Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, А. И. Клевин, Б. Ти-
роцци, Гауссовы пакеты и пучки с фокальными точка-
ми в векторных задачах физики плазмы, *ТМФ*, 2018,
том 196, номер 1, 135–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:31:26

© 2018 г.

А. Ю. Аникин^{*†}, С. Ю. Доброхотов^{*†},
А. И. Клевин^{*†}, Б. Тироцци[‡]

ГАУССОВЫ ПАКЕТЫ И ПУЧКИ С ФОКАЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ В ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧАХ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ

Рассматривается линеаризованное уравнение, описывающее движение плазмы в тороидальной области (токамаке). Изучается асимптотика стационарных решений типа гауссовых пучков с короткой длиной волны, отвечающих электрическим модам. Также изучаются гауссовы волновые пакеты и локализованные пучки типа “сигары”, описывающие прохождение локализованных возмущений через камеру токамака. Рассматривается отдельно случай наличия фокальных точек на траектории и асимптотика в окрестности фокальной точки.

Ключевые слова: линеаризованное уравнение плазмы, токамак, комплексный росток Маслова, гауссовы пучки.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9520>

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе изучается система уравнений, описывающая движение плазмы в тороидальной камере (токамаке) $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ с большим внешним магнитным полем.

Мы будем использовать жидкостную модель холодной бесстолкновительной плазмы [1], которая хорошо описывает распространение поперечных электромагнитных волн в плазме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + c^2 \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} + \omega_p^2 \mathbf{E} - \omega_e^2 \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}_e - \omega_i^2 \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}_i &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} &= \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} - \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}_s), \quad s = e, i, \end{aligned} \tag{1.1}$$

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-11-10282.

^{*}Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
E-mail: anikin83@inbox.ru, dobr@ipmnet.ru, klyovin@mail.ru

[†]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Department of Physics, La Sapienza University, Rome, Italy.
E-mail: brunello.tirozzi@roma1.infn.it

где $\mathbf{E}(x, t)$, $\mathbf{B}(x, t)$ – электрическое и магнитное поля ($\wedge$ – векторное произведение). Это линейная система из девяти уравнений для неизвестных векторных величин: электрического поля $\mathbf{E}(x, t)$, скорости электронов $\mathbf{v}_e(x, t)$ и ионов $\mathbf{v}_i(x, t)$. Массы и заряды электронов и ионов $m_{e,i}$, $q_{e,i}$ считаются известными константами, частоты электронов и ионов $\omega_{e,i}$ и частота плазмы $\omega_p^2 = \omega_e^2 + \omega_i^2$, считаются известными функциями от x .

Основной интерес для нас представляет величина $\mathbf{E}(x, t)$. Всегда предполагается, что внешнее магнитное поле $\mathbf{B}$ значительно сильнее, чем поле, порождаемое движением зарядов. Значения параметров, вид магнитного поля, размер камеры берутся отвечающими реальным токамакам [2]. После приведения системы уравнений к безразмерной форме получается линейная задача с малым параметром при производных, что позволяет применять квазиклассические методы (см. [3]–[5]). Символом дифференциального оператора этой задачи является (12×12) -матрица.

Как известно, для изучения асимптотик типа ВКБ в векторных задачах необходимо искать собственные значения главного матричного символа (называемые модами или эффективными гамильтонианами), а также собственные векторы. В нашей задаче символ представляет собой (12×12) -матрицу и явное отыскание мод в общем случае, по-видимому, невозможно. Однако в нашей работе изучаются гауссовы пучки и пакеты с высокими частотами. Это предположение упрощает нахождение мод, и для них имеются явные формулы. (Изучению общего случая была посвящена работа [6].) Одна из таких мод, называемая электрической, определяет гамильтонову систему, в терминах которой описываются гауссовы пакеты и пучки.

Типичные траектории данной гамильтоновой системы пересекают границу камеры токамака два раза: при входе и при выходе. Причем до входа и после выхода движение по траектории равномерно и прямолинейно. Гауссовыми пучками мы будем называть стационарные решения системы (1.1), локализованные в окрестности таких траекторий (точнее, их проекций в конфигурационное пространство) и которые убывают, как гауссова экспонента, в нормальном направлении и быстро осциллируют в продольном направлении. Гауссовы волновые пакеты представляют собой нестационарные решения с начальными условиями, локализованными в окрестности точки траектории (вне токамака). В отличие от гауссовых пучков они локализованы в окрестности точки траектории, куда пришло классическое решение за данное время, и убывают по гауссовой экспоненте во всех направлениях. Наконец, локализованные гауссовы пучки (вида “сигары”) представляют собой нестационарные решения, описывающие распространение возмущения, локализованного в окрестности отрезка траектории.

Изучение всех таких решений интересно с теоретической точки зрения: они представляют собой, пожалуй, одни из немногих стационарных асимптотических решений, которые можно эффективно построить в сложных системах уравнений математической физики. С другой стороны, с точки зрения приложений полученные результаты могут быть использованы для плазменной диагностики токамака. А именно, с помощью преобразования Радона можно отвечать на вопрос о восстановлении магнитного поля по виду гауссова пучка.

В нашей работе рассматриваются также гауссовы пучки и пакеты с фокальными точками. Они возникают при изучении траекторий с точками, в которых вектор скорости обращается в нуль. Формально в гамильтоновой системе, являющейся

электрической модой плазмы, имеются такие траектории (они отвечают движениям в сечении тора по лучу, проходящему через центр круга). Этим траекториям соответствуют пучки с не очень высокими частотами, и вопрос о реальном возникновении таких ситуаций не вполне ясен. Тем не менее мы предъявляем асимптотическую формулу для гауссова пучка в окрестности фокальной точки для уравнения плазмы в общем случае (не обязательно для токамака).

Гауссовым пучкам посвящена обширная литература. Начало их изучению положили работы Фока и Леонтовича, и дальнейшее развитие предложенный ими метод получил в фундаментальных работах Бабича, Булдырева, Лазуткина, Молоткова, Попова и др. (см. книги [4], а также статьи [7]). В квантовой механике решения такого типа относятся к когерентным состояниям [8] и часто называются траекторно-когерентными состояниями [9]. В физике плазмы гауссовым пучкам также посвящено много публикаций, в основном в скалярном случае (см. [2]). Во всех указанных работах ситуации с фокальными точками по существу не рассматривались. Гауссовы пучки с фокальными точками в конкретных системах мало изучались (отметим здесь работы [10]).

Мы строим гауссовы пучки и пакеты с помощью теории комплексного ростка Маслова [5], [11]. Эта теория дает обобщение конструкции канонического оператора [3] в ситуации, когда фаза в соответствующих асимптотиках комплексная. Возникающие здесь геометрические объекты – это, вообще говоря, комплексные лагранжевы многообразия, которые могут быть устроены довольно сложно, но в подходе Маслова в асимптотиках играет роль только линеаризация этих многообразий в окрестности луча (или траектории), в которой сосредоточен гауссов пучок (или, в более общем случае, в окрестности изотропного многообразия). Грубо говоря, соответствующая линеаризация и называется комплексным ростком. Заметим, что в окончательных формулах геометрические конструкции можно и не использовать, процесс нахождения гауссовых пучков и пакетов алгоритмизирован и легко реализуется с помощью программ типа *Wolfram Mathematica* или *MATLAB*, хотя по нашему представлению геометрические объекты (кривые с комплексным ростком) очень полезны для понимания конструкции решений типа гауссовых пучков.

Работа имеет следующую структуру. В п. 2.1 дается физический вывод основной системы уравнений (1.1), далее в п. 2.2, 2.3 мы приводим ее к безразмерной форме, вводим малый параметр и формулируем задачу о квазиклассических асимптотиках. В п. 2.4 мы находим моды и собственные функции главного символа исследуемой квазиклассической задачи. В п. 3.1, 3.2 мы напомним основные конструкции теории комплексного ростка и даем определение гауссовых пучков и пакетов. В п. 3.3 мы записываем асимптотику для них в неособой карте, а в п. 3.4 – в особой карте. Наконец, в п. 3.5 мы записываем асимптотику в окрестности фокальной точки (через функцию Эйри). В разделе 4 мы выписываем асимптотические решения уравнений плазмы вида гауссовых пучков (п. 4.1), вида гауссовых пакетов и локализованных пучков (п. 4.2), в том числе формулы для пучков с фокальными точками (п. 4.4), и показываем результаты численной реализации формул в окрестности неособой и фокальной точки в программе *Wolfram Mathematica* (п. 4.5).

Некоторые результаты этой статьи (без фокальных точек) были кратко изложены в работе [12].

2. ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛАЗМЫ

2.1. Вывод основной системы уравнений. Напомним жидкостную модель холодной бесстолкновительной плазмы [1]. Согласно этой модели плазма характеризуется функциями концентраций электронов и ионов $n_e(x, t)$, $n_i(x, t)$ и средними в окрестности точки x макроскопическими скоростями $\mathbf{v}_e(x, t)$, $\mathbf{v}_i(x, t)$. Эти функции удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \langle \nabla, n_s \mathbf{v}_s \rangle = 0, \quad s = e, i, \quad (2.1)$$

и динамическому уравнению

$$\frac{d\mathbf{v}_s}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \langle \mathbf{v}_s, \nabla \rangle \mathbf{v}_s = \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} - \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}_s), \quad s = e, i. \quad (2.2)$$

Без предположения о холодности и бесстолкновительности плазмы последнее уравнение включало бы в себя компоненты, связанные с давлением и со столкновениями частиц.

Введем функцию электрического тока $\mathbf{J}(x, t) = q_e n_e(x, t) \mathbf{v}_e(x, t) + q_i n_i(x, t) \mathbf{v}_i(x, t)$ и добавим к (2.1) и (2.2) уравнения Максвелла

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right),$$

где ε_0 – электрическая постоянная, μ_0 – магнитная постоянная. Применяя операцию $\nabla \wedge \cdot$ к первому уравнению и операцию $\partial/\partial t$ ко второму, исключим $\mathbf{B}$ из этих двух уравнений и получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + c^2 \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – скорость света. Используя уравнение непрерывности (2.1), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \sum_{s=e,i} q_s \left(\frac{\partial n_s}{\partial t} \mathbf{v}_s + n_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right) = \sum_{s=e,i} q_s \left(-\langle \nabla, n_s \mathbf{v}_s \rangle \mathbf{v}_s + n_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right). \quad (2.4)$$

Предполагая, что скорости электронов и ионов невелики, линеаризуем это выражение и динамическое уравнение (2.2), исключив квадратичные по $\mathbf{v}_s$ слагаемые. Для $s = e, i$ введем новые функции $\omega_s^2(x) = (q_s^2/m_s \varepsilon_0) n_s(x)$ – квадраты электронных и ионных плазменных частот, $\omega_p^2(x) = \omega_e^2 + \omega_i^2$ – квадрат полной плазменной частоты. Подставим (2.4) в (2.3) и придем к системе (1.1).

