Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Исаев, М. А. Подойницын, Тензоры поляризации для массивных частиц с произвольным спином и проекционный оператор Берендса–Фронсдала, *ТМФ*, 2019, том 198, номер 1, 101–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 08:46:08

© 2019 г. А. П. Исаев^{*†}, М. А. Подойницын^{*†}

ТЕНЗОРЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ МАССИВНЫХ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ И ПРОЕКЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР БЕРЕНДСА–ФРОНСДАЛА

На основе унитарных представлений Вигнера для накрывающей группы $ISL(2, \mathbb{C})$ группы Пуанкаре строятся спин-тензорные волновые функции свободных массивных частиц с произвольным спином, удовлетворяющие уравнениям Дирака–Паули–Фирца. Получены спин-тензоры поляризации и указаны условия, которые фиксируют матрицы плотности (проекционные операторы Берендса–Фронсдала), определяющие числители в пропагаторах полей таких частиц. С помощью этих условий, перенесенных на многомерный случай, построено обобщение (для любого числа $D > 2$ измерений пространства-времени) проекционных операторов Берендса–Фронсдала, отвечающих симметричным представлениям D -мерной группы Пуанкаре.

Ключевые слова: высшие спины, унитарные представления Вигнера, группа Пуанкаре, уравнения Дирака–Паули–Фирца, проекционные операторы Берендса–Фронсдала.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9535>

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья основывается на результатах работы [1]. Мы используем неприводимые унитарные представления Вигнера [2] (см. также [3]–[5]) накрывающей группы $ISL(2, \mathbb{C})$ группы Пуанкаре, которые действуют в пространствах спин-тензорных волновых функций специального вида. Построение этих спин-тензорных волновых функций осуществляется с помощью операторов Вигнера (см., например, [3], [6]), которые переводят унитарное массивное представление группы $ISL(2, \mathbb{C})$,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00562).

^{*}Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: isaevap@theor.jinr.ru

[†]Государственный университет “Дубна”, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: mikhailpodoinicin@gmail.com

индуцированное из неприводимого представления малой подгруппы $SU(2)$ и заданное в пространстве симметричных вигнеровских волновых функций, в представлении группы $ISL(2, \mathbb{C})$, действующее в пространстве спин-тензорных волновых функций для массивных частиц. Указанные спин-тензорные волновые функции по построению удовлетворяют волновым уравнениям Дирака–Паули–Фирца [7]–[9] для свободных массивных частиц произвольного спина. Далее мы рассматриваем разложение полностью симметричной вигнеровской волновой функции по специально выбранному базису, что дает естественный рецепт описания поляризаций решений волновых уравнений для массивных частиц с произвольными спинами. Отметим, что часть результатов, изложенных в разделе 2, не являются новыми (например, утверждение 2), однако мы приводим их для фиксации обозначений, а также для полноты и самосогласованности дальнейшего изложения. С помощью найденных поляризаций в разделе 3 мы строим обобщение (для случая произвольного числа измерений D) проекционного оператора Берендса–Фронсдала [10], который определяет спин-тензорную структуру двухточечной функции Грина (пропэгатора) массивных частиц высших спинов. Явный вид таких проекционных операторов в несколько другой форме был получен в работах [11], [12]. Отметим, что в пространствах размерности $D > 4$ обобщение оператора Берендса–Фронсдала, рассматриваемое в нашей работе, отвечает симметричным представлениям D -мерной группы Пуанкаре и поэтому не описывает поля высших спинов смешанного типа симметрии.

2. ТЕНЗОРЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ПОЛЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА

Основываясь на схеме Вигнера построения представлений накрывающей группы Пуанкаре $ISL(2, \mathbb{C})$, можно показать (см. [1]), что в массивном случае пространство унитарного неприводимого представления группы $ISL(2, \mathbb{C})$ со спином j – это пространство зависящих от 4-импульса k спин-тензорных волновых функций $(p/2, r/2)$ -типа

$$\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k) = \frac{1}{m^r} \prod_{i=1}^p (A_{(k)})_{\alpha_i}^{\delta_i} \cdot \left(\prod_{j=1}^r (A_{(k)}^{-1\dagger})_{\dot{\xi}_j}^{\dot{\beta}_j} \cdot (q^n \tilde{\sigma}_n)_{\dot{\xi}_j \delta_{p+j}} \right) \phi_{(\delta_1 \dots \delta_p \delta_{p+1} \dots \delta_{p+r})}(k), \quad (2.1)$$

где $(p+r) = 2j$, $\phi_{(\delta_1 \dots \delta_p \delta_{p+1} \dots \delta_{p+r})}(k)$ – произвольный симметричный тензор $2j$ -го ранга (вигнеровская волновая функция), q^n – компоненты тестового 4-импульса,

$$q^n q_n = q_k \eta^{kn} q_n = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = m^2, \quad \eta^{kn} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1),$$

m – масса, $\tilde{\sigma}_n = (\sigma_0, -\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3)$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – матрицы Паули, σ_0 – единичная (2×2) -матрица. Матрицы $A_{(k)}$, $A_{(k)}^{\dagger-1} \in SL(2, \mathbb{C})$, использованные в (2.1), удовлетворяют соотношению

$$(A_{(k)})_{\alpha}^{\gamma} (q^n \sigma_n)_{\gamma \dot{\alpha}} (A_{(k)}^{\dagger})_{\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}} = (k^n \sigma_n)_{\alpha \dot{\gamma}}. \quad (2.2)$$

