Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Я. Арефьева, И. В. Волович, О модели Сачдева–Йе–Китаева в реальном времени, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 2, 296–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:17:12

© 2018 г.

И. Я. Арефьева*, И. В. Волович*

О МОДЕЛИ САЧДЕВА–ЙЕ–КИТАЕВА В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Обсуждается непертурбативная формулировка модели Сачдева–Йе–Китаева. Статистическая сумма модели может быть представлена как функциональный интеграл по переменным Грассмана в евклидовом времени, который хорошо определен, но интеграл расходится после преобразования к фермионным бислокальным полям. Отмечено, что производящий функционал модели Сачдева–Йе–Китаева в реальном времени хорошо определен даже после преобразования к бислокальным полям и его можно использовать для непертурбативных исследований модели. Модель изучается в размерности ноль, построено ее разложение при больших N и исследуются фазовые переходы.

Ключевые слова: модели с беспорядком, $1/N$ -разложение, модель Сачдева–Йе–Китаева.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9533>

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Сачдева–Йе–Китаева (СЙК) [1]–[3] в последнее время рассматривается как интересный пример модели физики конденсированного состояния, допускающей нетривиальное голографическое описание [4]–[14].

Обычный подход к изучению статистической суммы модели СЙК основан на преобразовании к фермионным бислокальным полям и последующем использовании метода перевала для получения разложения по $1/N$. Однако с точки зрения бислокальных полей получается функциональный интеграл, который расходится и его трудно использовать в качестве отправной точки для непертурбативной формулировки.

Отметим, что производящий функционал модели СЙК в реальном времени хорошо определен даже после преобразования к бислокальным полям и его можно использовать для непертурбативных исследований его свойств.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

*Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия. E-mail: arefeva@mi-ras.ru, volovich@mi-ras.ru

Простой аналог евклидовой статистической суммы модели СЙК можно описать как гауссовский интеграл по вещественной оси со случайной константой связи g

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx dg e^{-g^2/2} e^{\pm gx^2} = \int dx e^{x^4/2}, \quad (1)$$

который расходится. Задача о придании смысла функциональному интегралу модели СЙК в представлении билинейных переменных подходящим выбором комплексных контуров интегрирования обсуждалась в работах [11] и [14] и было сделано заключение, что все еще остаются открытые вопросы.

В формулировке реального времени, обсуждаемой в настоящей статье, мы имеем интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx dg e^{-g^2/2} e^{igx^2} = \int dx e^{-x^4/2}, \quad (2)$$

который хорошо определен.

Определим производящий функционал в нульмерной модели СЙК с M репликами в реальном времени как интеграл Грассмана (Березина) по антикоммутирующим переменным:

$$Z(A, J) = \int d\mu(\mathbf{J}) \int d\chi e^{i\mathcal{A}[\chi, J]}, \quad (3)$$

$$\mathcal{A}[\chi, J] = \frac{i}{2} \sum_{\alpha, \beta, j} \chi_j^\alpha A_{\alpha\beta} \chi_j^\beta + \sum_{\alpha} \sum_{i < j < k < l} \sqrt{\frac{3!J^2}{N^3}} J_{ijkl} \chi_i^\alpha \chi_j^\alpha \chi_k^\alpha \chi_l^\alpha, \quad (4)$$

где χ_j^α – грассмановы переменные, $i, j, k, l = 1, \dots, N$, $\alpha, \beta = 1, \dots, M$, $J > 0$, $(A_{\alpha\beta})$ – антисимметричная матрица с вещественными элементами, $d\mu(\mathbf{J})$ – гауссова вероятностная мера, а $\mathbf{J} = (J_{ijkl})$ – случайные величины с нулевым средним $\langle J_{ijkl} \rangle = 0$, причем дисперсия задается формулой $\langle J_{ijkl}^2 \rangle = 3! J^2 / N^3$.

Выполняя интегрирование по $d\mu(\mathbf{J})$, получаем

$$Z(A, J) = \int d\chi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, j} \chi_j^\alpha A_{\alpha\beta} \chi_j^\beta - \frac{NJ^2}{8} \sum_{\alpha, \beta} \left(\frac{1}{N} \sum_j \chi_j^\alpha \chi_j^\beta \right)^4 \right\}. \quad (5)$$

Заметим, что $Z(A, J)$ является многочленом от J^2 и $A_{\alpha\beta}$, поскольку существует только конечное число грассмановых переменных. Аналогичное естественное определение можно дать и для одномерной модели СЙК, которую можно назвать моделью СЙК в реальном времени (см. ниже).

Формулу (5) можно записать также с использованием билакальных переменных:

$$Z(A, J) = \left(\frac{N}{2\pi} \right)^{M(M-1)/2} \int d\Sigma dG \left(\text{Pf}(A + i\Sigma) \right)^N \exp \left\{ N \sum_{\alpha < \beta} \left[-\frac{J^2}{4} G_{\alpha\beta}^4 + i\Sigma_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} \right] \right\}. \quad (6)$$

Здесь Pf – пфаффиан, а $(G_{\alpha\beta})$ и $(\Sigma_{\alpha\beta})$ являются антисимметричными матрицами с вещественными элементами. Отметим наличие множителя $e^{-J^2 G_{\alpha\beta}^4/4}$, обеспечивающего сходимость интеграла.

