Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толченников, Простые точные решения и асимптотика локализованных решений двумерного безмассового уравнения Дирака для графена, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 1, 64–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:38:01

© 2018 г.

А. А. Толченников^{*†}

ПРОСТЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ И АСИМПТОТИКА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОГО БЕЗМАССОВОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ ГРАФЕНА

Построены точные решения и асимптотика локализованных решений двумерного безмассового уравнения Дирака для графена с малым потенциалом.

Ключевые слова: безмассовое уравнение Дирака для графена, точные решения, операторы рождения.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9521>

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] было получено богатое семейство точных алгебраических решений многомерного волнового уравнения. По существу эти решения являются обобщениями решений, рассмотренных в работах [2]. Для двумерного волнового уравнения с постоянной скоростью c

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (1)$$

такие (комплексные) решения имеют вид

$$u(x, t) = A \frac{1 + ict/\mu}{[(1 + i(ct + |x|)/\mu)(1 + i(ct - |x|)/\mu)]^{3/2}}, \quad (2)$$

где A – произвольная комплексная константа. Вещественная (и мнимая) часть этой функции также есть решение исходного волнового уравнения. Если A вещественно,

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект № 16-11-10282).

^{*}Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
E-mail: tolchennikovaa@gmail.com

[†]Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

то $\text{Im } u|_{t=0} = 0$. Параметр μ здесь является произвольным, хотя в дальнейшем мы будем считать его положительным и достаточно малым. Параметр μ определяет “размер” локализации начальной волновой функции. Структура решения u имеет следующий вид: при $t = 0$ оно сосредоточено в окрестности точки $x = 0$, а через какое-то время становится сосредоточенным в окрестности окружности $|x| = ct$. Эта окружность есть фронт решения, он образован концами траекторий $x = ct\mathbf{n}(\varphi)$, где φ – полярный угол на плоскости (x_1, x_2) , $\mathbf{n}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$. Если рассмотреть это решение в какой-то момент времени $t > 0$ и затем рассмотреть его эволюцию в обратном времени, то мы получаем, что траектории, выпущенные из окружности, фокусируются в одной точке $x = 0$, которую, тем самым, можно считать фокальной точкой.

Дифференцирование решения u по x_1, x_2, t дает новые решения волнового уравнения, поэтому об операторах $\partial/\partial x_j, \partial/\partial t$ можно говорить как об аналогах “операторов рождения” в квантовой механике. Получаемые таким образом решения по-прежнему локализованы в окрестности фронта $|x| = ct$, однако, во-первых, профиль решения в окрестности фронта может иметь несколько осцилляций и, во-вторых, профиль зависит от точки (угла φ) фронта, а в каких-то точках фронта решение может вообще обращаться в ноль.

Далее мы показываем, что решения такого же типа существуют и у безмассовой двумерной системы уравнений Дирака, описывающей эволюцию волновых функций в графене (см. книгу [3]):

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u}{\partial t} &= \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right) v + U(x)u, \\ i \frac{\partial v}{\partial t} &= \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u + U(x)v. \end{aligned} \quad (3)$$

2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОГО ПОТЕНЦИАЛА

Пусть сначала потенциал U равен константе. Тогда $w_1 = e^{iUt}u$ и $w_2 = e^{iUt}v$ и их комплексно-сопряженные функции являются решениями волнового уравнения (1). Выбирая w_1 и w_2 в виде (2) и восстанавливая вторые компоненты этих решений, приходим к формулам для решений вида

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix} &= e^{-iUt} (\alpha_1 \psi_1(x, t) + \alpha_2 \psi_2(x, t)), \\ \psi_1 &= \frac{1}{((1 + it/\mu)^2 + |x|^2/\mu^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} i(x_1 + ix_2)/\mu \\ 1 + it/\mu \end{pmatrix}, \\ \psi_2 &= \frac{1}{((1 - it/\mu)^2 + |x|^2/\mu^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 - it/\mu \\ -i(x_1 - ix_2)/\mu \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

где α_1, α_2 – произвольные комплексные константы. Дифференцируя эти решения по x_1, x_2, t , мы получаем новые решения.