Верхний индекс (r) у спин-тензоров $\psi^{(r)}$ в (2.1) различает эти спин-тензоры по количеству точечных индексов. Операторы $A_{(k)}^{\otimes p} \otimes (A_{(k)}^{\dagger-1}(q\tilde{\sigma}))^{\otimes r}$, которые согласно формуле (2.1) переводят вигнеровские волновые функции $\phi(k)$ в спин-тензорные функции $(p/2, r/2)$ -типа, называются *операторами Вигнера*.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Выберем тестовый импульс в виде $q = (\mathbf{m}, 0, 0, 0)$. Тогда волновые функции $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k)$, заданные в (2.1), удовлетворяют уравнениям Дирака–Паули–Фирца*

$$\begin{aligned} k^m (\tilde{\sigma}_m)_{\dot{\gamma}_1 \dot{\alpha}_1} \psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k) &= \mathbf{m} \psi_{(\alpha_2 \dots \alpha_p)}^{(r+1)(\dot{\gamma}_1 \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k), & r = 0, \dots, 2j-1, \\ k^m (\sigma_m)_{\gamma_1 \dot{\beta}_1} \psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k) &= \mathbf{m} \psi_{(\gamma_1 \alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(r-1)(\dot{\beta}_2 \dots \dot{\beta}_r)}(k), & r = 1, \dots, 2j, \end{aligned} \quad (2.3)$$

которые описывают динамику массивной частицы со спином $j = (p+r)/2$. Условия совместности этих уравнений выступают соотношения $(k^n k_n - \mathbf{m}^2) \psi^{(r)}(k) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим в (2.3) спин-тензоры (2.1) и учтем уравнения (2.2). Условие совместности получается, если на первое уравнение в (2.3) подействовать оператором $(k^m \sigma_m)$ и воспользоваться вторым уравнением в (2.3).

Симметризованные вигнеровские волновые функции $\phi_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})}(k)$ из (2.1) удобно записать в виде производящей функции:

$$\phi(k; v) = \phi_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})}(k) v^{\alpha_1} \dots v^{\alpha_{2j}}, \quad (2.4)$$

где v^α – компоненты вспомогательного вейлевского спинора $v = (v^1, v^2)$. Введем $2j+1$ мономов

$$T_m^j(v) = \frac{(v^1)^{j+m} (v^2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}, \quad m = -j, -j+1, \dots, j, \quad (2.5)$$

которые являются базисными элементами в пространстве представления со старшим весом (спином) j алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ с образующими

$$S_- = v^2 \partial_{v^1}, \quad S_+ = v^1 \partial_{v^2}, \quad S_3 = \frac{1}{2} (v^1 \partial_{v^1} - v^2 \partial_{v^2}). \quad (2.6)$$

В данном случае пространство неприводимого представления алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ со спином j реализуется как пространство однородных полиномов (2.4) степени $2j$ от двух переменных v^1 и v^2 и любой полином (2.4) можно разложить по базисным мономам (2.5):

$$\phi(k, v) = \sum_{m=-j}^j \phi_m(k) T_m^j(v). \quad (2.7)$$

Связь коэффициентов $\phi_m(k)$ с $\phi_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})}(k)$ дается формулой

$$\phi_m(k) = \frac{(2j)!}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \phi_{(\underbrace{1 \dots 1}_{j+m} \underbrace{2 \dots 2}_{j-m})}(k). \quad (2.8)$$

Мономы $T_m^j(v)$ – собственные векторы оператора S_3 (третьей компоненты вектора спина), заданного в (2.6). Действительно, мы имеем $S_3 T_m^j(v) = m T_m^j(v)$, поэтому коэффициенты $\phi_m(k)$ в разложении (2.7) соответствуют проекциям m оператора S_3 . Формулу (2.1), связывающую вигнеровскую волновую функцию $\phi_{(\alpha_1 \dots \alpha_{2j})}(k)$

со спин-тензорной волновой функцией $\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k)$, можно переписать в терминах производящих функций следующим образом:

$$\psi^{(r)}(k; u, \bar{u}) = \frac{1}{(2j)! m^r} \prod_{i=1}^p [u^{\alpha_i} (A(k))_{\alpha_i}{}^{\rho_i} \partial_{\rho_i}^{(v)}] \prod_{\ell=1}^r [\bar{u}_{\dot{\beta}_\ell} (A(k)^{-1\dagger} \cdot (q\tilde{\sigma}))^{\dot{\beta}_\ell \rho_{p+\ell}} \partial_{\rho_{p+\ell}}^{(v)}] \phi(k; v), \quad (2.9)$$

где $\partial_{\rho_i}^{(v)} = \partial/\partial v^{\rho_i}$. Зафиксируем тестовый импульс $q = (m, 0, 0, 0)$ и подставим в формулу (2.9) выражение (2.7) для вигнеровской волновой функции. После этого, разложив левую и правую части (2.9) по u и $\bar{u}$, получаем

$$\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k) = \frac{1}{(2j)!} \sum_{m=-j}^j \phi_m(k) \prod_{i=1}^p (A(k))_{\alpha_i}{}^{\rho_i} \prod_{\ell=1}^r (A(k)^{-1\dagger} \tilde{\sigma}_0)^{\dot{\beta}_\ell \rho_{p+\ell}} \epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)}, \quad (2.10)$$

где

$$\epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)} = \partial_{\rho_1}^{(v)} \dots \partial_{\rho_{2j}}^{(v)} T_m^j(v). \quad (2.11)$$

Ясно, что тензор $\epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)}$ не зависит от компонент v^α и симметричен по перестановкам индексов ρ_i . В силу нормировки, принятой в (2.5), исходя из (2.11) мы имеем

$$\underbrace{\epsilon_{1\dots 1}^{(m)}}_{j+m} \underbrace{\epsilon_{2\dots 2}^{(m)}}_{j-m} = \sqrt{(j+m)!(j-m)!}. \quad (2.12)$$

