Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Новиков, Р. К. Романовский, Об одном методе построения алгебро-геометрических решений уравнения нулевой кривизны, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 1, 61–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf952>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:44:22

Д. П. Новиков*, Р. К. Романовский*

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ

Предлагается конструкция, приводящая вычисление алгебро-геометрических решений уравнения нулевой кривизны для матриц второго порядка при специальных условиях, выполняемых в ряде приложений, к решению задачи обращения Якоби на гиперэллиптической римановой поверхности и уравнения Риккати. Получено приложение к системе уравнений главного кирального поля.

ВВЕДЕНИЕ

Будем кратко говорить, что матрица-функция $A(x, y, \lambda)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, принадлежит классу Q_0 , если она рациональна по λ с полюсами, не зависящими от x, y . Алгебро-геометрическое решение (U, V) уравнения нулевой кривизны

$$U_y - V_x + [U, V] = 0 \quad (1)$$

в классе матриц из Q_0 выделяются требованием (см. [1]) существования матрицы $W = W(U, V) \in Q_0$ такой, что

$$W_x = [U, W], \quad W_y = [V, W] \quad (2)$$

(равенства (1), (2) должны выполняться для всех λ). В работе рассматривается система уравнений (1)–(2) для тройки матриц (U, V, W) второго порядка, где матрица U имеет специальный вид: $u_{ij}(x, y, \lambda)$ – многочлены по λ и

$$\begin{aligned} \deg u_{ii} &\leq 1, \quad u_{12} = u_{12}(x, y) \neq 0, \\ \max\{\deg u_{ii}, \deg \det U\} &= 1 \text{ или } 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Условия (3) выполняются в основных приложениях – см. в [1, 2] примеры представлений вида (1) нелинейных уравнений, где U имеет вид (3) либо приводится к (3) преобразованиями вида $(U, V) \rightarrow T(\lambda)(U, V)T^{-1}(\lambda)$, $(\lambda - \lambda_0)^{-1} \rightarrow \lambda$ с рациональной матрицей $T(\lambda)$. Далее без ограничения общности предполагается

$$\operatorname{Sp} U = \operatorname{Sp} V = \operatorname{Sp} W = 0 \quad (4)$$

*Омский государственный технический университет

(равенства (1)–(3) сохраняются при замене $U \rightarrow U - 0.5 \operatorname{Sp} UI$ и таких же заменах для V, W ; здесь I – единичная матрица). Предлагается подход к построению троек (U, V, W) из Q_0 , удовлетворяющих (1)–(4) (при этом полюсы V заранее не фиксируются), состоящий кратко в следующем.

1. Вначале рассматривается система (1)–(2) для тройки матриц частного вида

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} -0.5v_x & v \\ uv - 0.5v_{xx} & 0.5v_x \end{pmatrix},$$

$$W_0 = \begin{pmatrix} -0.5w_x & w \\ uw - 0.5w_{xx} & 0.5w_x \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$u = u_0(x, y)\lambda^2 + u_1(x, y)\lambda + u_2(x, y),$$

$$|u_0| + |u_1| \neq 0, \quad w = \prod_{i=1}^g (\lambda - \gamma_i(x, y)); \quad (6)$$

$$v = \sum_{j=0}^N v_j, \quad v_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i(x, y)\lambda^{n-i},$$

$$v_j = \sum_{i=1}^{n_j} \beta_{ij}(x, y)(\lambda - \lambda_j)^{-i}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (7)$$

порядки полюсов g, n, n_j и полюсы λ_j произвольно фиксированы. Показано, что вычисление функций γ_i приводится к решению задачи обращения Якоби на кривой $\mu^2 = \Delta(\lambda)$, где $\Delta(\lambda)$ – многочлен степени $2g + \deg u$, решаемой в тета-функциях [3]. Коэффициенты u_i вычисляются по w, Δ из системы линейных алгебраических уравнений. Основной результат в этом пункте – представление функции v через нули многочлена w (формулы (22), (25)). Получаемое множество решений (5) системы (1)–(2) при фиксированных полюсах (6), (7) и многочлене $\Delta(\lambda)$ зависит от произвольной гладкой вектор-функции $c(y)$ размера $n + 1 + \sum_j n_j$ и произвольного вектора размера g и содержит все решения вида (5)–(7).