Вообще говоря, поле $\mathbf{B}$ представляет собой сумму внешнего магнитного поля и магнитного поля, связанного с пучком. Считая последнее малым по сравнению с первым, будем понимать под величиной $\mathbf{B}$ именно внешнее поле. Учитывая большую скорость распространения пучка и малое время его прохождения через плазму, будем предполагать, что величины n_e , n_i , $\mathbf{B}$ постоянны в течение этого времени. Таким образом, в систему входят известные функции $n_e = n_e(x)$, $n_i = n_i(x)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x)$.

Подставим в первое уравнение системы производные скорости по времени из последних уравнений и, используя эти введенные функции, получим систему в виде (1.1).

2.2. Безразмерная форма уравнений. Пусть L – характерный линейный размер области, в которой находится плазма, $T = L/c$ – характерное время прохождения этой области электромагнитной волной, $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ – характерные величины электрического и магнитного полей, $\Omega_s = -q_s \mathcal{B}/m_s$ – характерная циклотронная частота электронов и взятая со знаком минус характерная циклотронная частота ионов. Будем предполагать, что циклотронная частота много меньше плазменной:

$$\left| \frac{\Omega_e}{\omega_p} \right| \ll 1. \quad (2.5)$$

Зададим новые безразмерные переменные x' , t' , $\mathbf{E}'$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{U}_e$, $\mathbf{U}_i$ выражениями

$$x = Lx', \quad t = Tt', \quad \mathbf{E} = \mathcal{E}\mathbf{E}', \quad \mathbf{B} = \mathcal{B}\mathbf{B}', \quad \mathbf{v}_s = \frac{\Omega_s}{\omega} \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}} \mathbf{U}_s.$$

Введем параметр

$$h = \frac{1}{T\omega} = \frac{\lambda}{2\pi L} = \frac{c}{L\omega},$$

имеющий смысл величины, обратной к частоте в безразмерных переменных.

Разделим первое уравнение системы (1.1) на ω^2 и напомним уравнения в безразмерных переменных (здесь и ниже штрихи над безразмерными переменными будем опускать):

$$\begin{aligned} h^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + h^2 \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \mathbf{E} - \frac{\omega_e^2 \Omega_e}{\omega^3} \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_e - \frac{\omega_i^2 \Omega_i}{\omega^3} \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_i &= 0, \\ h \frac{\partial \mathbf{U}_s}{\partial t} &= - \left(\mathbf{E} - \frac{\Omega_s}{\omega} \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_s \right). \end{aligned}$$

Введем новые параметры $\mu_s = \omega_s^2 \Omega_s / h\omega^3$ для $s = e, i$, новую векторную функцию $\mathbf{W} = -ih \partial \mathbf{E} / \partial t$ и запишем систему в стандартном виде:

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{H}_0(\hat{p}, x) \Psi + h \mathcal{H}_1(x) \Psi, \quad (2.6)$$

где $\Psi = (\mathbf{E}, \mathbf{W}, \mathbf{U}_e, \mathbf{U}_i)^T$ – векторная функция, $\hat{p} = -ih \nabla$.

Матричные символы операторов $\mathcal{H}_0(\hat{p}, x)$, $\mathcal{H}_1(x)$ являются (12×12) -матрицами $\mathcal{H}_0(p, x)$, $\mathcal{H}_1(x)$, зависящими от точки $(p, x) \in \mathbb{R}_{p,x}^6$. Матрицы $\mathcal{H}_0(p, x)$, $\mathcal{H}_1(x)$ действуют на вектор Ψ следующим образом:

$$\mathcal{H}_0(p, x) \Psi = \begin{pmatrix} -\mathbf{W} \\ p \wedge p \wedge \mathbf{E} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \mathbf{E} \\ -i \left(\mathbf{E} - \frac{\Omega_e}{\omega} \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_e \right) \\ -i \left(\mathbf{E} - \frac{\Omega_i}{\omega} \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_i \right) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_1(x) \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_e \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_e + \mu_i \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. Конкретные физические параметры. Радиусы токамака $\mathbb{D}$ берутся равными $R = 0.9$ м, $a = 0.3$ м. Введем тороидальные координаты:

$$x = (R + r \cos \theta) \cos \phi, \quad y = (R + r \cos \theta) \sin \phi, \quad z = r \sin \theta. \quad (2.7)$$

Таким образом, область $\mathbb{D}$ задается неравенствами:

$$0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a.$$

Магнитное поле в этих координатах имеет вид

$$\mathbf{B}_r = 0, \quad \mathbf{B}_\theta = \frac{B r a^2}{(R + r \cos \theta)(a^2 + 2r^2)}, \quad \mathbf{B}_\phi = \frac{B}{1 + (r \cos \theta)/R}.$$

Константы и параметры берем следующими:

$$\begin{aligned} q_e = -q_i = -4.80 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}, \quad c = 2.997 \cdot 10^8 \text{ м/с}, \quad B = 3.4 \text{ Тл}, \\ \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad m_e = 9.107 \cdot 10^{-31} \text{ кг}, \quad m_i = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \\ n_e(r) = n_i(r) \equiv n(r) = N_0 \left(1 - n_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^2 \text{ м}^{-3}, \\ N_0 = 5 \cdot 10^{19}, \quad n_0 = 0.2 \cdot 10^{-2}, \\ \Omega_e = -\frac{q_e B}{m_e} = 5.97 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}, \quad \Omega_i = \frac{q_i B}{m_i} = -\Omega_e \frac{m_e}{m_i} = -3.25 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}, \\ \omega_e^2 = \frac{n(r) q_e^2}{m_e \varepsilon_0} = 3174.86 n(r) \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_i^2 = \frac{n(r) q_i^2}{m_i \varepsilon_0} = 1.73 n(r) \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}, \\ \omega_p^2 = \omega_e^2 + \omega_i^2 = 3176.59 n(r) \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}, \quad L = 5 \text{ м}, \quad T = 1.7 \cdot 10^{-8} \text{ с}. \end{aligned}$$

Если взять длину волны $\lambda = 2\pi c/\omega = 100$ мкм, то $\hbar \sim 10^{-6}$, $\omega_p^2/\omega^2 \sim 10^{-4}$, $\Omega_e/\omega \sim 10^{-2}$, $\mu_e \sim 1$, $\Omega_i/\omega \ll \Omega_e/\omega$, $\mu_i \ll \mu_e$ и слагаемое $\hbar \mathcal{H}_1 \Psi$ действительно мало по сравнению с $\mathcal{H}_0 \Psi$.

Итак, предположение о высокой частоте пучка позволяет упростить вид главного символа дифференциального оператора.

2.4. Моды и собственные векторы главного символа. Введем гладкие функции $p_1^\perp(p, x)$, $p_2^\perp(p, x)$ такие, что $|p_{1,2}^\perp| = 1$ и $p_1^\perp \wedge p_2^\perp = p/|p|$. Их выбор произволен и определяется удобством дальнейших вычислений. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Введем также произвольную векторную функцию $\mathbf{B}^\perp(x)$ такую, что $\langle \mathbf{B}, \mathbf{B}^\perp \rangle = 0$, и $\mathbf{B}^\perp(x) \neq 0$ при $\mathbf{B}(x) \neq 0$.

Приведем собственные значения и векторы матрицы $\mathcal{H}_0(p, x)$ (которые есть функции от p, x).

ЛЕММА 1. *Собственные значения и векторы матрицы $\mathcal{H}_0(p, x)$ имеют следующий вид. Два собственных значения кратности 2 каждое: $H = \pm \sqrt{p^2 + \omega_p^2/\omega^2}$,*

$$\chi_{1,2}^\pm = \begin{pmatrix} p_{1,2}^\perp \\ -H p_{1,2}^\perp \\ [B \wedge \cdot - \theta_e]^{-1} \left(\frac{\Omega_e}{\omega}\right)^{-1} p_{1,2}^\perp \\ [B \wedge \cdot - \theta_e]^{-1} \left(\frac{\Omega_i}{\omega}\right)^{-1} p_{1,2}^\perp \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

где $\theta_s = -iH(\Omega_s/\omega)^{-1}$. Два собственных значения кратности 1 каждое: $H = \pm\omega_p/\omega$,

$$\chi^\pm = \begin{pmatrix} p \\ -Hp \\ [B \wedge \cdot - \theta_e]^{-1} \left(\frac{\Omega_e}{\omega} \right)^{-1} p \\ [B \wedge \cdot - \theta_e]^{-1} \left(\frac{\Omega_i}{\omega} \right)^{-1} p \end{pmatrix},$$

где $\theta_e = -iH(\Omega_e/\omega)^{-1}$. Два собственных значения кратности 1 каждое: $H = \pm(\omega_e/\omega)|\mathbf{B}|$,

$$\chi^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_e \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}^\perp \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\theta_e = -iH(\Omega_e/\omega)^{-1} = \mp i|\mathbf{B}|$. Два собственных значения кратности 1 каждое: $H = \pm(\omega_i/\omega)|\mathbf{B}|$,

$$\chi^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_i \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}^\perp \end{pmatrix},$$

где $\theta_i = -iH(\Omega_i/\omega)^{-1} = \pm i|\mathbf{B}|$. Собственное значение кратности 2: $H = 0$,

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{B} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Обратный оператор равен

$$[\mathbf{B} \wedge \cdot - \theta]^{-1} = -\theta^{-1} \left(1 + \frac{\theta^{-1}}{1 + \theta^{-2} \mathbf{B}^2} [\mathbf{B} \wedge \cdot] + \frac{\theta^{-2}}{1 + \theta^{-2} \mathbf{B}^2} [\mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \cdot] \right). \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в приложении [A](#).

Нас интересуют собственные значения $H^\pm = \pm \sqrt{p^2 + \omega_p^2/\omega^2}$ кратности 2, которые соответствуют поперечным электромагнитным волнам. Они называются электрическими модами. Пусть $\chi_{1,2}$ – соответствующие собственные векторы, а $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ – матрица, столбцы которой состоят из этих векторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Расстояние между $H^\pm$ и другими собственными значениями имеет порядок $O(1)$ для малых h . Таким образом, взаимодействия между электрическими модами $H^\pm$ и другими модами нет.