Все компоненты $\epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)}$, у которых среди индексов количество единиц отличается от $j+m$, а двоек – от $j-m$ (ср. с (2.12)), равны нулю. Таким образом, у симметричного тензора $\epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)}$ существует всего $(2j)!/(j-m)!(j+m)!$ ненулевых и равных друг другу (т. е. равных (2.12)) компонент. Определим спин-тензоры:

$$e_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k) = \frac{1}{\sqrt{(2j)!}} \prod_{i=1}^p (A(k))_{\alpha_i}{}^{\rho_i} \prod_{\ell=1}^r (A(k)^{-1\dagger} \tilde{\sigma}_0)^{\dot{\beta}_\ell \rho_{p+\ell}} \epsilon_{\rho_1 \dots \rho_{2j}}^{(m)}, \quad (2.13)$$

где нормировочный множитель $1/\sqrt{(2j)!}$ выбран для удобства. Используя (2.13), формулу (2.10) можно переписать в виде

$$\psi_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k) = \frac{1}{\sqrt{(2j)!}} \sum_{m=-j}^j \phi_m(k) e_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_r)}(k). \quad (2.14)$$

Для целых j спин-тензорные функции $(j/2, j/2)$ -типа связаны с тензорами в пространстве Минковского следующей формулой:

$$f_{n_1 \dots n_j}(k) = \frac{1}{2^j} (\sigma_{n_1})_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \dots (\sigma_{n_j})_{\alpha_j \dot{\beta}_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} \psi_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k). \quad (2.15)$$

Объект с компонентами $f_{n_1 \dots n_j}(k)$, имеющий только векторные индексы $\{n_1, \dots, n_j\}$, называется вектор-тензором. Заметим, что в силу симметричности $\psi_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k)$ по перестановкам спинорных индексов в группах $(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)$ и $(\gamma_1 \dots \gamma_j)$ вектор-тензор $f_{n_1 \dots n_j}(k)$, заданный в (2.15), полностью симметричен по перестановкам векторных индексов.

Перейдем от спин-тензорной волновой функции $\psi_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(j)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k)$ к вектор-тензорной функции $f_{n_1 \dots n_j}(k)$ с помощью соотношения (2.15), в которое подставим разложение (2.14) для $\psi_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(j)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k)$, в результате получаем

$$f_{n_1 \dots n_j}(k) = \frac{1}{\sqrt{2^j (2j)!}} \sum_{m=-j}^j \phi_m(k) \mathbf{e}_{n_1 \dots n_j}^{(m)}(k), \quad (2.16)$$

где мы использовали обозначение

$$\mathbf{e}_{n_1 \dots n_j}^{(m)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} (\sigma_{n_1})_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \dots (\sigma_{n_j})_{\alpha_j \dot{\beta}_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} e_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k). \quad (2.17)$$

Пользуясь свойствами спин-тензоров, определенных в (2.13), можно показать, что набор вектор-тензоров $\mathbf{e}_{n_1 \dots n_j}^{(m)}(k)$ нормирован следующим образом:

$$\bar{\mathbf{e}}^{(m) n_1 \dots n_j}(k) \mathbf{e}_{n_1 \dots n_j}^{(\bar{m})}(k) = (-1)^j \delta^{(m)(\bar{m})}, \quad (2.18)$$

где $\bar{\mathbf{e}}^{(m) n_1 \dots n_j}(k) = (\mathbf{e}^{(\bar{m}) n_1 \dots n_j}(k))^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из формулы (2.13) в случае $r = p$, т. е. для целого спина j , вытекает рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n_1 \dots n_j}^{(m)} = & \frac{1}{\sqrt{2j(2j-1)}} (\sqrt{(j+m)(j+m-1)} \mathbf{e}_{n_1 \dots n_{j-1}}^{(m-1)} \mathbf{e}_{n_j}^{(+)} + \\ & + \sqrt{(j-m)(j-m-1)} \mathbf{e}_{n_1 \dots n_{j-1}}^{(m+1)} \mathbf{e}_{n_j}^{(-)} + \sqrt{2(j-m)(j+m)} \mathbf{e}_{n_1 \dots n_{j-1}}^{(m)} \mathbf{e}_{n_j}^{(0)}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

которое полностью определяет тензоры поляризации $\mathbf{e}_{n_1 \dots n_j}^{(m)}$ через векторы поляризации $\mathbf{e}_{n_j}^{(a)}$, $a = 0, \pm 1$, которые соответствуют частицам со спином $j = 1$.

Построим оператор $\Theta(k)$ в виде суммы по поляризациям m произведений тензоров $\mathbf{e}^{(m)}(k)$ и $\bar{\mathbf{e}}^{(m)}(k)$:

$$\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k) := (-1)^j \sum_{m=-j}^j \mathbf{e}_{r_1 \dots r_j}^{(m)}(k) \bar{\mathbf{e}}^{(m) n_1 \dots n_j}(k). \quad (2.20)$$