2. Рассматривается система (1)–(2) при условиях (3), (4) и дополнительном условии на матрицу W : элемент w_{12} ищется в виде

$$w_{12} = u_{12}(x, y)w(x, y, \lambda), \quad (8)$$

где w – многочлен вида (6) произвольно фиксированной степени g . Показано, что каждое решение (U, V, W) из Q_0 переводится в решение вида (5)–(7) преобразованием

$$U_0 = G_x G^{-1} + G U G^{-1}, \quad V_0 = G_y G^{-1} + G V G^{-1}, \quad (9)$$

где G строится по матрице U (формула (32)), $G, G^{-1} \in Q_0$, при этом $v = v_{12} u_{12}^{-1}$ и коэффициенты многочленов

$$u_{11} = a(x, y)\lambda + b(x, y), \quad \det U = A(x, y)\lambda^2 + B(x, y)\lambda + C(x, y) \quad (10)$$

связаны с коэффициентами многочлена u в (6) равенствами

$$\begin{aligned} A &= -u_0, & a_x - az &= u_1 + B, \\ 0.5z_x + bz - 0.25z^2 &= f, & z &= u_{12x}u_{12}^{-1}, & f &= -u_2 + b_x - C. \end{aligned} \quad (11)$$

3. Каждому решению (5)–(7) системы (1)–(2), найденному указанным в пункте 1 способом, отвечает в силу равенств (9)–(11) семейство решений (U, V, W) из Q_0 системы (1)–(4), зависящее от вектор-функции $F(x, y) = (a, b, A, B, C, z)$, удовлетворяющей (11). Очевидно, множество допустимых F может быть параметризовано тройкой (b, B, C) произвольных гладких функций от x, y и тройкой произвольных гладких функций от y – “постоянных” интегрирования, сводящегося к решению уравнения Рикати. Строящееся в итоге семейство решений (U, V) уравнения (1) зависит от набора данных $g, \Delta(\lambda), n, n_j, \lambda_j, F, c(y)$, указанных выше.

4. Изложенная конструкция дает подход к построению алгебро-геометрических решений нелинейных уравнений с частными производными, представимых в виде (1), (3). В этом случае полюсы V заданы и между элементами U, V имеются связи помимо (1), (3). Задавая порождающей матрицей W вида (4), (8), переходя к тройке (5)–(7) по формулам (9), решая систему (1)–(2) для этой тройки при фиксированных $g, \Delta(\lambda)$ (в этой ситуации числа n, n_j, λ_j заданы, см. п. 2) и возвращаясь назад (п. 3), нужно использовать произвол в выборе F для удовлетворения дополнительных соотношений. В качестве примера в работе построен класс алгебро-геометрических решений системы уравнений главного кирального поля.

Далее система (1)–(4), (8) для матриц (5)–(7) называется канонической в классе таких систем.

1. ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Далее, говоря о равенствах, содержащих параметр λ , будем опускать слова “прив всех λ ”. Зафиксируем произвольно числа g, n, n_j, λ_j в (6), (7).

ЛЕММА 1. Следующие утверждения равносильны:

(i) Матрицы (5)–(7) удовлетворяют равенствам (1), (2) на открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^2$.

(ii) На D справедливы равенства

$$-0.5ww_{xx} + 0.25w_x^2 + uw^2 = \Delta(\lambda), \quad (12)$$

$$w_y = vw_x - wv_x, \quad (13)$$

где $\Delta(\lambda)$ – многочлен степени $2g + \deg u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для обоснования (ii)→(i) нужно вывести из (12), (13) равенства

$$\begin{aligned} 0.5w_{xxx} - 2uw_x - u_xw &= 0, & w_{xy} &= w_{xx}v - wv_{xx}, \\ 0.5(w_{xxy} + v_xw_{xx} - v_{xx}w_x) - 2uw_y - u_yw &= 0, \\ u_y - vu_x - 2uv_x + 0.5v_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

(система (1)–(2) для матриц (5)–(7) равносильна системе (13)–(14)). Первые два получаются из (12), (13) дифференцированием по x , третье – дифференцированием (12) по y с учетом (13), четвертое получается из первых трех и (13) исключением функции w и ее производных (при этом второе равенство (14) нужно предварительно продифференцировать по x). Обратно, пусть верны (13), (14). Умножая первое равенство (14) на w , получим $L_x = 0$, где $L(x, y, \lambda)$ – левая часть (12). Далее, умножая третье равенство (14) на w и подставляя в него выражения для wv_x и wv_{xx} из (13) и второго равенства (14), получим $L_y = 0$. Отсюда следует $L = \Delta$, $\Delta = \Delta(\lambda)$; так как L – многочлен степени $2g + \deg u$ по λ , то же верно для $\Delta(\lambda)$.