Рассмотрим транспонированную матрицу

$$\mathcal{H}_0^T(x, p)\Psi = \begin{pmatrix} p \wedge p \wedge \mathbf{W} - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \mathbf{W} - i(\mathbf{U}_e + \mathbf{U}_i) \\ -\mathbf{E} \\ -i\left(\frac{\Omega_e}{\omega}\right) \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_e \\ -i\left(\frac{\Omega_i}{\omega}\right) \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_i \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 2. Собственные векторы $\mathcal{H}_0^T$, соответствующие собственному значению $H = \sqrt{p^2 + \omega_p^2/\omega^2}$, следующие:

$$\tilde{\chi}_{1,2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{1,2}^\perp \\ -H^{-1}p_{1,2}^\perp \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Введем матрицу $\tilde{\chi} = (\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2)$. Пусть векторы $p_{1,2}^\perp$, входящие в $\tilde{\chi}_{1,2}$, выбраны так же, как и векторы $p_{1,2}^\perp$, входящие в $\chi_{1,2}$. В этом случае верно следующее тождество:

$$\chi \tilde{\chi} = \mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится подстановкой.

2.5. Первая поправка к эффективным гамильтонианам (“субглавный символ”) и уравнение переноса. Введем (2×2) -матрицу $L^\pm$

$$L^\pm = \tilde{\chi}^T \mathcal{H}_1 \chi - i\tilde{\chi}^T \frac{d\chi}{dt} - i\tilde{\chi}^T \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p_j} - \frac{\partial H^\pm}{\partial p_j} \right] \frac{\partial \chi}{\partial x_j}. \quad (2.11)$$

ЛЕММА 3. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} iL^\pm - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \frac{\partial^2 H^\pm}{\partial x \partial p} \mathbb{E} = \\ = -\frac{\mu_e}{2H^2} \begin{pmatrix} \theta_e^{-1}(\langle \mathbf{B}, p_1^\perp \rangle^2 - \mathbf{B}^2) & -\left\langle \mathbf{B}, \frac{p}{|p|} \right\rangle + \theta_e^{-1} \langle \mathbf{B}, p_1^\perp \rangle \langle \mathbf{B}, p_2^\perp \rangle \\ \left\langle \mathbf{B}, \frac{p}{|p|} \right\rangle + \theta_e^{-1} \langle \mathbf{B}, p_1^\perp \rangle \langle \mathbf{B}, p_2^\perp \rangle & \theta_e^{-1}(\langle \mathbf{B}, p_2^\perp \rangle^2 - \mathbf{B}^2) \end{pmatrix} + \\ + \{\dots\}_i + \left\langle p_1^\perp, \frac{dp_2^\perp}{dt} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где через $\{\dots\}_i$ обозначено первое слагаемое в правой части равенства, в котором μ_e, θ_e заменены на μ_i, θ_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в приложении Б.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из условия (2.5) следует $\theta_1^{-1} < \theta_e^{-1} \ll 1$. Учтем также, что $\mu_i \ll 1$. Тогда получим

$$iL - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \mathbb{E} \approx \left(\frac{\mu_e}{2H^2} \left\langle \mathbf{B}, \frac{p}{|p|} \right\rangle + \left\langle p_1^\perp, \frac{dp_2^\perp}{dt} \right\rangle \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

С учетом (2.13) решение уравнения переноса

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \left[iL - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \mathbb{E} \right] \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

легко находится:

$$A_1(t) = A_1^0 \cos \Phi(t) - A_2^0 \sin \Phi(t), \quad A_2(t) = A_2^0 \cos \Phi(t) + A_1^0 \sin \Phi(t), \quad (2.14)$$

где

$$\Phi(t) = \int_0^t \left(\frac{\mu_e(X(\eta))}{2H^2} \left\langle \frac{P(\eta)}{|P(\eta)|}, \mathbf{B}(X(\eta)) \right\rangle + \left\langle p_2^\perp(\eta), \frac{dp_1^\perp}{dt}(\eta) \right\rangle \right) d\eta. \quad (2.15)$$

Здесь функция $\Phi(t)$ называется фазой поляризации или фазой Берри.

3. ГАУССОВЫ ПУЧКИ. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

3.1. Кривые в фазовом пространстве с комплексным ростком. Рассмотрим псевдодифференциальный оператор

$$\hat{H}\Psi = H\left(\frac{2}{x}, \frac{1}{p}, h\right)\Psi(x, h),$$

где $H(p, x, h) = H_0(p, x) + hL(p, x) + O(h^2)$ – гладкая функция, называемая символом, от переменных $p_1, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, h$. Функция H_0 вещественнозначна. Мы будем искать асимптотические решения стационарной задачи, т.е. такие числа $E = E_0 + hE_1$ и нормированную в $L^2(\mathbb{R}_x^n)$ функцию Ψ , что

$$\|(\hat{H} - (E_0 + hE_1))\Psi\|_{L^2} = O(h^2). \quad (3.1)$$

Такие решения можно строить с помощью теории комплексного ростка, основные идеи которой мы напомним. В фазовом пространстве $\mathbb{R}_{p,x}^{2n}$ с координатами $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$ рассматривается гамильтонова система $\dot{x} = H_p$, $\dot{p} = -H_x$. Пусть гладкая кривая $\Lambda^1 = \{p = P(\tau), x = X(\tau)\}$ – траектория этой системы, параметризованная временем τ . В этой работе мы будем рассматривать случай, когда Λ^1 – незамкнутая кривая.

Пусть $\mathbb{C}^{2n}$ – комплексное фазовое пространство с координатами $w = (w_1, \dots, w_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$. И пусть в каждой точке τ на кривой Λ^1 задана n -мерная плоскость r^n (комплексный росток) в $\mathbb{C}^{2n}$, натянутая на векторы $\begin{pmatrix} w^1 & \dots & w^{n-1} & \dot{P} \\ z^1 & \dots & z^{n-1} & \dot{X} \end{pmatrix}$. Обозначим через B, C матрицы $B = (w^1, \dots, w^{n-1}, \dot{P})$, $C = (z^1, \dots, z^{n-1}, \dot{X})$. Сделаем следующие предположения.

1. $B^T C - C^T B = 0$ (т.е. плоскость r^n лагранжева).

2. Обозначим $\mathcal{E} = (1/2i)(B^*C - C^*B)$. Тогда $\text{rank } \mathcal{E} = n - 1$ и матрица $\mathcal{E}$ неотрицательна.

3. Росток инвариантен: вектор-столбцы матриц $B(t)$, $C(t)$ являются решениями уравнения в вариациях:

$$\dot{B} = -H_{xp}B - H_{xx}C, \quad \dot{C} = H_{pp}B + H_{px}C$$

вблизи решения гамильтоновой системы $P(t)$, $X(t)$.

Тогда мы имеем векторное расслоение $[\Lambda^1, r^n]$. Часто $\begin{pmatrix} w^j \\ z^j \end{pmatrix}$ можно выбрать так, что $\langle \bar{w}^j, z^l \rangle - \langle w^j, \bar{z}^l \rangle = 2i\delta_{jl}$. Здесь $\langle w, z \rangle = w_1z_1 + \dots + w_nz_n$. Тогда $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \mathbb{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $\mathbb{E}$ – единичная $[(n-1) \times (n-1)]$ -матрица.

Пусть также на Λ^1 задана функция $A(\tau)$.

Точка τ называется неособой, если $\dot{X} \neq 0$, и называется особой (фокальной), если $\dot{X} = 0$ в этой точке.

3.2. Фаза на кривой с комплексным ростком, якобианы и их аргументы.

Введем комплексную функцию $J(\tau) \equiv \det C(\tau)$. В монографии [5] доказана

ЛЕММА 4. Нули функции J находятся в фокальных точках: $J(\tau) = 0 \iff \dot{X}(\tau) = 0$.

Определим, следуя [5], $\text{Arg } J$ в неособых точках. Зафиксируем неособую точку τ^0 . Обозначим $J_\varepsilon \equiv \det(C - i\varepsilon B)$. Ясно, что $J_\varepsilon \neq 0$ при малых $\varepsilon > 0$. Таким образом, однозначно определена непрерывная функция $\text{Arg } J_\varepsilon(\tau)$, если зафиксировать ее значение в точке τ^0 .

Функция $\text{Arg } J(\tau)$, разрывная в фокальных точках, определяется следующим образом: $\text{Arg } J(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Arg } J_\varepsilon(\tau)$. Найдем

$$\Delta \text{Arg } J(\tau^*) = \text{Arg } J(\tau^* + 0) - \text{Arg } J(\tau^* - 0)$$

– скачок этой функции при переходе через фокальную точку τ^* . Рассмотрим в комплексной плоскости кривую $J(\tau)$, проходящую через начало координат при $\tau = \tau^*$, и близкую к ней кривую $J_\varepsilon(\tau)$. Предположим, что

$$\dot{J}(\tau^*) = \det(z^1, \dots, z^{n-1}, \ddot{X})|_{\tau=\tau^*} \neq 0.$$

Тогда этот вектор $\dot{J}(\tau^*)$ делит комплексную плоскость на “правую” и “левую” стороны. Если кривая $J_\varepsilon(\tau)$ проходит начало координат по “правой” стороне, то функция $J(\tau)$ имеет скачок $+\pi$, если по “левой” стороне, то скачок будет $-\pi$. Заметим, что $J_\varepsilon(\tau^*) = \det(z^1 - i\varepsilon w^1, \dots, z^{n-1} - i\varepsilon w^{n-1}, -i\varepsilon \dot{P})|_{\tau=\tau^*}$. Предположим также, что $(\partial J_\varepsilon(\tau^*)/\partial \varepsilon)|_{\varepsilon=0} \neq 0$. Тогда нужно просто определить, справа или слева от вектора $\dot{J}(\tau^*)$ лежит вектор $(\partial J_\varepsilon(\tau^*)/\partial \varepsilon)|_{\varepsilon=0}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta \text{Arg } J(\tau^*) &= -\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \frac{(\partial J_\varepsilon(\tau^*)/\partial \varepsilon)|_{\varepsilon=0}}{\dot{J}(\tau^*)} = \\ &= -\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \frac{\det(z^1, \dots, z^{n-1}, -i\dot{P})|_{\tau=\tau^*}}{\det(z^1, \dots, z^{n-1}, \ddot{X})|_{\tau=\tau^*}}. \end{aligned}$$

3.3. Формулы для гауссовых пучков вне фокальных точек. Пусть γ – проекция Λ^1 на $\mathbb{R}_x^n$, а $\text{tub } \gamma \subset \mathbb{R}_x^n$ – ее трубчатая окрестность. Введем проекцию $\tau: \text{tub } \gamma \rightarrow \gamma$, которая переводит точку x в ближайшую к ней точку на γ . Эта функция задается неявно выражением

$$\langle X_\tau, x - X(\tau) \rangle = 0. \quad (3.2)$$

Вне фокальных точек фаза определяется следующим образом:

$$S(\tau, x) = \int_{\tau^0}^{\tau} P dX + \langle P, x - X(\tau) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - X(\tau), BC^{-1}(x - X(\tau)) \rangle. \quad (3.3)$$

Пусть $H|_{\Lambda^1} = E_0$, и амплитуда $A: \Lambda^1 \rightarrow \mathbb{R}$ – это некоторая функция, удовлетворяющая уравнению переноса:

$$\frac{dA}{d\tau} + \left(iL - \text{tr} \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial x} - E_1 \right) A = 0.$$

Из [5], [11] известно, что функция $\Psi(x) = \frac{e^{iS(\tau(x), x)/\hbar}}{\sqrt{J(\tau(x))}} A(\tau(x))$ является асимптотическим решением, т.е. выполнено условие (3.1). Такие решения будем называть гауссовыми пучками.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вместо проекции, заданной формулой (3.2), можно задать функцию $\tau(x)$ уравнением

$$\langle Q(\tau), x - X(\tau) \rangle = 0,$$

где $Q(\tau) \neq 0$ – вектор-функция, не равная нулю. Асимптотика при такой замене не поменяется. Эта замена функции называется гамма-перестройкой.