Этот оператор иногда называют матрицей плотности для массивной частицы с целым спином j или проекционным оператором Берендса–Фронсдала [10], [13]. В указанных работах были сформулированы условия, которые определяют оператор (2.20) однозначно. Мы сформулируем эти условия в виде утверждения 2 и для полноты изложения приведем краткое доказательство этого утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Оператор $\Theta(k)$, заданный в (2.20), удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) проекторное свойство и вещественность: $\Theta^2 = \Theta$, $\Theta^\dagger = \Theta$;
- 2) симметричность: $\Theta_{r_1 \dots r_i \dots r_l \dots r_j}^{n_1 \dots n_i \dots n_l \dots n_j} = \Theta_{\dots r_l \dots r_i \dots}^{n_1 \dots n_j}$, $\Theta_{r_1 \dots r_j}^{\dots n_i \dots n_l \dots} = \Theta_{r_1 \dots r_j}^{\dots n_l \dots n_i \dots}$;
- 3) поперечность: $k^{r_1} \Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j} = 0$;
- 4) бесследовость: $\eta^{r_1 r_2} \Theta_{r_1 r_2 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Два соотношения из первого свойства в компонентной записи имеют вид

$$\Theta_{r_1 r_2 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j} \Theta_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} = \Theta_{\ell_1 \dots \ell_j}^{n_1 \dots n_j}, \quad (\Theta_{r_1 r_2 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j})^* = \Theta_{n_1 \dots n_j}^{r_1 r_2 \dots r_j},$$

они выполняются в силу определения (2.20) оператора $\Theta(k)$ и условий нормировки (2.18) на векторы $e^{(m)}(k)$. Второе свойство следует из симметрии тензоров $e_{n_1 \dots n_j}^{(m)}(k)$ по перестановке индексов $\{n_1, \dots, n_j\}$, что, в свою очередь, следует из формулы (2.17).

Третье свойство аналогично свойству поперечности вектор-тензоров $e^{(m)}(k)$, т. е. выполнению условия $k^{r_1} e_{r_1 \dots n_j}^{(m)}(k) = 0$. Поперечность вектор-тензоров $e^{(m)}(k)$ следует из равенств

$$\begin{aligned} k^{r_1} e_{r_1 \dots n_j}^{(m)}(k) &= k^{r_1} (\sigma_{r_1})_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} \dots (\sigma_{r_j})_{\alpha_j \dot{\beta}_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} e_{(\gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_j)}(k) = \\ &= m(\sigma_{r_2})_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} \dots (\sigma_{r_j})_{\alpha_j \dot{\beta}_j} \varepsilon^{\alpha_1 \gamma_1} \dots \varepsilon^{\alpha_j \gamma_j} e_{(\alpha_1 \gamma_1 \dots \gamma_j)}^{(\dot{\beta}_2 \dots \dot{\beta}_j)}(k) = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Во втором равенстве в (2.21) мы воспользовались вторым уравнением из системы (2.3), а в третьем равенстве учли, что свертка симметричного тензора с антисимметричным дает ноль.

Четвертое свойство, очевидно, равносильно утверждению о бесследовости вектор-тензоров $e^{(m)}(k)$, т. е. $\eta^{r_1 r_2} e_{r_1 \dots n_j}^{(m)}(k) = 0$. Последнее равенство следует из определения (2.17) тензора $e_{r_1 \dots n_j}^{(m)}(k)$ и формулы $(\sigma_m)_{\alpha_1 \dot{\beta}_1} (\sigma^m)_{\alpha_2 \dot{\beta}_2} = 2\varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2} \varepsilon_{\dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2}$.

Для полуцелого спина j из волновых функций $\psi_{(\gamma_1 \dots \gamma_{j+1/2})}^{(j-1/2)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_{j-1/2})}$ и $\psi_{(\gamma_1 \dots \gamma_{j-1/2})}^{(j+1/2)(\dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_{j+1/2})}$ можно получить вектор-спиноры $(\psi_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^+)^{\gamma_{j+1/2}}$, $(\psi_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^-)^{\dot{\beta}_{j+1/2}}$, конвертируя каждую пару спинорных индексов $(\dot{\beta}_i, \gamma_i)$ в векторный индекс n_i стандартным образом (2.15). Образует из спин-векторов $(\psi_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^+)^{\gamma_{j+1/2}}$, $(\psi_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^-)^{\dot{\beta}_{j+1/2}}$ би-спинор Дирака $(\Psi_{n_1 \dots n_{j-1/2}})_A$, $A = 1, 2, 3, 4$:

$$(\Psi_{n_1 \dots n_{j-1/2}})_A = \begin{pmatrix} (\psi_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^+)^{\gamma_{j+1/2}} \\ (\psi_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^-)^{\dot{\beta}_{j+1/2}} \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Применяя (2.13) к волновым функциям $(\psi_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^+)^{\gamma_{j+1/2}}$, $(\psi_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^-)^{\dot{\beta}_{j+1/2}}$, можно показать, что справедливо разложение

$$(\Psi_{n_1 \dots n_{j-1/2}})_A = \sum_{m=-j}^j \Psi_m (e_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^{(m)})_A, \quad (2.23)$$

где мы ввели обозначение (поляризации для полуцелого спина)

$$(e_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^{(m)}) = \begin{pmatrix} (e_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^{(m)})^{\gamma_{j+1/2}} \\ (e_{n_1 \dots n_{j-1/2}}^{(m)})^{\dot{\beta}_{j+1/2}} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Справедлива следующая формула, связывающая поляризации целого и полуцелого спина:

$$(e_{r_1 \dots r_{j-1/2}}^{(m)})_A = \sqrt{\frac{j+m}{2j}} e_{r_1 \dots r_{j-1/2}}^{(m-1/2)} e_A^{(+)} + \sqrt{\frac{j-m}{2j}} e_{r_1 \dots r_{j-1/2}}^{(m+1/2)} e_A^{(-)}, \quad (2.25)$$

$$m = -j, -j+1, \dots, j,$$

где $e_A^{(+)}$, $e_A^{(-)}$ – поляризации для спина $j = 1/2$.