Мы изучим поведение статистической суммы при больших N для конкретного случая нульмерной модели СЙК с двумя репликами ($M = 2$), который является просто интегралом

$$Z_q = \frac{N}{2\pi} \int dy (A + iy)^N \int dx e^{N(-J^2 x^q/q + ixy)} \quad (7)$$

с $q = 2$ и $q = 4$. Здесь x, y – вещественные переменные, A – вещественная константа, $J > 0$, N – натуральное число. Аналогичный интеграл как игрушечная модель для подходящего выбора контура в модели СЙК рассмотрен в работе [11].

В случае $q = 2$ выражение (7) после перемасштабирования x и y совпадает с точностью до константы с полиномом Эрмита $H_N(\sqrt{2N} A/2J)$. Используя асимптотическое поведение полиномов Эрмита при $N \rightarrow \infty$, мы обнаруживаем фазовый переход при $A/2J = \pm 1$ в этой модели. Аналогично получаем фазовый переход для $q = 4$.

Производящий функционал одномерной модели СЙК в реальном времени с M репликами можно представить в виде интеграла Грассмана по антикоммутирующим переменным $\chi_j^\alpha = \chi_j^\alpha(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, как

$$\langle Z^M \rangle = \int d\mu(\mathbf{J}) \int \mathcal{D}\chi e^{i\mathcal{A}}, \quad (8)$$

где действие имеет вид

$$\mathcal{A} = \sum_\alpha \int d\tau \left(\frac{i}{2} \sum_j \chi_j^\alpha \partial_\tau \chi_j^\alpha + \sum_{i < j < k < l} \sqrt{\frac{3!J^2}{N^3}} J_{ijkl} \chi_i^\alpha \chi_j^\alpha \chi_k^\alpha \chi_l^\alpha \right). \quad (9)$$

Имеем

$$\langle Z^M \rangle = \int \mathcal{D}\chi \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\alpha, j} \int d\tau \chi_j^\alpha \partial_\tau \chi_j^\alpha - \frac{NJ^2}{8} \sum_{\alpha, \beta} \int d\tau \int d\tau' \left(\frac{1}{N} \sum_j \chi_j^\alpha(\tau) \chi_j^\beta(\tau') \right)^4 \right].$$

Производящий функционал можно также записать в терминах билакальных переменных:

$$\langle Z^M \rangle = \int \mathcal{D}\Sigma \mathcal{D}G e^{NI}, \quad (10)$$

где

$$I = \ln \text{Pf}(\partial_\tau + i\Sigma) + \sum_{\alpha < \beta} \int d\tau \int d\tau' \left(i\Sigma_{\alpha\beta}(\tau, \tau') G_{\alpha\beta}(\tau, \tau') - \frac{J^2}{4} G_{\alpha\beta}(\tau, \tau')^4 \right). \quad (11)$$

Здесь $G = (G_{\alpha\beta}(\tau, \tau'))$, $\Sigma = (\Sigma_{\alpha\beta}(\tau, \tau'))$ и $G_{\alpha\beta}(\tau, \tau')$, $\Sigma_{\alpha\beta}(\tau, \tau')$ являются антисимметричными вещественнозначными функциями (билокальные поля).

Заметим, что множитель $e^{-NJ^2 G_{\alpha\beta}(\tau, \tau')^4/4}$ обеспечивает сходимость интеграла.

Модель СЙК описывает систему со случайным взаимодействием, т.е. открытую квантовую систему (см. недавние работы по теории открытых квантовых систем [15]–[18]).

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы получаем представление (6). В разделе 3 мы рассматриваем простейший случай модели $q = 2$ и, используя соотношение для свободной энергии в данной модели с полиномами Эрмита, исследуем поведение модели в пределе больших N . В разделе 4, используя метод перевала, мы исследуем поведение модели $q = 4$ в пределе больших N . В заключительном разделе 5 содержится обсуждение результатов.

2. НУЛЬМЕРНАЯ МОДЕЛЬ СЙК

Производящий функционал для нульмерной модели СЙК задается формулой (5). Покажем, что его можно представить в виде (6). Для этого мы используем преобразование Фурье. Если $f(x)$ – интегрируемая быстроубывающая функция на вещественной оси, то имеет место следующее тождество для обратного преобразования Фурье:

$$f(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{iy(x-\Theta)}. \quad (12)$$

Эта формула справедлива не только в случае, когда Θ является вещественной переменной, но также и в случае, когда Θ – нильпотентный элемент алгебры Грассмана, в частности для $\Theta = \Theta_{\alpha\beta}$,

$$\Theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_j \chi_j^\alpha \chi_j^\beta. \quad (13)$$

Предполагается, что функции $f(\Theta)$ и $e^{-iy\Theta}$ понимаются как степенные ряды по Θ .

Заметим, что мы не используем такие выражения, как $\delta(x - \Theta)$. В принципе такой объект можно определить, используя суперанализ на банаховых алгебрах, разработанный в работе [19], но на данный момент это нам не нужно.

