Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ахадпур, А. Немати, Ф. Мирмасоуди, Н. Нематпур, Проективная синхронизация кусочно-нелинейных хаотических отображений, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 3, 530–540

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:24:06

© 2018 г.

С. Ахадпур*, А. Немати[†],
Ф. Мирмасоуди*, Н. Нематпур*

ПРОЕКТИВНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ КУСОЧНО-НЕЛИНЕЙНЫХ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Имея широкое применение в безопасной передаче и шифровании данных, синхронизация хаотических систем является интересной концепцией и потому имеет особое значение в теории нелинейных систем. Предлагается подходящий контроллер для синхронизации однопараметрических семейств кусочно-нелинейных хаотических отображений, для чего использован метод проективной синхронизации. Синхронизация в связанных хаотических дискретных системах проводится методом однонаправленного управляющего воздействия (метод master-slave). С использованием принципа устойчивости Ляпунова получен контроллер, позволяющий достичь проективной синхронизации кусочно-нелинейных систем. Результаты численного моделирования показывают, что предложенная схема является эффективной для решения поставленной задачи.

Ключевые слова: проективная синхронизация, кусочность, хаотическое отображение, функция Ляпунова, метод master-slave.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9538>

1. ВВЕДЕНИЕ

Синхронизация хаоса всегда представляла большой интерес благодаря ее эффективному применению в обширных областях науки, техники, физики и особенно в области безопасных коммуникаций [1]. Начиная с работы Пекоры и Кэролла [2] исследовались различные виды хаотической синхронизации, в том числе полная и обобщенная синхронизация [3]–[9], фазовая и антисинхронизация [10], задержки синхронизации [11], [12], частично устойчивая синхронизация [13], проективная синхронизация [14]–[18], синхронизация, основанная на различных временных масштабах [19], комбинирование синхронизаций [20]. В последнее время были предложены многомерная и робастная синхронизация, а также синхронизация на основе дробных производных и дробное оптимальное управление [21]–[24].

*Department of Physics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran.
E-mail: ahadpour@uma.ac.ir

*Young Researches and Elite Club, Ardabil Branch, Islamic Azad University, Ardabil, Iran

Вследствие сложной динамики и присущей хаотическим системам неустойчивости идея управления хаосом с достижением требуемого поведения кажется поразительной. В последнее время хаотическая нелинейная динамика привлекла внимание многих ученых. Логистическое отображение и кусочно-линейные хаотические отображения являются простейшими хаотическими системами, которые использовались для построения хаотических криптосистем. Кусочные отображения строятся из однопараметрического хаотического отображения [25]. Как кусочно-линейные, так и кусочно-нелинейные отображения применяются для написания многих алгоритмов [26]–[29], особенно в цифровом хаотическом шифровании [30], [31]. Модель кусочно-нелинейных хаотических отображений имеет три параметра: начальное условие, управляющий параметр и вероятность, которая делает криптосистемы более защищенными. Важная часть задач управления в хаотических системах связана с вопросами синхронизации. В последнее время большое внимание уделяется управлению хаосом и синхронизации динамической системы с дискретным временем. Синхронизация нескольких хаотических систем сближает поведение систем на протяжении определенного периода времени. Синхронизация хаоса имеет обширные приложения, такие как вибрационная технология [32], связь [33], биологические процессы [34], медицинские технологии устранения сердечных аритмий и т. д.

В настоящей работе обсуждается синхронизация кусочных хаотических систем на основе проективной синхронизации. Проективная синхронизация была впервые введена Майньери и Рехачеком в 1999 г. [14]. Одной из стратегий, которую можно рассматривать для синхронизации систем, является однонаправленное управляющее воздействие (подход master-slave). Мы обеспечиваем синхронизацию систем, определяя соответствующие контроллеры между управляющими и управляемыми системами с дискретным временем. Динамическая система также может быть оптимизирована путем использования различных типов контроллеров, таких как контроллер целочисленного порядка и контроллер дробного порядка, чтобы получить желаемое поведение систем управления [35]–[39]. Используя принцип устойчивости Ляпунова, мы применяем предложенную схему для проективной синхронизации двух идентичных кусочных отображений. Кроме того, с помощью численного моделирования мы показываем эффективность предложенной схемы синхронизации хаотических систем.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 вводится кусочно-нелинейная хаотическая система с дискретным временем. В разделе 3 излагаются основы процедуры “управление–отклик”, которая применяется для синхронизации систем с дискретным временем и затем расширяется для синхронизации кусочной системы. Численное моделирование полной и проективной синхронизации проведено в разделе 4. Наконец, основные результаты статьи изложены в разделе 5.