Определим проекционный оператор Берендса–Фронсдала $((\Theta^{(j)})_{r_1 \dots r_{j-1/2}}^{n_1 \dots n_{j-1/2}})_A^B$ для полуцелого спина j как сумму по m произведений соответствующих поляризаций:

$$((\Theta^{(j)})_{r_1 \dots r_{j-1/2}}^{n_1 \dots n_{j-1/2}})_A^B = \frac{(-1)^{j-1/2}}{2} \sum_{m=-j}^j (e_{r_1 \dots r_{j-1/2}}^{(m)})_A (\bar{e}^{(m)n_1 \dots n_{j-1/2}})^B. \quad (2.26)$$

Имеет место следующее утверждение (см. [1]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для полуцелого спина j оператор суммы по поляризациям из (2.26), удовлетворяет условиям 1–4 утверждения 2 и дополнительному спинорному условию

$$(\Theta^{(j)})_{r_1 \dots r_{j-1/2}}^{n_1 \dots n_{j-1/2}} \cdot \gamma_{n_1} = 0 = \gamma^{r_1} \cdot (\Theta^{(j)})_{r_1 \dots r_{j-1/2}}^{n_1 \dots n_{j-1/2}}, \quad (2.27)$$

а также справедлива формула

$$((\Theta^{(j)})_{r_1 \dots r_{j-1/2}}^{n_1 \dots n_{j-1/2}})_A^B = c^{(j)} (\Theta^{(1/2)})_A^G (\gamma^r)_G^C (\gamma_n)_C^B (\Theta^{(j+1/2)})_{r r_1 \dots r_{j-1/2}}^{n n_1 \dots n_{j-1/2}}, \quad (2.28)$$

где $\Theta^{(j+1/2)}$ – оператор из (2.20) для целого спина $(j+1/2)$, множитель $c^{(j)} = (j+1/2)/(2(j+1))$, а $(\Theta^{(1/2)}) = (1/2\mathbf{m})(\gamma^n k_n + \mathbf{m})$ – сумма по поляризациям для спина $j = 1/2$, γ^n – матрицы Дирака.

3. ПРОЕКЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР БЕРЕНДСА–ФРОНСДАЛА

Для случая четырехмерного пространства-времени ($D = 4$) проекционный оператор Берендса–Фронсдала $\Theta(k)$ был явно построен в работах [10], [13]. Здесь, рассматривая свойства из утверждения 2 как определение проекционного оператора Берендса–Фронсдала, мы найдем его явный вид для произвольного числа измерений D .

Вместо тензора $\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k)$, симметризованного по верхним и нижним индексам, удобно рассматривать производящую функцию

$$\Theta^{(j)}(x, y) = x^{r_1} \dots x^{r_j} \Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k) y_{n_1} \dots y_{n_j}. \quad (3.1)$$

Для конкретности мы будем считать, что тензор с компонентами $\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k)$ задан в псевдоевклидовом D -мерном пространстве $\mathbb{R}^{s,t}$ ($s+t = D$) с произвольной метрикой $\eta = \|\eta_{mn}\|$, имеющей сигнатуру (s, t) . Индексы n_ℓ и r_ℓ в (3.1) пробегает значения $0, 1, \dots, D-1$ и $(x_0, \dots, x_{D-1}), (y_0, \dots, y_{D-1}) \in \mathbb{R}^{s,t}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Производящая функция (3.1) ковариантного проекционного оператора $\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}$ (в D -мерном пространстве-времени), удовлетворяющего свойствам 1–4, перечисленным в утверждении 2, имеет вид

$$\Theta^{(j)}(x, y) = \sum_{A=0}^{[j/2]} a_A^{(j)} (\Theta_{(y)}^{(y)} \Theta_{(x)}^{(x)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A}, \quad (3.2)$$

где $[j/2]$ – целая часть $j/2$,

$$a_A^{(j)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^A \frac{j!}{(j-2A)! A! (2j+D-5)(2j+D-7) \dots (2j+D-2A-3)}, \quad A \geq 1, \quad (3.3)$$

$a_0^{(j)} = 1$, а $\Theta_{(x)}^{(y)}$ определяется следующим образом:

$$\Theta_{(x)}^{(y)} \equiv \Theta^{(1)}(x, y) = x^r y_n \Theta_r^n, \quad \Theta_r^n = \eta_r^n - \frac{k_r k^n}{k^2}, \quad (3.4)$$

η_{rn} – метрика пространства $\mathbb{R}^{s,t}$. Для производящей функции (3.2), (3.3) имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial x^r} \frac{\partial}{\partial y_r} \Theta^{(j)}(x, y) = \frac{j(j+D-4)(2j+D-3)}{2j+D-5} \Theta^{(j-1)}(x, y). \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что матрица Θ_r^n из (3.4) – проектор на подпространство, ортогональное D -вектору с компонентами k^r :

$$k^r \Theta_r^n = 0 = \Theta_r^n k_n, \quad \Theta_r^r = \eta_{rn} \Theta^{rn} = D-1, \quad \Theta_r^n \Theta_m^r = \Theta_m^n. \quad (3.6)$$

Учитывая это, наиболее общий ковариантный оператор $\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k)$, удовлетворяющий свойствам 2 и 3, указанным в утверждении 2, запишем следующим образом:

$$\Theta_{r_1 \dots r_j}^{n_1 \dots n_j}(k) = \frac{1}{(j!)^2} \sum_{\sigma, \mu \in S_j} \Theta_{\ell_1}^{n_{\sigma(1)}} \dots \Theta_{\ell_j}^{n_{\sigma(j)}} B_{m_1 \dots m_j}^{\ell_1 \dots \ell_j}(k) \Theta_{r_{\mu(1)}}^{m_1} \dots \Theta_{r_{\mu(j)}}^{m_j}, \quad (3.7)$$