3. АСИМПТОТИКА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЙ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА

В случае переменного потенциала едва ли возможно найти точные решения, но можно найти асимптотику решения по малому параметру μ – характерной ширине начального условия для системы (3). А именно, рассмотрим задачу Коши для системы уравнений (3) с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u^0\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad v|_{t=0} = v^0\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad (5)$$

где $u^0(z)$, $v^0(z)$ – гладкие функции, достаточно быстро убывающие при $|z| \rightarrow \infty$. А именно, потребуем, чтобы они убывали быстрее, чем $\text{const}|z|^{-\beta}$ ($\beta > 2$), и их производные $\partial^{|\alpha|}/\partial z^\alpha$ (где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$) убывали на бесконечности быстрее $\text{const}|z|^{-\beta-|\alpha|}$. Также предполагаем, что гладкий потенциал $U(x)$ постоянен вне некоторого компакта. Решение задачи Коши ищется на конечном интервале времени $[0, T]$.

Воспользуемся результатами работ [4], [5], в которых были построены асимптотики решения для строго гиперболических систем уравнений с локализованными начальными условиями вида $V(x/\mu)$.

При $t = 0$ решение локализовано в окрестности точки $x = 0$, а в следующие моменты времени решение оказывается локализовано в окрестности окружности (фронта) $|x| = t$. Приведем формулу для асимптотики решения в окрестности фронта.

ТЕОРЕМА 1. *При $t > t_0 > 0$, в некоторой не зависящей от μ окрестности фронта $|x| = t$ асимптотика при $\mu \rightarrow 0$ решения задачи (3) с начальным условием (5) имеет вид*

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{2\pi t}} \exp\left[-i \int_0^t U\left(\frac{\tau x}{|x|}\right) d\tau\right] (f^+(x_1, x_2, t, \mu) + f^-(x_1, x_2, t, \mu) + o(1)), \quad (6)$$

где

$$f^\pm(x_1, x_2, t, \mu) = e^{\mp i\pi/4} \int_0^\infty \sqrt{\rho} e^{\pm i\rho(|x|-t)/\mu} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_1 + ix_2}{|x|} \\ \frac{x_1 - ix_2}{|x|} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}^0\left(\pm \frac{\rho x}{|x|}\right) \\ \tilde{v}^0\left(\pm \frac{\rho x}{|x|}\right) \end{pmatrix} d\rho,$$

$$\tilde{u}^0(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ipx} u^0(x) dx, \quad \tilde{v}^0(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ipx} v^0(x) dx.$$

3.1. “Операторы рождения”. Пусть Ψ и Ψ_Q – решения задачи (3) с начальными условиями $\begin{pmatrix} u^0(x/\mu) \\ v^0(x/\mu) \end{pmatrix}$ и $Q(\mu \frac{\partial}{\partial x_1}, \mu \frac{\partial}{\partial x_2}) \begin{pmatrix} u^0(x/\mu) \\ v^0(x/\mu) \end{pmatrix}$ соответственно, где $Q(p_1, p_2)$ есть многочлен от p_1, p_2 . Тогда из теоремы 1 получается, что в окрестности фронта $|x| = t$ (при $t > t_0 > 0$)

$$\Psi_Q \approx Q\left(\mu \frac{\partial}{\partial x_1}, \mu \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \Psi \approx Q\left(-\mu \frac{x_1}{|x|} \frac{\partial}{\partial t}, -\mu \frac{x_2}{|x|} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi,$$

где знак $\approx$ между функциями означает, что эти функции имеют одинаковый старший член асимптотики по μ .

В этом смысле операторы $Q(\mu \frac{\partial}{\partial x_1}, \mu \frac{\partial}{\partial x_2})$, $Q(-\mu \frac{x_1}{|x|} \frac{\partial}{\partial t}, -\mu \frac{x_2}{|x|} \frac{\partial}{\partial t})$ являются операторами рождения: их применение к уже известному решению дает функцию, которая имеет тот же старший член асимптотики, что и некоторое новое решение (аналогичные операторы для системы мелкой воды были построены в работе [6]).

