Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Ваджахат А. Риаз, М. Хассан, Об интегрируемости многокомпонентной бездисперсионной системы связанных уравнений, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 3, 371–384

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:23:07

© 2018 г. Х. Ваджахат А. Риаз*, М. Хассан*

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ БЕЗДИСПЕРСИОННОЙ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ

Представлена многокомпонентная бездисперсионная интегрируемая система связанных уравнений. Показано, что она интегрируема в смысле существования представления через пары Лакса, а также существования бесконечной последовательности сохраняющихся величин, преобразования Дарбу и солитонных решений.

Ключевые слова: интегрируемые системы, солитоны, преобразование Дарбу.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9529>

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение многокомпонентных интегрируемых уравнений (или уравнений со многими зависимыми переменными) привлекает большое внимание исследователей как с теоретической, так и с прикладной точки зрения. Одной из причин является тот факт, что многокомпонентные обобщения интегрируемых уравнений важны при описании физических систем, имеющих внутренние степени свободы. Например, двухкомпонентное (или векторное) уравнение коротких импульсов является физической моделью распространения ультракоротких импульсов в оптических волокнах с нелинейностью Керра вне приближения медленных изменений и в присутствии поляризационных и анизотропных эффектов [1]. Помимо этого уравнения к интегрируемым моделям также относятся уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ), модифицированное уравнение КдФ (мКдФ) и нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [2]–[4].

Для нахождения солитонных решений разных интегрируемых уравнений и их обобщений применяются разнообразные подходы, такие как метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), преобразование Беклунда, билинейный метод Хироты, преобразование Дарбу (ПД) и другие [2], [5]–[8]. ПД является одним из мощных и эффективных методов, использующихся в теории солитонов для построения решений нелинейного интегрируемого уравнения. Основная идея этого метода заключается

*Department of Physics, University of the Punjab, Lahore, Pakistan.
E-mail: ahmed.phyy@gmail.com, mhassan.physics@pu.edu.pk

в том, что новое решение пары Лакса (т. е. пары линейных уравнений, связанных с нелинейным интегрируемым уравнением) можно получить из старого решения с помощью матрицы Дарбу. Ковариантность пары Лакса относительно ПД требует, чтобы новое решение удовлетворяло той же паре Лакса, поэтому можно получить связь между новым и старым решением пары Лакса и решениями нелинейного интегрируемого уравнения. Следовательно, можно найти солитонное решение нелинейного интегрируемого уравнения, решая пару Лакса с заданным затравочным (или тривиальным) решением. С помощью метода ПД успешно изучались различные интегрируемые уравнения и были рассчитаны солитонные решения. Полученные в работах [9]–[14] решения выражаются через вронскианы, квазиопределители Грама и квазидетерминанты.

Было бы интересно изучить тем же способом многокомпонентные обобщения бездисперсионной интегрируемой системы связанных уравнений (далее СбД-система), которая имеет вид [15]

$$\partial_x \partial_t q + 2r \partial_x r = 0, \quad \partial_x \partial_t r - 2r \partial_x q = 0; \quad (1.1)$$

при этом МОЗР для этой системы дает уравнения

$$\partial_x \Psi = U \Psi = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} \partial_x q & \partial_x r \\ \partial_x r & -\partial_x q \end{pmatrix} \Psi, \quad (1.2)$$

$$\partial_t \Psi = V \Psi = \begin{pmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{pmatrix} \Psi + \lambda \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \Psi. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1) называются бездисперсионными в том смысле, что в них нет дисперсионного члена. Заметим, что система (1.1) не принадлежит ни к одной из хорошо известных бездисперсионных иерархий, но она рассматривается как отрицательный поток иерархии уравнения мКдФ. Матрица из (1.3) используется в представлении нулевой кривизны уравнения мКдФ, которое связано с уравнением синус-гордон. Отличие от уравнения синус-гордон заключается в том, что после исключения $\partial_x q$ система остается несимметричной по x, t ; схожие примеры рассмотрены в работе [16]. Матрица представления нулевой кривизны совпадает с матрицей для уравнения мКдФ, поэтому, используя первый интеграл $q_x^2 + r_x^2 = c$, где c – постоянная, можно свести систему (1.1) к виду $r_{xt} = 2r\sqrt{c - r_x^2}$. Это уравнение можно также представить в виде

$$\left[r_x^2 + \left(\frac{r_{xt}}{2r} \right)^2 \right]_t = 0, \quad (1.4)$$

а после масштабирования мы получим $r^2 r_x + r_{xtt} - r^{-1} r_t r_{tx} = 0$. Это уравнение есть не что иное, как отрицательный поток иерархии мКдФ (с заменой $t \leftrightarrow x$).

СбД-система и ее обобщения решаются с помощью МОЗР и обладают многими свойствами интегрируемости, такими как свойство Пенлеве, существование бесконечного набора сохраняющихся величин, наличие точных решений и т. д. [10], [15], [17]–[20].

Настоящая работа посвящена изучению многокомпонентного обобщения СбД-системы (1.1), получающегося в результате замены (2×2) -матриц U и V пары Лакса на матрицы размера $2^N \times 2^N$. Далее матричное обобщение исследуется с точки зрения

нахождения солитонных решений с помощью матрицы Дарбу. Также изучаются законы сохранения для данной системы.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приведено представление Лакса для многокомпонентной СбД-системы, которая получается из условия совместности пары Лакса. Записав матричные уравнения Риккати, мы строим законы сохранения для этой системы. В разделе 3 с помощью ПД мы находим многосолитонные решения для многокомпонентной СбД-системы и выражаем их через квазидетерминанты. Кроме того, мы записываем квазидетерминантные решения через эрмитовы проекторы. Используя представление квазидетерминантов в виде отношений простых определителей, мы получаем одно-, двух- и трехсолитонные решения.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПАРЫ ЛАКСА

Начнем с пары Лакса многокомпонентной СбД-системы. Пара Лакса имеет вид

$$\partial_x \Psi = \mathcal{U} \Phi = \lambda^{-1} \partial_x \mathcal{S} \Psi, \quad \partial_t \Psi = \mathcal{V} \Psi = (\mathcal{W} + \lambda \mathcal{W}_0) \Psi, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{S}$, $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}_0$ – блочные матрицы размера $2^N \times 2^N$, имеющие структуру