где $\sigma, \mu \in S_j$ – перестановки индексов $\{1, 2, \dots, j\}$, а тензор $B_{m_1 \dots m_j}^{\ell_1 \dots \ell_j}(k)$ – любая ковариантная комбинация компонент метрики η_{rm} и D -вектора импульса k_r . Матрицы Θ_r^m , использованные в (3.7), поперечны D -импульсу k (см. (3.6)), поэтому внешние индексы тензора $B_{m_1 \dots m_j}^{\ell_1 \dots \ell_j}(k)$ могут быть связаны только с метрикой, и этот тензор представим в виде

$$B_{m_1 \dots m_j}^{\ell_1 \dots \ell_j}(k) = a_0^{(j)}(k) \eta_{m_1}^{\ell_1} \dots \eta_{m_j}^{\ell_j} + a_1^{(j)}(k) \eta^{\ell_1 \ell_2} \eta_{m_1 m_2} \eta_{m_3}^{\ell_3} \dots \eta_{m_j}^{\ell_j} + \\ + a_2^{(j)}(k) \eta^{\ell_1 \ell_2} \eta_{m_1 m_2} \eta^{\ell_3 \ell_4} \eta_{m_3 m_4} \eta_{m_5}^{\ell_5} \dots \eta_{m_j}^{\ell_j} + \dots, \quad (3.8)$$

где функции $a_A^{(j)}(k)$ зависят от инвариантов $(k)^2 = k^r k_r$. Подстановка (3.8) в (3.7) дает

$$\Theta_{n_1 r_2 \dots r_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} = \frac{1}{(j!)^2} \sum_{A=0}^{[j/2]} \sum_{\sigma, \mu \in S_j} a_A^{(j)} \left(\prod_{\ell=1}^A \Theta_{n_{\mu(2\ell-1)} n_{\mu(2\ell)}}^{r_{\sigma(2\ell-1)} r_{\sigma(2\ell)}} \Theta_{r_{\mu(2A+1)}}^{r_{\sigma(2A+1)}} \prod_{i=2A+1}^j \Theta_{n_{\mu(i)}}^{r_{\sigma(i)}} \right). \quad (3.9)$$

Наконец, подставляя выражение (3.9) в (3.1), мы получаем представление (3.2) для производящей функции проекционного оператора, где коэффициенты $a_A^{(j)}$, как мы увидим ниже, не зависят от $(k)^2$ и их явный вид фиксируется свойствами 1 и 4 из утверждения 2.

Условие 4 (бесследовость) в утверждении 2 для тензора Θ эквивалентно уравнению гармоничности для производящей функции (3.2):

$$(\partial)^2 \Theta^{(j)}(x, y) = 0, \quad (3.10)$$

где $(\partial)^2 = \partial_{x^r} \partial_{x_r}$ и $\partial_{x^r} = \partial / \partial x^r$. Подставим функцию (3.2) в уравнение (3.10) и найдем условия на коэффициенты $a_A^{(j)}$. При этом удобно переписать ряд (3.2) в виде

$$\Theta^{(j)}(x, y) = \sum_{A=0}^{[j/2]} \tilde{a}_A (\Theta_{(x)}^{(x)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A}, \quad \tilde{a}_A \equiv (\Theta_{(y)}^{(y)})^A a_A^{(j)}. \quad (3.11)$$

В результате указанной подстановки мы получаем

$$\begin{aligned} (\partial)^2 \Theta^{(j)}(x, y) &= \sum_A \tilde{a}_A (\partial)^2 \left[(\Theta_{(x)}^{(x)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A} \right] = \\ &= \sum_A \tilde{a}_A \left[2A(2j + D - 3 - 2A) (\Theta_{(x)}^{(x)})^{A-1} (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A} + \right. \\ &\quad \left. + (j - 2A)(j - 2A - 1) \Theta_{(y)}^{(y)} (\Theta_{(x)}^{(x)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A-2} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом, для выполнения тождества (3.10) согласно (3.12) необходимо потребовать выполнение рекуррентных соотношений для коэффициентов $\tilde{a}_A$:

$$\tilde{a}_{A+1} = -\frac{1}{2} \frac{(j - 2A)(j - 2A - 1)}{(A + 1)(2j - 2A + D - 5)} \Theta_{(y)}^{(y)} \tilde{a}_A, \quad (3.13)$$

что, в свою очередь, дает соотношения для коэффициентов $a_A^{(j)}$:

$$a_A^{(j)} = -\frac{1}{2} \frac{(j - 2A + 2)(j - 2A + 1)}{A(2j - 2A + D - 3)} a_{A-1}^{(j)}. \quad (3.14)$$

Решение уравнений (3.14) имеет вид

$$a_A^{(j)} = \left(-\frac{1}{2} \right)^A \frac{j! a_0^{(j)}}{(j - 2A)! A! [(2j + D - 5)(2j + D - 7) \dots (2j + D - 3 - 2A)]}, \quad (3.15)$$

т.е. условие (3.10) определяет коэффициенты $a_A^{(j)}$ с точностью до единственного произвольного множителя $a_0^{(j)}$. Заметим, что, во-первых, произведение факторов в квадратных скобках в знаменателе (3.15) необходимо считать равным единице при $A = 0$ и, во-вторых, при подстановке коэффициентов (3.15) в сумму (3.2) видно, что эта сумма автоматически обрывается при $A > j/2$, так как в этом случае в знаменателе возникает бесконечный множитель $(j - 2A)! = \infty$.