2. КУСОЧНО-НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

Однопараметрическое семейство кусочно-нелинейных хаотических отображений определяется как [40]

$$\phi(x, \alpha) = \frac{\alpha^2 F}{1 + (\alpha^2 - 1)F}, \quad (1)$$

где

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{p}, & 0 \leq x < p, \\ \frac{x-p}{1-p}, & p \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Измеримая динамическая система обладает интересным свойством эргодичности или имеет устойчивый период – одну неподвижную точку. Модель (1) является измеримой динамической системой. Она претерпевает бифуркационный переход от устойчивого состояния с единственным периодом к хаотическому и обратно, при этом не возникает обычного сценария удвоения или n -кратного увеличения периода. В качестве характеристик беспорядка рассматриваются энтропия Колмогорова–Синяя (КС), а также характеристические показатели Ляпунова. Энтропия КС данных отображений по отношению к управляющему параметру представлена в работе [41]. Соответствующая инвариантная мера для этого отображения имеет вид [40]

$$\mu(x, \alpha, p) = \frac{1-\alpha}{\ln \frac{1-p}{\alpha-p}} \frac{1}{(\alpha-p) + (1-\alpha)x}, \quad \alpha > p. \quad (3)$$

Можно рассчитать энтропию КС, используя эту меру:

$$h_{KS} = \frac{1}{\ln \frac{1-p}{\alpha-p}} \left[\ln(\alpha p) \ln \frac{\alpha(1-p)}{\alpha-p} - 2 \left[\ln(\alpha p) \ln(1-p) - \ln p \ln \frac{\alpha-p}{\alpha} + \text{Li}_2(p) - \text{Li}_2\left(\frac{p}{\alpha}\right) \right] + \ln(\alpha(1-p)) \ln \frac{1-p}{\alpha(1-p)} - [\ln^2(1-p) - \ln^2(\alpha(1-p))] \right]. \quad (4)$$

3. ПРОЕКТИВНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ДВУХ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В данном разделе предлагается проективная схема синхронизации динамических систем с дискретным временем на основе метода master-slave. Затем применяется теория устойчивости Ляпунова для дискретных динамических систем. Общая хаотическая (управляющая) master-система с дискретным временем определяется следующим образом:

$$x(k+1) = Ax(k) + f(x(k)), \quad (5)$$

где A – матрица, дающая линейную часть системы, а $f(\cdot)$ – нелинейная часть системы. Соответственно хаотическая (управляемая) slave-система с дискретным временем задается как

$$y(k+1) = By(k) + g(y(k)) + u(k), \quad (6)$$

где B – матрица, дающая линейную часть системы, $g(\cdot)$ – нелинейная часть системы, а $u(\cdot)$ – управляющий параметр, который следует выбирать так, чтобы достичь желаемой синхронизации master- и slave-систем.

Теперь определим проективную синхронизацию (см., например, работу [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Управляющая вещественная master-система (5) и управляемая slave-система (6) достигают модифицированной проективной синхронизации, если существует масштабирующий параметр (или матрица) Λ такой, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \Lambda x(t)\| = 0. \quad (7)$$

Здесь $e(t) = y(t) - \Lambda x(t)$ есть функция погрешности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если проективный параметр Λ является единичной матрицей соответствующей размерности, умноженной на постоянную скалярную величину ℓ , то модифицированная проективная синхронизация переходит в проективную синхронизацию. Если проективный параметр Λ является единичной матрицей, то проективная синхронизация переходит в полную синхронизацию master- и slave-систем.

