Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Леви, Л. Мартина, П. Винтерниц, Конформно-инвариантное эллиптическое уравнение Лиувилля и его дискретизация, сохраняющая симметрию, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 3, 419–433

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9523>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:33:07

© 2018 г. Д. Леви^{*†}, Л. Мартина^{‡§}, П. Винтерниц^{¶||}

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ И ЕГО ДИСКРЕТИЗАЦИЯ, СОХРАНЯЮЩАЯ СИММЕТРИЮ

Алгебра симметрий вещественного эллиптического уравнения Лиувилля является бесконечномерной алгеброй с простой алгеброй Ли $\mathfrak{o}(3,1)$ в качестве максимальной подалгебры. Полная алгебра порождает конформную группу евклидовой плоскости E_2 . Наличие такой бесконечномерной алгебры отличает эллиптическое уравнение Лиувилля от гиперболического, алгебра симметрий которого представляет собой прямую сумму двух алгебр Вирасоро. С использованием ранее предложенной процедуры дискретизации представлена разностная схема, инвариантная относительно группы $O(3,1)$ и в непрерывном пределе переходящая в эллиптическое уравнение Лиувилля. Дискретная решетка является решением $O(3,1)$ -инвариантного уравнения и сама инвариантна относительно некоторой подгруппы группы $O(3,1)$, а именно группы $O(2)$ поворотов евклидовой плоскости.

Ключевые слова: группы Ли, дифференциальные уравнения в частных производных, процедуры дискретизации.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9523>

Д. Леви и Л. Мартина частично поддерживаются Italian Ministry of Education and Research (проект 2010 PRIN “Continuous and discrete nonlinear integrable evolutions: from water waves to symplectic maps”) и INFN (проект IS-CSN4 “Mathematical Methods of Nonlinear Physics”). Работа П. Винтерница частично поддержана исследовательским грантом NSERC.

^{*}Dipartimento di Matematica e Fisica, Università degli Studi Roma Tre, Roma, Italy

[†]Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma Tre, Roma, Italy.

E-mail: decio.levi@roma3.infn.it

[‡]Dipartimento di Matematica e Fisica, Università del Salento, Lecce, Italy

[§]Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Lecce, Lecce, Italy.

E-mail: Luigi.Martina@le.infn.it

[¶]Département de Mathématiques et de Statistique, Université de Montréal, Montréal (QC), Canada

^{||}Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, Montréal (QC), Canada.
E-mail: wintern@crm.umontreal.ca

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Лиувилля имеет вид

$$z_{\alpha\beta} = e^z, \quad (1)$$

где z , α и β – комплексные переменные. Две его неэквивалентные вещественные формы получаются, если z , α и β вещественны (гиперболическое уравнение Лиувилля), или если β – величина, комплексно сопряженная к α (эллиптическое уравнение Лиувилля). Эти уравнения играют важную роль и встречаются во многих задачах физики. В частности, уравнение Лиувилля определяет конформный фактор метрики на поверхности постоянной гауссовой кривизны [1], поэтому это уравнение и его квантованная версия имеют первостепенное значение в теории гравитации [2]–[10] и в некоторых моделях калибровочной теории поля [11], [12]. Его общее решение известно уже давно и подробно обсуждалось в работах [13]–[15].

В двух недавних статьях [16], [17] мы рассматривали вещественное гиперболическое уравнение Лиувилля в контексте программы дискретизации обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), сохраняя при этом его точечные симметрии Ли [18], [19]. В частности, мы показали, что в дискретном случае невозможно сохранить всю бесконечномерную группу симметрий как точечные симметрии. Алгебра симметрий Ли в случае гиперболического уравнения Лиувилля является прямой суммой $vir_x \oplus vir_y$ двух алгебр Вирасоро. Предложенная нами дискретизация сохраняет максимальную конечномерную подалгебру, а именно алгебру $sl_x(2, \mathbb{R}) \oplus sl_y(2, \mathbb{R})$. Альтернативный нашему подход из работ [20], [21] позволяет сохранить всю группу, заданную как прямое произведение $VIR(x) \otimes VIR(y)$, но как обобщенные симметрии, а не точечные. Схожая картина возникает, когда мы рассматриваем сохраняющую симметрию дискретизацию эллиптического уравнения Лиувилля. Как мы увидим далее, можно сохранить как точечные симметрии только максимальную конечномерную подалгебру, а не всю алгебру. При этом в эллиптическом случае появляются новые особенности. Алгебра симметрий в непрерывном случае простая, а не полупростая. При дискретизации решетка инвариантна относительно вращений, а не трансляций, как в гиперболическом случае.

Дадим краткий обзор той роли, которую бесконечномерные алгебры Ли точечных симметрий играют в исследованиях различных типов дифференциальных уравнений, и объясним, почему в процедурах дискретизации мы хотели бы, насколько возможно, сохранить эти симметрии. Существование бесконечномерной группы симметрий очень часто указывает на некоторую интегрируемость. Под этим мы подразумеваем возможность получения всех решений или больших классов решений по существу линейными методами.

Среди ОДУ единственными уравнениями, допускающими бесконечномерную алгебру симметрий, являются уравнения первого порядка. Нахождение любой одномерной подалгебры этой бесконечномерной алгебры Ли эквивалентно нахождению интегрирующего множителя. В работе [22] было показано, что дискретизация ОДУ первого порядка, сохраняющая одномерную алгебру симметрий, является точной. Полученная инвариантная двухточечная разностная схема имеет ровно те же решения, что и исходное ОДУ.

Для нелинейных ДУЧП существование бесконечномерной абелевой группы Ли точечных симметрий определенного типа является показателем линейаризуемости задачи с помощью обратимого преобразования переменных [23], [24]. Существование абелевой алгебры Ли является всего лишь отражением принципа линейной суперпозиции для линейных уравнений.

Наконец, все нелинейные ДУЧП с тремя независимыми переменными, разрешимые методом обратной задачи рассеяния, имеют бесконечномерные алгебры симметрий со структурой алгебр Каца–Мули–Вирасоро [25]–[31].

Классические исследования ДУЧП с бесконечномерными алгебрами Ли точечных симметрий и их классификацию можно найти в работах [32]–[34]. Интересным комментарием, сделанным Ли в [32], является утверждение о том, что интегрирование любого ДУЧП второго порядка с двумя независимыми переменными, имеющего бесконечномерную группу симметрий, сводится к интегрированию трех ОДУ. Это связано с интегрируемостью Дарбу [24].