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q} & \mathcal{R} \\ \mathcal{P} & -\mathcal{Q} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W} = \begin{pmatrix} O & -\mathcal{R} \\ \mathcal{P} & O \end{pmatrix}, \quad \mathcal{W}_0 = \begin{pmatrix} I/2 & O \\ O & -I/2 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{P} = \mathcal{R}^T$ (здесь верхний индекс T означает транспонирование) – блочные матрицы размера $2^{N-1} \times 2^{N-1}$, а I и O – соответственно единичная и нулевая матрицы размера $2^{N-1} \times 2^{N-1}$. Матрица Ψ является собственной матрицей размера $2^N \times 2^N$ для линейной задачи. Из условия совместности пары Лакса (2.1), т. е. из условия нулевой кривизны

$$\partial_x \mathcal{U} - \partial_t \mathcal{V} = \mathcal{V} \mathcal{U} - \mathcal{U} \mathcal{V}, \quad (2.3)$$

получаем матричную СбД-систему

$$\partial_x \partial_t \mathcal{S} + [\partial_x \mathcal{S}, \mathcal{W}] = O. \quad (2.4)$$

Подставляя выражения для $\mathcal{S}$ и $\mathcal{W}$ из (2.2) в (2.4), получаем

$$\partial_x \partial_t \mathcal{Q} + \partial_x \mathcal{R} \mathcal{P} - \mathcal{R} \partial_x \mathcal{P} = O, \quad \partial_x \partial_t \mathcal{R} - \partial_x \mathcal{Q} \mathcal{R} - \mathcal{R} \partial_x \mathcal{Q} = O. \quad (2.5)$$

В частном случае, когда $\mathcal{Q} \equiv q$, $\mathcal{R} \equiv r$, матричная СбД-система (2.5) сводится к СбД-системе (1.1). Для высших обобщений положим

$$\mathcal{Q}^{(2)} = q I_{2 \times 2}, \quad \mathcal{R}^{(2)} = \begin{pmatrix} r^{(1)} & \vdots & r^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -r^{(2)} & \vdots & r^{(1)} \end{pmatrix}_{2 \times 2},$$

$$\mathcal{Q}^{(3)} = q I_{4 \times 4}, \quad \mathcal{R}^{(3)} = \begin{pmatrix} r^{(1)} & r^{(2)} & \vdots & r^{(3)} & 0 \\ -r^{(2)} & r^{(1)} & \vdots & 0 & r^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r^{(3)} & 0 & \vdots & r^{(1)} & -r^{(2)} \\ 0 & -r^{(3)} & \vdots & r^{(2)} & r^{(1)} \end{pmatrix}_{4 \times 4},$$

$$\mathcal{Q}^{(4)} = qI_{8 \times 8},$$

$$\mathcal{R}^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} r^{(1)} & r^{(2)} & 0 & 0 & r^{(3)} & 0 & r^{(4)} & 0 \\ -r^{(2)} & r^{(1)} & 0 & 0 & 0 & r^{(3)} & 0 & r^{(4)} \\ 0 & 0 & r^{(1)} & r^{(2)} & -r^{(4)} & 0 & r^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & -r^{(2)} & r^{(1)} & 0 & -r^{(4)} & 0 & r^{(3)} \\ \hline -r^{(3)} & 0 & r^{(4)} & 0 & r^{(1)} & -r^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & -r^{(3)} & 0 & r^{(4)} & r^{(2)} & r^{(1)} & 0 & 0 \\ -r^{(4)} & 0 & -r^{(3)} & 0 & 0 & 0 & r^{(1)} & -r^{(2)} \\ 0 & -r^{(4)} & 0 & -r^{(3)} & 0 & 0 & r^{(2)} & r^{(1)} \end{array} \right)_{8 \times 8}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (2.5), получаем соответственно двух-, трех- и четырехкомпонентные СбД-системы. Двухкомпонентная СбД-система имеет вид

$$\partial_x \partial_t q + 2 \sum_{j=1}^2 r^{(j)} \partial_x r^{(j)} = 0, \quad \partial_x \partial_t r^{(j)} - 2r^{(j)} \partial_x q = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.6)$$

Аналогично, N -компонентная СбД-система имеет вид

$$\partial_x \partial_t q + 2 \sum_{j=1}^N r^{(j)} \partial_x r^{(j)} = 0, \quad \partial_x \partial_t r^{(j)} - 2r^{(j)} \partial_x q = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.7)$$

В общем случае $(2^{N-1} \times 2^{N-1})$ -матрицы $\mathcal{Q}^{(N)}$ и $\mathcal{R}^{(N)}$ можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{Q}^{(N)} = qI_{2^{N-1} \times 2^{N-1}}, \quad \mathcal{R}^{(N)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R}^{(1)} & \mathbb{R}^{(2)} \\ \hline \mathbb{R}^{(3)} & \mathbb{R}^{(4)} \end{array} \right), \quad (2.8)$$

где все $\mathbb{R}^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) – квадратные блочные матрицы размера $2^{N-2} \times 2^{N-2}$ и $\mathbb{R}^{(4)} = (\mathbb{R}^{(1)})^T$, $\mathbb{R}^{(3)} = -(\mathbb{R}^{(2)})^T$. Матрицы $\mathbb{R}^{(1)}$ и $\mathbb{R}^{(2)}$ задаются формулами

$$\mathbb{R}^{(1)} = \text{diag}(\mathbb{X}^{(1)}, \mathbb{X}^{(1)}, \dots, \mathbb{X}^{(1)}), \quad \mathbb{R}^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}^{(1)} & \mathbb{Y}^{(2)} \\ \hline \mathbb{Y}^{(3)} & \mathbb{Y}^{(4)} \end{array} \right), \quad (2.9)$$

где $\mathbb{Y}^{(4)} = (\mathbb{Y}^{(1)})^T$, $\mathbb{Y}^{(3)} = -(\mathbb{Y}^{(2)})^T$ – квадратные блочные матрицы вида

$$\mathbb{Y}^{(2)} = \left(\begin{array}{ccccc} \mathbb{X}^{(3)} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{X}^{(N-1)} & \mathbb{X}^{(N)} \\ \mathbb{O} & \mathbb{X}^{(3)} & \dots & -\mathbb{X}^{(N)} & \mathbb{X}^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\mathbb{X}^{(N-1)} & \mathbb{X}^{(N)} & \dots & \mathbb{X}^{(3)} & \mathbb{O} \\ -\mathbb{X}^{(N)} & -\mathbb{X}^{(N-1)} & \dots & \mathbb{O} & \mathbb{X}^{(3)} \end{array} \right)$$

и

$$\mathbb{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} r^{(1)} & r^{(2)} \\ -r^{(2)} & r^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}^{(j)} = \begin{pmatrix} r^{(j+1)} & 0 \\ 0 & r^{(j+1)} \end{pmatrix}, \quad j = 2, 3, \dots, N-1,$$

а $\mathbb{O}$ – нулевая (2×2) -матрица.