2.1. Билокальные переменные в нульмерной модели. Мы начинаем с производящего функционала в формулировке реального времени, заданного представлением (5). Используя представление (12) для $f(\Theta_{\alpha\beta}) = e^{-NJ^2\Theta_{\alpha\beta}^4/4}$, где $\Theta_{\alpha\beta} = (1/N) \sum_j \chi_j^\alpha \chi_j^\beta$, получаем

$$e^{-(NJ^2/4)\Theta_{\alpha\beta}^4} = \int \prod_{\alpha<\beta} \frac{d\Sigma_{\alpha\beta}}{2\pi} \int \prod_{\alpha<\beta} dG_{\alpha\beta} \exp \left\{ -\frac{NJ^2}{4} G_{\alpha\beta}^4 + i\Sigma_{\alpha\beta}(G_{\alpha\beta} - \Theta_{\alpha\beta}) \right\}$$

и

$$\begin{aligned} Z(A, J) = & \int \prod_{j,\alpha} d\chi_j^\alpha \int \prod_{\alpha<\beta} \frac{N d\Sigma_{\alpha\beta}}{2\pi} \int \prod_{\alpha<\beta} dG_{\alpha\beta} \exp \left\{ N \sum_{\alpha<\beta} \left[-\frac{J^2}{4} G_{\alpha\beta}^4 + i\Sigma_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} \right] \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,j} A_{\alpha\beta} \chi_j^\alpha \chi_j^\beta - \frac{i}{2} \sum_{\alpha,\beta,j} \Sigma_{\alpha\beta} \chi_j^\alpha \chi_j^\beta \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Интегрируя по грассмановым переменным, получаем

$$\begin{aligned} Z(A, J) = & \int \prod_{\alpha<\beta} \frac{N d\Sigma_{\alpha\beta}}{2\pi} \int \prod_{\alpha<\beta} dG_{\alpha\beta} (\text{Pf}(i\Sigma_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}))^N \times \\ & \times \exp \left\{ N \sum_{\alpha<\beta} \left[-\frac{J^2}{4} G_{\alpha\beta}^4 + i\Sigma_{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

3. НУЛЬМЕРНАЯ МОДЕЛЬ СЙК С ДВУМЯ РЕПЛИКАМИ

3.1. Реальное время для нульмерной модели СЙК с двумя репликами.

Рассмотрим нульмерную модель СЙК с двумя репликами. В этом случае мы имеем только следующие переменные: $G_{12} = x$, $\Sigma_{12} = y$ и $A_{12} = A$, а производящий функционал имеет вид

$$Z_q(A, J) = \frac{N}{2\pi} \int dy \int dx (iy + A)^N e^{N(-J^2 x^q/q + ixy)}, \quad q = 2, 4, 6, \dots \quad (16)$$

Мы будем изучать его асимптотическое поведение при $N \rightarrow \infty$. Случай $A = 0$ соответствует вакуумному функционалу, случай $A \neq 0$ соответствует производящему функционалу.

3.2. Квадратичная модель и многочлены Эрмита. Рассмотрим теперь производящий функционал для квадратичного случая

$$Z_2(A, J) = \frac{N}{2\pi} \int dy \int dx (iy + A)^N e^{N(-(J^2/2)x^2 + ixy)}, \quad J > 0. \quad (17)$$

Имеет место следующая формула:

$$Z_2(A, J) = 2 \left(\frac{J}{\sqrt{2N}} \right)^N H_N \left(\sqrt{2N} \frac{A}{2J} \right), \quad (18)$$

где $H_N(x)$, $N = 1, 2, \dots$, – многочлены Эрмита. Действительно,

$$Z_2(A, J) = \frac{1}{J} \sqrt{\frac{N}{2\pi}} \int dy (iy + A)^N e^{-Ny^2/2J^2}, \quad (19)$$

и, используя представление

$$H_N(x) = \frac{2^N}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt (x + it)^N e^{-t^2}, \quad (20)$$

после замены переменных $y = Jt \sqrt{2/N}$ в (19) получаем (18).

3.3. Фазовый переход. Как было показано Планшерелем и Ротачем, существуют две области на полупрямой $x > 0$, где многочлены Эрмита $H_N((2N+1)^{1/2}x)$ имеют разное асимптотическое поведение при $N \rightarrow \infty$ для $0 < x < 1$ и для $1 < x < \infty$ (см. [20]). Напомним, что полиномы Эрмита удовлетворяют условию симметрии $H_N(-x) = (-1)^N H_N(x)$. В нашем случае мы должны использовать слегка измененную асимптотику, которая была найдена в работе [21] и более поздней работе [22]. В этом случае также существует разное асимптотическое поведение многочленов Эрмита $H_N(\sqrt{2N}x)$ для $|x| > 1$ и $|x| < 1$. Критические точки для многочленов Эрмита $H_N(\sqrt{2N}(A/2J))$ равны $A/2J = \pm 1$. Для различных значений $A/2J$ мы получаем:

- Для $A/2J > 1$, используя параметризацию

$$\frac{A}{2J} = \text{ch } \Psi, \quad (21)$$

для $\psi > 0$ асимптотически при $N \rightarrow \infty$ получаем

$$Z_2(A, J) \sim Pe^{NF} \equiv 2 \exp \left[\frac{N}{2} (e^{-2\Psi} + 2\Psi + 2 \ln J) + \frac{1}{2} \Psi \right] \sqrt{\frac{1}{2 \operatorname{sh} \Psi}}, \quad (22)$$

где

$$F = \frac{1}{2} (e^{-2\Psi} + 2\Psi + 2 \ln J). \quad (23)$$

Заметим, что F может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для $\psi < 0$ при той же параметризации имеем

$$Z_2(A, J) \sim 2 \exp \left[\frac{N}{2} (e^{2\Psi} - 2\Psi + 2 \ln J) - \frac{1}{2} \Psi \right] \sqrt{\frac{-1}{2 \operatorname{sh} \Psi}}. \quad (24)$$

• Для $0 < A/2J < 1$, используя параметризацию

$$\frac{A}{2J} = \cos \psi, \quad (25)$$

имеем для $\psi > 0$

$$Z_2(A, J) \sim Pe^{NF} \equiv 2e^{(N/2)[2 \ln J + \cos 2\psi]} \cos \left\{ N \left[\frac{1}{2} (\sin 2\psi - 2\psi) \right] + \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right\} \sqrt{\frac{2}{\sin \psi}}, \quad (26)$$