Условие $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0$ влечет проективную синхронизацию master- и slave-систем. Записав равенство $e(k+1) = y(k+1) - \Lambda x(k+1)$ и подставив это выражение в уравнения (5) и (6), получаем с помощью несложных выкладок

$$\begin{aligned} e(k+1) &= y(k+1) - \Lambda x(k+1) = \\ &= By(k) + g(y(k)) - \Lambda Ax(k) - \Lambda f(x(k)) + u(k) = \\ &= Be(k) + (B\Lambda - \Lambda A)x(k) + g(y(k)) - \Lambda f(x(k)) + u(k). \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь можно гарантировать, что управляющая и управляемая системы будут проективно синхронизированы, если надлежащим образом выбрать соответствующую управляющую функцию. Зададим управляющую функцию следующим образом:

$$u(k) = -Ce(k) + (\Lambda A - B\Lambda)x(k) - g(y(k)) + \Lambda f(x(k)), \quad (9)$$

где C – постоянная матрица (контроллер системы). Чтобы проверить, является ли система устойчивой, возьмем функцию Ляпунова

$$\Delta V(e(k)) = V(e(k+1)) - V(e(k)) = \|e(k+1)\| - \|e(k)\|. \quad (10)$$

Используя соотношения (8) и (9) и свойства нормы, можно записать оценку

$$\Delta V(e(k)) = \|(B - C)e(k)\| - \|e(k)\| \leq (\|B - C\| - 1)\|e(k)\|. \quad (11)$$

Выбрав надлежащим образом матрицу C , мы гарантируем устойчивость системы по Ляпунову. Если $\|B - C\| < 1$, то разностная функция Ляпунова (11) будет отрицательной, что дает устойчивость системы. Далее, рассматривая управляющую функцию (9), мы достигаем проективной синхронизации между master-системой (5) и slave-системой (6).

Далее для большей конкретности и простоты разложим кусочно-нелинейное отображение (1) в ряд Тейлора:

$$\phi(x, \alpha) \simeq \alpha^2 F[1 - (\alpha^2 - 1)F], \quad (12)$$

где F задается выражением (2). Тогда, рассматривая соотношение (12) и хаотическое отображение (1), определим управляющую и управляемую системы как

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_1^2 F(x_n) - \alpha_1^2 (\alpha_1^2 - 1) F^2(x_n), \\ y_{n+1} &= \alpha_2^2 F(y_n) - \alpha_2^2 (\alpha_2^2 - 1) F^2(y_n) + u_n, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – состояния управления и отклика, а u_n – управляющий параметр. С учетом определения (2) каждая из последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ может иметь две моды, следовательно, соответствующий управляющий параметр рассчитывается по четырем комбинациям состояний. Далее мы зададим его в каждом случае, после чего исследуем синхронизацию системы.

СЛУЧАЙ I. Пусть $0 \leq x_n < p$ и $0 \leq y_n < p$. С учетом (2), (5) и (6) перепишем управляющую и управляемую системы как

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_1^2 \left(\frac{x_n}{p} \right) - \alpha_1^2 (\alpha_1^2 - 1) \left(\frac{x_n}{p} \right)^2, \\ y_{n+1} &= \alpha_2^2 \left(\frac{y_n}{p} \right) - \alpha_2^2 (\alpha_2^2 - 1) \left(\frac{y_n}{p} \right)^2 + u_n. \end{aligned} \quad (14)$$

В соответствии с (8) получаем функцию погрешности:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y_{n+1} - \Lambda x_{n+1} = \\ &= \frac{\alpha_2^2}{p} e_n + \Lambda (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \left(\frac{x_n}{p} \right) + \Lambda \alpha_1^2 (\alpha_1^2 - 1) \left(\frac{x_n}{p} \right)^2 - \alpha_2^2 (\alpha_2^2 - 1) \left(\frac{y_n}{p} \right)^2 + u_n. \end{aligned}$$