Займемся теперь проверкой условия 1 из утверждения 2. Прежде всего отметим наличие для функции (3.2) свойства $\Theta(x, y) = \Theta(y, x)$, что в силу вещественности

оператора Θ эквивалентно равенству $\Theta^\dagger = \Theta$ для матриц (3.9). Проверим для матрицы (3.9) проекторное соотношение $\Theta^2 = \Theta$ (см. условие 1 из утверждения 2):

$$\begin{aligned} (\Theta^2)_{n_1 n_2 \dots n_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} &= \\ &= \Theta_{m_1 m_2 \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} \frac{1}{(j!)^2} \sum_{A=0}^{[j/2]} \sum_{\sigma, \mu \in S_j} a_A^{(j)} \left(\prod_{\ell=1}^A \Theta^{m_{\sigma(2\ell-1)} m_{\sigma(2\ell)}} \Theta_{n_{\mu(2\ell-1)} n_{\mu(2\ell)}} \prod_{i=2A+1}^j \Theta_{n_{\mu(i)}}^{m_{\sigma(i)}} \right) = \\ &= \Theta_{m_1 m_2 \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} \frac{1}{j!} \sum_{\mu \in S_j} a_0^{(j)} (\Theta_{n_{\mu(1)}}^{m_1} \dots \Theta_{n_{\mu(j)}}^{m_j}) = a_0^{(j)} \Theta_{n_1 n_2 \dots n_j}^{r_1 r_2 \dots r_j}, \end{aligned}$$

где во втором и третьем равенствах мы использовали тождества

$$\Theta_{m_1 m_2 \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} \Theta^{m_i m_\ell} = 0, \quad \Theta_{m_1 \dots m'_i \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} \Theta_{m_i}^{m'_i} = \Theta_{m_1 \dots m'_i \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} \eta_{m_i}^{m'_i} = \Theta_{m_1 m_2 \dots m_j}^{r_1 r_2 \dots r_j},$$

которые вытекают из установленных выше условий 3 и 4 утверждения 2. Таким образом, для выполнения проекторного свойства мы должны зафиксировать начальный коэффициент в разложении (3.2) как $a_0^{(j)} = 1$. Подставляя это значение в (3.15), мы получаем формулу (3.3).

Наконец, докажем тождество (3.5). Для этого вычислим

$$\begin{aligned} \partial_{x^r} \partial_{y_r} \Theta^{(j)}(x, y) &= \sum_{A=0}^{[j/2]} a_A^{(j)} \partial_{x^r} \partial_{y_r} [(\Theta_{(x)}^{(x)} \Theta_{(y)}^{(y)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A}] = \\ &= \sum_{A=0}^{[j/2]} [a_{A+1}^{(j)} 4(A+1)^2 + a_A^{(j)} (j-2A)(D-2+j+2A)] (\Theta_{(x)}^{(x)} \Theta_{(y)}^{(y)})^A (\Theta_{(x)}^{(y)})^{j-2A-1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Учитывая явную формулу для коэффициентов (3.3), мы получаем соотношение

$$a_{A+1}^{(j)} 4(A+1)^2 + a_A^{(j)} (j-2A)(D+j+2A-2) = \frac{j(j+D-4)(2j+D-3)}{2j+D-5} a_A^{(j-1)},$$

подставляя которое в (3.16), мы сразу же выводим тождество (3.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Тождество (3.5) для производящих функций (3.1) дает равенство, связывающее проекторы (3.9) для спинов j и $j-1$:

$$\eta_{n_1}^{r_1} (\Theta^{(j)})_{r_1 r_2 \dots r_j}^{n_1 n_2 \dots n_j} = (\Theta^{(j)})_{r_1 r_2 \dots r_j}^{n_1 n_2 \dots n_j} = \frac{(j+D-4)(2j+D-3)}{j(2j+D-5)} (\Theta^{(j-1)})_{r_2 \dots r_j}^{n_2 \dots n_j}, \quad (3.17)$$

т. е. след матрицы $\Theta^{(j)}$ по паре индексов пропорционален матрице $\Theta^{(j-1)}$. Пользуясь равенством (3.17), можно вычислить полный след проектора Берендса–Фронсдла $\Theta^{(j)}$ в случае D -мерного пространства-времени ($D \geq 3$):

$$(\Theta^{(j)})_{r_1 r_2 \dots r_j}^{r_1 r_2 \dots r_j} = \frac{(D-4+j)!}{j!(D-3)!} (2j+D-3). \quad (3.18)$$

Этот след равен размерности подпространства, которое вырезается проектором $\Theta^{(j)}$ в пространстве вектор-тензорных волновых функций $f_{n_1 \dots n_j}(k)$. Другими словами,

след (3.18) равен числу N независимых компонент симметричных вектор-тензорных волновых функций $f_{(n_1 \dots n_j)}(k)$, удовлетворяющих условиям

$$k^{n_1} f_{(n_1 \dots n_j)}(k) = 0, \quad \eta^{n_1 n_2} f_{(n_1 n_2 \dots n_j)}(k) = 0,$$

на пространстве которых реализуется неприводимое массивное представление D -мерной группы вращений. Например, для $D = 3$ мы имеем $N = 2$ ($\forall j$), а для $D = 4$ формула (3.18) дает хорошо известный результат $N = 2j + 1$, что совпадает с числом различных поляризаций массивных частиц со спином j (совпадает с размерностью неприводимого представления со спином j малой подгруппы $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из соотношения (3.2) сразу же следует полезное тождество [11]:

$$\Theta^{(j)}(x, x) = (\Theta^{(1)}(x, x))^j \sum_{A=0}^{[j/2]} a_A^{(j)} = (k)^{-2j} ((k)^2(x)^2 - (k^n x_n)^2)^j \sum_{A=0}^{[j/2]} a_A^{(j)}, \quad (3.19)$$

где коэффициенты $a_A^{(j)}$ определены в (3.5).