где

$$F = \frac{1}{2} (2 \ln J + \cos 2\psi). \quad (27)$$

При $\psi < 0$ с той же параметризацией мы имеем аналогичную асимптотику с $\psi \rightarrow -\psi$ в (26), т. е.

$$Z_2(A, J) \sim 2e^{(N/2)[2 \ln(J) + \cos 2\psi]} \cos \left\{ N \left[\frac{1}{2} (\sin 2\psi - 2\psi) \right] - \frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right\} \sqrt{-\frac{2}{\sin \psi}}. \quad (28)$$

• При $A \approx 2J$ используя параметризацию

$$\frac{A}{2J} = 1 - \frac{z}{2^{1/2} 3^{1/3} N^{1/6} \sqrt{2N+1}}$$

с комплексным и ограниченным параметром z , имеем

$$Z_2(A, J) \sim \left(2J \sqrt{\frac{1}{e}} \right)^N (2\pi)^{1/2} N^{1/6} e^{x^2/2} (\operatorname{Ai}(-3^{-1/3}z) + O(N^{-2/3})). \quad (29)$$

Заметим, что те же асимптотики (24) и (26) можно найти, используя метод перевала.

Полуплоскость $(A, J > 0)$ делится кривыми $F(J, A) = 0$ и $A = 2J$ на области с различной асимптотикой $Z_2(A, J)$ при больших N (см. рис. 1).

Рис. 1. Графики уровней для $F(A, J)$ при $A/2J < 1$ (а) и $A/2J > 1$ (б) как функции от Ψ, J и ψ, J соответственно. Графики уровней для $F(A, J)$ как функции от A и J (в). Пунктирная линия показывает изменение режимов, а штриховая линия показывает изменение знака функции $F(A, J)$.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

4.1. Статистическая сумма. Рассмотрим сначала статистическую сумму для взаимодействия четвертой степени:

$$Z_4(J) = \frac{N}{2\pi} \int dy \int dx e^{N\mathfrak{S}_4}, \quad J > 0, \quad (30)$$

где

$$\mathfrak{S}_4 = -\frac{J^2}{4} x^4 + ixy + \ln y + \ln i. \quad (31)$$

Стационарные точки выводятся из уравнений

$$-J^2 x^3 + iy = 0, \quad \frac{1}{y} + ix = 0. \quad (32)$$

Решениями являются

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_0^{(1)}, \mathbf{y}_0^{(1)}) &= \left(-\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2J}}, -\sqrt{2J}e^{i\pi/4}\right), & (\mathbf{r}_0^{(2)}, \mathbf{y}_0^{(2)}) &= \left(\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2J}}, \sqrt{2J}e^{i\pi/4}\right), \\(\mathbf{r}_0^{(3)}, \mathbf{y}_0^{(3)}) &= \left(-\frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{2J}}, \sqrt{2J}e^{i3\pi/4}\right), & (\mathbf{r}_0^{(4)}, \mathbf{y}_0^{(4)}) &= \left(\frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{2J}}, -\sqrt{2J}e^{i3\pi/4}\right).\end{aligned}\quad (33)$$

Разлагая статистическую сумму в окрестности стационарных точек, мы получаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4^{(1)} &= \mathfrak{S}_{01} - \frac{3}{2}iJ\left(x + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2J}}\right)^2 + \frac{i(y + \sqrt{2J}e^{i\pi/4})^2}{2J} + i\left(x + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2J}}\right)(y + \sqrt{2J}e^{i\pi/4}), \\ \mathfrak{S}_{01} &= \ln(-\sqrt{2J}e^{i\pi/4}) - \frac{3}{4}, \\ \mathfrak{S}_4^{(2)} &= \mathfrak{S}_{02} - \frac{3}{2}iJ\left(x - \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2J}}\right)^2 + \frac{i(y - \sqrt{2J}e^{i\pi/4})^2}{2J} + i\left(x - \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2J}}\right)(y - \sqrt{2J}e^{i\pi/4}), \\ \mathfrak{S}_{02} &= \ln(\sqrt{2J}e^{i\pi/4}) - \frac{3}{4}, \\ \mathfrak{S}_4^{(3)} &= \mathfrak{S}_{02} + \frac{3}{2}iJ\left(x + \frac{e^{3i\pi/4}}{\sqrt{2J}}\right)^2 - \frac{i(y - \sqrt{2J}e^{3i\pi/4})^2}{2J} + \\ &\quad + i\left(x + \frac{e^{3i\pi/4}}{\sqrt{2J}}\right)(y - \sqrt{2J}e^{3i\pi/4}), \\ \mathfrak{S}_{03} &= \ln(\sqrt{2J}e^{i3\pi/4}) - \frac{3}{4}, \\ \mathfrak{S}_4^{(4)} &= \mathfrak{S}_{02} + \frac{3}{2}iJ\left(x - \frac{e^{3i\pi/4}}{\sqrt{2J}}\right)^2 - \frac{i(y + \sqrt{2J}e^{3i\pi/4})^2}{2J} + \\ &\quad + i\left(x - \frac{e^{3i\pi/4}}{\sqrt{2J}}\right)(y + \sqrt{2J}e^{3i\pi/4}), \\ \mathfrak{S}_{04} &= \ln(-\sqrt{2J}e^{i3\pi/4}) - \frac{3}{4}.\end{aligned}\quad (34)$$