Можно заметить, что система (2.7) является также отрицательным потоком одного из известных векторных аналогов иерархии мКдФ, т. е.

$$R_x \langle R, R \rangle + R_{xtt} - R_{xt} \langle R_t, R \rangle \langle R, R \rangle^{-1} = 0. \quad (2.10)$$

Доказательство этого факта аналогично доказательству для обычного случая. Система (2.7) инвариантна относительно действия группы $SO(n)$ на вектор R . Дальнейшие подробности о соответствующих векторных уравнениях можно найти, например, в работах [21], [22]. В следующем пункте мы покажем, что для рассматриваемой системы существует бесконечная последовательность законов сохранения, и выпишем уравнения непрерывности.

2.1. Законы сохранения. В этом пункте мы строим сохраняющиеся величины, связанные с матричной СбД-системой. Запишем пару Лакса (2.1) в виде

$$\begin{pmatrix} \partial_x \Psi_1 \\ \partial_x \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{11} & \mathcal{U}_{12} \\ \mathcal{U}_{21} & \mathcal{U}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \partial_t \Psi_1 \\ \partial_t \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{11} & \mathcal{V}_{12} \\ \mathcal{V}_{21} & \mathcal{V}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Введем блочную матрицу $\Pi = \Psi_2 \Psi_1^{-1}$ и, используя ее в уравнениях (2.11), получим уравнения Риккати для блочных матриц:

$$\partial_x \Pi = \mathcal{U}_{21} + \mathcal{U}_{22} \Pi - \Pi \mathcal{U}_{11} - \Pi \mathcal{U}_{12} \Pi, \quad (2.12)$$

$$\partial_t \Pi = \mathcal{V}_{21} + \mathcal{V}_{22} \Pi - \Pi \mathcal{V}_{11} - \Pi \mathcal{V}_{12} \Pi, \quad (2.13)$$

С помощью этих уравнений и условия нулевой кривизны (2.3) можно доказать, что

$$\partial_t [\text{tr}(\mathcal{U}_{11} + \mathcal{U}_{12} \Pi)] = \partial_x [\text{tr}(\mathcal{V}_{11} + \mathcal{V}_{12} \Pi)]. \quad (2.14)$$

При

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{11} &= \lambda^{-1} \mathcal{Q}_x, & \mathcal{U}_{12} &= \lambda^{-1} \mathcal{R}_x, & \mathcal{U}_{21} &= \lambda^{-1} \mathcal{P}_x, & \mathcal{U}_{22} &= -\lambda^{-1} \mathcal{Q}_x, \\ \mathcal{V}_{11} &= \frac{\lambda}{2} I, & \mathcal{V}_{12} &= -\mathcal{R}, & \mathcal{V}_{21} &= \mathcal{P}, & \mathcal{V}_{22} &= -\frac{\lambda}{2} I \end{aligned} \quad (2.15)$$

уравнения (2.12), (2.13) и (2.14) преобразуются к следующему виду:

$$\partial_x \Pi = \lambda^{-1} \mathcal{P}_x - \lambda^{-1} \mathcal{Q}_x \Pi - \lambda^{-1} \Pi \mathcal{Q}_x - \lambda^{-1} \Pi \mathcal{R}_x \Pi, \quad (2.16)$$

$$\partial_t \Pi = \mathcal{P} - \lambda \Pi + \Pi \mathcal{R} \Pi \quad (2.17)$$

и

$$\partial_t [\text{tr}(\lambda^{-1} \mathcal{Q}_x + \lambda^{-1} \mathcal{R}_x \Pi)] = \partial_x \left[\text{tr} \left(\frac{\lambda}{2} I - \mathcal{R} \Pi \right) \right]. \quad (2.18)$$

Разложим $\mathcal{R}_x \Pi$ в степенной ряд по λ ,

$$\mathcal{R}_x \Pi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F_n, \quad (2.19)$$

и, подставив разложение в уравнение (2.16), запишем следующую рекуррентную формулу:

$$F_n = (2\mathcal{Q}_x)^{-1} \left[\delta_{n,0} \mathcal{R}_x \mathcal{P}_x - \mathcal{R}_x (\mathcal{R}_x^{-1} F_{n-1}) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n F_n F_{n-k} \right]. \quad (2.20)$$

Подставим ее в (2.18), получим

$$\partial_t \left[\lambda^{-1} \operatorname{tr} \left(\mathcal{Q}_x + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F_n \right) \right] = \partial_x \left[\operatorname{tr} \left(\frac{\lambda}{2} I - \mathcal{R} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n F_n \right) \right]. \quad (2.21)$$

Используя программы символьных расчетов, отсюда можно получить бесконечную последовательность сохраняющихся величин для матричной СбД-системы (2.5).