Лемма 1 приводит построение решений канонической системы к решению системы (12)–(13) при произвольно фиксированном многочлене

$$\Delta(\lambda) = \sum_{i=0}^{2g+2} \Delta_i \lambda^{2g+2-i}, \quad |\Delta_0| + |\Delta_1| \neq 0.$$

Предполагая, что $\Delta(\lambda)$ не имеет кратных корней, построим компактную риманову поверхность Γ с уравнением $\mu^2 = \Delta(\lambda)$ и рассмотрим систему уравнений на Γ

$$\sum_{i=1}^g \int_{(\infty, \sigma_i)}^{(\gamma_i, \sigma_i)} \frac{\lambda^{k-1} d\lambda}{2\sqrt{\Delta(\lambda)}} = \delta_{kg} x + \xi_k(y), \quad k = \overline{1, g}, \quad (15)$$

где при каждом i путь интегрирования во всех уравнениях один и тот же, $\sigma_i = \pm$ (в случае $\Delta_0 = 0$ имеем $(\infty, +) = (\infty, -)$), δ_{ij} – символ Кронекера, $\xi_k(y)$ – произвольные функции. После фиксирования базиса циклов система (15) приводится к задаче обращения Якоби на Γ (см. ниже раздел 3). Будем называть открытое множество $D \subset \mathbb{R}^2$ множеством общего положения относительно многочлена w , если

$$\gamma_i \neq \gamma_j \quad (i \neq j), \quad \Delta(\gamma_i) \neq 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in D. \quad (16)$$

ЛЕММА 2. *При условиях общего положения (16) следующие утверждения равносильны:*

- (i) *Функции (6) удовлетворяют уравнению (12) на D .*
- (ii) *На D выполняются равенства (15) при некоторых σ_i, ξ_k и*

$$u_0 = \Delta_0, \quad u_1 = \Delta_1 - 2\Delta_0 w_1, \quad u_2 = \Delta_2 - 2\Delta_1 w_1 + \Delta_0(3w_1^2 - 2w_2), \quad (17)$$

где w_i – коэффициент при λ^{g-i} многочлена w .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условиях (16) первая часть утверждения (ii) равносильна утверждению о справедливости равенств

$$0.25\Delta^{-1}(\gamma_i)\gamma_{ix}^2 = \prod_{j \neq i} (\gamma_i - \gamma_j)^{-2}, \quad i = \overline{1, g} \quad (18)$$

(см. [3, 4]). Равенства (18) получаются из (12) подстановкой $\lambda = \gamma_j$. Равенства (17) означают совпадение трех старших коэффициентов в левой и правой частях (12). Тем самым (i) $\rightarrow$ (ii). Далее, равенства (18) означают выполнение соотношений

$$(L - \Delta)_{\lambda=\gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1, g}, \quad (19)$$

для левой части L равенства (12). Дифференцируя (19) по x и пользуясь тем, что $L_x(x, y, \gamma_i) = 0$, получим

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} (L - \Delta) \right|_{\lambda=\gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1, g}. \quad (20)$$

В силу выбора функций u_i в каждой точке $(x, y) \in D$ три старших коэффициента многочлена $L - \Delta$ равны нулю. Равенства (19), (20) представляют собой систему $2g$ линейных однородных уравнений для остальных $2g$ коэффициентов с определителем, не равным нулю. Отсюда следует $L = \Delta$ на D , т.е. (ii) $\rightarrow$ (i).

Пусть: 1) $(\gamma_1, \dots, \gamma_g)$ – решение системы (15) при некоторых гладких $\xi_k(y) : \gamma_i = f_i(x, \xi(y))$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_g)$, $i = \overline{1, g}$;

2) w – многочлен (6) с нулями $\gamma_i = f_i$;

3) функции $\varphi_m(x, y, \lambda)$, $\varphi_{jm}(x, y, \lambda)$ даются формулами

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \begin{cases} 1, & m = 0, \\ \lambda^m + \sum_{i=1}^m w_i \lambda^{m-i}, & 1 \leq m \leq g, \\ \lambda^{m-g} w, & m > g, \end{cases} \\ \varphi_{jm} &= \begin{cases} \sum_{i=g-m+1}^g w_{ij} (\lambda - \lambda_j)^{g-i-m}, & 1 \leq m \leq g, \\ (\lambda - \lambda_j)^{-m} w, & m > g, \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

где λ_j – полюсы (7), w_{ij} – коэффициент при $(\lambda - \lambda_j)^{g-i}$ в разложении w по степеням $\lambda - \lambda_j$;

4) функция $\varphi = \varphi(x, \xi(y), c(y), \lambda)$ дается формулой

$$\varphi = \sum_{m=0}^n c_m(y) \varphi_m + \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{n_j} c_{jm}(y) \varphi_{jm}, \quad (22)$$