Заметим, что вещественные части $\mathfrak{S}_{0i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, совпадают и все четыре точки вносят вклад в статистическую сумму. Эти вклады следующие. Интегрирование вблизи первой, второй, третьей и четвертой стационарных точек,

$$Z_4^{(i)}(J) = \frac{N}{2\pi} \int dy \int dx e^{N\mathfrak{S}^{(i)}}, \quad (35)$$

дает

$$\begin{aligned}Z_4^{(1)}(J) &= \frac{\pi e^{-3N/4}((-1-i)\sqrt{J/2})^N}{N}, \\ Z_4^{(2)}(J) &= \frac{\pi e^{-3N/4}((1+i)\sqrt{J/2})^N}{N}, \\ Z_4^{(3)}(J) &= \frac{\pi e^{-3N/4}((-1+i)\sqrt{J/2})^N}{N}, \\ Z_4^{(4)}(\tilde{J}) &= \frac{\pi e^{-3N/4}((1-i)\sqrt{J/2})^N}{N}.\end{aligned}\quad (36)$$

Суммируя по всем критическим точкам, получим

$$\begin{aligned}
 Z_4(\tilde{J}) &= \sum_{i=1}^4 Z_4^{(i)}(\tilde{J}) = \\
 &= e^{-3N/4} \left(\sqrt{\frac{J}{2}} \right)^N ((-1-i)^N + (1+i)^N + (-1+i)^N + (1-i)^N) = \\
 &= e^{-3N/4} J^{N/2} \begin{cases} 4, & N = 8n, \\ 0, & N = 8n + 1, \\ 0, & N = 8n + 2, \\ 0, & N = 8n + 3, \\ -4, & N = 8n + 4, \\ 0, & N = 8n + 5, \\ 0, & N = 8n + 6, \\ 0, & N = 8n + 7. \end{cases} \quad (37)
 \end{aligned}$$

4.2. Производящая функция. Производящая функция, зависящая от A и J , определяется как

$$Z_4(A, J) = \frac{N}{2\pi} \int dy \int dx e^{NS_4(A, J)}, \quad J > 0, \quad (38)$$

где

$$S_4(A, J) = -J^2 \frac{x^4}{4} + ixy + \ln(iy + A). \quad (39)$$

Мы можем переписать это выражение как

$$\begin{aligned}
 Z_4(A, J) &= \frac{N}{2\pi} J^{N/2} \int dy \int dx \left(iy + \frac{A}{\sqrt{J}} \right)^N e^{-x^4/4 + ixy} = \\
 &= \frac{N}{2\pi} J^{N/2} \int dy \int dx e^{NS_4(\tilde{A})}, \quad J > 0, \quad (40)
 \end{aligned}$$

где

$$S_4(\tilde{A}) = -\frac{x^4}{4} + ixy + \ln(iy + \tilde{A}), \quad \tilde{A} = A/\sqrt{J}$$

Стационарные точки выводятся из уравнений

$$-x^3 + iy = 0, \quad \frac{i}{\tilde{A} + iy} + ix = 0, \quad (41)$$

которые дают

$$\begin{aligned}
 x_0^{(1)} &= \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}K_1, & x_0^{(2)} &= \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}K_1, \\
 x_0^{(3)} &= -\frac{1}{2}M - \frac{1}{2}K_2, & x_0^{(4)} &= -\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}K_2,
 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
y_0^{(1)} &= i \left(K_2 \frac{3}{4} \tilde{A} + \frac{1}{8} K_1^3 + \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{K_1}{P}} - \frac{1}{8} M^3 + \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{M}{P}} + \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} K_1 P + \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} M P \right), \\
y_0^{(2)} &= i \left(\frac{3}{4} \tilde{A} - \frac{1}{8} K_1^3 - \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{K_1}{P}} - \frac{1}{8} M^3 + \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{M}{P}} - \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} K_1 P + \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} M P \right), \\
y_0^{(3)} &= i \left(\frac{3}{4} \tilde{A} + \frac{1}{8} K_2^3 + \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{K_2}{P}} + \frac{1}{8} M^3 - \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{M}{P}} + \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} K_2 P - \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} M P \right), \\
y_0^{(4)} &= i \left(\frac{3}{4} \tilde{A} - \frac{1}{8} K_2^3 - \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{K_2}{P}} + \frac{1}{8} M^3 - \sqrt[3]{\frac{9}{4} \frac{M}{P}} - \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} K_2 P - \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} M P \right),
\end{aligned} \tag{43}$$

где

$$\begin{aligned}
P &= \sqrt[3]{\sqrt{3} \sqrt{27 \tilde{A}^4 - 256} + 9 \tilde{A}^2}, & M &= \sqrt{\frac{P}{\sqrt[3]{18}}} + \sqrt[3]{\frac{2}{3} \frac{4}{P}}, \\
K_1 &= \sqrt{-\frac{2 \tilde{A}}{M} - M^2}, & K_2 &= \sqrt{\frac{2 \tilde{A}}{M} - M^2}.
\end{aligned}$$

На рис. 2 представлено положение этих корней.

Мы видим, что при $|\tilde{A}| < 4/3^{3/4}$ для переменной x существуют две пары комплексно-сопряженных корней: $x_0^{(1)} = \bar{x}_0^{(2)}$, $x_0^{(4)} = \bar{x}_0^{(3)}$, при этом $y_0^{(2)} = -\bar{y}_0^{(1)}$, $y_0^{(4)} = -\bar{y}_0^{(3)}$ (см. (42), (43)). Мы называем эту область тригонометрической областью $\mathfrak{T}$.