3.4. Гауссовы пучки в особой карте. Теперь опишем поведение гауссовых пучков в окрестности фокальных точек. Сначала приведем стандартные формулы [5], [11], основанные на частичном преобразовании Фурье.

Введем матричные функции

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} z_1^1 & \dots & z_1^{n-1} & \dot{X}_1 \\ w_2^1 & \dots & w_2^{n-1} & \dot{P}_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ w_n^1 & \dots & w_n^{n-1} & \dot{P}_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} w_1^1 & \dots & w_1^{n-1} & \dot{P}_1 \\ z_2^1 & \dots & z_2^{n-1} & \dot{X}_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_n^1 & \dots & z_n^{n-1} & \dot{X}_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим комплексную функцию $\det \tilde{C}(\tau)$. Ее аргумент определяется следующим образом. Для $t \in [0, \pi/2]$ и для неособых точек τ' (близких к τ^*) определим матричную функцию

$$G(t, \tau') = \begin{pmatrix} z_1^1 \cos t + w_1^1 \sigma \sin t & \dots & z_1^{n-1} \cos t + w_1^{n-1} \sigma \sin t & \dot{X}_1 \cos t + \dot{P}_1 \sigma \sin t \\ z_2^1 & \dots & z_2^{n-1} & \dot{X}_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_n^1 & \dots & z_n^{n-1} & \dot{X}_n \end{pmatrix} \Bigg|_{\tau=\tau'}, \quad (3.4)$$

где $\sigma(\tau) = \text{sgn } \dot{X}_1(\tau)\dot{P}_1(\tau)$. Функция $\det G(t, \tau')$ не обращается в нуль. Верны равенства $\det G(0, \tau') = \det C(\tau')$ и $\det G(\pi/2, \tau') = \sigma \det \tilde{C}(\tau')$. Зафиксируем значение функции $\text{Arg } \det G(t, \tau')$ в точке $t = 0$ равенством $\text{Arg } \det G(0, \tau') = \text{Arg } \det C(\tau')$, где аргумент функции $\det C(\tau')$ в неособых точках τ' был определен выше. Затем при фиксированных τ' продолжим функцию $\text{Arg } \det G(t, \tau')$ по непрерывности до значения $t = \pi/2$ и определим аргумент $\det \tilde{C}(\tau')$ равенством $\det \tilde{C}(\tau') = \text{Arg } \det G(\pi/2, \tau') + \pi(-1 + \sigma(\tau'))/(-2)$.

В окрестности фокальных точек асимптотика $\Psi(x)$ задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\tau, x_\perp, p_1) &= \int_{\tau_0}^{\tau} P dX + \langle P_\perp, x_\perp - X_\perp \rangle - p_1 X_1 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} p_1 - P_1 \\ x_\perp - X_\perp \end{pmatrix}, \tilde{B}\tilde{C}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 - P_1 \\ x_\perp - X_\perp \end{pmatrix} \right\rangle, \\ \tau &= \tau(p_1, x_\perp) : \quad \dot{P}_1(p_1 - P_1) + \langle \dot{X}_\perp, x_\perp - X_\perp \rangle = 0, \\ \Psi(x) &= \sqrt{\frac{i}{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} A(\tau(p_1, x_\perp)) \frac{e^{(i/h)p_1 x_1} e^{(i/h)\tilde{S}(\tau(p_1, x_\perp), x_\perp, p_1)}}{\sqrt{\det \tilde{C}(\tau(p_1, x_\perp))}} dp_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.5. Формулы для гауссовых пучков в окрестности фокальных точек и функция Эйри. Формула (3.5) не слишком эффективна в конкретных расчетах. В малой окрестности фокальной точки ее можно упростить. Пусть τ^* – фокальная точка, $X_\tau(\tau^*) = 0 \implies P_\tau \neq 0$. Пусть $\dot{P}_1 \neq 0$. Сделаем гамма-перестройку (см. замечание 3) так, чтобы

$$\tau = \tau(p_1, x_\perp) : \quad \dot{P}_1(p_1 - P_1) = 0. \quad (3.6)$$

Тогда $\tau = \tau(p_1, x_\perp)$: $p_1 = P_1(\tau)$. Сделаем замену в интеграле (3.5): $p_1 = P_1(\tau)$. Поскольку p_1 при интегрировании возрастает, то, считая, что τ при интегрировании также возрастает, получим

$$\begin{aligned} dp_1 &= |\dot{P}_1| d\tau, \quad \dot{P}_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \tau}(d\tau), \\ \Psi(x) &= \sqrt{\frac{i}{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} \dot{P}_1 A(\tau) \frac{e^{(i/h)P_1 x_1} e^{(i/h)\tilde{S}(\tau, x_\perp, P_1)}}{\sqrt{\det \tilde{C}(\tau)}} d\tau = \\ &= \sqrt{\frac{i}{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\dot{P}_1| A(\tau)}{\sqrt{\det \tilde{C}(\tau)}} \exp \left[\frac{i}{h} \left(\Theta(\tau) + \frac{1}{2} \langle (x_\perp - X_\perp), G(\tau)(x_\perp - X_\perp) \rangle \right) \right] d\tau, \\ \Theta(\tau) &= \int_{\tau_0}^{\tau} P dX + \langle P, x - X \rangle, \end{aligned}$$

$G(\tau)$ – нижний правый $[(n-1) \times (n-1)]$ -минор матрицы $\tilde{B}\tilde{C}^{-1}$. Разложим фазу в экспоненте в окрестности фокальной точки τ^* , учитывая равенство $\dot{X}^* = 0$ (индекс “*” у любой функции означает, что значение этой функции берется в точке τ^*). Мы исходим из следующих оценок:

$$|\alpha| = |\tau - \tau^*| \leq C_1 h^{1/3-\varepsilon}, \quad |X(\tau) - X^*| \leq C_2 h^{1/3-\varepsilon}, \quad |x_\perp - X_\perp^*| \leq C_3 h^{1/2-\varepsilon}, \quad (3.7)$$

где $C_j > 0$ – константы, не зависящие от h . Имеем

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} &= \langle \dot{P}, x - X \rangle, \quad \ddot{\Theta} = \langle \ddot{P}, x - X \rangle - \langle \dot{P}, \dot{X} \rangle, \\ \ddot{\Theta} &= \langle \ddot{P}, x - X \rangle - 2\langle \ddot{P}, \dot{X} \rangle - \langle \dot{P}, \ddot{X} \rangle.\end{aligned}$$

Разложим функции в экспоненте по $\tau - \tau^*$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \langle (x_{\perp} - X_{\perp}), G(x_{\perp} - X_{\perp}) \rangle &= \frac{1}{2} \langle (x_{\perp} - X_{\perp}^*), G^*(x_{\perp} - X_{\perp}^*) \rangle + \\ &+ (\tau - \tau^*) \frac{1}{2} \langle (x_{\perp} - X_{\perp}^*), \dot{G}^*(x_{\perp} - X_{\perp}^*) \rangle + \\ &+ \frac{(\tau - \tau^*)^2}{2} \left(\frac{1}{2} \langle (x_{\perp} - X_{\perp}^*), \ddot{G}^*(x_{\perp} - X_{\perp}^*) \rangle + \langle -\ddot{X}_{\perp}^*, G^*(x_{\perp} - X_{\perp}^*) \rangle \right) + \\ &+ \frac{(\tau - \tau^*)^3}{6} \left(\frac{1}{2} \langle (x_{\perp} - X_{\perp}^*), \ddot{G}^*(x_{\perp} - X_{\perp}^*) \rangle + 3\langle -\ddot{X}_{\perp}^*, \dot{G}^*(x_{\perp} - X_{\perp}^*) \rangle + \right. \\ &\left. + \langle -\ddot{X}_{\perp}^*, G^*(x_{\perp} - X_{\perp}^*) \rangle \right) + O((\tau - \tau^*)^4), \\ \Theta &= \int_{\tau^*}^{\tau} P dX + \langle P^*, x - X^* \rangle + (\tau - \tau^*) \langle \dot{P}^*, x - X^* \rangle + \frac{(\tau - \tau^*)^2}{2} \langle \ddot{P}^*, x - X^* \rangle + \\ &+ \frac{(\tau - \tau^*)^3}{6} \left(\langle \ddot{P}^*, x - X^* \rangle - \langle \dot{P}^*, \ddot{X}^* \rangle \right) + O((\tau - \tau^*)^4).\end{aligned}$$

Учитывая оценки (3.7), имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{h} \frac{1}{2} \langle (x_{\perp} - X_{\perp}), G(x_{\perp} - X_{\perp}) \rangle &= \frac{1}{h} \frac{1}{2} \langle (x_{\perp} - X_{\perp}^*), G^*(x_{\perp} - X_{\perp}^*) \rangle + O(h^{1/6-3\varepsilon}) \approx \\ &\approx \frac{1}{h} \frac{1}{2} \langle (x_{\perp} - X_{\perp}^*), G^*(x_{\perp} - X_{\perp}^*) \rangle, \\ \frac{\Theta}{h} &= \frac{1}{h} \int_{\tau^*}^{\tau} P dX + \frac{1}{h} \langle P^*, x - X^* \rangle + \frac{1}{h} (\tau - \tau^*) \langle \dot{P}^*, x - X^* \rangle + \\ &+ \frac{1}{h} \frac{(\tau - \tau^*)^2}{2} \langle \ddot{P}^*, x - X^* \rangle + \frac{1}{h} \frac{(\tau - \tau^*)^3}{6} (-\langle \dot{P}^*, \ddot{X}^* \rangle) + O(h^{4/3-4\varepsilon}) \approx \\ &\approx \frac{1}{h} (a_0 + a_1(\tau - \tau^*) + a_2(\tau - \tau^*)^2 + a_3(\tau - \tau^*)^3), \\ \Psi(x) &= \sqrt{\frac{i}{2\pi h}} \frac{|\dot{P}_1^*| A^*}{\sqrt{\det \tilde{C}^*}} \exp \left[\frac{i}{h} \left(\frac{1}{2} \langle (x_{\perp} - X_{\perp}^*), G^*(x_{\perp} - X_{\perp}^*) \rangle \right) \right] \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}} \exp \left[\frac{i}{h} (a_0 + a_1(\tau - \tau^*) + a_2(\tau - \tau^*)^2 + a_3(\tau - \tau^*)^3) \right] d\tau.\end{aligned}$$