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ

Применим ПД к паре Лакса (2.1) и к решениям матричной СбД-системы (2.4). Для решений уравнений пары Лакса (2.1) определим ПД с помощью $(2^N \times 2^N)$ -матрицы Дарбу $D(x, t; \lambda)$. Она действует на решение Ψ пары Лакса (2.1), порождая другое решение $\Psi^{[1]}$:

$$\Psi^{[1]} = D(x, t; \lambda) \Psi. \quad (3.1)$$

Ковариантность пары Лакса (2.1) относительно ПД требует, чтобы новое решение $\Psi^{[1]}$ удовлетворяло тем же уравнениям пары Лакса (2.1),

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi^{[1]} &= \mathcal{U}^{[1]} \Phi^{[1]} = \lambda^{-1} \partial_x \mathcal{S}^{[1]} \Psi^{[1]}, \\ \partial_t \Psi^{[1]} &= \mathcal{V}^{[1]} \Psi^{[1]} = (\mathcal{W}^{[1]} + \lambda \mathcal{W}_0^{[1]}) \Psi^{[1]}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Мы хотим найти такое ПД матриц $\mathcal{S}^{[1]}$, $\mathcal{W}^{[1]}$ и $\mathcal{W}_0^{[1]}$, чтобы можно было получить связь между старыми и новыми решениями. Для этого введем следующий анзац для матрицы Дарбу:

$$D(x, t; \lambda) = \lambda \mathcal{I} - \Xi, \quad (3.3)$$

где $\mathcal{I}$ – единичная матрица размера $2^N \times 2^N$, а Ξ – вспомогательная матрица размера $2^N \times 2^N$, которую мы определим ниже. Используя анзац (3.3) в уравнениях (3.2) и учитывая (3.1), получим, что коэффициенты перед различными степенями λ порождают ПД матриц $\mathcal{S}^{[1]}$, $\mathcal{W}^{[1]}$ и $\mathcal{W}_0^{[1]}$, заданное формулами

$$\mathcal{S}^{[1]} = \mathcal{S} - \Xi, \quad \mathcal{W}^{[1]} = \mathcal{W} + [\mathcal{W}_0, \Xi], \quad \mathcal{W}_0^{[1]} = \mathcal{W}_0, \quad (3.4)$$

при этом матрица Ξ должна удовлетворять уравнениям

$$\partial_x \Xi = \partial_x \mathcal{S} - \Xi \partial_x \mathcal{S} \Xi^{-1}, \quad \partial_t \Xi = [\mathcal{W}, \Xi] + [\mathcal{W}_0, \Xi] \Xi. \quad (3.5)$$

В данном случае выберем $\Xi = \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1}$, где матрица $\mathcal{F}$ размера $2^N \times 2^N$ есть частное решение пары Лакса (2.1), которое строится из собственных вектор-функций $\Psi(\lambda)|e\rangle$ (где $|e\rangle$ – постоянный вектор-столбец) для различных значений λ , тогда как Λ – диагональная матрица размера $2^N \times 2^N$, составленная из собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_{2^N}$. Таким образом, можно определить обратимую матрицу $\mathcal{F}$ размера $2^N \times 2^N$ вида

$$\mathcal{F} = (\Psi(\lambda_1)|e\rangle_1, \dots, \Psi(\lambda_{2^N})|e\rangle_{2^N}) \equiv (f^{(1)}, \dots, f^{(2^N)}), \quad (3.6)$$

такую что каждый вектор $f^{(j)}$ в матрице $\mathcal{F}$ является решением задачи на собственные векторы пары Лакса (2.1). Для $\lambda = \lambda_j$ ($j = 1, \dots, 2^N$) имеем

$$\partial_x f^{(j)} = \lambda_j^{-1} \partial_x \mathcal{S} f^{(j)}, \quad \partial_t f^{(j)} = \mathcal{W} f^{(j)} + \lambda_j \mathcal{W}_0 f^{(j)}. \quad (3.7)$$

Данную пару Лакса для частного матричного решения $\mathcal{F}$ при $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2N})$ можно представить в виде

$$\partial_x \mathcal{F} = \partial_x \mathcal{S} \mathcal{F} \Lambda^{-1}, \quad \partial_t \mathcal{F} = \mathcal{W} \mathcal{F} + \mathcal{W}_0 \mathcal{F} \Lambda. \quad (3.8)$$

Покажем теперь, что выбор $\Xi = \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1}$ удовлетворяет условиям (3.5). Для этого возьмем производные матрицы Ξ :

$$\begin{aligned} \partial_x \Xi &= \partial_x \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1} - \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1} \partial_x \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} = \\ &= (\partial_x \mathcal{S} \mathcal{F} \Lambda^{-1}) \Lambda \mathcal{F}^{-1} - \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1} (\partial_x \mathcal{S} \mathcal{F} \Lambda^{-1}) \mathcal{F}^{-1} = \\ &= \partial_x \mathcal{S} - \Xi \partial_x \mathcal{S} \Xi^{-1}, \\ \partial_t \Xi &= \partial_t \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1} - \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1} \partial_t \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1} = \\ &= (\mathcal{W} \mathcal{F} + \mathcal{W}_0 \mathcal{F} \Lambda) \Lambda \mathcal{F}^{-1} - \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1} (\mathcal{W} \mathcal{F} + \mathcal{W}_0 \mathcal{F} \Lambda) \mathcal{F}^{-1} = \\ &= [\mathcal{W}, \Xi] + [\mathcal{W}_0, \Xi] \Xi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Следовательно, матрица $\Xi = \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1}$ удовлетворяет условиям (3.5), налагаемым ковариантностью Дарбу.

На этом этапе можно сказать, что ПД сохраняет систему, т.е. если Ψ , $\mathcal{S}$ и $\mathcal{W}$ – решения пары Лакса (2.1) и уравнения (2.4), то $\Psi^{[K]}$, $\mathcal{S}^{[K]}$ и $\mathcal{W}^{[K]}$ (отвечающие многосолитонным решениям) также удовлетворяют этим уравнениям. Представляется целесообразным выразить решения $\Psi^{[K]}$, $\mathcal{S}^{[K]}$, $\mathcal{W}^{[K]}$ при $\Xi = \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1}$ через квазидетерминанты. Матричное решение $\Psi^{[1]}$ пары Лакса (2.1), соответствующее частному матричному решению $\mathcal{F}$, можно представить через квазидетерминант как

$$\Psi^{[1]} = D\Psi = \lambda\Psi - \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1} \Psi = \begin{vmatrix} \mathcal{F} & \Psi \\ \mathcal{F} \Lambda & \boxed{\lambda\Psi} \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Аналогично можно представить в виде квазидетерминанта выражение для однократно преобразованного матричного решения $\mathcal{S}^{[1]}$:

$$\mathcal{S}^{[1]} = \mathcal{S} - \mathcal{F} \Lambda \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{S} + \begin{vmatrix} \mathcal{F} & I \\ \mathcal{F} \Lambda & \boxed{O} \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