Для $\tilde{A} = \pm 4/3^{3/4}$ мы имеем для переменной x одну пару комплексно-сопряженных корней $x_0^{(1)} = \bar{x}_0^{(2)}$ и одну пару равных вещественных корней $x_0^{(3)} = x_0^{(4)}$, а для переменной y — одну пару корней, связанных как $y_0^{(2)} = -\bar{y}_0^{(1)}$, и одну пару равных чисто мнимых корней $y_0^{(3)} = y_0^{(4)}$. Это критическая область $\mathfrak{C}$.

Для $\tilde{A} > 4/3^{3/4}$ мы имеем для переменной x одну пару комплексно-сопряженных корней $x_0^{(1)} = \bar{x}_0^{(2)}$ и одну пару неравных вещественных корней $x_0^{(3)} < x_0^{(4)} < 0$, а для переменной y — одну пару корней, связанных как $y_0^{(2)} = -\bar{y}_0^{(1)}$, и одну пару неравных чисто мнимых корней $0 < \text{Im } y_0^{(4)} < \text{Im } y_0^{(3)}$. Это гиперболическая область $\mathfrak{H}_+$.

Для $\tilde{A} < -4/3^{3/4}$ мы имеем для переменной x одну пару комплексно-сопряженных корней $x_0^{(3)} = \bar{x}_0^{(4)}$ и одну пару неравных вещественных корней $0 < x_0^{(1)} < x_0^{(2)}$, а для переменной y — одну пару корней, связанных как $y_0^{(3)} = -\bar{y}_0^{(2)}$, и одну пару неравных чисто мнимых корней $\text{Im } y_0^{(2)} < \text{Im } y_0^{(1)} < 0$. Это гиперболическая область $\mathfrak{H}_-$.

Границы $\mathfrak{H}_\pm$ и $\mathfrak{T}_\pm$ определяются из решений уравнения

$$K_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\tilde{A} - M^3 = 0, \tag{44}$$

или явно

$$144\tilde{A}^2 (\sqrt{81\tilde{A}^4 - 768} + 9\tilde{A}^2) = (\sqrt[3]{2} (\sqrt{81\tilde{A}^4 - 768} + 9\tilde{A}^2)^{2/3} + 8\sqrt[3]{3})^3. \tag{45}$$

Решениями уравнения (45) являются

$$\tilde{A}_0 = \pm \frac{4}{3^{3/4}} \approx \pm 1.755. \tag{46}$$

Рис. 2. Расположение стационарных точек $(x_0^{(i)}(\tilde{A}), y_0^{(i)}(\tilde{A}))$, $i = 1, 2, 3, 4$, в зависимости от $\tilde{A}$.

Разлагая действие (39) в окрестности этих стационарных точек, получаем

$$S_4(A, J)|_{x \sim x_0^{(i)}} \approx S_4^{(i)}(A, J) = S_{0i}(A, J) + Q_{\alpha\beta}^{(i)}(\tilde{A}) X^{(i)\alpha} X^{(i)\beta}, \quad (47)$$

$$X^\alpha = (X, Y), \quad X = x - x_0^{(i)}, \quad Y = y - y_0^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

где

$$S_{0i}(A, J) = S_{0i}(\tilde{A}) + \ln \sqrt{J}, \quad (48)$$

$$S_{0i}(\tilde{A}) = -\frac{x_0^{(i)4}}{2} + i x_0^{(i)} y_0^{(i)} + \ln(i y_0^{(i)} + \tilde{A}).$$

Мы имеем два типа решений: тригонометрические решения в области $\mathfrak{T}$ и гиперболические решения в области $\mathfrak{H}$. В области $\mathfrak{T}$ существуют две пары комплексно-сопряженных корней, а в области $\mathfrak{H}$ существуют одна пара комплексно-сопряженных корней и два вещественных корня системы (41).

В области $\mathfrak{T}$ вещественные части $S_{01}(\tilde{A})$ и $S_{02}(\tilde{A})$ и вещественные части $S_{03}(\tilde{A})$ и $S_{04}(\tilde{A})$ совпадают,

$$\text{Re}[S_{01}(\tilde{A})] = \text{Re}[S_{02}(\tilde{A})], \quad \text{Re}[S_{03}(\tilde{A})] = \text{Re}[S_{04}(\tilde{A})]. \quad (49)$$

Оказывается, что

$$\begin{aligned} \text{Re}[S_{01}(\tilde{A})] &> \text{Re}[S_{03}(\tilde{A})], & \tilde{A} \in \mathfrak{T}_-, \\ \text{Re}[S_{01}(\tilde{A})] &< \text{Re}[S_{03}(\tilde{A})], & \tilde{A} \in \mathfrak{T}_+, \end{aligned} \quad (50)$$

Рис. 3. Значения $\text{Re}[S_{0i}(\tilde{A})]$, $i = 1, 2, 3, 4$, для произвольного $\tilde{A}$.

Области $\mathfrak{T}_{\mp}$ являются частями $\mathfrak{T}$, где $\tilde{A} < 0$ и $\tilde{A} > 0$ соответственно. В области $\mathfrak{H}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \text{Re}[S_{02}(\tilde{A})] &> \text{Re}[S_{01}(\tilde{A})] > \text{Re}[S_{03}(\tilde{A})] = \text{Re}[S_{04}(\tilde{A})], & \tilde{A} \in \mathfrak{H}_-, \\ \text{Re}[S_{03}(\tilde{A})] &> \text{Re}[S_{04}(\tilde{A})] > \text{Re}[S_{01}(\tilde{A})] = \text{Re}[S_{02}(\tilde{A})], & \tilde{A} \in \mathfrak{H}_+, \end{aligned} \quad (51)$$

области $\mathfrak{H}_{\mp}$ являются частями $\mathfrak{H}$, где $\tilde{A} < 0$ и $\tilde{A} > 0$ соответственно (см. рис. 3).