Сделаем линейную замену $\tau(\beta)$:

$$\tau - \tau^* = -\frac{a_2}{3a_3} + \frac{h^{1/3}}{(3a_3)^{1/3}} \beta.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
 \Psi(x) &= \frac{h^{1/3}}{(3a_3)^{1/3}} \sqrt{\frac{i}{2\pi h}} \frac{\dot{P}_1^* A^*}{\sqrt{\det \tilde{C}^*}} \exp \left[\frac{i}{h} \left(\frac{1}{2} \langle (x_\perp - X_\perp^*), G^*(x_\perp - X_\perp^*) \rangle \right) \right] \times \\
 &\quad \times \exp \left[\frac{i}{h} \left(a_0 + \frac{2a_2^3 - 9a_1 a_2 a_3}{27a_3^2} \right) \right] \int_{\mathbb{R}} \exp \left[i \left(-\frac{a_2^2 - 3a_1 a_3}{3^{4/3} a_3^{4/3} h^{2/3}} \beta + \frac{\beta^3}{3} \right) \right] d\beta = \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi i}}{h^{1/6} (3a_3)^{1/3}} \frac{\dot{P}_1^* A^*}{\sqrt{\det \tilde{C}^*}} \exp \left[\frac{i}{h} \left(\frac{1}{2} \langle (x_\perp - X_\perp^*), G^*(x_\perp - X_\perp^*) \rangle \right) \right] \times \\
 &\quad \times \exp \left[\frac{i}{h} \left(a_0 + \frac{2a_2^3 - 9a_1 a_2 a_3}{27a_3^2} \right) \right] \text{Ai} \left(-\frac{a_2^2 - 3a_1 a_3}{3^{4/3} a_3^{4/3} h^{2/3}} \right), \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

где Ai – функция Эйри

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(z\beta + \beta^3/3)} d\beta.$$

4. ГАУССОВЫ ПУЧКИ И ПАКЕТЫ УРАВНЕНИЯ ПЛАЗМЫ

В этом разделе мы изучаем поведение локализованных возмущений при прохождении через камеру токамака. Будут рассмотрены следующие решения: 1) гауссовы пучки; 2) гауссовы волновые пакеты; 3) локализованные гауссовы пучки типа “сигары”.

Вид асимптотики во всех случаях следует из теории комплексного ростка (см. раздел 3). Интересующие нас решения системы Гамильтона $\Gamma(x_0, k)$ имеют начальные условия $x|_{t=0} = x_0 \notin \mathbb{D}$ и $p|_{t=0} = k$ (k – волновой вектор), и в некоторый положительный момент времени они входят в область $\mathbb{D}$, а затем через конечное время ее покидают. Вне токамака магнитное поле отсутствует, поэтому гамильтониан представляет собой функцию только от p^2 , и движение происходит по прямым. Рассматриваются в том числе случаи, когда траектория имеет фокальные точки.

При этом в случае 1 рассматриваются стационарные решения, убывающие, как гауссова экспонента, по нормали к решению и осциллирующие вдоль решения. В случае 2 рассматривается решение задачи Коши с начальными условиями, локализованными в окрестности точки x_0 , это решение убывает как гауссова экспонента по всем направлениям (включая продольное!). В случае 3 рассматривается решение задачи Коши с начальным условием вида решения из случая 1, где амплитуда A_1, A_2 заменена на срезающую функцию, локализованную в окрестности точки x_0 на кривой $\Gamma(x_0, k)$.

4.1. Гауссовы пучки. Построим гауссовы пучки, локализованные в окрестности проекции в конфигурационное пространство $\mathbb{R}^3$ решений системы с гамильтонианом $H^+ = \sqrt{p^2 + \omega_p^2/\omega^2}$ (или H^-).

Обозначим через $\Gamma(x^0, k) = \{p = P(t), x = X(t)\}$ решение следующей задачи Коши для системы с гамильтонианом $H^+ = \sqrt{p^2 + \omega_p^2/\omega^2}$:

$$\dot{p} = -H_x^+, \quad \dot{x} = H_p^+, \quad p|_{t=0} = k, \quad x|_{t=0} = x^0. \tag{4.1}$$

Проекция этой траектории в $\mathbb{R}_x^3$ – луч $\gamma(x^0, k) = \{x = X(t)\}$. Мы предполагаем, что точка x^0 лежит вне камеры токамака $\mathbb{D}$, и выбираем вектор k так, что $\gamma(x^0, k)$

входит в $\mathbb{D}$ при положительном времени t . Заметим, что, перед тем как войти в токамак, $\gamma^\pm(x^0, k)$ (так же, как $\Gamma^\pm(x^0, k)$) представляет из себя отрезок прямой

$$\gamma^\pm(x^0, k) = \left\{ x = \frac{k}{|k|}t + x^0 \right\}. \quad (4.2)$$

Следовательно, из-за сохранения значения H^+ вдоль траектории $\Gamma(k, x^0)$ мы имеем

$$H^+|_\gamma = \sqrt{P^2(t) + \frac{\omega_p^2(X(t))}{\omega^2}} = |k|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Аналогичные траектории Γ^- системы с гамильтонианом H^- представляют из себя те же самые кривые. Отличие будет лишь в направлении обхода.

Построим диагональную (2×2) -матрицу с комплексными элементами: $\tilde{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, причем $\text{Im } b_j > 0$. Пусть m^1, m^2 – единичные ортогональные векторы в $\mathbb{C}^3$ такие, что $m^1 \wedge m^2 = k/|k|$, и M – матрица, состоящая из двух столбцов m_1, m_2 : $M = (m^1, m^2)$. Выбор M произволен и вместе с параметрами b_1, b_2 характеризует структуру гауссовых пучков.

Построим теперь (3×3) -матрицу $B^0 = M\tilde{B}M^T$ и обозначим через $B(t), C(t)$ матричное решение задачи Коши для системы уравнений в вариациях

$$\dot{B} = -H_{pp}^+ B - H_{px}^+ C, \quad \dot{C} = H_{xp}^+ B + H_{xx}^+ C, \quad B|_{t=0} = B^0, \quad C|_{t=0} = \mathbb{E}, \quad (4.3)$$

где матричные функции $H_{pp}^+, H_{px}^+, H_{xp}^+, H_{xx}^+$ вычисляются на траектории $P(t), X(t)$, а $\mathbb{E}$ – единичная (3×3) -матрица.

Ниже мы используем букву τ для времени и называем такое время собственным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Матрицы B, C обладают следующими свойствами:

- 1) для всех τ $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} \frac{k}{|k|} = \begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{X} \end{pmatrix}$;
- 2) для всех τ : $B^T C - C^T B = 0$, и $(B^* C - C^* B)/2i \geq 0$;
- 3) комплексная симметричная матрица $BC^{-1}(\tau)$ имеет неотрицательную мнимую часть $(1/2i)(BC^{-1} - (C^*)^{-1}B^*)$ ранга 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1. В самом деле, обе части этого равенства – векторные решения системы в вариациях и $B|_{t=0}k = B^0k = 0, C|_{t=0}k = k$ и $\dot{P}|_{t=0} = -H_x^+(k, x^0) = 0, \dot{X}|_{t=0} = H_p^+(k, x^0) = k$.

Доказательства утверждений 2, 3 см. в монографии [5].

Итак, построенные решения системы Гамильтона и системы в вариациях определяют гауссов пучок. Используя конструкции п. 3.2 и п. 3.3, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Если траектория Γ^+ системы с гамильтонианом H^+ не содержит фокальных точек, то уравнение (2.6) допускает асимптотическое решение типа гауссова пучка с асимптотикой

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= e^{-i|k|t/h} \Phi(x), \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{\det C(\tau(x))}} e^{iS(x)/h} [A_1(\tau(x))\chi_1^+(P(\tau(x)), X(\tau(x))) + \\ &\quad + A_2(\tau(x))\chi_2^+(P(\tau(x)), X(\tau(x)))]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь $\tau(x)$ находится из (3.2), фаза $S(x) = S(\tau(x), x)$ – из (3.3), функции $B(t)$, $C(t)$ – решение задачи Коши (4.3), амплитуды $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ находятся по формулам (2.14), (2.15), а $\chi_{1,2}^+$ – из (2.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. 1. Пусть $y(x)$ – проекция вектора $x - X(\tau)$ на плоскость, проходящую через точку $X(\tau)$ и ортогональную к γ в этой точке. Благодаря свойствам матриц B , C из предложения 1 для мнимой части функции S справедливы следующие оценки: $c_1 y^2 \leq \text{Im } S \leq c_2 y^2$, где $c_1, c_2 > 0$ – константы. Это значит, что построенные решения локализованы в окрестности лучей $\gamma(x_0, k)$ и убывают, как гауссова экспонента, в направлении нормали.

2. Важный факт состоит в том, что векторная амплитуда в формуле (4.4) не зависит от матриц $\tilde{B}$, M , а лишь зависит от параметров k , x^0 луча $\gamma(x_0, k)$. Таким образом, для любого характера затухания амплитуда одна и та же.

4.2. Волновые пакеты и локализованные пучки.

4.2.1. *Волновые пакеты.* Как и ранее, возьмем точку x^0 вне токамака $\mathbb{D}$ и выберем волновой вектор k . Пусть B^0 – комплексная симметричная матрица с положительно определенной мнимой частью $(B^0 - B^{0*})/2i$, и пусть A^0 – двумерный вектор-столбец с компонентами A_1^0 , A_2^0 . Построим вектор-функцию

$$\Psi_0 = \exp \left[\frac{i}{h} \left(\langle k, x - x^0 \rangle + \frac{1}{2} \langle x - x^0, B^0(x - x^0) \rangle \right) \right] (\chi_1^+(x^0, k) A_1^0 + \chi_2^+(x^0, k) A_2^0), \quad (4.5)$$

локализованную вблизи точки $x = x^0$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.6):

$$\Psi|_{t=0} = \Psi_0. \quad (4.6)$$

Ее решение назовем гауссовым волновым пакетом. Изучим его асимптотику.