Это уравнение выводится путем добавления и вычитания члена $\Lambda \alpha_2^2 (x_n/p)$. Для проективной синхронизации заданных кусочных хаотических систем мы используем управляющие функции вида

$$u_n = \alpha_2^2 (\alpha_2^2 - 1) \left(\frac{y_n}{p} \right)^2 - \Lambda \alpha_1^2 (\alpha_1^2 - 1) \left(\frac{x_n}{p} \right)^2 - \Lambda (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \left(\frac{x_n}{p} \right) - \frac{c \alpha_1^2}{p} e_n. \quad (15)$$

Далее проверим устойчивость хаотических систем управления и отклика с помощью функции Ляпунова

$$\Delta V(e_n) = V(e_{n+1}) - V(e_n) = \|e_{n+1}\| - \|e_n\| \leq \left(\left| \frac{c \alpha_1^2}{p} - \frac{\alpha_2^2}{p} \right| - 1 \right) \|e_n\|. \quad (16)$$

В результате для получения проективно синхронизированных систем с управляющей функцией (9) достаточно выбрать параметр c так, чтобы было выполнено неравенство $|c \alpha_1^2 - \alpha_2^2| < p$.

СЛУЧАЙ II. Пусть $0 \leq x_n < p$ и $p \leq y_n \leq 1$. Принимая во внимание вид кусочной хаотической функции, сначала перепишем управляющую и управляемую системы. Затем покажем, что, выбрав правильную функцию Ляпунова, мы гарантируем проективную синхронизацию двух систем. Запишем управляющее и управляемое уравнения как

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_1^2 \left(\frac{x_n}{p} \right) - \alpha_1^2 (\alpha_1^2 - 1) \left(\frac{x_n}{p} \right)^2, \\ y_{n+1} &= \alpha_2^2 \left(\frac{y_n - p}{1 - p} \right) - \alpha_2^2 (\alpha_2^2 - 1) \left(\frac{y_n - p}{1 - p} \right)^2 + u_n. \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом этих уравнений функция погрешности проективной синхронизации есть

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y_{n+1} - \Lambda x_{n+1} = \\ &= \alpha_2^2 \left(\frac{e_n}{1 - p} \right) + \frac{(p \alpha_2^2 + p \alpha_1^2 - \alpha_1^2) \Lambda x_n - p^2 \alpha_2^2}{p(1 - p)} + \\ &\quad + \Lambda \alpha_1^2 (\alpha_1^2 - 1) \left(\frac{x_n}{p} \right)^2 - \alpha_2^2 (\alpha_2^2 - 1) \left(\frac{y_n - p}{1 - p} \right)^2 + u_n. \end{aligned} \quad (18)$$

Соответствующую управляющую функцию в уравнении (18) можно выбрать в виде

$$u_n = \alpha_2^2(\alpha_2^2 - 1)\left(\frac{y_n - p}{1 - p}\right)^2 - \Lambda\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)\left(\frac{x_n - p}{p}\right)^2 - \frac{(p\alpha_2^2 + p\alpha_1^2 - \alpha_1^2)\Lambda x_n - p^2\alpha_2^2}{p(1 - p)} - c\alpha_1^2\left(\frac{e_n}{1 - p}\right). \quad (19)$$

Проверим устойчивость хаотических систем управления и отклика с помощью функции Ляпунова

$$\Delta V(e_n) = \left(|\alpha_2^2 - c\alpha_1^2| \frac{1}{1 - p} - 1\right) \|e_n\|. \quad (20)$$

В данном случае, выбирая надлежащее значение параметра c , получаем, что проективная синхронизация имеет место, если $|\alpha_2^2 - c\alpha_1^2| < 1 - p$.