Линейные или линейаризуемые ОДУ первого порядка с запаздывающим аргументом (ОДУЗА) обычно имеют бесконечномерные алгебры симметрий. Об их дискретизации см. работу [35].

Дискретизация ДУЧП и ОДУЗА, сохраняющая их группы Ли точечных симметрий, началась в работах [16], [17], [35]–[40], и настоящая статья является неотъемлемой частью данного исследования. Как уже говорилось в предыдущих статьях, эта программа имеет несколько аспектов. Наиболее фундаментальным является то, что мир может быть по своей природе дискретным (например, из-за длины Планка). Тогда дифференциальные уравнения будут аппроксимациями разностных. В квантовой теории поля дискретизации составляют часть процедуры перенормировки. Сохранение конформных, лоренцевых или галлилеевых симметрий является важным требованием [41]. Некоторые физические объекты и явления дискретны, даже если пространство-время непрерывно (кристаллы, молекулярные или атомарные цепочки, спиновые цепочки и т. д.). Наконец, дискретизации являются неотъемлемой частью численных алгоритмов решения ДУЧП, ОДУ или ОДУЗА.

Последний аспект заводит нашу программу в область геометрического интегрирования [42]–[45]. Это попытка сохранить при дискретизации некоторые важные особенности физической задачи, каковыми могут быть, например, гамильтонова или симплектическая структура, некоторые или все интегралы движения, известное асимптотическое поведение и т. д. В нашем случае мы хотим сохранить, насколько это возможно, всю группу Ли точечных симметрий, а если это невозможно, то мы сохраняем по крайней мере некоторую ее подгруппу. Мотивацией для этого является то, что группы симметрий ДУЧП, ОДУ, ОДУЗА или систем таких уравнений содержат в себе большой объем информации о множестве их решений. Кроме того, симметрии имеют фундаментальное значение в физике, и было обидно утратить их при переходе к численным расчетам. Большинство симметрий теряются, как только постулируется какая-либо конкретная фиксированная решетка (например, декартова решетка не может быть инвариантной относительно вращений, а эта инвариантность – часто встречающаяся симметрия физической системы). Данной проблемы можно избежать, как мы покажем ниже, включив решеточные переменные в качестве новых динамических полей, которые определяются непрерывной алгеброй симметрий.

Предлагаемый подход заключается в замене ДУЧП

$$\mathcal{E}(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (2)$$

набором точечных соотношений

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_a(x_{m+i, n+j}, y_{m+i, n+j}, u(x_{m+i, n+j}, y_{m+i, n+j})) &= 0, \\ 1 \leq a \leq N, \quad 0 \leq m \leq N_1, \quad 0 \leq n \leq N_2, \quad 0 \leq i \leq k_1, \quad 0 \leq j \leq k_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где m и n задают шаблон, а i и j – положение внутри шаблона. Числа N (в нашем случае $N = 3$), N_1 , N_2 , k_1 и k_2 зависят от количества частных производных, представленных в уравнении (2). В непрерывном пределе должно быть выполнено следующее условие: некоторые комбинации соотношений $\mathcal{E}_a = 0$ (3) должны переходить в ДУЧП (2), а остальные – в тождества (типа $0 = 0$).

Мы называем разностную схему (3) инвариантной, если она полностью построена из инвариантов группы Ли G точечных симметрий ДУЧП (2) или некоторой конкретной подгруппы $G_0 \subset G$. Таким образом, и (приближенное) решение ДУЧП (2), и решетка возникают как решения системы (3).

Чтобы избежать возможной путаницы, мы сразу уточняем, что инвариантность уравнений относительно некоторой группы G не подразумевает инвариантность решений. Решения также удовлетворяют граничным или начальным условиям (или некоторой их комбинации), нарушающим симметрию. Что является инвариантным, так это множество всех решений. Чтобы провести численные расчеты, нужно полностью задать решетку. В частности, мы выбираем решетку как решение инвариантной схемы (3). После такого выбора (совместного с (2)) решетка больше не является инвариантной. Аналогично, как только мы налагаем граничные условия и начинаем интегрирование, мы получаем неинвариантное решение (преобразующееся в другое решение уравнений (3) под действием группы Ли).

Метод точечных симметрий Ли, вкратце описанный выше, уже доказал свою полезность, например, при выполнении численных расчетов. Для ОДУ инвариантные методы дают точные решения в окрестности сингулярности и продолжают за пределы этой окрестности, где обычные методы Рунге–Кутты терпят неудачу [46]–[53]. Для ДУЧП мы отсылаем читателя к нашим предыдущим статьям [16], [17] по гиперболическому уравнению Лиувилля. Мы сравнили при одинаковых условиях четыре различных численных метода: стандартный метод, который можно применять практически к любому ДУЧП, метод, сохраняющий всю бесконечномерную группу симметрий как обобщенные симметрии [20], [21], наш метод, сохраняющий максимальную конечномерную подгруппу как точечные симметрии [16], [17], и метод, сохраняющий возможность линеаризации [54]. В сравнении последние два метода примерно на два порядка лучше, чем первые два. О других численных приложениях к ДУЧП схем, сохраняющих симметрии, и сравнении со стандартными методами см., например, работу [55].

Структура настоящей статьи такова. В разделе 2 мы выписываем комплексное алгебраическое уравнение Лиувилля и алгебру Ли его точечных симметрий как прямую сумму двух комплексных алгебр Вирасоро. Затем мы ограничиваемся вещественным эллиптическим уравнением Лиувилля и переходим к полярным координатам. Полученная вещественная алгебра симметрий является бесконечномерной

простой алгеброй Ли, а ее максимальная конечномерная подалгебра определяется как $O(3, 1)$. В разделе 3 мы вводим девятиточечный шаблон, помеченный точкой отсчета (m, n) и включающий в себя точки $(m + i, n + j)$, $0 \leq i \leq 2$, $0 \leq j \leq 2$. На такой решетке мы строим в общей сложности двадцать четыре комплексных инварианта, каждый из которых зависит только от четырех точек. Используя эти $SL(2, \mathbb{C}) \otimes SL(2, \mathbb{C})$ -инварианты, мы дискретизируем комплексное уравнение Лиувилля. Затем мы надлежащим образом ограничиваем свой анализ вещественным эллиптическим уравнением, вещественными переменными и вещественными $O(3, 1)$ -инвариантами. Мы выражаем эти вещественные инварианты в полярных координатах и строим решетку полярного типа, на которой записываем дискретное эллиптическое уравнение Лиувилля, имеющее в качестве своего непрерывного предела вещественное эллиптическое уравнение Лиувилля (12) в полярных координатах. Раздел 4 посвящен кратким выводам и обзору будущих исследований.

2. КОМПЛЕКСНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ, АЛГЕБРА ЕГО ТОЧЕЧНЫХ СИММЕТРИЙ И ИХ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФОРМЫ

Алгебраическая форма комплексного уравнения Лиувилля (1) такова:

$$u u_{\alpha\beta} - u_{\alpha} u_{\beta} = u^3, \quad u = e^z, \quad (4)$$

где z и u — (комплекснозначные) функции двух комплексных переменных α и β . Алгебра точечных симметрий этого уравнения известна (или, по крайней мере, ее можно легко вывести из классических результатов для ДУЧП с бесконечномерными группами симметрий [32]–[34] и из более поздних результатов для вещественного уравнения Лиувилля [56], [57]). Она является прямой суммой двух алгебр Ли, каждая из которых изоморфна алгебре диффеоморфизмов комплексной прямой (также известной как комплексная алгебра Вирасоро). Для алгебраического уравнения Лиувилля (4) алгебра симметрий реализуется как алгебра голоморфных векторных полей

$$A(f(\alpha)) = f(\alpha)\partial_{\alpha} - f'(\alpha)u\partial_u, \quad B(g(\beta)) = g(\beta)\partial_{\beta} - g'(\beta)u\partial_u. \quad (5)$$

Здесь $f(\alpha)$ и $g(\beta)$ — произвольные голоморфные функции от α и β соответственно (но не от комплексно-сопряженных $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$).

Наиболее важными математическими свойствами уравнения Лиувилля (1) (и (4)) являются следующие: группа Ли его точечных симметрий бесконечномерна, уравнение (1) можно линеаризовать, преобразуя независимые переменные как

$$z = \ln \left(2 \frac{\phi_{\alpha}\phi_{\beta}}{\phi^2} \right), \quad \phi_{\alpha\beta} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, каждое решение $\phi = \phi_1(\alpha) + \phi_2(\beta)$ комплексного уравнения Лиувилля (6), где ϕ_1 и ϕ_2 — произвольные функции, дает решение уравнения Лиувилля (1).

Вещественное гиперболическое уравнение Лиувилля и алгебра его симметрий получаются в точности в виде (1)–(6), если положить $\alpha = x$, $\beta = y$ и считать, что переменные $\{x, y, z\}$ вещественные.

Вещественное эллиптическое уравнение Лиувилля получается, если взять

$$\alpha = \frac{1}{2}(x + iy), \quad \beta = \bar{\alpha} = \frac{1}{2}(x - iy), \quad \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3, \quad (7)$$

при этом из (1) имеем

$$z_{xx} + z_{yy} = e^z, \quad (8)$$

а из (4) получаем

$$u(u_{xx} + u_{yy}) - (u_x^2 + u_y^2) = u^3, \quad u = e^z. \quad (9)$$

Алгебру Ли точечных симметрий этого уравнения можно записать как

$$\hat{X} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y - (\xi_x + \eta_y)u\partial_u, \quad (10)$$

где функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ удовлетворяют уравнениям [56], [57]

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0, \quad \eta_x = -\xi_y, \quad \eta_y = \xi_x. \quad (11)$$

Таким образом, ξ и η – две гармонически сопряженные вещественные гладкие функции.

Чтобы получить алгебру Ли в явном виде, перейдем к полярным координатам, положив $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, и перепишем уравнение (9) как

$$u \left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \right) - \left(u_r^2 + \frac{1}{r^2}u_\theta^2 \right) = u^3. \quad (12)$$

При этом уравнения (11) преобразуются к системе

$$\begin{aligned} \xi_{rr} + \frac{1}{r}\xi_r + \frac{1}{r^2}\xi_{\theta\theta} &= 0, & \eta_r &= -\frac{1}{r}\xi_\theta, \\ \eta_{rr} + \frac{1}{r}\eta_r + \frac{1}{r^2}\eta_{\theta\theta} &= 0, & \eta_\theta &= r\xi_r. \end{aligned} \quad (13)$$

Разделяя переменные, получаем

$$\begin{aligned} \xi(r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} r^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta), \\ \eta(r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} r^m (a_m \sin m\theta - b_m \cos m\theta). \end{aligned} \quad (14)$$

Можно выбрать базис алгебры точечных симметрий (10) в виде

$$\begin{aligned} A_m &= r^m \cos(m-1)\theta \partial_r + r^{m-1} \sin(m-1)\theta \partial_\theta - 2mr^{m-1}u \cos(m-1)\theta \partial_u, \\ B_m &= r^m \sin(m-1)\theta \partial_r - r^{m-1} \cos(m-1)\theta \partial_\theta - 2mr^{m-1}u \sin(m-1)\theta \partial_u, \end{aligned} \quad (15)$$

где $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Следует подчеркнуть, что, в отличие от гиперболического уравнения Лиувилля, эта бесконечномерная алгебра не является прямой суммой двух алгебр.

В частности, если ограничиться случаем $m = 0, 1, 2$, мы получим максимальную конечномерную подалгебру

$$\begin{aligned} A_0 = P_1 &= \cos \theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta, & B_0 = P_2 &= \sin \theta \partial_r + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta, \\ B_1 = L_3 &= \partial_\theta, & A_1 = D &= r \partial_r - 2u \partial_u, \\ A_2 = C_1 &= r(r \cos \theta \partial_r + \sin \theta \partial_\theta - 4u \cos \theta \partial_u), \\ B_2 = C_2 &= r(r \sin \theta \partial_r - \cos \theta \partial_\theta - 4u \sin \theta \partial_u). \end{aligned} \quad (16)$$

Это (простая) алгебра $\mathfrak{o}(3, 1)$, реализованная как алгебра Ли конформной группы евклидовой плоскости (вещественная форма полупростой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{o}(4, \mathbb{C}) \equiv \mathfrak{o}(3, \mathbb{C}) \oplus \mathfrak{o}(3, \mathbb{C})$). Вспомогательные обозначения, введенные в (16), имеют мнемонический смысл: P_i отвечает трансляциям, L_3 – вращениям, D – растяжениям, а C_i – специальные конформные генераторы.