где n, n_j – порядки полюсов (7), $c(y) = (c_m, c_{jm})$ – набор $n + 1 + \sum_j n_j$ произвольных гладких функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в условиях 1–4 вектор-функции $\xi(y)$, $c(y)$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \xi_{ky} &= \varepsilon_k c_{g-k}(y) - \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{n_{jk}} C_{k-1}^{k-m} \lambda_j^{k-m} c_{jm}(y), \quad k = \overline{1, g}, \\ \varepsilon_k &= \begin{cases} 1, & g - k > n, \\ 0, & g - k \leq n, \end{cases} \quad n_{jk} = \min\{n_j, k\}, \end{aligned} \quad (23)$$

и открытое множество $D \subset \mathbb{R}^2$ таково, что для функций $\gamma_i = f_i$ выполнены условия общего положения (16) и множества $\gamma_i(D)$ отделены от полюсов λ_j :

$$\min_{i,j} \text{dist} \{ \gamma_i(D), \lambda_j \} > 0. \quad (24)$$

Тогда функции

$$v(x, y, \lambda) = \varphi, \quad w(x, y, \lambda) = \prod_{i=1}^g (\lambda - f_i) \quad (25)$$

удовлетворяют уравнению (13) на D . Решения (25), зависящие от произвольной гладкой вектор-функции $c(y)$ и постоянных интегрирования в (23), исчерпывают все решения вида (6), (7) уравнения (13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Уравнение (13) для функций v, w вида (6), (7) равносильно системе

$$\gamma_{iy} = \gamma_{ix} v(x, y, \gamma_i), \quad i = \overline{1, g}, \quad (26)$$

$$L_j = \sum_{i=1}^g \gamma_{ix} \frac{v_j(x, y, \lambda) - v_j(x, y, \gamma_i)}{\lambda - \gamma_i} + v_{jx}(x, y, \lambda) = 0, \quad j = \overline{0, N}. \quad (27)$$

В самом деле, из (13) при $\lambda = \gamma_i$ следует (26). Далее, умножая обе части (13) на w^{-1} и учитывая (26), получим $\sum_j L_j = 0$. Так как при $(x, y) \in D$ рациональная дробь $L_j(\lambda)$ имеет в силу (25) единственный полюс λ_j (здесь $\lambda_0 = \infty$), то отсюда следует $L_j = 0$ при каждом j . Обратно, складывая равенства (27) и учитывая (26), получим (13).

2. Покажем, что равенства (26) для функций (25) равносильны условиям (23). Дифференцируя (15) по y , получим систему g линейных уравнений относительно $\gamma_{1y}, \dots, \gamma_{gy}$ с определителем, не равным нулю, откуда следует, что равенства (26) для функций (25) равносильны равенствам

$$\xi_{ky} = \sum_{i=1}^g \frac{\gamma_i^{k-1} \gamma_{ix} \varphi(x, \xi, c, \gamma_i)}{2\sqrt{\Delta(\gamma_i)}}, \quad k = \overline{1, g}, \quad (28)$$

вытекающим из этой системы с учетом (26) и $v = \varphi$. Используя равенства (19), (22), нетрудно привести (28) к виду

$$\begin{aligned} \xi_{ky} &= \sum_{m=0}^n c_m r_{km} + \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^{n_j} c_{jm} r_{jkm}, \quad k = \overline{1, g}, \\ r_{km} &= -\text{res}_{\infty} \lambda^{k-1} \varphi_m w^{-1}, \quad r_{jkm} = -\text{res}_{\lambda_j} \lambda^{k-1} \varphi_{jm} w^{-1}. \end{aligned}$$

Вычисления дают

$$r_{km} = \delta_{m, g-k}, \quad r_{jkm} = \begin{cases} -C_{k-1}^{k-m} \lambda_j^{k-m}, & m \leq k, \\ 0, & m > k. \end{cases}$$

Отсюда следует требуемое.