СЛУЧАЙ III. Пусть $p \leq x_n \leq 1$ и $0 \leq y_n < p$. Аналогично случаю II, рассматривая управляющую и управляемую системы, зададим проективную функцию погрешности

$$e_{n+1} = \alpha_2^2\left(\frac{e_n}{p}\right) + \frac{(\alpha_2^2 - p\alpha_2^2 - p\alpha_1^2)\Lambda x_n + \Lambda p^2\alpha_1^2}{p(1 - p)} - \alpha_2^2(\alpha_2^2 - 1)\left(\frac{y_n}{p}\right)^2 + \Lambda\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)\left(\frac{x_n - p}{1 - p}\right)^2 + u_n. \quad (21)$$

Чтобы получить соответствующую проективную синхронизацию, выберем управляющую функцию u_n как

$$u_n = \alpha_2^2(\alpha_2^2 - 1)\left(\frac{y_n}{p}\right)^2 - \Lambda\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)\left(\frac{x_n - p}{1 - p}\right)^2 - \frac{(\alpha_2^2 - p\alpha_2^2 - p\alpha_1^2)\Lambda x_n + \Lambda p^2\alpha_1^2}{p(1 - p)} - c\alpha_1^2\left(\frac{e_n}{p}\right). \quad (22)$$

Получаем функцию Ляпунова

$$\Delta V(e_n) = \left(\left|\frac{\alpha_2^2 - c\alpha_1^2}{p}\right| - 1\right) \|e_n\|. \quad (23)$$

В результате для проективной синхронизации нужно выбрать параметр c так, чтобы было выполнено неравенство $|\alpha_2^2 - c\alpha_1^2| < p$.

СЛУЧАЙ IV. Пусть $p \leq x_n \leq 1$ и $p \leq y_n \leq 1$. Вновь, учитывая уравнения (2), (5) и (6), перепишем управляющую и управляемую системы как

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \alpha_1^2\left(\frac{x_n - p}{1 - p}\right) - \alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)\left(\frac{x_n - p}{1 - p}\right)^2, \\ y_{n+1} &= \alpha_2^2\left(\frac{y_n - p}{1 - p}\right) - \alpha_2^2(\alpha_2^2 - 1)\left(\frac{y_n - p}{1 - p}\right)^2 + u_n. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее получаем функцию погрешности из соотношения (8):

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= y_{n+1} - \Lambda x_{n+1} = \\ &= \frac{\alpha_2^2}{1-p} e_n + \frac{p(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\Lambda x_n + p^2(\alpha_1^2\Lambda - \alpha_2^2)}{p(1-p)} - \\ &\quad - \alpha_2^2(\alpha_2^2 - 1)\left(\frac{y_n - p}{1-p}\right)^2 + \Lambda\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)\left(\frac{x_n - p}{1-p}\right)^2 + u_n. \end{aligned} \quad (25)$$

При выводе этого уравнения мы прибавили и вычли слагаемое $\Lambda\alpha_2^2(x_n/(1-p))$. Для синхронизации заданных кусочных хаотических систем выберем управляющую функцию в виде

$$\begin{aligned} u_n &= \alpha_2^2(\alpha_2^2 - 1)\left(\frac{y_n - p}{1-p}\right)^2 - \frac{p(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\Lambda x_n + p^2(\alpha_1^2\Lambda - \alpha_2^2)}{p(1-p)} - \\ &\quad - \Lambda\alpha_1^2(\alpha_1^2 - 1)\left(\frac{x_n - p}{1-p}\right)^2 - \frac{c\alpha_1^2}{1-p}e_n. \end{aligned} \quad (26)$$

Далее проверим устойчивость хаотических систем управления и отклика с помощью функции Ляпунова

$$\Delta V(e_n) = V(e_{n+1}) - V(e_n) = \|e_{n+1}\| - \|e_n\| \leq \left(\left| \frac{\alpha_2^2}{1-p} - \frac{c\alpha_1^2}{1-p} \right| - 1 \right) \|e_n\|. \quad (27)$$

В результате для проективной синхронизации с учетом формулы (9) достаточно выбрать параметр c так, чтобы было выполнено неравенство $|c\alpha_1^2 - \alpha_2^2| < 1 - p$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для проективной синхронизации управляющей и управляемой систем во всех четырех случаях достаточно выбрать параметр c так, чтобы было выполнено неравенство

$$|\alpha_2^2 - c\alpha_1^2| < \min\{p, 1 - p\}. \quad (28)$$

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В данном разделе предложенная выше схема используется в численном моделировании. Для подтверждения эффективности и применимости предложенного метода синхронизации кусочных хаотических систем проведено моделирование рассмотренных управляющей и управляемой систем с найденным контроллером.