В более общем смысле мы получаем простую вещественную форму прямой суммы двух комплексных алгебр Вирасоро с коммутативными соотношениями

$$\begin{aligned} [A_m, A_\ell] &= (\ell - m)A_{m+\ell-1}, & [B_m, B_\ell] &= (m - \ell)A_{m+\ell-1}, \\ [A_m, B_\ell] &= (\ell - m)B_{m+\ell-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

3. ИНВАРИАНТЫ В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИНВАРИАНТНОЕ ДИСКРЕТНОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ

Дискретизация гиперболического уравнения Лиувилля, сохраняющая все его симметрии, а также линеаризуемость или интегрируемость, была предметом изучения в предыдущих работах [4], [16], [17], [20], [21], [54]. В частности, в статьях [16], [17] мы построили дискретное гиперболическое уравнение Лиувилля, инвариантное относительно максимальной конечной подгруппы $SL_x(2, \mathbb{R}) \otimes SL_y(2, \mathbb{R})$. Кроме того, мы показали, что, ограничиваясь точечными преобразованиями, невозможно расширить инвариантность на полную группу $VIR(x) \otimes VIR(y)$, если мы хотим получить в непрерывном пределе гиперболическое уравнение Лиувилля. С другой стороны, легко дискретизировать линейное волновое уравнение полностью инвариантным образом (с бесконечномерной группой симметрии [40]). В работе [16] мы рассмотрели четырехточечный шаблон, а в [17] – девятиточечный и пришли к тем же выводам: нельзя построить $VIR(x) \otimes VIR(y)$ -инвариант инвариантной схемы дискретизации для гиперболического уравнения Лиувилля из двадцати четырех $SL_x(2, \mathbb{R}) \otimes SL_y(2, \mathbb{R})$ -инвариантов, каждый из которых задан на девятиточечной решетке. Кроме того, не удастся избежать неустойчивостей в окрестности нулевых линий решений.

Чтобы дискретизовать эллиптическое уравнение Лиувилля, будем действовать так же, как в непрерывном случае. Сначала комплексифицируем гиперболический случай, а затем ограничим рассмотрение вещественным эллиптическим случаем. Нам потребуется девятиточечная решетка, изображенная на рис. 1, поскольку мы хотим иметь возможность независимо дискретизовать все частные производные второго порядка, используя только инварианты группы $O(3, 1)$.

Рис. 1. Шаблон девятиточечной схемы дискретизации.

Мы начнем с четырех точек, а именно с прямоугольника I на рис. 1 с вершинами в точках (m, n) , $(m+1, n)$, $(m, n+1)$, $(m+1, n+1)$. На этом четырехточечном шаблоне имеем шесть независимых $SL_x(2, \mathbb{R}) \otimes SL_y(2, \mathbb{R})$ -инвариантов [16]:

$$\begin{aligned}\xi^I &= \frac{(x_{m,n+1} - x_{m,n})(x_{m+1,n+1} - x_{m+1,n})}{(x_{m,n} - x_{m+1,n})(x_{m,n+1} - x_{m+1,n+1})}, \\ \eta^I &= \frac{(y_{m+1,n} - y_{m,n})(y_{m+1,n+1} - y_{m,n+1})}{(y_{m,n} - y_{m,n+1})(y_{m+1,n} - y_{m+1,n+1})},\end{aligned}\quad (18)$$

и

$$\begin{aligned}H_1^I &= u_{m,n} u_{m+1,n+1} (x_{m,n+1} - x_{m,n})^2 (y_{m,n+1} - y_{m,n})^2, \\ H_2^I &= u_{m+1,n} u_{m+1,n+1} (x_{m+1,n+1} - x_{m+1,n})^2 (y_{m+1,n+1} - y_{m+1,n})^2, \\ H_3^I &= \frac{u_{m+1,n}}{u_{m,n}} \frac{(x_{m+1,n} - x_{m,n+1})^2 (y_{m+1,n} - y_{m,n+1})^2}{(x_{m,n+1} - x_{m,n})^2 (y_{m,n+1} - y_{m,n})^2}, \\ H_4^I &= \frac{u_{m+1,n+1}}{u_{m,n}} \frac{(x_{m+1,n+1} - x_{m+1,n})^2 (y_{m+1,n+1} - y_{m+1,n})^2}{(x_{m+1,n} - x_{m,n})^2 (y_{m+1,n} - y_{m,n})^2}.\end{aligned}\quad (19)$$

Здесь верхний индекс I показывает, что мы находимся в прямоугольнике I шаблона. Теперь во всех формулах заменим $(x_{m,n}, y_{m,n})$ на две комплексные переменные $(\alpha_{m,n}, \beta_{m,n})$ и затем ограничимся случаем

$$\alpha_{m,n} = x_{m,n} + iy_{m,n}, \quad \beta_{m,n} = \bar{\alpha}_{m,n} = x_{m,n} - iy_{m,n}, \quad (x_{m,n}, y_{m,n}) \in \mathbb{R}^2.$$

Начнем с пространственных инвариантов ξ и η :

$$\begin{aligned}\hat{\xi}^I &= \frac{[x_{m,n+1} - x_{m,n} + i(y_{m,n+1} - y_{m,n})]}{[x_{m,n} - x_{m+1,n} + i(y_{m,n} - y_{m+1,n})]} \times \\ &\times \frac{[x_{m+1,n+1} - x_{m+1,n} + i(y_{m+1,n+1} - y_{m+1,n})]}{[x_{m,n+1} - x_{m+1,n+1} + i(y_{m,n+1} - y_{m+1,n+1})]}, \quad \hat{\eta}^I = \frac{1}{\hat{\xi}^I}.\end{aligned}\quad (20)$$

Видно, что $\hat{\xi}^I$ и $\hat{\eta}^I$ не являются независимыми. Ограничившись вещественным эллиптическим случаем, используем $\operatorname{Re} \hat{\xi}^I$ и $\operatorname{Im} \hat{\xi}^I$ как новые инварианты. Перепишем $\hat{\xi}^I$ в полярных координатах, положив

$$x_{m,n} = r_{m,n} \cos \theta_{m,n}, \quad y_{m,n} = r_{m,n} \sin \theta_{m,n}. \quad (21)$$