Сумму коэффициентов $a_A^{(j)}$ в правой части (3.19) можно вычислить с помощью соотношений (3.5) и (3.19). Действительно, положим $x_r = y_r$ в (3.5), учтем (3.10) и применим оператор $\partial_{x^r} \partial_{x_r}$ к обеим частям равенства (3.19). После чего, сравнивая результаты, мы получаем рекуррентное уравнение:

$$S_D^{(j)} = \frac{j + D - 4}{2j + D - 5} S_D^{(j-1)},$$

где $S_D^{(j)} = \sum_{A=0}^{[j/2]} a_A^{(j)}$. Решая это уравнение с учетом начального значения $S_D^{(1)} = a_0^{(1)} = 1$, находим

$$S_D^{(j)} = \frac{(j + D - 4)!}{(D - 3)! (2j + D - 5)(2j + D - 7) \dots (D - 1)}, \quad j > 1. \quad (3.20)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найден явный вид проекционного оператора Берендса–Фронсдала (отвечающего симметричным представлениям D -мерной группы Пуанкаре) в случае произвольного целого и полуцелого спина. Такие проекционные операторы в несколько иной форме и только для случая целого спина рассматривались в работах [11], [12]. В четырехмерном случае построены спин-тензоры, описывающие поляризации массивных частиц с произвольным целым и полуцелым спином. Отметим, что в специальной параметризации операторов Вигнера, рассмотренной в работе [1], формула (2.13) дает двухспинорное описание тензоров поляризаций массивных частиц. Мы надеемся, что рассмотренный здесь формализм будет полезен при построении спиральных амплитуд рассеяния (аналогичных спиральным амплитудам рассеяния безмассовых частиц [14], [15]) в массивном случае. Определенные предварительные шаги в этом направлении были сделаны в недавних работах [16]–[18], где использовалось аналогичное описание массивных частиц с произвольным спином. Отметим также, что значительный прогресс в изучении амплитуд рассеяния для массивных полей был недавно достигнут в работе [19].

Список литературы

- [1] A. P. Isaev, M. A. Podoinitsyn, “Two-spinor description of massive particles and relativistic spin projection operators”, *Nucl. Phys. B*, **929** (2018), 452–484, arXiv: 1712.00833.
- [2] E. P. Wigner, “On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group”, *Ann. Math.*, **40**:1 (1939), 149–204; V. Bargmann, E. P. Wigner, “Group theoretical discussion of relativistic wave equations”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **34**:5 (1948), 211–223.
- [3] Ю. В. Новожилов, *Введение в теорию элементарных частиц*, Наука, М., 1972.
- [4] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [5] Ю. Б. Румер, А. И. Фег, *Теория групп и квантованные поля*, Наука, М., 1977.
- [6] S. Weinberg, “Feynman rules for any spin”, *Phys. Rev.*, **133**:5B (1964), B1318–B1332; “Feynman rules for any spin. II. Massless particles”, *Phys. Rev. B*, **134**:4B (1964), 882–896.
- [7] P. A. M. Dirac, “Relativistic wave equations”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **155**:886 (1936), 447–459.
- [8] M. Fierz, “Über den Drehimpuls von Teilchen mit Ruhemasse null und beliebigem Spin”, *Helvetica Phys. Acta*, **13**:12 (1940), 45–60.
- [9] M. Fierz, W. Pauli, “On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **173**:953 (1939), 211–232.
- [10] R. E. Behrends, C. Fronsdal, “Fermi decay for higher spin particles”, *Phys. Rev.*, **106**:2 (1957), 345–353.
- [11] D. Ponomarev, A. A. Tseytlin, “On quantum corrections in higher-spin theory in flat space”, *JHEP*, **05** (2016), 184, 35 pp., arXiv: 1603.06273.
- [12] D. Francia, J. Mourad, A. Sagnotti, “Current exchanges and unconstrained higher spins”, *Nucl. Phys. B*, **773**:3 (2007), 203–237, arXiv: hep-th/0701163.
- [13] C. Fronsdal, “On the theory of higher spin fields”, *Nuovo Cimento*, **9** (1958), 416–443.
- [14] E. Witten, “Perturbative gauge theory as a string theory in twistor space”, *Commun. Math. Phys.*, **252**:1–3 (2004), 189–258, arXiv: hep-th/0312171.
- [15] H. Elvang, Y.-T. Huang, *Scattering amplitudes in gauge theory and gravity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2015.
- [16] E. Conde, A. Marzolla, “Lorentz constraints on massive three-point amplitudes”, *JHEP*, **09** (2016), 41 pp., arXiv: 1601.08113.
- [17] E. Conde, E. Joung, K. Mkrtchyan, “Spinor-helicity three-point amplitudes from local cubic interactions”, *JHEP*, **08** (2016), 040, 28 pp., arXiv: 1605.07402.
- [18] A. Marzolla, “The 4D on-shell 3-point amplitude in spinor-helicity formalism and BCFW recursion relations”, *PoS(Modave2016)*, 2017, 002, 43 pp., arXiv: 1705.09678.
- [19] A.-H. Nima, T.-C. Huang, Y.-T. Huang, *Scattering amplitudes for all masses and spins*, arXiv: 1709.04891.

Поступила в редакцию 29.01.2018,
 после доработки 5.05.2018,
 принята к печати 1.06.2018