На рис. 3 приведена зависимость $\text{Re}[S_{0i}(\tilde{A})]$, $i = 1, 2, 3, 4$, от $\tilde{A}$.

Квадратичные формы имеют следующие коэффициенты:

$$Q_{11}^{(i)} = -\frac{3}{2}x_0^{(i)2}, \quad Q_{12}^{(i)} = i, \quad Q_{22}^{(i)} = \frac{1}{2(\tilde{A} + iy_0^{(i)})^2}. \quad (52)$$

Интегрируя по x и y , получаем префактор

$$\Phi^{(k)} = \frac{2\pi}{N\sqrt{1 - 3x_0^{(k)2}/(\tilde{A} + iy_0^{(k)})^2}}, \quad (53)$$

который может быть записан в виде

$$\Phi^{(k)} = R^{(k)} e^{i\phi^{(k)}}, \quad R^{(k)} > 0, \quad 0 \leq \phi^{(k)} \leq 2\pi, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (54)$$

Мы можем аппроксимировать интеграл вкладами этих четырех точек,

$$Z_4(A, J) = \sum_{i=1}^4 \Phi^{(i)} e^{NS_{0i}(A, J)}, \quad (55)$$

но в соответствии с неравенствами (50) (см. рис. 3) в области $\mathfrak{H}_-$ доминирует вклад от второй точки $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})$, в области $\mathfrak{H}_+$ доминирует вклад от третьей точки $(x_0^{(3)}, y_0^{(3)})$.

В области $\mathfrak{T}_-$ доминируют вклады от первой и второй точек $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})$ и $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})$, а в $\mathfrak{T}_+$ доминируют вклады от третьей и четвертой точек $(x_0^{(3)}, y_0^{(3)})$ и $(x_0^{(4)}, y_0^{(4)})$.

Рис. 4. Линии одинакового уровня свободной энергии $F(A, J)$, заданной формулой (57). Штриховая линия – линия фазового перехода, пунктирная линия – изменение знака $F(A, J)$.

Конечным результатом является выражение

$$Z_4(A, J) \approx P\left(\frac{A}{\sqrt{J}}\right) e^{NF(A, J)}, \quad (56)$$

где

$$F(A, J) \approx \begin{cases} \operatorname{Re} S_{01}\left(\frac{A}{\sqrt{J}}\right) + \frac{1}{2} \ln J, & \tilde{A} \in \mathfrak{T}_-, \\ \operatorname{Re} S_{03}\left(\frac{A}{\sqrt{J}}\right) + \frac{1}{2} \ln J, & \tilde{A} \in \mathfrak{T}_+, \\ \operatorname{Re} S_{01}\left(\frac{A}{\sqrt{J}}\right) + \frac{1}{2} \ln J, & \tilde{A} \in \mathfrak{H}_-, \\ \operatorname{Re} S_{03}\left(\frac{A}{\sqrt{J}}\right) + \frac{1}{2} \ln J, & \tilde{A} \in \mathfrak{H}_+, \end{cases} \quad (57)$$

и

$$P(\tilde{A}) = \begin{cases} 2R^{(1)}(\tilde{A}) \cos(\phi^{(1)}(\tilde{A}) + N \operatorname{Im} S_{01}(\tilde{A})), & \tilde{A} \in \mathfrak{T}_-, \\ 2R^{(3)}(\tilde{A}) \cos(\phi^{(3)}(\tilde{A}) + N \operatorname{Im} S_{03}(\tilde{A})), & \tilde{A} \in \mathfrak{T}_+, \\ 2R^{(1)}(\tilde{A}), & \tilde{A} \in \mathfrak{H}_-, \\ 2R^{(3)}(\tilde{A}), & \tilde{A} \in \mathfrak{H}_+. \end{cases} \quad (58)$$

На рис. 4 построена зависимость свободной энергии $F(A, J)$ от параметров A и J . Мы видим, что полуплоскость $\{(A, J): J > 0\}$ делится критическими линиями на восемь областей.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена формулировка модели СЙК в реальном времени. Изучено асимптотическое поведение при больших N производящего функционала $Z_q(A, J)$ при нулевой размерной модели СЙК с $M = 2$ репликами и исследованы фазовые переходы.

Показано, что существует восемь областей в верхней полуплоскости $\{(A, J) : J > 0\}$ с различным поведением свободной энергии $F(A, J)$. При $q = 2$ критическими кривыми являются $A^2/J^2 = 4$, $F(A, J) = 0$, а при $q = 4$ критическими кривыми являются $A^4/J^2 = 4^4/3^3$, а также $F(A, J) = 0$ и $A = 0$. Для произвольного четного q критическая кривая задается уравнением $A^q/J^2 = q^q/(q-1)^{(q-1)}$.

Представляется интересным изучить поведение модели в переходном слое, т.е. найти аналог формулы (29). Также заслуживает внимания поведение этой модели при больших N и фазовые переходы в нульмерной модели СЙК в реальном времени с произвольным $M > 2$.

Нетривиальные решения модели СЙК для реплика-недиагонального случая рассмотрены в работе [23], а диаграммная техника $1/N$ -разложения – в терминах би-локальных полей в работе [24].