В результате получаем

$$\hat{\xi}^I \equiv \frac{\operatorname{Re} N}{\Delta} + i \frac{\operatorname{Im} N}{\Delta}, \quad (22)$$

где

$$\Delta = [r_{m,n}^2 + r_{m+1,n}^2 - 2r_{m,n}r_{m+1,n} \cos(\theta_{m,n} - \theta_{m+1,n})] \times \\ \times [r_{m,n+1}^2 + r_{m+1,n+1}^2 - 2r_{m,n+1}r_{m+1,n+1} \cos(\theta_{m,n+1} - \theta_{m+1,n+1})],$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} N = & (r_{m,n}^2 r_{m+1,n+1}^2 + r_{m,n+1}^2 r_{m+1,n}^2) + \\ & + 2(r_{m,n}r_{m+1,n+1}r_{m,n+1}r_{m+1,n} \cos(\theta_{m,n} + \theta_{m+1,n+1} - \theta_{m+1,n} - \theta_{m,n+1}) + \\ & + (r_{m,n+1}^2 + r_{m,n+1}^2)r_{m,n}r_{m+1,n+1} \cos(\theta_{m+1,n+1} - \theta_{m,n}) - \\ & - (r_{m,n+1}^2 + r_{m,n}^2)r_{m+1,n}r_{m+1,n+1} \cos(\theta_{m+1,n+1} - \theta_{m+1,n}) - \\ & - (r_{m+1,n}^2 + r_{m+1,n+1}^2)r_{m,n}r_{m,n+1} \cos(\theta_{m,n+1} - \theta_{m,n}) + \\ & + (r_{m,n}^2 + r_{m+1,n+1}^2)r_{m,n+1}r_{m+1,n} \cos(\theta_{m+1,n} - \theta_{m,n+1}) - \\ & - (r_{m,n+1}^2 + r_{m+1,n+1}^2)r_{m,n}r_{m+1,n} \cos(\theta_{m+1,n} - \theta_{m,n}) - \\ & - (r_{m+1,n}^2 + r_{m,n}^2)r_{m,n+1}r_{m+1,n+1} \cos(\theta_{m+1,n+1} - \theta_{m,n+1}), \\ \operatorname{Im} N = & (r_{m,n+1}^2 - r_{m+1,n}^2)r_{m,n}r_{m+1,n+1} \sin(\theta_{m+1,n+1} - \theta_{m,n}) + \\ & + (r_{m+1,n}^2 - r_{m+1,n+1}^2)r_{m,n}r_{m,n+1} \sin(\theta_{m,n+1} - \theta_{m,n}) + \\ & + (r_{m+1,n+1}^2 - r_{m,n+1}^2)r_{m,n}r_{m+1,n} \sin(\theta_{m+1,n} - \theta_{m,n}) + \\ & + (r_{m,n}^2 - r_{m,n+1}^2)r_{m+1,n}r_{m+1,n+1} \sin(\theta_{m+1,n+1} - \theta_{m+1,n}) + \\ & + (r_{m+1,n}^2 - r_{m,n}^2)r_{m,n+1}r_{m+1,n+1} \sin(\theta_{m+1,n+1} - \theta_{m,n+1}) + \\ & + (r_{m,n}^2 - r_{m+1,n+1}^2)r_{m,n+1}r_{m+1,n} \sin(\theta_{m+1,n} - \theta_{m,n+1}). \end{aligned}$$

Новые вещественные инварианты

$$\sigma = -\frac{\operatorname{Re} N}{\Delta}, \quad \tau = \frac{\operatorname{Im} N}{\Delta} \quad (23)$$

позволяют ввести инвариантные уравнения на решетке типа уравнения (3), если положить

$$\sigma = A, \quad \tau = B, \quad (24)$$

где A и B – вещественные постоянные (не зависящие от m или n).

В гиперболическом случае [16], [17] мы упростили задачу, потребовав, чтобы каждая из переменных x и y зависела только от одного дискретного индекса: $x_{m,n} \equiv x_m$, $y_{m,n} \equiv y_n$. Тогда $\xi^I = \eta^I = 0$, и мы получаем прямоугольную решетку в декартовых координатах. В рассматриваемом здесь эллиптическом случае мы наложим аналогичное требование, но в полярных координатах, а именно

$$r_{m,n} = r_m, \quad \theta_{m,n} = \theta_n. \quad (25)$$

Для инвариантного уравнения на решетке (24) это влечет, что

$$\sigma \equiv 4 \frac{r_m r_{m+1}}{(r_m - r_{m+1})^2} \sin^2 \frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{2} = A, \quad \tau \equiv 0. \quad (26)$$

Решение этих уравнений определяет в полярных координатах класс специфических координатных решеток, которые задаются как

$$\begin{aligned} r_m &= r(s+1)^m, & \theta_n &= \theta_0 + \frac{2\pi}{N}n, \\ s &> -1, & n &= 0, 1, \dots, N-1, & N &\in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, угол 2π делится на N равных секторов, а шаг по радиусу экспоненциально возрастает (при $s > 0$) или убывает (при $-1 < s < 0$), когда $m \rightarrow \infty$. Как упоминалось во введении, уравнения (типа (24)) инвариантны. Записанная в явном виде решетка (27), полученная как решение этих уравнений, не является $O(3,1)$ -инвариантной (поскольку мы наложили неинвариантное условие (25)). На решетке (27) уравнение (26) сводится к

$$A = 4 \frac{s+1}{s^2} \sin^2 \frac{\pi}{N} > 0. \quad (28)$$

В результате у нас остаются четыре свободных параметра: r , θ_0 , $s > -1$ и $N \in \mathbb{N}^*$.