Прежде всего, мы провели моделирование, используя полную синхронизацию двух кусочных хаотических систем. Были заданы начальные условия $x_0 = 0.71$, $y_0 = 0.01$ и выбраны параметры $p = 0.6$, $\alpha_1 = 1.00001$ и $\alpha_2 = 1.1757029$. Чтобы получить полную синхронизацию, мы взяли $\Lambda = 1$. На рис. 1 изображены траектории состояний системы на протяжении 50 итераций и погрешность синхронизации системы. Как видно из рисунка, управляющая и управляемая системы сходятся друг к другу за малое время, если использовать подходящим образом выбранный контроллер.

Далее мы провели моделирование задачи, используя проективную синхронизацию. Другими словами, мы рассчитали проективно синхронизированные величины y_n и Λx_n . Моделирование выполнено с использованием аккуратного регули-

Рис. 1. Полная синхронизация кусочных хаотических отображений с дискретным временем (а) и погрешность (б) при $x(0) = 0.71$, $y(0) = 0.01$, $\Lambda = 1$ и $\alpha_1 = 1.00001$, $\alpha_2 = 1.1757$, $p = 0.6$, $c = 1$.

Рис. 2. Проективная синхронизация (а) и погрешность (б) при $x(0) = 0.61$, $y(0) = -0.21$, $\Lambda = 3.5$ и $\alpha_1 = 0.98$, $\alpha_2 = 1.255$, $p = 0.35$, $c = 1.3$.

рования параметров. Проективный параметр был выбран как $\Lambda = 3.5$. В качестве двух хаотических параметров системы были взяты $\alpha_1 = 0.98$, $\alpha_2 = 1.255$. Параметр, задающий кусочный характер системы, мы выбрали как $p = 0.35$, а начальные условия – как $x(0) = 0.61$, $y(0) = -0.21$. Для получения проективной синхронизации при заданных условиях мы выбрали параметр контроллера $c = 1.3$. На рис. 2 изображена проективная синхронизация при данных условиях и функция погрешности. Регулируя параметр контроллера, мы достигли синхронизации после небольшого числа итераций.

Следует отметить, что представленную в настоящей работе схему синхронизации с использованием метода master-slave при выборе соответствующего контроллера

можно применить в защищенной передаче данных и криптографии. Отправленное сообщение может быть безопасно восстановлено путем синхронизации двух хаотических систем с обеих сторон, отправителя и получателя. Эта схема может быть применена в будущих работах по безопасным коммуникациям.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предложенной работе исследовалась проективная синхронизация вектора состояния кусочных хаотических систем с дискретным временем, вдохновленная стратегией master-slave. Для некоторых случаев с помощью функции Ляпунова определена устойчивость данной системы. Теоретические результаты подтверждены численным моделированием. Рассмотрены два случая: полной синхронизации и проективной синхронизации при различных условиях. Путем задания надлежащего контроллера с подходящими параметрами проведена синхронизация хаотических систем за небольшое количество итераций. Регулировкой параметров контроллера синхронизация систем может быть достигнута быстрее. Для двух проективных систем приведены графики процесса синхронизации и погрешности. Эти результаты, на получение которых нас вдохновили исследования хаотических систем и их синхронизаций, могут быть полезны в будущем для применения их при безопасной передаче данных.