Благодарности. Авторы благодарят М. Храмцова и М. Тихановскую за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] S. Sachdev, J. Ye, “Gapless spin-fluid ground state in a random quantum Heisenberg magnet”, *Phys. Rev. Lett.*, **70**:21 (1993), 3339–3342, arXiv: cond-mat/9212030.
- [2] A. Kitaev, “A simple model of quantum holography (part 1)”, Talk at KITP Program: Entanglement in Strongly-Correlated Quantum Matter, online video, 2015, <http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/>; “A simple model of quantum holography (part 2)”, Talk at KITP Program: Entanglement in Strongly-Correlated Quantum Matter, online video, 2015, <http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev2/>.
- [3] S. Sachdev, “Bekenstein–Hawking entropy and strange metals”, *Phys. Rev. X*, **5**:4 (2015), 041025, 13 pp., arXiv: 1506.05111.
- [4] J. Polchinski, V. Rosenhaus, “The spectrum in the Sachdev–Ye–Kitaev Model”, *JHEP*, **04** (2016), 001, 24 pp., arXiv: 1601.06768.
- [5] A. Jevicki, K. Suzuki, J. Yoon, “Bi-local holography in the SYK model”, *JHEP*, **07** (2016), 007, 24 pp., arXiv: 1603.06246.
- [6] J. Maldacena, D. Stanford, “Remarks on the Sachdev–Ye–Kitaev model”, *Phys. Rev. D*, **94**:10 (2016), 106002, 43 pp., arXiv: 1604.07818.
- [7] J. Maldacena, D. Stanford, Z. Yang, “Conformal symmetry and its breaking in two-dimensional nearly anti-de Sitter space”, *Progr. Theor. Exp. Phys.*, **2016**:12 (2016), 12C104, 26 pp., arXiv: 1606.01857.
- [8] D. Bagrets, A. Altland, A. Kamenev, “Sachdev–Ye–Kitaev model as Liouville quantum mechanics”, *Nucl. Phys. B*, **911** (2016), 191–205, arXiv: 1607.00694.
- [9] K. Jensen, “Chaos in AdS₂ holography”, *Phys. Rev. Lett.*, **117**:11 (2016), 111601, 6 pp., arXiv: 1605.06098.
- [10] J. Engelsoy, T. G. Mertens, H. Verlinde, “An investigation of AdS₂ backreaction and holography”, *JHEP*, **07** (2016), 139, 29 pp., arXiv: 1606.03438.
- [11] J. S. Cotler, G. Gur-Ari, M. Hanada, J. Polchinski, P. Saad, S. H. Shenker, D. Stanford, A. Streicher, M. Tezuka, “Black holes and random matrices”, *JHEP*, **05** (2017), 118, 54 pp., arXiv: 1611.04650.
- [12] D. J. Gross, V. Rosenhaus, “The bulk dual of SYK: cubic couplings”, *JHEP*, **05** (2017), 092, 32 pp., arXiv: 1702.08016.
- [13] D. J. Gross, V. Rosenhaus, “All point correlation functions in SYK”, *JHEP*, **12** (2017), 148, 58 pp., arXiv: 1710.08113.
- [14] A. Kitaev, S. Suh, *The soft mode in the Sachdev–Ye–Kitaev model and its gravity dual*, arXiv: 1711.08467.

- [15] S. V. Kozyrev, A. A. Mironov, A. E. Teretenkov, I. V. Volovich, “Flows in nonequilibrium quantum systems and quantum photosynthesis”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **20**:4 (2017), 1750021, 19 pp., arXiv: 1612.00213.
- [16] A. S. Trushechkin, I. V. Volovich, “Perturbative treatment of inter-site couplings in the local description of open quantum networks”, *Europhys. Lett.*, **113**:3 (2016), 30005, 6 pp.
- [17] I. Ya. Aref’eva, M. A. Khramtsov, M. D. Tikhanovskaya, “Thermalization after holographic bilocal quench”, *JHEP*, **9** (2017), 115, 65 pp.
- [18] И. В. Волович, С. В. Козырев, “Манипуляция состояниями вырожденной квантовой системы”, *Тр. МИАН*, **294** (2016), 256–267.
- [19] В. С. Владимиров, И. В. Волович, “Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление”, *ТМФ*, **59**:1 (1984), 3–27; “Суперанализ. II. Дифференциальное исчисление”, *ТМФ*, **60**:2 (1984), 169–198.
- [20] Г. Серё, *Ортогональные полиномы*, Физматгиз, М., 1962.
- [21] M. Wyman, “The asymptotic behaviour of the Hermite polynomials”, *Canad. J. Math.*, **15** (1963), 332–349.
- [22] D. Dominici, “Asymptotic analysis of the Hermite polynomials from their differential-difference equation”, *J. Differ. Equ. Appl.*, **13**:12 (2007), 1115–1128.
- [23] I. Ya. Aref’eva, M. A. Khramtsov, M. D. Tikhanovskaya, I. V. Volovich, “On replica-non-diagonal large N saddles in the SYK model”, *Quarks-2018*, XXth International Seminar on High-Energy Physics (Valday, Russia, 27 May–2 June, 2018), EPJ Web of Conferences, 2018 (to appear).
- [24] I. Ya. Aref’eva, M. A. Khramtsov, M. D. Tikhanovskaya, “On $1/N$ diagrammatics in the SYK model beyond the conformal limit”, *Quarks-2018*, XXth International Seminar on High-Energy Physics (Valday, Russia, 27 May–2 June, 2018), EPJ Web of Conferences, 2018 (to appear).

Поступила в редакцию 17.01.2018