Для матричных решений $\mathcal{F}_k$ пары Лакса (2.1) при $\Lambda = \Lambda_k$ ($k = 1, \dots, K$) решение $\mathcal{S}^{[K]}$, полученное применением ПД K раз, в терминах квазидетерминанта имеет вид

$$\mathcal{S}^{[K]} = \mathcal{S} + \begin{vmatrix} \mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_2 & \dots & \mathcal{F}_K & O \\ \mathcal{F}_1 \Lambda_1 & \mathcal{F}_2 \Lambda_2 & \dots & \mathcal{F}_K \Lambda_K & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{F}_1 \Lambda_1^{K-1} & \mathcal{F}_2 \Lambda_2^{K-1} & \dots & \mathcal{F}_K \Lambda_K^{K-1} & I \\ \mathcal{F}_1 \Lambda_1^K & \mathcal{F}_2 \Lambda_2^K & \dots & \mathcal{F}_K \Lambda_K^K & \boxed{O} \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Аналогично квазидетерминантное решение $\Psi^{[K]}$ можно записать в виде

$$\Psi^{[K]} = \begin{vmatrix} \mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_2 & \dots & \mathcal{F}_K & \Psi \\ \mathcal{F}_1 \Lambda_1 & \mathcal{F}_2 \Lambda_2 & \dots & \mathcal{F}_K \Lambda_K & \lambda\Psi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{F}_1 \Lambda_1^K & \mathcal{F}_2 \Lambda_2^K & \dots & \mathcal{F}_K \Lambda_K^K & \boxed{\lambda^K \Psi} \end{vmatrix}. \quad (3.13)$$

Квазидетерминантные решения $\mathcal{W}^{[K]}$, $\mathcal{W}_0^{[K]}$ описываются выражениями

$$\mathcal{W}^{[K]} = \mathcal{W} - [\mathcal{W}_0, \Theta^{[K]}], \quad \mathcal{W}_0^{[K]} = \mathcal{W}_0, \quad (3.14)$$

где $\Theta^{[K]}$ – квазидетерминант (второе слагаемое) в правой части (3.12).

Для доказательства методом индукции результатов, аналогичных (3.12)–(3.14), читатель может обратиться к статье [9]. При этом K -кратное ПД (3.12) можно представить в более удобном виде:

$$\mathcal{S}^{[K]} = \mathcal{S} + \Theta^{[K]} = \mathcal{S} + \left| \begin{array}{c} E \\ \widehat{E} \end{array} \right| \begin{array}{c} \mathcal{E}^{(K)} \\ O \end{array}, \quad (3.15)$$

где $\Theta^{[K]}$ – матрица размера $2^N \times 2^N$, $\mathcal{E}^{(K)}$ – матрица размера $2^N K \times 2^N$, а $\widehat{E}$ и E являются соответственно матрицами размера $2^N \times 2^N K$ и $2^N K \times 2^N K$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(K)} &= (O \ O \ \dots \ I)^T, \\ \widehat{E} &= (\mathcal{F}_1 \Lambda_1^K \ \mathcal{F}_2 \Lambda_2^K \ \dots \ \mathcal{F}_K \Lambda_K^K), \\ E &= \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_2 & \dots & \mathcal{F}_K \\ \mathcal{F}_1 \Lambda_1 & \mathcal{F}_2 \Lambda_2 & \dots & \mathcal{F}_K \Lambda_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{F}_1 \Lambda_1^{K-1} & \mathcal{F}_2 \Lambda_2^{K-1} & \dots & \mathcal{F}_K \Lambda_K^{K-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Элементы матрицы $\Theta^{[K]}$ записываются как

$$\begin{aligned} (\Theta^{[K]})_{ij} &= \left(\left| \begin{array}{c} E \\ \widehat{E} \end{array} \right| \begin{array}{c} \mathcal{E}^{(K)} \\ O \end{array} \right)_{ij} = \left| \begin{array}{c} E \\ (\widehat{E})_i \end{array} \right| \begin{array}{c} \mathcal{E}_j^{(K)} \\ 0 \end{array}, \quad i \neq j, \\ (\Theta^{[K]})_{ij} &= \left(\left| \begin{array}{c} E \\ \widehat{E} \end{array} \right| \begin{array}{c} \mathcal{E}^{(K)} \\ O \end{array} \right)_{ii} = \left| \begin{array}{c} E \\ (\widehat{E})_i \end{array} \right| \begin{array}{c} \mathcal{E}_i^{(K)} \\ 0 \end{array}, \quad i = j, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $(\widehat{E})_i$ – i -я строка матрицы $\widehat{E}$, а $(\mathcal{E}^{(K)})_j$ – j -й столбец матрицы $\mathcal{E}^{(K)}$. Мы используем явные выражения (3.17) для вычисления ПД скалярных решений пары Лакса (2.1) и скалярных решений многокомпонентной СБД-системы.

Теперь свяжем квазидетерминантные решения многокомпонентной СБД-системы с решениями, полученными методом одевания [23]. В методе одевания матрица D , называемая одевающей матрицей (или одевающей функцией), рассматривается как функция в комплексной плоскости параметра λ . Одевающая функция должна быть мероморфной на комплексной плоскости, т. е. она имеет полюс в некоторой точке λ . Она ведет себя сингулярным образом при $\lambda = \mu$ и может быть выражена через эрмитов проектор. Чтобы связать квазидетерминантные решения с решениями, полученными методом одевания, перепишем матрицу Ξ как

$$\Xi \mathcal{F} = \mathcal{F} \Lambda. \quad (3.18)$$

Пусть $f^{(j)}$ – решения-столбцы пары Лакса (2.1) при $\lambda = \lambda_j$, тогда

$$\Xi f^{(i)} = \lambda_i f^{(i)}, \quad \Xi f^{(j)} = \lambda_j f^{(j)}, \quad i \neq j. \quad (3.19)$$