В силу пунктов 1, 2 и формул (7), (22) для v, w для доказательства теоремы достаточно показать справедливость в D при произвольных $c_m(y), c_{jm}(y)$ соотношений

$$L_0 = 0 \Leftrightarrow v_0 = \sum_{m=0}^n c_m(y) \varphi_m, \quad (29)$$

$$L_j = 0 \Leftrightarrow v_j = \sum_{m=1}^{n_j} c_{jm}(y) \varphi_{jm}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (30)$$

3. Покажем справедливость (29). При $n = 0$ оно очевидно. Пусть $n \geq 1$, K — компакт в D , число $R > 0$ таково, что множества $\gamma_i(K)$ лежат в круге $|\lambda| < R$. Умножая (27) на $\lambda^{k-1}w^{-1}$ и интегрируя по окружности $|\lambda| = R$, получим

$$\mathcal{L}_k v_0 = \frac{\partial}{\partial x} \int_{|\lambda|=R} \lambda^{k-1} \frac{v_0}{w} d\lambda = 0, \quad g - n \leq k \leq g \quad (31)$$

(при $k < g - n$ (31) тривиально). Уравнение $L_0 = 0$ и система (31) содержат одну и ту же информацию о векторе $\alpha(x, y) = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ коэффициентов многочлена v_0 на компакте K . В самом деле, равенства $L_0 = 0$ и (31), как нетрудно убедиться, равносильны линейным системам соответственно вида $A_x \alpha = B \alpha$, $A \alpha_x = B_1 \alpha$ для вектора α на множестве K_x — проекции K на ось x , где A — нижняя треугольная матрица с элементами $a_{ii} = 1$, вследствие чего она обратима. Отсюда вытекает, что при каждом $y \in K_y$ линейные пространства $H_1(y), H_2(y)$ решений этих систем имеют одинаковую размерность $n + 1$. Так как $H_1 \subset H_2$ (система (31) выведена из равенства $L_0 = 0$), то $H_1 = H_2$. Далее, простые вычисления с учетом (21) дают $\mathcal{L}_k \varphi_m = 0$, $m \geq 0$, где φ_m — функции (21), $\mathcal{L}_k$ — операторы (31). Это означает, что векторы коэффициентов многочленов $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ в (29), дополненные нулями до размера $n + 1$, содержатся в H_2 , а следовательно, они содержатся в H_1 . Так как они линейно независимы, то образуют базис в H_1 . Тем самым доказана справедливость (29) на любом компакте $K \subset D$, а значит, оно верно в D .

4. В силу условия (24) существует набор попарно непересекающихся кругов $|\lambda - \lambda_j| \leq R_j$, $j = \overline{1, N}$, такой, что множества $\gamma_i(D)$ имеют пустое пересечение с каждым из них. С помощью рассуждений, аналогичных проведенным в пункте 3, получим, что равенство $L_j = 0$ при $j \neq 0$ равносильно в D системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{|\lambda - \lambda_j| = R_j} (\lambda - \lambda_j)^{k-1} \frac{v_j}{w} d\lambda = 0, \quad 1 \leq k \leq n_j,$$

и верно соотношение (30); при этом существенно, что в формуле (21) для φ_{jm} “старшие” коэффициенты $w_{gj} = \prod_{i=1}^g (\lambda_j - \gamma_i) \neq 0$ в D . Теорема доказана.

Из лемм 1, 2 и теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1 матрицы (5), где функции u, v, w даются формулами (6), (7), (22), (25), удовлетворяют системе (1)–(2). Получаемые таким путем решения исчерпывают все решения вида (5)–(7).

2. СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (1)–(4)

Построим по матрице U вида (3) матрицу

$$G = u_{12}^{-0.5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_{11} - 0.5z & u_{12} \end{pmatrix}, \quad z = \frac{u_{12x}}{u_{12}}. \quad (32)$$

ЛЕММА 3. Преобразование (9) с матрицей (32) переводит решение (U, V, W) класса Q_0 системы (1)–(4), где W удовлетворяет дополнительному условию (8), в решение вида (5)–(7), где

$$\begin{aligned} u &= -A\lambda^2 + (a_x - az - B)\lambda - (0.5z_x + bz - 0.25z^2 - b_x + C), \\ v &= v_{12}u_{12}^{-1}, \end{aligned} \quad (33)$$

a, b, A, B, C, z – функции (10), (32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование (9) сохраняет равенства (1), (2). Формулы (5), (33) для U_0, v получаются прямым вычислением, формулы для остальных элементов матриц V_0, W_0 следуют из (8) и равенств (1), (2) для матриц (5).

ТЕОРЕМА 3. Пусть (U_0, V_0, W_0) – решение (5)–(7) системы (1)–(2), построенное указанным в теореме 2 способом, и функции a, b, A, B, C, z переменных x, y удовлетворяют равенствам (11), где u_i – коэффициенты (17) многочлена u . Тогда

1. Тройка матриц (U, V, W) , где элементы U вычислены из (10), (32) с учетом $\text{Sp } U = 0$ и V, W вычислены из (9) с матрицей (32), – решение класса Q_0 системы (1)–(4), при этом $v_{12} = vu_{12}$, $w_{12} = wu_{12}$.