Эллиптические инварианты (19) сводятся к

$$\begin{aligned} H_1^I &= 16r^4(s+1)^{4m} \sin^4 \left(\frac{\pi}{N} \right) u_{m,n} u_{m,n+1}, \\ H_2^I &= 16r^4(s+1)^{4m+4} \sin^4 \left(\frac{\pi}{N} \right) u_{m+1,n} u_{m+1,n+1}, \\ H_3^I &= \left[\frac{s^2 + 4(s+1) \sin^2(\pi/N)}{4 \sin^2(\pi/N)} \right]^2 \frac{u_{m+1,n}}{u_{m,n}}, \\ H_4^I &= \frac{16(s+1)^4}{s^4} \sin^4 \left(\frac{\pi}{N} \right) \frac{u_{m+1,n+1}}{u_{m,n}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Непрерывный предел отвечает предельным переходам

$$N \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow 0, \quad \frac{n}{N} \rightarrow \frac{\theta}{2\pi}, \quad sN = 2\pi. \quad (30)$$

Условие $sN = \kappa$, где κ – конечное число, вытекает из того, что величина A , заданная в (28), конечна. Как мы увидим ниже (см. соотношения (34)), чтобы получить корректный непрерывный предел дискретного уравнения, нужно выбрать $\kappa = 2\pi$.

Для записи дискретного уравнения с корректным непрерывным пределом введем более удобный набор инвариантов, в которых σ , τ взяты из (23). Они имеют вид

$$J_1^I = \frac{H_4^I}{\sigma^2} = (s+1)^2 \frac{u_{m+1,n+1}}{u_{m,n}}, \quad J_2^I = \frac{\sigma^2 H_2^I}{4H_1^I H_4^I} = (s+1)^2 \frac{u_{m+1,n}}{u_{m,n+1}}. \quad (31)$$

Далее, используя (27), имеем

$$u_{m+j,n+k} = u \left(r(s+1)^{m+j}, \frac{2\pi}{N}(n+k) \right), \quad 0 \leq j \leq 2, \quad 0 \leq k \leq 2. \quad (32)$$

Пусть

$$I_1 = -J_1^{\text{III}} + J_1^{\text{IV}} + J_2^{\text{II}} - J_2^{\text{IV}}, \quad I_2 = \sum_{i=1}^2 a_i \sqrt{H_i^{\text{I}}} + \sum_{i=3}^4 a_i \sqrt{H_1^{\text{I}} H_i^{\text{I}}}, \quad (33)$$

где $J_i^{\text{II}}, J_i^{\text{III}}, J_i^{\text{IV}}, i = 1, 2$, получаются сдвигом инвариантов J_1^{I} и J_2^{I} в соответствующую область девятиточной решетки. Разложение $u_{m+j,n+k}$ по s и $2\pi/N$ в точке $u_{m,n} \equiv u(r, \theta)$, которое сохраняет производные вплоть до второго порядка, приводит к следующим разложениям инвариантов I_1 и I_2 по s и $1/N$:

$$\begin{aligned} I_1 = \frac{1}{u^2} \left\{ s^2 [r^2 (u u_{rr} - u_r^2) + r u u_r] + \left(\frac{2\pi}{N} \right)^2 [u u_{\theta\theta} - u_\theta^2] \right\} + \\ + \mathcal{O} \left(s^3 \left(\frac{2\pi}{N} \right)^3, s^2 \frac{2\pi}{N}, s \left(\frac{2\pi}{N} \right)^2 \right), \\ I_2 = u r^2 \left\{ \left(\frac{2\pi}{N} \right)^2 [a_1 + a_2 + a_3] + s^2 a_3 + \frac{(2\pi/N)^4}{s^2} a_4 \right\} + \\ + \mathcal{O} \left(s^3 \left(\frac{2\pi}{N} \right)^3, s^2 \frac{2\pi}{N}, s \left(\frac{2\pi}{N} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Если мы выберем $sN = 2\pi$, как в (30), то член низшего порядка в разложении инварианта I_1 становится равным величине $(2\pi/Nu)^2$, умноженной на левую часть уравнения (12). Член низшего порядка в разложении инварианта I_2 равен величине $(2\pi/Nu)^2$, умноженной на правую часть уравнения (12), если положить $a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 = 1$.

Следовательно, $O(3, 1)$ -инвариантная схема на решетке (27) получается, когда мы наложим условие

$$I_1 = I_2. \quad (35)$$

Для простоты возьмем $a_3 = a_4 = 0$, т. е. $a_1 + a_2 = 1$, тогда данное условие принимает вид

$$\begin{aligned} -4r^2(s+1)^{2m} \sin^2 \frac{s}{2} \cdot [a_1 \sqrt{u_{m,n} u_{m,n+1}} + (1-a_1)(s+1)^2 \sqrt{u_{m+1,n} u_{m+1,n+1}}] + \\ + (s+1)^2 \left[-\frac{u_{m+1,n+2}}{u_{m,n+1}} + \frac{u_{m+2,n+2}}{u_{m+1,n+1}} + \frac{u_{m+2,n}}{u_{m+1,n+1}} - \frac{u_{m+2,n+1}}{u_{m+1,n+2}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Мы получили дискретное эллиптическое уравнение Лиувилля, инвариантное относительно группы $O(3, 1)$, а также формулу (27) для решеточных переменных r_m, θ_n . Эти результаты можно использовать для расчёта $u_{m+2,n+2}$, если $u_{m+j,n+k}$ известно во всех других точках девятиточного шаблона (на самом деле значение $u_{m,n+2}$ не используется). Непрерывный предел в низшем порядке (т. е. в порядке s^2) записывается как

$$\frac{(r(r u_{r,r} + u_r) + u_{\theta,\theta})u - r^2 u_r^2 - u_\theta^2}{u^2} = r^2 u + \mathcal{O}(s). \quad (37)$$

Член $\mathcal{O}(s)$ играет очень важную роль, поскольку зависит от $u(r, \theta)$ и ее производных, но коэффициенты явным образом зависят от дискретной решеточной метки m . Таким образом, возникают секулярные члены, и поэтому указанный выше предел не является равномерным.

Стоит отметить, что, сдвинув инварианты (18), (19) в прямоугольники II, III и IV на рис. 1, мы должны получить полный набор из двадцати четырех функционально независимых $O(3, 1)$ -инвариантов. Однако мы не можем построить из них разностную схему, инвариантную относительно всей бесконечномерной конформной группы плоскости E_2 .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом представленной статьи является инвариантное дискретное уравнение Лиувилля (36) на решетке (27). Как уравнение, так и решетка являются решениями разностной схемы $I_1 = I_2$, $\sigma = A$, $\tau = 0$, где I_1 , I_2 , Σ и τ определены в (33) и (23). Эта схема инвариантна относительно группы $O(3, 1)$ – максимальной конечномерной подгруппы бесконечномерной конформной группы евклидовой плоскости. Оказывается, чтобы воспроизвести две производные второго порядка, требуется девятиточечная решетка. Это означает, что, как указано в работе [17] для гиперболического уравнения Лиувилля, сложнее наложить граничные условия. Кроме того, непрерывный предел показывает наличие секулярных членов, которые могут привести к неустойчивости численных результатов.