По аналогии с п. 4.1 рассматриваем систему в вариациях (4.3).

Несложно показать, что матрица $BC^{-1}(t)$ является симметричной и положительно определенной (см. [5], § 7, 8, гл. II). Положим

$$s(t) = \int_0^t (\langle P, H_p^+ \rangle - H^+) d\tau. \quad (4.7)$$

Как и выше, определим фазу Берри (2.15) и амплитуду (2.14) (взяв $A_{1,2}^0$ из (4.5)), тогда решение примет вид

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & \frac{1}{\sqrt{\det C(t)}} \exp \left[\frac{i}{h} \left(s(t) + \langle P, x - X(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - X(t), BC^{-1}(t)(x - X(t)) \rangle \right) \right] \times \\ & \times (A_1(t) \chi_1^+(P(t), X(t)) + A_2(t) \chi_2^+(P(t), X(t))). \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.2.2. *Локализованные пучки вида “сигары”.* Теперь рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.6), начальное условие которой имеет вид (4.4), где функции $A_1(\tau(x))$, $A_2(\tau(x))$ заменены на $\tilde{A}_1(\tau(x))$, $\tilde{A}_2(\tau(x))$, и $\tilde{A}_1(\tau)$, $\tilde{A}_2(\tau)$ – функции на $\Gamma(x^0, k)$ с носителем в окрестности $\tau = 0$.

Зададим функции

$$\begin{aligned} A_1(\tau, t) &= \tilde{A}_1(\tau - t) \cos \Phi(t) - \tilde{A}_2(\tau - t) \sin \Phi(t), \\ A_2(\tau, t) &= \tilde{A}_1(\tau - t) \sin \Phi(t) + \tilde{A}_2(\tau - t) \cos \Phi(t). \end{aligned}$$

Все остальные объекты нужно брать, как в п. 4.1. Решение имеет вид

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= e^{-i|k|t/h} \Phi(x, t), \\ \Phi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\det C(\tau(x))}} e^{iS(x)/h} [A_1(\tau(x), t) \chi_1^+(P(\tau(x)), X(\tau(x))) + \\ &\quad + A_2(\tau(x), t) \chi_2^+(P(\tau(x)), X(\tau(x)))].\end{aligned}$$

4.3. Принцип Мопертюи–Якоби и связь с уравнением Гельмгольца.

Удобно рассматривать вместо системы с гамильтонианом $H^\pm$ систему с гамильтонианом $K = p^2/2 + \omega_p^2/2\omega^2$, отвечающим уравнению Гельмгольца. Такой трюк, называемый принципом Мопертюи–Якоби, часто оказывается полезен в квазиклассических задачах (см. [13]). Вид новой гамильтоновой системы, а также системы в вариациях упрощается:

$$\dot{p} = -\frac{1}{2\omega^2} \frac{\partial \omega_p^2}{\partial x}, \quad \dot{x} = p, \quad \dot{B} = -\frac{1}{2\omega^2} \frac{\partial^2 \omega_p^2}{\partial x^2} C, \quad \dot{C} = B. \quad (4.9)$$

ЛЕММА 5. Пусть $\mathcal{P}(t)$, $\mathcal{X}(t)$, $\mathcal{B}(t)$, $\mathcal{C}(t)$ – решения задачи Коши

$$p|_{t=0} = k, \quad x|_{t=0} = x^0, \quad B|_{t=0} = B^0, \quad C|_{t=0} = \mathbb{E} \quad (4.10)$$

для системы (4.9). Тогда для решений $P(\tau)$, $X(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ задач (4.1) и (4.3) верны равенства

$$P(\tau) = \mathcal{P}\left(\frac{\tau}{|k|}\right), \quad X(\tau) = \mathcal{X}\left(\frac{\tau}{|k|}\right), \quad B(\tau) = \mathcal{B}\left(\frac{\tau}{|k|}\right), \quad C(\tau) = \mathcal{C}\left(\frac{\tau}{|k|}\right). \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО представляет собой простое упражнение (см. более общее утверждение в работе [6]).

Матрицы $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ обладают теми же свойствами, что и матрицы B , C из предложения 1. Параметризуем кривую $\gamma(x^0, k)$ собственным временем τ системы (4.10). Тогда легко видеть, что формулы для $S(x)$, $\det C(\tau(x))$ остаются неизменными, и всюду в теореме 1 можно заменить P , X , B , C на $\mathcal{P}(\tau)$, $\mathcal{X}(\tau)$, $\mathcal{B}(\tau)$, $\mathcal{C}(\tau)$, обозначая их аргумент вновь через τ . Единственное исключение – формула для фазы Берри (4.3), ее следует заменить на

$$\Phi(\tau) = \int_0^\tau \left(\frac{\mu_\epsilon(\mathcal{X}(\eta))}{2|k|} \left\langle \frac{\mathcal{P}(\eta)}{|\mathcal{P}(\eta)|}, \mathbf{B}(\mathcal{X}(\eta)) \right\rangle + \left\langle p_2^\perp(\eta), \frac{dp_1^\perp}{d\tau}(\eta) \right\rangle \right) d\eta.$$

Такое представление удобнее, чем в теореме 1, поскольку решение выписывается в терминах более простой гамильтоновой системы K .

4.4. Гауссовы пучки с фокальными точками. Сначала рассмотрим гауссов пучок общего вида уравнений плазмы. Благодаря специфическому виду гамильтониана H^+ формула (3.8) слегка упрощается. Действительно, с учетом того, что

$$a_1 = -\frac{1}{2|k|\omega^2} \langle \nabla \omega_p^2, x - x^* \rangle, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{|\nabla \omega_p^2|^2}{24|k|^3 \omega^4},$$

где $\nabla\omega_p^2$ вычисляется в точке x^* , получим асимптотику в окрестности фокальной точки:

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & e^{-i|k|t/h} \frac{\sqrt{2\pi i} |\nabla\omega_p^2|^{4/3}}{h^{1/6} |k| \omega^{2/3} \sqrt{\det \tilde{C}^*}} (A_1(\tau^*) \chi_1^* + A_2(\tau^*) \chi_2^*) \times \\ & \times e^{i/h|k|} \int_{\tau_0}^{\tau^*} P^2(\eta) d\eta e^{(i/h)\langle G^*(x_\perp - x_\perp^*), x_\perp - x_\perp^* \rangle} \text{Ai} \left(\frac{\langle \nabla\omega_p^2, x - x^* \rangle}{h^{2/3} \omega^{2/3} |\nabla\omega_p^2|^{2/3}} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Аналогично для локализованного пучка вида “сигары” получим

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & e^{-i|k|t/h} \frac{\sqrt{2\pi i} |\nabla\omega_p^2|^{4/3}}{h^{1/6} |k| \omega^{2/3} \sqrt{\det \tilde{C}^*}} (A_1(\tau^*, t) \chi_1^* + A_2(\tau^*, t) \chi_2^*) \times \\ & \times e^{i/h|k|} \int_{\tau_0}^{\tau^*} P^2(\eta) d\eta e^{(i/h)\langle G^*(x_\perp - x_\perp^*), x_\perp - x_\perp^* \rangle} \text{Ai} \left(\frac{\langle \nabla\omega_p^2, x - x^* \rangle}{h^{2/3} \omega^{2/3} |\nabla\omega_p^2|^{2/3}} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Вид матрицы G можно уточнить, если учесть тороидальную геометрию магнитного поля и конкретный вид траекторий с фокальными точками, возникающих в токамаке. Вычисления, однако, показывают (см. п. 4.5 ниже), что траектории с фокальными точками отвечают длине волны порядка 10^{-2} м, и, таким образом, условие (2.5) нарушается. Можно добиться выполнения этого условия, изменив величину магнитного поля. Вопрос релевантности этой модели реальным физическим процессам в токамаке требует отдельного рассмотрения и здесь не изучается.

Пользуясь принципом Мопертюи–Якоби (п. 4.3), будем рассматривать гамильтониан

$$K = \frac{p^2}{2} + V(r^2), \quad V(r^2) = \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}.$$

Запишем его в тороидальных координатах (2.7):

$$K = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{Q^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad Q = R + r \cos \theta.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Траектория системы с гамильтонианом K имеет фокальные точки тогда и только тогда, когда всюду на траектории $p_\phi = p_\theta = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что p_ϕ – циклический первый интеграл. Чтобы траектория имела фокальные точки, необходимо, чтобы $p_\phi = 0$. После редукции системы Гамильтона на инвариантную четырехмерную плоскость $p_\phi = 0$, $\phi = \phi_0$, получаем гамильтонову систему с двумя степенями свободы и гамильтонианом

$$K = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + V(r^2).$$

У этой системы p_θ – первый интеграл. Аналогично сказанному выше для существования фокальных точек необходимо, чтобы $p_\theta = 0$.

Итак, траектории с фокальными точками устроены следующим образом. Это движения в плоскости сечения тора $\phi = \phi_0$, причем движения происходят по прямой, проходящей через центр окружности, лежащей в сечении. Частица идет в сторону центра, останавливается, а затем идет обратно.

Пусть траектория отвечает $\theta = \theta_0$, и, не ограничивая общности, можно считать, что на ней $\phi = 0$.

Вычисления нам будет удобнее проводить в смещенных декартовых координатах (не в тороидальных!):

$$x = R + x' \cos \theta_0 - z' \sin \theta_0, \quad y = y', \quad z = x' \sin \theta_0 + z' \cos \theta_0. \quad (4.14)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливо соотношение*

$$r(x', y', z') = (x')^2 + \frac{x' \cos \theta_0 (y')^2}{R + x' \cos \theta_0} + (z')^2 + o((y')^2 + (z')^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в приложении В.

В дальнейшем штрихи опускаем. Тогда траектория задается соотношениями

$$x = X(t), \quad p_x = P(t), \quad y = z = p_y = p_z = 0. \quad (4.15)$$

Положим

$$f_2 = \frac{X(t) \cos \theta}{2\omega^2(R + X(t) \cos \theta)} \omega'_p(X^2(t)), \quad f_3 = \frac{1}{2\omega^2} \omega'_p(X^2(t)).$$

Пусть $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ – решения задач Коши

$$\ddot{\xi}_j + f_j(t) \xi_j = 0, \quad \xi_j(0) = 1, \quad \dot{\xi}_j(0) = b_j, \quad j = 2, 3. \quad (4.16)$$

Тогда (учитывая, что одновременная перестановка столбцов матриц B и C не меняет вида BC^{-1})

$$B = \text{diag}\{\dot{P}, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3\}, \quad C = \text{diag}\{\dot{X}, \xi_2, \xi_3\}. \quad (4.17)$$

Из (3.2) следует условие для нахождения $\tau(x)$:

$$\tau = \tau(x) \Leftrightarrow x = X(\tau). \quad (4.18)$$

Отсюда следует, что второе слагаемое в правой части (3.3) обращается в нуль.