2. Получаемое таким путем множество алгебро-геометрических решений (U, V) уравнения нулевой кривизны исчерпывает все решения вида (3)–(4), для которых порождающая матрица W удовлетворяет условию (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства (11) равносильны формуле (33) для многочлена u в (5). При указанном способе построения тройка (U, V, W) связана с тройкой (U_0, V_0, W_0) с учетом леммы 3 равенствами (5), где G – матрица (32), вычисленная по U . Отсюда следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение следует из теоремы 2 и леммы 3.

Из теоремы 3 следуют утверждения, сформулированные в п. 3 введения.

3. КЛАСС АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГЛАВНОГО КИРАЛЬНОГО ПОЛЯ

Уравнение нулевой кривизны (1) для матриц

$$U = \begin{pmatrix} U_{11}\lambda & U_{12} \\ U_{21}\lambda^2 & -U_{11}\lambda \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} V_{11}\lambda & V_{12} \\ V_{21}\lambda^2 & -V_{11}\lambda \end{pmatrix} (\lambda - 1)^{-1} \quad (34)$$

равносильно, как нетрудно убедиться, системе уравнений главного кирального поля [1, 5]

$$u_y + [u, v] = 0, \quad v_x - [u, v] = 0 \quad (35)$$

для матриц $u = \|U_{ij}(x, y)\|$, $v = \|V_{ij}(x, y)\|$ (в (35) можно без ограничения общности считать $\text{Sp } u = \text{Sp } v = 0$). Ниже на основе изложенных приемов строится класс алгебро-геометрических решений уравнения (1) для пары (34) с порождающей матрицей W , удовлетворяющей условиям (4) и (8), при

$$w = (\lambda - \gamma_1)(\lambda - \gamma_2), \quad \Delta(\lambda) = \lambda \prod_{i=1}^4 (\lambda - E_i),$$

$E_i \neq 0$, $E_i \neq E_j$ при $i \neq j$. При решении задачи обращения Якоби (36) была использована формула (2.4.29) из работы [3] для сумм $\sum_i \gamma_i^s$. Специальный вид матрицы U и многочлена $\Delta(\lambda)$ ($\lambda = 0$ – корень) позволил найти точное частное решение уравнения Риккати (11). На последнем этапе при вычислении матрицы V подбором постоянных интегрирования отсекались “лишние” слагаемые; здесь также использовалось решение задачи обращения Якоби, в том числе формула (39).

1. Пусть Γ – компактная риманова поверхность $\mu^2 = \Delta(\lambda)$. Построим по стандартной методике [3] канонический базис циклов a_1, a_2, b_1, b_2 на Γ и канонический базис голоморфных дифференциалов

$$\omega_k = (\alpha_{k1}\lambda + \alpha_{k2})\sqrt{\Delta^{-1}(\lambda)}d\lambda, \quad k = 1, 2,$$

и пусть $\theta(z_1, z_2)$ – тэта-функция поверхности Γ с матрицей Римана, вычисленной в этом базисе [6]. Умножая столбец равенств (15) при $g = 2$ слева на матрицу $2\|\alpha_{ij}\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, получим систему

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{(\gamma_1, \sigma_1)} \omega_k + \int_{\infty}^{(\gamma_2, \sigma_2)} \omega_k &= \zeta_k, \\ \zeta_k &= 2[\alpha_{k1}(x + \xi_1(y)) + \alpha_{k2}\xi_2(y)], \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (36)$$

Вычисления по формуле (2.4.29) из [3] (аналогичные проведенным там) с учетом формул для ζ_k дают

$$w_1 = -(\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(\zeta) - c_1, \quad (37)$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \frac{1}{6} \left(-\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 8\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + 4\Delta_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \ln \theta(\zeta) + c_2, \quad (38)$$

$$\gamma_1^3 + \gamma_2^3 = -\frac{1}{120} \eta \ln \theta(\zeta) + c_3,$$

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\partial^6}{\partial x^6} + 40\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial t} + 40\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 20\Delta_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \\ &\quad - 112\Delta_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + (-72\Delta_3 + 64\Delta_2^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = 2 \left(\alpha_{12} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \alpha_{22} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \right), \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{a_1} \lambda^k \omega_1 + \int_{a_2} \lambda^k \omega_2 \right), \quad (40)$$