Численные расчеты решений гиперболического уравнения Лиувилля представлены в работах [16] и [17], выше мы привели некоторые выводы из этих работ. Для эллиптического уравнения Лиувилля ситуация отличается: единственная дискретизация, которую мы можем сравнить со случаем гиперболического уравнения, – это стандартная или нестандартная разностные схемы [58], [59]. Насколько нам известно, не существует никакой дискретизации, которая сохраняет бесконечномерную группу точечных симметрий как обобщенные симметрии или которая сохраняет линейную независимость. Кроме того, нельзя избежать неустойчивостей в окрестности нулевых линий решений, поскольку дискретизация должна строиться на восьми точках.

Наиболее мощные приложения теории групп Ли – это приложения к ДУЧП, особенно когда группы бесконечномерны. Было бы наиболее желательным исследовать все возможные обобщения представленного подхода к многомерным дискретным уравнениям; возможно, полезным окажется формализм, разработанный в работах [60]–[63].

Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1986.
- [2] A. A. Belavin, A. N. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry group in two-dimensional quantum field theory”, *Nucl. Phys. B*, **241**:2 (1984), 333–380.
- [3] A. M. Polyakov, “Quantum geometry of bosonic strings”, *Phys. Lett. B*, **103**:3 (1981), 207–210.
- [4] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, “Liouville model on the lattice”, *Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, Lecture Notes in Physics, **246**, eds. H. J. de Vega, N. Sánchez, Springer, Berlin, 1986, 166–179.
- [5] А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, РХД, Ижевск, 1999.
- [6] H. Dorn, H.-J. Otto, “On correlation functions for non-critical strings with $c \leq 1$ but $d \geq 1$ ”, *Phys. Lett. B*, **291**:1–2 (1992), 39–43.
- [7] A. B. Zamolodchikov, A. B. Zamolodchikov, “Conformal bootstrap in Liouville field theory”, *Nucl. Phys. B*, **477**:2 (1996), 577–605.

- [8] J. Teschner, “Liouville theory revisited”, *Class. Quantum Grav.*, **18**:23 (2001), R153–R222.
- [9] Yu. Nakayama, “Liouville field theory: a decade after the revolution”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:17–18 (2004), 2771–2930.
- [10] Р. Джакив, “Симметрия Вейля и теория Лиувилля”, *ТМФ*, **148**:1 (2006), 80–88.
- [11] A. Jaffe, C. H. Taubes, *Vortices and Monopoles. Structure of Static Gauge Theories*, Progress in Physics, **2**, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [12] D. Bartolucci, G. Tarantello, “Asymptotic blow-up analysis for singular Liouville type equations with applications”, *J. Differ. Equ.*, **262**:7 (2017), 3887–3931.
- [13] G. P. Jorijadze, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivanov, S. V. Talalov, “Liouville field theory: IST and Poisson bracket structure”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **19**:1 (1986), 121–140.
- [14] D. G. Crowdy, “General solutions to the 2D Liouville equation”, *Internat. J. Eng. Sci.*, **35**:2 (1997), 141–149.
- [15] A. V. Kiselev, “On the geometry of Liouville equation: symmetries, conservation laws and Bäcklund transformations”, *Acta Math. Appl.*, **72**:1–2 (2002), 33–40.
- [16] D. Levi, L. Martina, P. Winternitz, “Lie-point symmetries of the discrete Liouville equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:2 (2015), 025204, 18 pp.
- [17] D. Levi, L. Martina, P. Winternitz, “Structure preserving discretizations of the Liouville equation and their numerical tests”, *SIGMA*, **11** (2015), 080, 20 pp.
- [18] V. A. Dorodnitsyn, *Applications of Lie Groups to Difference Equations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.
- [19] D. Levi, P. Winternitz, “Continuous symmetries of difference equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:2 (2005), R1–R63.
- [20] R. Rebelo, F. Valiquette, “Invariant discretization of partial differential equations admitting infinite-dimensional symmetry groups”, *J. Differ. Equ. Appl.*, **21**:4 (2015), 285–318.
- [21] R. Rebelo, F. Valiquette, “Symmetry preserving numerical schemes for partial differential equations and their numerical tests”, *J. Differ. Equ. Appl.*, **19**:5 (2013), 737–757.
- [22] M. A. Rodriguez, P. Winternitz, “Lie symmetries and exact solutions of first-order difference schemes”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:23 (2004), 6129–6142.
- [23] G. W. Bluman, S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, **81**, Springer, New York, 1989.
- [24] G. Gubbiotti, D. Levi, C. Scimiterna, “On partial differential and difference equations with symmetries depending on arbitrary functions”, *Acta Polytech.*, **56**:3 (2016), 193–201.
- [25] B. Champagne, P. Winternitz, “On the infinite-dimensional symmetry group of the Davey–Stewartson equations”, *J. Math. Phys.*, **29**:1 (1988), 1–8.
- [26] D. David, N. Kamran, D. Levi, P. Winternitz, “Subalgebras of loop algebras and symmetries of the Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Phys. Rev. Lett.*, **55**:20 (1985), 2111–2113.
- [27] D. David, N. Kamran, D. Levi, P. Winternitz, “Symmetry reduction for the Kadomtsev–Petviashvili equation using a loop algebra”, *J. Math. Phys.*, **27**:5 (1986), 1225–1237.
- [28] D. David, D. Levi, P. Winternitz, “Equations invariant under the symmetry group of the Kadomtsev–Petviashvili equation”, *Phys. Lett. A*, **129**:3 (1988), 161–164.
- [29] L. Martina, P. Winternitz, “Analysis and applications of the symmetry group of the multi-dimensional three wave resonant interaction problem”, *Ann. Phys.*, **196**:2 (1989), 231–277.
- [30] A. Yu. Orlov, P. Winternitz, “Algebra of pseudodifferential operators and symmetries of equations in the Kadomtsev–Petviashvili hierarchy”, *J. Math. Phys.*, **38**:9 (1997), 4644–4674.
- [31] G. Paquin, P. Winternitz, “Group theoretical analysis of dispersive long wave equations in two space dimension”, *Phys. D*, **46**:1 (1990), 122–138.
- [32] S. Lie, “General theory of partial differential equations of an arbitrary order”, *Lie Group Analysis. Classical heritage*, ed. N. H. Ibragimov, ALGA Publ., Blekinge Institute of Technology, Karlskrona, Sweden, 2004, 1–64.