Рассмотрим теперь уравнение переноса. Если в качестве $p_{1,2}^\perp$ выберем p_y и p_z , то $dp_{1,2}^\perp/dt = 0$. Кроме того, вектор $\mathbf{B}$ имеет нулевую компоненту вдоль x . Поэтому решение будет тривиальным (фаза Берри (4.3) равна нулю).

Итак, из теоремы 1 получаем формулу для гауссова пучка в неособой карте:

$$\begin{aligned} \Psi = & \frac{1}{\sqrt{\dot{X}(\tau(x)) \xi_2(\tau(x)) \xi_3(\tau(x))}} e^{-i|k|t/h} \left[\int_{\tau_0}^{\tau(x)} P^2(\eta) d\eta + \frac{\dot{\xi}_2 y^2}{\xi_2} + \frac{\dot{\xi}_3 z^3}{\xi_3} \right] \times \\ & \times \sum_{j=1}^2 A_j^0 \chi_j^+(P(\tau(x)), X(\tau(x))). \end{aligned}$$

Рис. 1. Луч входит в тор и выходит в обратном направлении. Стрелка вправо указывает начальное направление луча. Стрелка влево указывает направление луча после отражения. Фокальной является самая правая точка на луче. Расстояния на осях в метрах. Луч лежит на прямой $x_2 = x_3 = 0$.

Вычислим асимптотику решения в окрестности фокальной точки. Аналогично (4.17) мы получаем

$$\tilde{B} = \text{diag}\{\dot{X}, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3\}, \quad \tilde{C} = \text{diag}\{\dot{P}, \xi_2, \xi_3\}.$$

Тогда, используя (3.8), получаем

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) = & e^{-i|k|t/h} \frac{\sqrt{2\pi i} |\nabla \omega_p^2|^{4/3}}{h^{1/6} |k| \omega^{2/3} \sqrt{\det \tilde{C}^*}} A_{1,2}^0(r^*) \chi_{1,2}(0, x_*) e^{i/h|k|} \int_{\tau_0}^{\tau^*} P^2(\eta) d\eta \times \\ & \times \exp \left[\frac{i}{h} \left(\frac{\dot{\xi}_2(\tau^*) y^2}{\xi_2(\tau^*)} + \frac{\dot{\xi}_3(\tau^*) z^2}{\xi_3(\tau^*)} \right) \right] \text{Ai} \left(\frac{\langle \nabla \omega_p^2, x - x^* \rangle}{h^{2/3} \omega^{2/3} |\nabla \omega_p^2|^{2/3}} \right) \times \\ & \times (A_1^0 \chi_1^* + A_2^0 \chi_2^*). \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.5. Численная реализация асимптотических формул. Асимптотики из п. 4.1–4.4 могут быть легко реализованы и визуализированы с помощью компьютерных программ (например, *Wolfram Mathematica*). Построим гауссовы пучки.

Размер тора, магнитное поле, параметры взяты из п. 2.3. Кроме того, берем $\lambda = 20 \times 10^{-3}$ м, $h = 1/500\pi$, $b_1 = b_2 = b = 25$, $x_0 = (-1.5, 0, 0)$, $k = P(0) = (1, 0, 0)$. Граница тора $x_1 = -1.2$, фокальная точка $x_1 = -1.00275$.

Траектория и токамак изображены на рис. 1. Асимптотика решения в точках до входа в токамак изображена на рис. 2. Асимптотика в окрестности фокальной точки изображена на рис. 3.

Рис. 2. Модуль волновой функции $|\Psi(x_1, x_2, 0)|$ до входа в токамак в плоскости $x_3 = 0$ (а) и действительная часть волновой функции $\text{Re } \Psi(x_1, 0, 0)$ на прямой $x_2 = x_3 = 0$ до входа в токамак (б).

Рис. 3. Асимптотика в окрестности фокальной точки: модуль волновой функции $|\Psi(x_1, x_2, 0)|$ в плоскости $x_3 = 0$, фокальная точка $(x_1 = -1.00275, x_2, 0)$ (а) и действительная часть волновой функции $\text{Re } \Psi(x_1, 0, 0)$ на прямой $x_2 = x_3 = 0$, фокальная точка $(x_1 = -1.00275, x_2 = 0, x_3 = 0)$ (б).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Доказательство леммы 1

Рассмотрим систему из четырех трехмерных уравнений

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{W} \\ p \wedge p \wedge \mathbf{E} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \mathbf{E} \\ -i \left(\mathbf{E} - \frac{\Omega_e}{\omega} \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_e \right) \\ -i \left(\mathbf{E} - \frac{\Omega_i}{\omega} \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_i \right) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{W} \\ \mathbf{U}_e \\ \mathbf{U}_i \end{pmatrix}. \quad (\text{П.1})$$

Рассмотрим собственные векторы операторов размерности 3, входящих в большой оператор $\mathcal{H}_0(p, x)$. Используем следующие тождества:

$$p \wedge p \wedge p = 0, \quad p \wedge p \wedge p^\perp = -p^2 p^\perp \quad (\text{П.2})$$

и

$$\mathbf{B} \wedge (\theta \mathbf{B}^\perp + \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}^\perp) = \theta(\theta \mathbf{B}^\perp + \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}^\perp), \quad (\text{П.3})$$

где $\theta = \pm i|\mathbf{B}|$.

Докажем сначала (2.9) (разумеется, предполагается, что $|\mathbf{B}| < |\theta|$):

$$\begin{aligned} [\mathbf{B} \wedge \cdot - \theta]^{-1} &= -\theta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n} [\mathbf{B} \wedge \cdot]^n = \\ &= -\theta^{-1} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-(2n+1)} [\mathbf{B} \wedge \cdot]^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-2(n+1)} [\mathbf{B} \wedge \cdot]^{2(n+1)} \right) = \\ &= -\theta^{-1} \left(1 + \theta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^{-1} i |\mathbf{B}|)^{2n} [\mathbf{B} \wedge \cdot] + \right. \\ &\quad \left. + \theta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (\theta^{-1} i |\mathbf{B}|)^{2n} [\mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \cdot] \right) = \\ &= -\theta^{-1} \left(1 + \frac{\theta^{-1}}{1 + \theta^{-2} \mathbf{B}^2} [\mathbf{B} \wedge \cdot] + \frac{\theta^{-2}}{1 + \theta^{-2} \mathbf{B}^2} [\mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \cdot] \right). \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Исключим первое уравнение из системы (П.1) и рассмотрим второе уравнение

$$p \wedge p \wedge \mathbf{E} + \left(H^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \mathbf{E} = 0.$$

Применим к нему свойства (П.2). Если $\mathbf{E} \neq 0$, то $H = \pm \sqrt{p^2 + \omega_p^2/\omega^2}$, $\mathbf{E} = p_{1,2}^\perp$ или $H = \pm \omega_p/\omega$, $\mathbf{E} = p$ (мы зафиксировали $\mathbf{E}$ -координаты собственных векторов). Рассмотрим третье уравнение системы (П.1) (четвертое рассматривается аналогично) $\mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_e - \theta \mathbf{U}_e = (\Omega_e/\omega)^{-1} \mathbf{E}$, где $\theta = -iH(\Omega_e/\omega)^{-1}$. Учитывая условие (2.5), мы можем применить формулу (2.9) для обратного оператора. Таким образом, получены первые два набора собственных значений и векторов из леммы.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{E} = 0$. Третье уравнение системы (П.1) принимает вид $\mathbf{B} \wedge \mathbf{U}_e = \theta_e \mathbf{U}_e$, где $\theta_e = -iH(\Omega_e/\omega)^{-1}$. Используя (П.3), можно получить оставшиеся собственные значения и векторы.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Доказательство леммы 3

Начнем со второго и третьего слагаемых в (2.11). Доказываем лемму для H^+ , для H^- – все аналогично. Для простоты обозначим H^+ через H . Отметим, что d/dt и гамильтониан H коммутируют, поэтому

$$\tilde{\chi}_r^T \frac{d\chi_s}{dt} = \left\langle p_m^\perp, \frac{dp_j^\perp}{dt} \right\rangle.$$

В силу того, что $(p_m^\perp)^2 = 1$, $\langle p_1^\perp, p_2^\perp \rangle = 0$, получаем

$$\left\langle p_j^\perp, \frac{dp_j^\perp}{dt} \right\rangle = 0, \quad \left\langle p_1^\perp, \frac{dp_2^\perp}{dt} \right\rangle = - \left\langle p_2^\perp, \frac{dp_1^\perp}{dt} \right\rangle.$$

Итак, получаем матрицу

$$\left\| \tilde{\chi}_r^T \frac{d\chi_s^+}{dt} \right\| = \left\langle p_1^\perp, \frac{dp_2^\perp}{dt} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\tilde{\chi}_r^T \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p_j} \frac{\partial \chi_s}{\partial x_j} = -\frac{1}{2H} \sum_{j=1}^3 \left(\langle p_r^\perp, p \rangle \frac{\partial (p_s^\perp)_j}{\partial x_j} + (p_r^\perp)_j \left\langle p, \frac{\partial p_s^\perp}{\partial x_j} \right\rangle - 2p_j \left\langle p_r^\perp, \frac{\partial p_s^\perp}{\partial x_j} \right\rangle \right).$$

Здесь $\langle p_r^\perp, p \rangle = 0$, и в силу того, что $\partial p / \partial x_j = 0$, имеем $\langle p, \partial p_s^\perp / \partial x_j \rangle = 0$. Отсюда получаем

$$\tilde{\chi}_r^T \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p_j} \frac{\partial \chi_s}{\partial x_j} = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^3 p_j \left\langle p_r^\perp, \frac{\partial p_s^\perp}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Теперь имеем

$$\tilde{\chi}_r^T \sum_{j=1}^3 \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial \chi_s}{\partial x_j} = -\frac{1}{2H} \sum_{j=1}^3 p_j \left(2 \left\langle p_r^\perp, \frac{\partial p_s^\perp}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{1}{H} \langle p_r^\perp, p_s^\perp \rangle \right),$$

откуда получаем

$$\tilde{\chi}_r^T \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \frac{\partial \chi_s}{\partial x_j} = -\frac{1}{2H^2} \sum_{j=1}^3 p_j \frac{\partial H}{\partial x_j} \delta_{rs} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \delta_{rs}.$$