Полагая $\lambda_i = \mu$, $\lambda_j = \bar{\mu}$, можно представить матрицу Ξ в виде суперпозиции эрмитовых проекторов:

$$\Xi = \mu P + \bar{\mu} P^\perp. \quad (3.20)$$

Заметим, что P является эрмитовым проектором, если он удовлетворяет соотношениям $P^2 = P$, $P + P^\perp = I$. Проектор полностью описывается двумя подпространствами $S_1 = \text{Im } P$ и $S_2 = \text{Ker } P$ так, что

$$\begin{aligned} s_1 \in \text{Im } P &\iff P s_1 = s_1 &\iff P^\perp s_1 = 0, \\ s_2 \in \text{Ker } P &\iff P s_2 = 0 &\iff P^\perp s_2 = s_2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Пусть $|e_i\rangle$ – базис пространства S_1 , а $|e_j\rangle$ – базис пространства S_2 (здесь $i \neq j$). С учетом соотношения $P^\perp = I - P$ выражение (3.20) приобретает вид

$$\Xi = (\mu - \bar{\mu})P + \bar{\mu}I. \quad (3.22)$$

Теперь можно выразить квазидетерминантное решение, полученное с помощью матрицы Дарбу, через эрмитов проектор:

$$D = \begin{vmatrix} \mathcal{F} & I \\ \mathcal{F}\Lambda & \boxed{\lambda I} \end{vmatrix} = \lambda I - (\mu - \bar{\mu})P - \bar{\mu}I = (\lambda - \bar{\mu}) \left(I - \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{\lambda - \bar{\mu}} P \right). \quad (3.23)$$

Матричное решение $\Psi^{[1]}$ также выражается через эрмитов проектор:

$$\Psi^{[1]} = D\Psi = (\lambda - \bar{\mu}) \left(I - \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{\lambda - \bar{\mu}} P \right) \Psi, \quad P = \frac{f^{(i)} f^{(i)\dagger}}{f^{(i)\dagger} f^{(i)}}, \quad (3.24)$$

где $f^{(i)}$ – решение пары Лакса (2.1) (вектор-столбец). Результат K -кратного применения ПД к матрице $\Psi^{[1]}$ записывается через эрмитов проектор следующим образом:

$$\Psi^{[K]} = \prod_{k=1}^K (\lambda - \bar{\mu}_{K-k+1}) \left(I - \frac{\mu_{K-k+1} - \bar{\mu}_{K-k+1}}{\lambda - \bar{\mu}_{K-k+1}} P[K-k] \right) \Psi. \quad (3.25)$$

Аналогично $\mathcal{S}^{[K]}$ выражается через эрмитов проектор как

$$\mathcal{S}^{[K]} = \mathcal{S} - \sum_{k=1}^K \bar{\mu}_{K-k+1} \left(I + \frac{\mu_{K-k+1} - \bar{\mu}_{K-k+1}}{\bar{\mu}_{K-k+1}} P[K-k] \right). \quad (3.26)$$

4. ЯВНЫЕ СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы найдем одно-, двух- и трехсолитонные решения многокомпонентной СБД-системы. Для этого построим матричное решение $\mathcal{F}$ с помощью собственных векторов, удовлетворяющих паре Лакса (2.1) при конкретных значениях собственного числа λ . Предположим, что $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ – собственные векторы, удовлетворяющие паре Лакса (2.1) при $\lambda = \lambda_1$, а $f^{(3)}$, $f^{(4)}$ – собственные векторы, удовлетворяющие той же паре Лакса при $\lambda = -\lambda_1$, и запишем их как

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} f^{(11)} \\ f^{(21)} \\ f^{(31)} \\ f^{(41)} \end{pmatrix}, \quad f^{(2)} = \begin{pmatrix} f^{(21)} \\ -f^{(11)} \\ f^{(41)} \\ -f^{(31)} \end{pmatrix}, \quad f^{(3)} = \begin{pmatrix} f^{(31)} \\ -f^{(41)} \\ -f^{(11)} \\ f^{(21)} \end{pmatrix}, \quad f^{(4)} = \begin{pmatrix} f^{(41)} \\ f^{(31)} \\ -f^{(21)} \\ -f^{(11)} \end{pmatrix},$$

так что матрицу $\mathcal{F}_1$ при $\Lambda = \Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_1)$, соответствующую указанным частным решениям (собственным векторам), можно представить в виде

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} f_1^{(11)} & f_1^{(21)} & f_1^{(31)} & f_1^{(41)} \\ f_1^{(21)} & -f_1^{(11)} & -f_1^{(41)} & f_1^{(31)} \\ f_1^{(31)} & f_1^{(41)} & -f_1^{(11)} & -f_1^{(21)} \\ f_1^{(41)} & -f_1^{(31)} & f_1^{(21)} & -f_1^{(11)} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

В результате k итераций ($k = 1, 2, \dots, K$) имеем $\Lambda_k = \text{diag}(\lambda_k, \lambda_k, -\lambda_k, -\lambda_k)$ и

$$\mathcal{F}_k = \begin{pmatrix} f_k^{(11)} & f_k^{(21)} & f_k^{(31)} & f_k^{(41)} \\ f_k^{(21)} & -f_k^{(11)} & -f_k^{(41)} & f_k^{(31)} \\ f_k^{(31)} & f_k^{(41)} & -f_k^{(11)} & -f_k^{(21)} \\ f_k^{(41)} & -f_k^{(31)} & f_k^{(21)} & -f_k^{(11)} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Из выражения (3.15) следует, что K -кратное ПД решения двухкомпонентной СбД-системы задается формулами

$$q^{[K]} = q + (\Theta^{(K)})_{11}, \quad (4.3)$$

$$r^{(1)[K]} = r^{(1)} + (\Theta^{(K)})_{13}, \quad r^{(2)[K]} = r^{(2)} + (\Theta^{(K)})_{14}. \quad (4.4)$$

Чтобы получить солитонное решение, возьмем в качестве затравочного решения $\partial_x q = \rho$ (где ρ – вещественная ненулевая константа), $r^{(1)} = r^{(2)} = 0$, при этом решение пары Лакса (2.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} f^{(11)} \\ f^{(21)} \\ f^{(31)} \\ f^{(41)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} e^\eta \\ \epsilon_{21} e^\eta \\ \epsilon_{31} e^{-\eta} \\ \epsilon_{41} e^{-\eta} \end{pmatrix}, \quad \eta = \lambda^{-1} \rho x + \frac{\lambda}{2} t + \lambda_0, \quad (4.5)$$

где все ϵ_{i1} – произвольные постоянные.