- [33] U. Amaldi, “Sulla classificazione dei gruppi continui di trasformazioni di contatto dello spazio”, *Mem. Soc. It. Scienze (ser. 3)*, **20**:3 (1918), 167–350.
- [34] P. Medolaghi, “Sulla teoria dei gruppi infiniti continui”, *Annali di Matematica*, **25**:1 (1887), 179–217.
- [35] V. A. Dorodnitsyn, R. Kozlov, S. V. Meleshko, P. Winternitz, “Lie group classification of first-order delay ordinary differential equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **51**:20 (2018), 205202, 19 pp.
- [36] M. I. Bakirova, V. A. Dorodnitsyn, R. V. Kozlov, “Symmetry-preserving discrete schemes for some heat transfer equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:23 (1997), 8139–8155.
- [37] A. Bihlo, X. Coiteux-Roy, P. Winternitz, “The Korteweg–de Vries equation and its symmetry-preserving discretization”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:5 (2015), 055201, 25 pp.
- [38] C. Budd, V. A. Dorodnitsyn, “Symmetry-adapted moving mesh schemes for the nonlinear Schrödinger equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**:48 (2001), 10387–10400.
- [39] V. A. Dorodnitsyn, R. Kozlov, “A heat transfer with a source: the complete set of invariant difference schemes”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **10**:1 (2003), 16–50.
- [40] D. Levi, S. Tremblay, P. Winternitz, “Lie symmetries of multidimensional difference equations”, *J. Phys. A: Gen. Math.*, **34**:44 (2001), 9507–9524.
- [41] D. Levi, P. Tempesta, P. Winternitz, “Lorentz and Galilei invariance on lattices”, *Phys. Rev. D*, **69**:10 (2004), 105011, 6 pp.
- [42] E. Hairer, G. Wanner, C. Lubich, *Geometric numerical integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer Series in Computational Mathematics, **31**, Springer, Berlin, 2006.
- [43] A. Iserles, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [44] J. E. Marsden, M. West, “Discrete mechanics and variational integrators”, *Acta Numer.*, **10** (2001), 357–514.
- [45] R. I. McLachlan, G. R. W. Quispel, “Geometric integrators for ODEs”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:19 (2006), 5251–5286.
- [46] V. A. Dorodnitsyn, R. Kozlov, P. Winternitz, “Lie group classification of second-order ordinary difference equations”, *J. Math. Phys.*, **41**:1 (2000), 480–504.
- [47] V. A. Dorodnitsyn, “Noether-type theorems for difference equations”, *Appl. Numer. Math.*, **39**:3–4 (2001), 307–321.
- [48] V. A. Dorodnitsyn, R. Kozlov, P. Winternitz, “Continuous symmetries of Lagrangians and exact solutions of discrete equations”, *J. Math. Phys.*, **45**:1 (2004), 336–359.
- [49] D. Levi, S. Tremblay, P. Winternitz, “Lie point symmetries of difference equations and lattices”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33**:47 (2000), 8507–8523.
- [50] R. Campoamor-Stursberg, M. A. Rodriguez, P. Winternitz, “Symmetry preserving discretization of ordinary differential equations. Large symmetry groups and higher order equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49**:3 (2016), 035201, 21 pp.
- [51] V. A. Dorodnitsyn, E. Kaptsov, R. Kozlov, P. Winternitz, “The adjoint equation method for constructing first integrals of difference equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **48**:5 (2015), 055202, 32 pp.
- [52] R. Rebelo, P. Winternitz, “Invariant difference schemes and their application to $sl(2, \mathbb{R})$ invariant ordinary differential equations”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:45 (2009), 454016, 10 pp.
- [53] A. Bourlioux, C. Cyr-Gagnon, P. Winternitz, “Difference schemes with point symmetries and their numerical tests”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39**:22 (2006), 6877–6896.
- [54] В. Э. Адлер, С. Я. Старцев, “О дискретных аналогах уравнения Лиувилля”, *ТМФ*, **121**:2 (1999), 271–284.
- [55] A. Bihlo, F. Valiquette, “Symmetry-preserving numerical schemes”, *Symmetries and Integrability of Difference Equations*, eds. D. Levi, R. Rebelo, P. Winternitz, Springer, New York, 2017, 261–324, arXiv:1608.02557.

- [56] G. Cicogna, “Symmetry classification of quasi-linear PDE’s containing arbitrary functions”, *Nonlinear Dynam.*, **51**:1–2 (2008), 309–316.
- [57] W. I. Fushchych, N. I. Sedov, “The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d’Alembert and eikonal equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**:15 (1983), 3645–3658.
- [58] R. Buckmire, “Application of a Mickens finite-difference scheme to the cylindrical Bratu–Gelfand problem”, *Numer. Methods Partial Diff. Equ.*, **20**:3 (2004), 327–337.
- [59] R. E. Mickens, *Nonstandard Finite Difference Models of Differential Equations*, World Sci., Singapore, 1994.
- [60] P. J. Olver, “A survey of moving frames”, *Computer Algebra and Geometric Algebra with Applications*, Lecture Notes in Computer Science, **3519**, eds. H. Li, P. J. Olver, G. Sommer, Springer, New York, 2005, 105–138.
- [61] P. J. Olver, “On multivariate interpolation”, *Stud. Appl. Math.*, **116**:2 (2006), 201–240.
- [62] P. J. Olver, J. Pohjanpelto, “Moving frames for Lie pseudo-groups”, *Canad. J. Math.*, **60**:6 (2008), 1336–1386.
- [63] P. J. Olver, J. Pohjanpelto, F. Valiquette, “On the structure of Lie pseudo-groups”, *SIGMA*, **5** (2009), 077, 14 pp.