Итак,

$$iL - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \mathbb{E} = \tilde{\chi}^T \mathcal{H}_1 \chi + \left\langle p_1^\perp, \frac{dp_2^\perp}{dt} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, рассмотрим слагаемое $\chi^T \mathcal{H}_1 \chi$. В $\mathcal{H}_1 \chi_1$ ненулевой является только компонента $\mathbf{W} = \mu_e \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}'_e + \mu_i \mathbf{B} \wedge \mathbf{U}'_i$, где вместо $\mathbf{U}'_e$, $\mathbf{U}'_i$ нужно подставить соответствующие компоненты вектора χ_1 . Вычислим первое слагаемое $\mathbf{W}$ -компоненты:

$$\begin{aligned} \mu_e [\mathbf{B} \wedge \cdot] [\mathbf{B} \wedge \cdot - \theta_e]^{-1} \left(\frac{\Omega_e}{\omega} \right)^{-1} p_1^\perp &= \mu_e (1 + \theta_e [\mathbf{B} \wedge \cdot - \theta_e]^{-1}) \left(\frac{\Omega_e}{\omega} \right)^{-1} p_1^\perp = \\ &= -\frac{\mu_e}{\Omega_e / \omega} \frac{1}{1 + \theta_e^{-2} \mathbf{B}^2} (\theta_e^{-1} [\mathbf{B} \wedge \cdot] + \theta_e^{-2} [\mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \cdot]) p_1^\perp. \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Разделим выражение $\tilde{\chi}^T \mathcal{H}_1 \chi$ на две части: $\tilde{\chi}^T \mathcal{H}_1 \chi = \{\dots\}_e + \{\dots\}_i$, и проведем вычисления для первой из них

$$\{\dots\}_e = \frac{1}{2H} \frac{\mu_e}{\Omega_e/\omega} \frac{1}{1 + \theta_e^{-2} \mathbf{B}^2} M,$$

где

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \langle p_1^\perp, (\theta_e^{-1}[\mathbf{B} \wedge \cdot] + \theta_e^{-2}[\mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \cdot])p_1^\perp \rangle & \langle p_1^\perp, (\theta_e^{-1}[\mathbf{B} \wedge \cdot] + \theta_e^{-2}[\mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \cdot])p_2^\perp \rangle \\ \langle p_2^\perp, (\theta_e^{-1}[\mathbf{B} \wedge \cdot] + \theta_e^{-2}[\mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \cdot])p_1^\perp \rangle & \langle p_2^\perp, (\theta_e^{-1}[\mathbf{B} \wedge \cdot] + \theta_e^{-2}[\mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge \cdot])p_2^\perp \rangle \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \langle p_1^\perp, \theta_e^{-2} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge p_1^\perp \rangle & -\theta_e^{-1} \left\langle \mathbf{B}, \frac{p}{|p|} \right\rangle + \langle p_1^\perp, \theta_e^{-2} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge p_2^\perp \rangle \\ \theta_e^{-1} \left\langle \mathbf{B}, \frac{p}{|p|} \right\rangle + \langle p_2^\perp, \theta_e^{-2} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge p_1^\perp \rangle & \langle p_2^\perp, \theta_e^{-2} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge p_2^\perp \rangle \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \theta_e^{-2} (\langle \mathbf{B}, p_1^\perp \rangle^2 - \mathbf{B}^2) & -\theta_e^{-1} \left\langle \mathbf{B}, \frac{p}{|p|} \right\rangle + \theta_e^{-2} \langle \mathbf{B}, p_1^\perp \rangle \langle \mathbf{B}, p_2^\perp \rangle \\ \theta_e^{-1} \left\langle \mathbf{B}, \frac{p}{|p|} \right\rangle + \theta_e^{-2} \langle \mathbf{B}, p_1^\perp \rangle \langle \mathbf{B}, p_2^\perp \rangle & \theta_e^{-2} (\langle \mathbf{B}, p_2^\perp \rangle^2 - \mathbf{B}^2) \end{pmatrix}, \\ \{\dots\}_e &= \frac{i\mu_e}{2H^2} \begin{pmatrix} \theta_e^{-1} (\langle \mathbf{B}, p_1^\perp \rangle^2 - \mathbf{B}^2) & -\left\langle \mathbf{B}, \frac{p}{|p|} \right\rangle + \theta_e^{-1} \langle \mathbf{B}, p_1^\perp \rangle \langle \mathbf{B}, p_2^\perp \rangle \\ \left\langle \mathbf{B}, \frac{p}{|p|} \right\rangle + \theta_e^{-1} \langle \mathbf{B}, p_1^\perp \rangle \langle \mathbf{B}, p_2^\perp \rangle & \theta_e^{-1} (\langle \mathbf{B}, p_2^\perp \rangle^2 - \mathbf{B}^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Во втором равенстве были использованы свойства смешанного произведения $\langle a, b \wedge c \rangle$ и тождество $p_1^\perp \wedge p_2^\perp = p/|p|$. В третьем равенстве была использована формула $\mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \wedge p_1^\perp = \mathbf{B} \langle \mathbf{B}, p_1^\perp \rangle - \mathbf{B}^2 p_1^\perp$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Доказательство предложения 3

Легко видеть, что

$$r^2 = R^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2}. \quad (\text{П.6})$$

Подставим сюда (4.14) и опустим штрихи:

$$r^2 = 2R^2 + 2Rx \cos \theta_0 + x^2 - 2Rz \sin \theta_0 + y^2 + z^2 - 2R\rho, \quad (\text{П.7})$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{(R + x \cos \theta_0)^2 - 2z(R + x \cos \theta_0) \sin \theta_0 + y^2 + z^2 \sin^2 \theta_0} = \\ &= (R + x \cos \theta_0) \left(1 - \frac{z \sin \theta_0}{R + x \cos \theta_0} + \frac{y^2}{2(R + x \cos \theta_0)^2} + o(y^2 + z^2) \right). \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в (П.7), получаем требуемое.

Список литературы

- [1] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, Springer, New York, 2015; J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*, Springer, New York, 2004; J. P. Freidberg, *Plasma Physics and Fusion Energy*, Cambridge Univ. Press, New York, 2007.
- [2] R. A. Gerwin, “Initial value solution of Maxwell’s equations in cold plasma”, *Amer. J. Phys.*, **30**:10 (1962), 711–715; S. Nowak, A. Orefice, “Three-dimensional propagation and absorption of high frequency Gaussian beams in magnetoactive plasmas”, *Phys. Plasmas*, **1**:5 (1994), 1242–1250; E. Mazzucato, “Propagation of a Gaussian beam in a nonhomogeneous plasma”, *Phys. Fluid B*, **1**:3 (1989), 1855; Erratum, **2**:1 (1990), 228; J. P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014; G. V. Pereverzev, “Paraxial WKB description of short wavelength eigenmodes in a tokamak”, *Phys. Plasmas*, **8**:8 (2001), 3664–3672; Ya. A. Kravtsov, P. B. Erczynski, “Gaussian beams in inhomogeneous media: A review”, *Stud. Geophys. Geod.*, **51**:1 (2007), 1–36; R. A. Cairns, V. Fuchs, “Calculation of a wave field from ray tracing”, *Nucl. Fusion*, **50**:9 (2010), 095001, 11 pp.
- [3] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [4] В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, М., 1972; В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1985.
- [5] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977.
- [6] А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, А. И. Клевин, Б. Тироцци, “Скаляризация стационарных квазиклассических задач для систем уравнений и приложение к физике плазмы”, *ТМФ*, **193**:3 (2017), 409–433.
- [7] В. М. Бабич, М. М. Попов, “Распространение сосредоточенных звуковых пучков в трехмерной неоднородной среде”, *Акуст. журнал*, **27**:6 (1981), 828–835; М. М. Попов, “Метод суммирования гауссовых пучков в изотропной теории упругости”, *Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли*, **9** (1983), 39–50; J. V. Ralston, “On the construction of quasimodes associated with stable periodic orbits”, *Comm. Math. Phys.*, **51**:3 (1976), 219–242; Erratum, **67**:1 (1979), 91.
- [8] И. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, М., 1979.
- [9] V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Yu. Trifonov, A. A. Yevseyevich, “Quantization of closed orbits in Dirac theory by Maslov’s complex germ method”, *J. Math. Phys. A: Math. Gen.*, **27**:3 (1994), 1021–1043; “Quasi-classical spectral series of the Dirac operators corresponding to quantized two-dimensional Lagrangian tori”, **27**:15 (1994), 5273–5306; В. Г. Барров, В. В. Белов, И. М. Тернов, “Квазиклассические траекторно-когерентные состояния нерелятивистской частицы в произвольном электромагнитном поле”, *ТМФ*, **50**:3 (1982), 390–396.
- [10] V. V. Belov, V. M. Olive, J. L. Volkova, “The Zeeman effect for the ‘anisotropic hydrogen atom’ in the complex WKB approximation. I. Quantization of closed orbits for the Pauli operator with spin-orbit interaction”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **28**:20 (1995), 5799–5810; “II. Quantization of two-dimensional Lagrangian tori (with focal points) for the Pauli operator with spin-orbit interaction”, 5811–5829.
- [11] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, “Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход”, *ТМФ*, **92**:2 (1992), 215–254; В. В. Белов, О. С. Доброхотов, С. Ю. Доброхотов, “Изотропные торы, комплексный росток и индекс Маслова, нормальные формы и квазимоды многомерных спектральных задач”, *Матем. заметки*, **69**:4 (2001), 483–514; С. Ю. Доброхотов, А. И. Шафаревич, “Квазиклассическое

- квантование изотропных многообразий гамильтоновых систем”, *Топологические методы в теории гамильтоновых систем*, Факториал, М., 1998, 41–114.
- [12] С. Ю. Доброхотов, А. Кардинали, А. И. Клевин, Б. Тироцци, “Комплексный росток Маслова и высокочастотные гауссовы пучки в холодной плазме в торической области”, *Докл. РАН*, **469**:6 (2016), 666–671.
- [13] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974; R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings Publ., Reading, MA, 1978; A. V. Tsiganov, “The Maupertuis principle and canonical transformations of the extended phase space”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **8**:1 (2001), 157–182; S. Yu. Dobrokhotov, M. Rouleux, “The semi-classical Maupertuis–Jacobi correspondence for quasi-periodic Hamiltonian flows with applications to linear water waves theory”, *Asymptotic. Anal.*, **74**:1–2 (2011), 33–73; С. Ю. Доброхотов, М. Руло, “Квазиклассический аналог принципа Мопертюи–Якоби и его приложение к линейной теории волн на воде”, *Матем. заметки*, **87**:3 (2010), 458–463; С. Ю. Доброхотов, Д. С. Миненков, М. Руло, “Принцип Мопертюи–Якоби для гамильтонианов вида $f(x, |p|)$ в некоторых двумерных стационарных квазиклассических задачах”, *Матем. заметки*, **97**:1 (2015), 48–57.

Поступила в редакцию 13.12.2017