Для односолитонного решения ($K = 1$) имеем

$$\mathcal{E}^{(1)} = I_{4 \times 4} = \text{diag}(1, 1, 1, 1), \quad \Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, -\lambda_1, -\lambda_1), \quad E = \mathcal{F}_1,$$

$$\hat{E} = \mathcal{F}_1 \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 f_1^{(11)} & \lambda_1 f_1^{(21)} & -\lambda_1 f_1^{(31)} & -\lambda_1 f_1^{(41)} \\ \lambda_1 f_1^{(21)} & -\lambda_1 f_1^{(11)} & \lambda_1 f_1^{(41)} & -\lambda_1 f_1^{(31)} \\ \lambda_1 f_1^{(31)} & \lambda_1 f_1^{(41)} & \lambda_1 f_1^{(11)} & \lambda_1 f_1^{(21)} \\ \lambda_1 f_1^{(41)} & -\lambda_1 f_1^{(31)} & -\lambda_1 f_1^{(21)} & \lambda_1 f_1^{(11)} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где $\mathcal{F}_1$ задана в (4.1). Отсюда, подставляя эти выражения в (4.3), получаем

$$\begin{aligned}
 q^{[1]} &= q + (\Theta^{[1]})_{11} = q + \left| \begin{array}{cc} \mathcal{F}_1 & \mathcal{E}_1^{(1)} \\ (\widehat{\mathcal{F}}_1)_1 & \boxed{0} \end{array} \right| = \\
 &= q + \left| \begin{array}{cccccc} f_1^{(11)} & f_1^{(21)} & f_1^{(31)} & f_1^{(41)} & 1 \\ f_1^{(21)} & -f_1^{(11)} & -f_1^{(41)} & f_1^{(31)} & 0 \\ f_1^{(31)} & f_1^{(41)} & -f_1^{(11)} & -f_1^{(21)} & 0 \\ f_1^{(41)} & -f_1^{(31)} & f_1^{(21)} & -f_1^{(11)} & 0 \\ \lambda_1 f_1^{(11)} & \lambda_1 f_1^{(21)} & -\lambda_1 f_1^{(31)} & -\lambda_1 f_1^{(41)} & \boxed{0} \end{array} \right| = \\
 &= q - \frac{\det \begin{pmatrix} \lambda_1 f_1^{(11)} & \lambda_1 f_1^{(21)} & -\lambda_1 f_1^{(31)} & -\lambda_1 f_1^{(41)} \\ f_1^{(21)} & -f_1^{(11)} & -f_1^{(41)} & f_1^{(31)} \\ f_1^{(31)} & f_1^{(41)} & -f_1^{(11)} & -f_1^{(21)} \\ f_1^{(41)} & -f_1^{(31)} & f_1^{(21)} & -f_1^{(11)} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} f_1^{(11)} & f_1^{(21)} & f_1^{(31)} & f_1^{(41)} \\ f_1^{(21)} & -f_1^{(11)} & -f_1^{(41)} & f_1^{(31)} \\ f_1^{(31)} & f_1^{(41)} & -f_1^{(11)} & -f_1^{(21)} \\ f_1^{(41)} & -f_1^{(31)} & f_1^{(21)} & -f_1^{(11)} \end{pmatrix}}. \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Используя соотношения (4.5) в формуле (4.7) и упрощая выражение, получаем

$$q^{[1]} = q - \lambda_1 \operatorname{th} \left(2\eta_1 + \ln \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right), \quad \partial_x q^{[1]} = \rho \left[1 - 2 \operatorname{sech}^2 \left(2\eta_1 + \ln \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right) \right]. \quad (4.8)$$

Аналогично получаем явные выражения для $r^{(1)[1]}$ и $r^{(2)[1]}$:

$$\begin{aligned}
 r^{(1)[1]} &= -\lambda_1 \frac{\varepsilon_{21}\varepsilon_{41} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{31}}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \operatorname{sech} \left(2\eta_1 + \ln \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right), \\
 r^{(2)[1]} &= -\lambda_1 \frac{\varepsilon_{21}\varepsilon_{41} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{31}}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \operatorname{sech} \left(2\eta_1 + \ln \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right), \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{21}^2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{41}^2$. Соотношения (4.8), (4.9) задают односолитонное решение двухкомпонентной СбД-системы (2.6).

Графики решений (4.8), (4.9) изображены на рис. 1, где параметры выбраны как $\lambda_1 = 0.7$, $\rho = 0.1$, $\lambda_{01} = 0$ для темного солитона и как $\lambda_1 = -1.57$, $\rho = 0.1$, $\lambda_{01} = 1.5$ для светлого солитона.

Двухсолитонное решение двухкомпонентной СбД-системы можно получить, взяв в качестве частных решений пары Лакса двухкомпонентной СбД-системы две матрицы $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и матрицы Λ_1 , Λ_2 соответственно. Используя $\mathcal{F}_k$ ($k = 1, 2$) в формулах (4.3), (4.4), получаем двухсолитонное решение двухкомпонентной СбД-системы. Построенные решения изображены на рис. 2, где параметры выбраны как $\lambda_1 = 1.57$, $\lambda_2 = 2.98$, $\rho = -0.8$ для темного двухсолитонного решения, как $\lambda_1 = 1.57$, $\lambda_2 = -2.48$, $\rho = 0.5$ для светлого двухсолитонного решения $r^{(1)}$ и как $\lambda_1 = -1.57$, $\lambda_2 = 3.18$, $\rho = 0.5$ для светлого двухсолитонного решения $r^{(2)}$; во всех случаях $\lambda_{01} = \lambda_{02} = 0$.

Аналогично, трехсолитонные решения для матриц $\mathcal{F}_k$ и Λ_k ($k = 1, 2, 3$) показаны на рис. 3, где $\lambda_1 = -1.57$, $\lambda_2 = 2.88$, $\lambda_3 = 3.7$, $\rho = -1$, $\lambda_{01} = -\lambda_{03} = 5$, $\lambda_{02} = 3$

Рис. 1. Односолитонное решение для двухкомпонентной СбД-системы: темный солитон (а) и светлый солитон (б, в).