$k = 1, 2, 3$, где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, Δ_k — коэффициенты $\Delta(\lambda)$ в обозначениях раздела 1; вектор римановых констант “прячется” в произвольных $\xi_k(y)$. Для получения нужного далее представления коэффициента $w_2 = \gamma_1 \gamma_2$ многочлена w воспользуемся формулой (18). Умножая (18) на $\Delta(\gamma_i)$, дифференцируя по x , выражая отсюда γ_{ixx} и складывая полученные равенства, после простых вычислений найдем

$$(\gamma_1 + \gamma_2)_{xx} - 4\Delta_2(\gamma_1 + \gamma_2) - 6(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 8\gamma_1\gamma_2 - 2\Delta_3 = 0,$$

откуда с учетом (37), (38) следует

$$w_2 = \gamma_1 \gamma_2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ln \theta(\zeta) - c, \quad c = 0.5c_1\Delta_2 + 0.75c_2 + 0.25\Delta_3. \quad (41)$$

2. Выполним переход к соответствующей канонической тройке (5), используя преобразование (9) с матрицей (32). Из (33), (34) следует, что функция (7) имеет здесь вид $v = \beta_{11}(x, y)(\lambda - 1)^{-1}$. Применяя теоремы 1, 2, получим

$$v = c_{11}(y) \frac{w(x, y, 1)}{\lambda - 1} = c_{11}(y) \frac{1 + w_1 + w_2}{\lambda - 1}, \quad (42)$$

где w_k — функции (37), (38), $c_{11}(y)$ — произвольная гладкая функция, при этом функции $\xi_k(y)$ в (36) удовлетворяют соотношениям

$$\xi_{1y} = \xi_{2y} = -c_{11}(y). \quad (43)$$

Из (17) с учетом равенств $\Delta_0 = 0$, $\Delta_1 = 1$ вытекает

$$u = \lambda + \Delta_2 - 2w_1. \quad (44)$$

3. В формулах (10), (11) с учетом (34), (44) имеем $a = U_{11}$, $b = A = B = C = 0 \Rightarrow \det U = 0$, поэтому

$$U_{11}^2 + U_{12}U_{21} = 0, \quad U_{11x} - zU_{11} = 1, \quad (\ln U_{12})_x = z, \quad (45)$$

$$0.5z_x - 0.25z^2 = 2w_1 - \Delta_2. \quad (46)$$

Подставляя в (12) $\lambda = 0$ и учитывая (44), получим, что функция

$$z = -(\ln w_2)_x \quad (47)$$

является решением уравнения (46). Из (41), (45), (47) следуют формулы

$$U_{11} = \left[\frac{\partial}{\partial t} \ln \theta(\zeta) - cx + r_1 \right] w_2^{-1}, \quad U_{12} = r_2 w_2^{-1}, \quad U_{21} = -U_{11}^2 U_{12}^{-1}, \quad (48)$$

где $r_k(y)$ — “постоянные” интегрирования, подлежащие уточнению далее.

4. Найдем матрицу V из второго равенства (9). Вычисления с учетом формул (18), (33), (42), (44)–(48) дают

$$V = (V_1 + V_2)(\lambda - 1)^{-1}, \quad (49)$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} \left(V_{11} + \frac{r'_2}{r_2}\right)\lambda & V_{12} \\ V_{21}\lambda^2 & -\left(V_{11} + \frac{r'_2}{r_2}\right)\lambda \end{pmatrix},$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \frac{r'_2}{2r_2} & 0 \\ (\varepsilon_{21}\lambda + \varepsilon_{11x})U_{12}^{-1} & -\varepsilon_{11} + \frac{r'_2}{2r_2} \end{pmatrix},$$

где

$$V_{11} = c_{11}(y)(1 + w_1 + w_2)U_{11} - w_{2y}w_2^{-1},$$

$$V_{12} = c_{11}(y)(1 + w_1 + w_2)w_2^{-1}, \quad (50)$$

$$V_{21} = -[c_{11}(y)(1 + w_1 + w_2)U_{11}^2 + U_{11y}]U_{12}^{-1};$$

$$\varepsilon_{11} = 0.5\{w_{2y}w_2^{-1} - c_{11}(y)[(1 + w_1 + w_2)_x - z(1 + w_1 + w_2)]\}; \quad (51)$$

$$w_2\varepsilon_{21} = r'_1 + \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \ln \theta(\zeta) +$$

$$+ c_{11}(y)\{w_2 + L_1[\gamma_1 + \gamma_2] + L_2[\gamma_1^2 + \gamma_2^2] + L_3[\gamma_1^3 + \gamma_2^3]\}; \quad (52)$$

$$L_1[u] = -0.1u_{xxxx} + 0.35\Delta_2 u_{xx} + (0.2\Delta_2^2 - 1.8\Delta_3)u,$$

$$L_2[u] = 0.75u_{xx} - 2.1\Delta_2 u, \quad L_3[u] = -3u + 0.1\Delta_2\Delta_3 - 1.2\Delta_4 + \Delta_5.$$

