Banerjee, “Bianchi type II string cosmological models in general relativity”, *Class. Quantum Grav.*, **12**:8 (1995), 1943–1948.
- [39] R. Bali, P. Kumawat, “Bulk viscous L.R.S. Bianchi type V tilted stiff fluid cosmological model in general relativity”, *Phys. Lett. B*, **665**:5 (2008), 332–337.
- [40] M. Sharif, M. Zubair, “Dynamics of Bianchi I universe with magnetized anisotropic dark energy”, *Astrophys. Space Sci.*, **330**:2 (2010), 399–405.
- [41] G. Cognola, M. Gastaldi, S. Zerbini, “On the stability of a class of modified gravitational models”, *Internat. J. Theor. Phys.*, **47**:4 (2008), 898–910.
- [42] A. De Felice, S. Tsujikawa, “Construction of cosmologically viable $f(\mathcal{G})$ gravity models”, *Phys. Lett. B*, **675**:1 (2009), 1–8, arXiv:0810.5712.
- [43] S. Tsujikawa, “Modified gravity models of dark energy”, *Lecture Notes in Physics*, **800** (2010), 99–145, arXiv:1101.0191.
- [44] S. Nojiri, S. D. Odintsov, S. Tsujikawa, “Properties of singularities in the (phantom) dark energy universe”, *Phys. Rev. D*, **71**:6 (2005), 063004, 16 pp., arXiv:hep-th/0501025.
- [45] H. Takeno, “On plane wave solutions of field equations in general relativity”, *Tensor (N. S.)*, **7**:34 (1957), 97–102.
- [46] A. Peres, “Null electromagnetic fields in general relativity theory”, *Phys. Rev.*, **118**:4 (1960), 1105–1110.
- [47] T. Nordtvedt, H. Pegels, “Electromagnetic plane wave solutions in general relativity”, *Ann. Phys.*, **17**:3 (1962), 426–435.
- [48] V. Gaikwad, T. M. Karade, “Plane symmetric higher-dimensional space-times”, *Acta Phys. Hungar.*, **67**:3–4 (1990), 259–262.
- [49] K. S. Adhav, T. M. Karade, *Post Raag Reports №* 279, 1994.
- [50] S. R. Bhoyar, A. G. Deshmukh, “Plane wave solutions of the field equations of general relativity – II”, *Romanian Rep. Phys.*, **64**:4 (2012), 933–944.
- [51] M. L. Bedran, M. O. Calvo, F. M. Paiva, D. Soares, “Taub’s plane-symmetric vacuum space-time reexamined”, *Phys. Rev. D*, **55**:6 (1997), 3431–3439, arXiv:gr-qc/9608058.
- [52] T. Feroze, A. Qadir, M. Ziad, “Modified gravity with negative and positive powers of curvature: unification of inflation and cosmic acceleration”, *Phys. Rev. D*, **68**:12 (2003), 123512, 10 pp.
- [53] M. F. Shamir, A. Saeed, “Plane symmetric solutions in $f(\mathcal{G})$ gravity”, *JETP*, **125**:6 (2017), 1065–1070.