Список литературы

- [1] J. Sun, Y. Shen, X. Zhang, “Modified projective and modified function projective synchronization of a class of real nonlinear systems and a class of complex nonlinear systems”, *Nonlinear Dyn.*, **78**:3 (2014), 1755–1764.
- [2] L. M. Pecora, T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:8 (1990), 821–824.
- [3] H.-T. Yau, “Synchronization and anti-synchronization coexist in two-degree-of-freedom dissipative gyroscope with nonlinear inputs”, *Nonlinear Anal.: Real World Appl.*, **9**:5 (2008), 2253–2261.
- [4] H. N. Agiza, “Chaos synchronazation of Lü dynamical system”, *Nonlinear Anal.: Theory, Methods Appl.*, **58**:1–2 (2004), 11–20.
- [5] X. Wu, J. Wang, “Adaptive generalized function projective synchronization of uncertain chaotic complex systems”, *Nonlinear Dyn.*, **73**:3 (2013), 1455–1467.
- [6] N. F. Rolkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, H. D. I. Abarbanel, “Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems”, *Phys. Rev. E*, **51**:2 (1995), 980–994.
- [7] H. Dai, G. Si, Y. Zhang, “Adaptive generalized function matrix projective lag synchronization of uncertain complex dynamical networks with different dimensions”, *Nonlinear Dyn.*, **74**:3 (2013), 629–648.
- [8] L. Lu, C. Li, “Generalized synchronization of spatiotemporal chaos in a weighted complex network”, *Nonlinear Dyn.*, **63**:4 (2011), 699–710.
- [9] D. Ghosh, “Nonlinear active observer-based generalized synchronization in time-delayed systems”, *Nonlinear Dyn.*, **59**:1–2 (2010), 289–296.
- [10] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, “Phase synchronization of chaotic oscillators”, *Phys. Rev. Lett.*, **76**:11 (1996), 1804–1807.
- [11] S. K. Bhowmick, P. Pal, P. K. Roy, S. K. Dana, “Lag synchronization and scaling of chaotic attractor in coupled system”, *Chaos*, **22**:2 (2012), 023151, 8 pp., arXiv: 1206.6723.