Из (51) с учетом (26), (42), (47) нетрудно получить $\varepsilon_{11} = 0$. Подставляя в (52) функции (37)–(39), (41), после вычислений с учетом вытекающей из (36), (40), (43) формулы

$$\frac{\partial}{\partial y} = -c_{11}(y) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (53)$$

и формулы (41) для постоянной c получим

$$w_2\varepsilon_{21} = r'_1 - \nu c_{11}(y),$$

$$\nu = (0.5\Delta_2 - 0.2\Delta_2^2 + 1.8\Delta_3)c_1 + (0.75 + 2.1\Delta_2)c_2 + 3c_3 -$$

$$- 0.1\Delta_2\Delta_3 + 0.25\Delta_3 + 1.2\Delta_4 - \Delta_5$$

(слагаемые, содержащие $\ln \theta$, сокращаются при подстановке (53)). Из сказанного с учетом формул (34), (49) для матрицы V вытекает

ТЕОРЕМА 4. Пусть в формулах (48)

$$r'_1(y) = \nu c_{11}(y), \quad r_2 = \text{const} \neq 0.$$

Тогда пара матриц $u = \|U_{ij}\|$, $v = \|V_{ij}\|$ с нулевым следом и элементами (48), (50), построенными указанным выше образом, – решение системы (35).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогично могут быть построены решения системы (35) при $\deg w = g$, $\deg \Delta = 2g + 1$, $2g + 2$, $g \in \mathbb{N}$. В случае нечетной $\deg \Delta$ матрица $u(x, y)$ вследствие равенств $\text{Sp } u = 0$, $\det u = -\Delta_0 = 0$ подобна нильпотентной жордановой клетке второго порядка. Отсюда, в частности, вытекает, что в этом случае оператор $L = i\partial_x + \lambda u$ не входит (с точностью до калибровочной эквивалентности) в класс конечнозонных операторов задачи N волн, изученный в [7]. Можно доказать, что в случае четной $\deg \Delta$ ($\Delta_0 \neq 0$) имеет место вложение в указанный класс. Отметим, что для класса киральных полей Польмайера, построенного в [8] методом функций Бейкера–Ахиезера, имеет место (с учетом изоморфизма алгебр Ли so_3 и sl_2) равенство $\det u = 1$.

Отметим также, что из построений пункта 4 следует, что функция $\alpha(x, y) = -i \ln(1 + w_1 + w_2)$ удовлетворяет уравнению sine-Gordon $\alpha_{xy} = 4 \sin \alpha$. В самом деле, из (42) при $c_{11} = 1$ и (44) с учетом (46), (47) получим

$$v = e^{i\alpha}(\lambda - 1)^{-1}, \quad u = \lambda - 1 + i\alpha_{xx}/2 - \alpha_x^2/4.$$

Уравнение (1) для пары (5) с такими u, v дает требуемое соотношение для α .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Полагая в (1) $U = i\lambda J + U_0(x, y)$, где $J = \text{diag}(-1, 1)$, U_0 – матрица с нулевыми диагональными элементами, получим схему Захарова–Шабата (см. [2], с. 21). Так как в этом случае выполняются условия (3), то изложенный метод может быть применен, в частности, для построения алгебро-геометрических решений нелинейных уравнений, вкладывающихся в эту схему.

Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков. В кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 179–284.
- [2] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [3] Б. А. Дубровин. УМН. 1981. Т. 36. Вып. 2. С. 11–80.
- [4] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. ЖЭТФ. 1974. Т. 67. Вып. 6. С. 2131–2144.
- [5] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов. ЖЭТФ. 1978. Т. 74. Вып. 6. С. 1953–1974.
- [6] Д. Мамфорд. Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
- [7] Б. А. Дубровин. В кн.: Современные проблемы математики. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1983. С. 33–78.
- [8] И. В. Чередник. В кн.: Итоги науки и техники. Алгебра. Геометрия. Топология. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1981. С. 73–150.

Поступила в редакцию 15.I.1996 г.

D. P. Novikov, R. K. Romanovski

ON A METHOD OF CONSTRUCTION ALGEBRO-GEOMETRICAL SOLUTIONS OF ZERO-CURVATURE EQUATIONS

The construction is proposed, which reduces the calculation of algebro-geometrical solutions to the zero curvature equations for 2×2 matrices under special conditions valid some applications to the solution of the Jacobi inversion problem on a hyperelliptic Riemann surface and to the Riccati equation. The results obtained are applied to the principal chiral field system.