3.2. Начальные условия специального вида. Рассмотрим функцию $f(x) = g(T(\theta)x)$, где

$$g(z) = \left(1 + \left(\frac{z_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{c}\right)^2\right)^{-3/2}, \quad T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

b, c, θ – действительные параметры. Преобразование Фурье функции $g(z)$ имеет простой вид $\tilde{g}(p_1, p_2) = bce^{-|p|\beta(\psi)}$, где $\beta(\psi) = \sqrt{b^2 \cos^2 \psi + c^2 \sin^2 \psi}$. Поэтому $\tilde{f}(\rho \mathbf{n}(\psi)) = bce^{-\rho\beta(\psi-\theta)}$ (см. статью [7]). Рассмотрим следующие функции, задающие начальные условия (5):

$$u^0(y) = a_1 \left[1 + \left(\frac{\cos \theta_1 y_1 + \sin \theta_1 y_2}{b_1} \right)^2 + \left(\frac{-\sin \theta_1 y_1 + \cos \theta_1 y_2}{c_1} \right)^2 \right]^{-3/2},$$

$$v^0(y) = a_2 \left[1 + \left(\frac{\cos \theta_2 y_1 + \sin \theta_2 y_2}{b_2} \right)^2 + \left(\frac{-\sin \theta_2 y_1 + \cos \theta_2 y_2}{c_2} \right)^2 \right]^{-3/2}.$$

Тогда функции $f^\pm$ из теоремы 1 принимают вид

$$f^\pm(x_1, x_2, t, \mu) = e^{\mp i\pi/4} a_1 b_1 c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{1}{|x|} \right) \left(\beta(\arg x - \theta_1) \mp \frac{i}{\mu} (|x| - t) \right)^{-3/2} +$$

$$+ e^{\mp i\pi/4} a_2 b_2 c_2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|} \right) \left(\beta(\arg x - \theta_2) \mp \frac{i}{\mu} (|x| - t) \right)^{-3/2}.$$

3.3. Доказательство теоремы 1. Доказательство заключается в применении алгоритма, изложенного в статье [4] (а также фактически в работах [7], [8]). Систему (3) и начальные условия (5) перепишем в виде

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = A \left(x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi, \quad \Psi|_{t=0} = V \left(\frac{x}{\mu} \right), \quad \text{где} \quad A(x, p) = \begin{pmatrix} U(x) & p_1 + ip_2 \\ p_1 - ip_2 & U(x) \end{pmatrix}.$$

Старшая однородная часть первого порядка матричного гамильтониана имеет вид $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & p_1 + ip_2 \\ p_1 - ip_2 & 0 \end{pmatrix}$. Собственные значения A_0 записываются как $H^\pm = \pm |p|$.

Применим последовательно шаги алгоритма из статьи [4].

1. Из окружности $\Gamma_0 = \{p = \mathbf{n}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}, x = 0\}$ выпускаем траектории гамильтоновых систем

$$\dot{x} = \frac{\partial H^\pm}{\partial p}, \quad \dot{p} = \frac{\partial H^\pm}{\partial x}.$$

Решениями этих систем являются функции $X^\pm(t, \psi) = \pm t \mathbf{n}(\psi)$, $P^\pm(\psi) = \mathbf{n}(\psi)$. При фиксированном t функции $X^\pm(t, \psi)$, $P^\pm(\psi)$ задают параметризацию волнового фронта $\Gamma_t^\pm$ в фазовом пространстве, а проекции на конфигурационное пространство дают окружность $|x| = t$. Решение нашей задачи при $t > 0$ оказывается локализованным в окрестности этой окружности.

Рис. 1. Графики старшего члена асимптотики $|\Psi|$ для $t = 0$ (а) и $t = 1$ (б).

2. Находим $w^\pm(p)$ – нормированные собственные векторы матрицы A_0 :

$$w^\pm(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \frac{p_1 - ip_2}{|p|} \end{pmatrix}.$$

3. Решаем уравнения переноса и находим функции $M^\pm(t, \psi) = -i \int_0^t U(\pm \tau \mathbf{n}(\psi)) d\tau$.

4. Находим $c^\pm(\rho, \psi)$ – коэффициенты разложения $\tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi))$ (где $\tilde{V}$ – преобразование Фурье $V(x)$) по базису $w^\pm$, вычисленному при $p = \rho \mathbf{n}(\psi)$:

$$\begin{pmatrix} c^+(\rho, \psi) \\ c^-(\rho, \psi) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\psi} \\ -1 & e^{i\psi} \end{pmatrix} \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi)).$$

5. Находим индексы Маслова для траекторий $(X^\pm(t, \psi), P^\pm(\psi))$: $m^+(t, \psi) \equiv 0$, $m^-(t, \psi) \equiv -1$.

6. Находим длины векторов $V_1 = |n_\psi| = 1$, $V_2 = |X_\psi^\pm| = t$.