- [12] Y. Chen, X. Chen, S. Gu, “Lag synchronization of structurally nonequivalent chaotic systems with time delay”, *Nonlinear Anal.*, **66**:9 (2004), 1929–1937.
- [13] Z.-M. Ge, Y.-S. Chen, “Synchronization of unidirectional coupled chaotic systems via partial stability”, *Chaos, Solitons Fractals*, **21**:1 (2004), 101–111.
- [14] R. Mainieri, J. Rehacek, “Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **82**:15 (1999), 3042–3045.
- [15] C.-M. Chang, H.-K. Chen, “Chaos and hybrid projective synchronization of commensurate and incommensurate fractional-order Chen–Lee systems”, *Nonlinear Dyn.*, **62**:4 (2010), 851–858.
- [16] Z.-L. Wang, “Projective synchronization of hyperchaotic system and Liu system”, *Nonlinear Dyn.*, **59**:3 (2010), 455–462.
- [17] J. Sun, Y. Shen, G. Zhang, “Transmission projective synchronization of multi-systems with non-delayed and delayed coupling via impulsive control”, *Chaos*, **22**:4 (2012), 043107, 10 pp.
- [18] L. Runzi, “Adaptive function project synchronization of Rössler hyperchaotic system with uncertain parameters”, *Phys. Lett. A.*, **372**:20 (2008), 3667–3671.
- [19] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, “Time scale synchronization of chaotic oscillators”, *Phys. D*, **206**:3–4 (2005), 252–264, arXiv: nlin/0602053.
- [20] J. Sun, Y. Shen, Q. Yin, C. Xu, “Compound synchronization of four memristor chaotic oscillator systems and secure communication”, *Chaos*, **23**:1 (2013), 013140, 10 pp.
- [21] A. Coronel-Escamilla, J. F. Gómez-Aguilar, L. Torres, R. F. Escobar-Jiménez, M. Valtierra-Rodriguez, “Synchronization of chaotic systems involving fractional operators of Liouville–Caputo type with variable-order”, *Phys. A*, **487** (2017), 1–21.
- [22] A. Nematı, “Numerical solution of 2D fractional optimal control problems by the spectral method combined with Bernstein operational matrix”, *Internat. J. Control*, 2017, 1–14.
- [23] H. Ahmed, I. Salgado, H. Rios, “Robust synchronization of master-slave chaotic systems using approximate model: an experimental study”, *ISA Trans.*, **73** (2018), 141–146.
- [24] D. Zhang, J. Mei, P. Miao, “Global finite-time synchronization of different dimensional chaotic systems”, *Appl. Math. Model.*, **48** (2017), 303–315.
- [25] M. A. Jafarizadeh, M. Foroutan, S. Behnia, “Hierarchy of piecewise non-linear maps with non-ergodic behavior”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:40 (2004), 9403–9417, arXiv: nlin/0409054.
- [26] N. Masuda, K. Aihara, “Cryptosystems with discretized chaotic maps”, *IEEE Trans. Circuits Systems I: Fund. Theory Appl.*, **49**:1 (2002), 28–40.
- [27] H. Zhou, X. Ling, “Generating chaotic secure sequence with desired statistical properties and high security”, *Internat. J. Bifur. Chaos*, **7**:1 (1997), 205–213.
- [28] F. Huang, Z.-H. Guan, “A modified method of a class of recently presented cryptosystems”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **23**:5 (2005), 1893–1899.
- [29] S. Tao, W. Ruli, Y. Yixun, “The theoretical design for a class of new chaotic feedback stream ciphers”, *Acta Electronica Sinica*, **27** (1999), 47–50.
- [30] A. Baranovsky, D. Daems, “Design of one-dimensional chaotic maps with prescribed statistical properties”, *Internat. J. Bifur. Chaos*, **5**:6 (1995), 1585–1598.
- [31] S. Li, X. Mou, Y. Cai, Z. Ji, J. Zhang, “One the security of a chaotic encryption scheme: problems with computerized chaos”, *Comput. Phys. Commun.*, **153**:1 (2003), 52–58.
- [32] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [33] J. M. V. Grzybowski, M. Rafikov, E. E. N. Macau, “Synchronization analysis for chaotic communication on a satellite formulation flying”, *Acta Astronautica*, **67**:7–8 (2010), 881–891.
- [34] H. G. Enjieu Kadji, J. B. Chabi Orou, R. Yamapi, P. Wofo, “Nonlinear dynamics and strange attractors in the biological system”, *Chaos Solitons and Fractals*, **32**:2 (2007), 862–882.

- [35] A. Nemati, K. Mamehrashi, “The use of the Ritz method and Laplace transform for solving 2D fractional-order optimal control problems described by the Roesser model”, *Asian J. Control*, **21**:4 (2019) (to appear).
- [36] А. Бенхассин, “Гамильтоновы системы дробного порядка с локально заданными потенциалами”, *ТМФ*, **195**:1 (2018), 81–90.
- [37] С. Дас, В. К. Ядав, “Управление хаосом и функциональная проективная синхронизация систем дробного порядка методом бэкстеппинга”, *ТМФ*, **189**:1 (2016), 36–47.
- [38] A. Nemati, S. A. Yousefi, “A numerical scheme for solving two-dimensional fractional optimal control problems by the Ritz method combined with fractional operational matrix”, *IMA J. Math. Control Inform.*, **34**:4 (2017), 1079–1097.
- [39] Л. А. Калякин, “Синхронизация в неизохронной неавтономной системе”, *ТМФ*, **181**:2 (2014), 243–253.
- [40] M. A. Jafarizadeh, S. Behnia, S. Khorram, H. Naghshara, “Hierarchy of chaotic maps with an invariant measure”, *J. Statist. Phys.*, **104**:5–6 (2001), 1013–1028.
- [41] S. Behnia, A. Akhshani, S. Ahadpour, H. Mahmodi, A. Akhavan, “A fast chaotic encryption scheme based on piecewise nonlinear chaotic maps”, *Phys. Lett. A.*, **366**:4–5 (2007), 391–396.

Поступила в редакцию 27.01.2018,
после доработки 9.06.2018