Рис. 2. Двухсолитонные решения для двухкомпонентной СбД-системы: темный солитон (а) и светлый солитон (б, в).

Рис. 3. Трехсолитонные решения для двухкомпонентной СбД-системы: темный солитон (а) и светлый солитон (б, в).

для темного трехсолитонного решения, $\lambda_1 = -1.67$, $\lambda_2 = 2.98$, $\lambda_3 = 2.79$, $\rho = 0.8$ для темного трехсолитонного решения $r^{(1)}$ и $\lambda_1 = -1.87$, $\lambda_2 = -2.78$, $\lambda_3 = 1.97$, $\rho = -0.8$ для темного трехсолитонного решения $r^{(2)}$; в двух последних случаях $\lambda_{01} = -\lambda_{02} = \lambda_{03} = 2$.

На рисунках 2 и 3 можно увидеть взаимодействие двух и трех солитонов. Эти независимые солитоны распространяются в пространстве и сохраняют неизменными свои профили до и после столкновения. После столкновения они разделяются и проходят друг через друга независимо, сохраняя неизменными свои амплитуды и скорости. Следует заметить, что форма солитонов характеризуется заданными параметрами. При изменении этих параметров структура солитонов тоже может измениться. Аналогично, применяя K раз ПД к затравочному решению, можно получить K -солитонное решение (или многосолитонное решение) для двухкомпонентной СбД-системы.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы представили пару Лакса для многокомпонентной СбД-системы. Путем обобщения случая матрицы Лакса размера 2×2 на матрицу размера $2^N \times 2^N$ мы получили многокомпонентную СбД-систему как условие совместности пары Лакса. Выписав матричные уравнения Риккати, мы построили законы сохранения для данной системы. С помощью преобразования Дарбу были получены многосолитонные решения для многокомпонентной СбД-системы. Кроме того, мы итерационно построили K -солитонные решения в терминах квазидетерминантов, а также показали их связь с решениями, полученными методом одевания. В качестве примеров приведены явные выражения и графики одно-, двух- и трехсолитонных решений.

Полученные результаты можно обобщить на случай некоммутативной системы. Было бы интересно также, наряду с бозонными, включить в рассмотрение фермионные степени свободы, чтобы исследовать суперсимметричное обобщение такой системы.

Благодарности. Авторы благодарят рецензента за полезные комментарии, которые способствовали улучшению статьи.

Список литературы

- [1] M. Pietrzyk, I. Kanattšikov, U. Bandelow, “On the propagation of vector ultra-short pulses”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 162–170.
- [2] M. J. Ablowitz, B. Prinari, A. D. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **302**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [3] Y. Matsuno, “A novel multi-component generalization of the short pulse equation and its multisoliton solutions”, *J. Math. Phys.*, **52**:12 (2011), 123702, 22 pp., arXiv: 1111.1792.
- [4] T. Tsuchida, M. Wadati, “Multi-field integrable systems related to WKI-type eigenvalue problems”, *J. Phys. Soc. Japan*, **68**:7 (1999), 2241–2245.
- [5] C. Rogers, W. K. Schief, *Bäcklund and Darboux Transformations. Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [6] R. Hirota, *Direct Method in Soliton Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, **155**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [7] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, Berlin, 1991.
- [8] C. Gu, H. Hu, Z. Zhou, *Darboux Transformations in Integrable Systems. Theory and Their Applications to Geometry*, Mathematical Physics Studies, **26**, Springer, Berlin, 2005.
- [9] C. X. Li, J. J. C. Nimmo, “Quasideterminant solutions of a non-Abelian Toda lattice and kink solutions of a matrix sine-Gordon equation”, *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **464**:2092 (2008), 951–966, arXiv: 0711.2594.
- [10] M. Hassan, “Darboux transformation of the generalized coupled dispersionless integrable system”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**:6 (2009), 065203, 11 pp., arXiv: 0912.1671.
- [11] Y. Shi, J. J. C. Nimmo, D. Zhang, “Darboux and binary Darboux transformations for discrete integrable systems I. Discrete potential KdV equation”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **47**:2 (2014), 025205, 11 pp.
- [12] H. W. A. Riaz, M. Hassan, “Darboux transformation of a semi-discrete coupled dispersionless integrable system”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **48** (2017), 387–397.
- [13] H. W. A. Riaz, M. Hassan, “Multisoliton solutions of integrable discrete and semi-discrete principal chiral equations”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **54** (2018), 416–427.

- [14] H. W. A. Riaz, M. Hassan, “A discrete generalized coupled dispersionless integrable system and its multisoliton solutions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **458**:2 (2018), 1639–1652.
- [15] K. Konno, H. Oono, “New coupled integrable dispersionless equations”, *J. Phys. Soc. Japan*, **63**:2 (1994), 377–378.
- [16] V. E. Adler, A. B. Shabat, “Toward a theory of integrable hyperbolic equations of third order”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**:39 (2012), 395207, 17 pp.
- [17] H. Kakuata, K. Konno, “Lagrangian, Hamiltonian and conserved quantities for coupled integrable, dispersionless equations”, *J. Phys. Soc. Japan*, **65**:1 (1995), 1–2.
- [18] H. Kakuata, K. Konno, “A generalization of coupled integrable, dispersionless system”, *J. Phys. Soc. Japan*, **65**:2 (1996), 340–341.
- [19] T. Alagesan, K. Porsezian, “Painleve analysis and the integrability properties of coupled integrable dispersionless equations”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **7**:8 (1996), 1209–1212.
- [20] T. Alagesan, K. Porsezian, “Singularity structure analysis and Hirota’s bilinearisation of the coupled integrable dispersionless equations”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **8**:10 (1997), 1645–1650.
- [21] S. C. Anco, T. Wolf, “Some symmetry classifications of hyperbolic vector evolution equations”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**, suppl. 1 (2005), 13–31.
- [22] T. Tsuchida, “New reductions of integrable matrix partial differential equations: $sp(m)$ -invariant systems”, *J. Math. Phys.*, **51**:5 (2010), 053511, 27 pp., arXiv:0712.4373.
- [23] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, “Релятивистски инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи”, *ЖЭТФ*, **74**:6 (1978), 1953–1973.

Поступила в редакцию 15.01.2018,
после доработки 1.03.2018