Согласно теореме 1 из работы [4] в некоторой не зависящей от μ окрестности окружности $|x| = t > t_0$ асимптотика решения имеет вид

$$\sum_{\sigma \in \{+, -\}} \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{-i\pi/4 - i\pi m^\sigma/2} \int_0^\infty \sqrt{\rho} e^{i\rho \langle P^\sigma(t, \psi), x - X^\sigma(t, \psi) \rangle / \mu} \times \\ \times \sqrt{\frac{|P^\sigma(t, \psi)| V_1}{V_2}} (c^\sigma e^{M^\sigma} w^\sigma + o(1)) \Big|_{\psi = \psi^\sigma(t, x)} d\rho,$$

где $\psi^+(t, x) = \arg x$, $\psi^-(t, x) = \arg x + \pi$. Подставляя в эту формулу все найденные величины, получаем формулу (6).

4. ПРИМЕР

Пусть потенциал $U(x_1, x_2)$ равен x_1 в некотором достаточно большом компакте и равен константе вне некоторого компакта. Приведем несколько рисунков, иллюстрирующих поведение модуля решения $\Psi = (u, v)$ при значении параметра $\mu = 0.2$. Выберем функции, задающие начальное условие, в специальном виде $u^0(y) = v^0(y) = (1 + |y|^2)^{-3/2}$. Графики старшего члена асимптотики функции $|\Psi| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2}$ для $t = 0$ и $t = 1$ показаны на рис. 1.

Рис. 2. Графики старшего члена асимптотики $|\Psi_Q|$ после применения “оператора рождения” $\hat{Q} = \mu \frac{\partial}{\partial x_1}$ при $t = 0$ (а) и $t = 1$ (б).

Теперь применим “оператор рождения” $\hat{Q} = \mu \frac{\partial}{\partial x_1}$. Соответствующие графики старшего члена асимптотики функции $|\Psi_Q|$ для $t = 0$ и $t = 1$ приведены на рис. 2.

Благодарности. Автор благодарен С.Ю. Доброхотову за постановку задачи и дискуссии, а также В.Е. Назайкинскому за ценные замечания.

Список литературы

- [1] С.Ю. Доброхотов, С.Я. Секерж-Зенькович, “Один класс точных алгебраических локализованных решений многомерного волнового уравнения”, *Матем. заметки*, **88:6** (2010), 942–945.
- [2] Л.Н. Сретенский, *Теория волновых движений жидкости*, Наука, М., 1977; С.Ф. Доценко, Б.Ю. Сергиевский, Л.В. Черкасов, “Пространственные волны цунами, вызванные знакопеременным смещением поверхности океана”, *Исследования цунами*, Вып. 1, Междувед. геофиз. ком., М., 1986, 7–14; S. Wang, B. Le Mehaute, C.-C. Lu, “Effect of dispersion on impulsive waves”, *Mar. Geophys. Res.*, **9:2** (1987), 95–111; S. Ya. Sekerzh-Zenkovich, “Simple asymptotic solution of the Cauchy–Poisson problem for head waves”, *Russ. J. Math. Phys.*, **16:2** (2009), 315–322.
- [3] M. I. Katsnelson, *Graphene: Carbon in Two Dimensions*, Cambridge Univ. Press, New York, 2012.
- [4] А.И. Аллилуева, С.Ю. Доброхотов, С.А. Сергеев, А.И. Шафаревич, “Новые представления канонического оператора Маслова и локализованные асимптотические решения строго гиперболических систем”, *Докл. РАН*, **464:3** (2015), 261–266.
- [5] С.Ю. Доброхотов, П.Н. Жевандров, В.П. Маслов, А.И. Шафаревич, “Асимптотические быстроубывающие решения линейных строго гиперболических систем с переменными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **49:4** (1991), 31–46.
- [6] С.А. Сергеев, А.А. Толченников, “Об ‘операторах рождения’ в задаче о локализованных решениях линеаризованных уравнений мелкой воды с регулярными и особыми характеристиками”, *Матем. заметки*, **100:6** (2016), 911–922.
- [7] S. Yu. Dobrokhotov, R. V. Nekrasov, B. Tirozzi, “Asymptotic solutions of the linear shallow-water equations with localized initial data”, *J. Eng. Math.*, **69:2–3** (2011), 225–242.
- [8] S. Yu. Dobrokhotov, A. I. Shafarevich, B. Tirozzi, “Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **15:2** (2008), 192–221.