Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Гриневич, П. М. Сантини, Фазовые резонансы для повторяемости аномальных волн НУШ в квазисимметричном случае, *ТМФ*, 2018, том 196, номер 3, 404–418

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 10:54:49

© 2018 г.

П. Г. Гриневич^{*†}, П. М. Сантини^{‡§}

ФАЗОВЫЕ РЕЗОНАНСЫ ДЛЯ ПОВТОРЯЕМОСТИ АНОМАЛЬНЫХ ВОЛН НУШ В КВАЗИСИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Наши недавние аналитические результаты о задаче Коши для фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера с начальными данными в виде периодического возмущения неустойчивого фона позволяют в простейшем случае одной неустойчивой моды получить полное аналитическое описание повторяемости аномальных волн. С учетом того, что современные эксперименты в волновых бассейнах и нелинейной оптике, посвященные наблюдению повторяемости Ферми–Паста–Улама, осуществляются в почти симметричных конфигурациях, с использованием полученных ранее результатов выведены полезные аналитические формулы для фазовых резонансов в повторяемости для почти симметричного случая, которые можно сопоставить с данными экспериментов.

Ключевые слова: фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера, аномальные волны, повторяемость, почти симметричные конфигурации, фазовые резонансы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9544>

1. ВВЕДЕНИЕ

Фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, \quad u = u(x, t) \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

является универсальной моделью, описывающей распространение квазимонохроматических волн в слабо нелинейных средах, включая глубокую воду [1], нелинейную оптику [2]–[4], ленгмюровские волны в плазме [5] и конденсат Бозе–Эйнштейна

Работа П. Г. Гриневича поддержана ФАНО России (тема № 0033-2018-0009), а также Sezione di Roma INFN и проектом Sapienza Ateneo 2017 г.

^{*}Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук, Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: pgg@landau.ac.ru

[†]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

[‡]Dipartimento di Fisica, Università di Roma “La Sapienza”, Roma, Italy

[§]Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma, Roma, Italy.
E-mail: paolo.santini@roma1.infn.it

с притяжением [6]. Хорошо известно, что его элементарное решение

$$u_0(x, t) = e^{2it}, \quad (2)$$

описывающее волны Стокса [7] на воде, состояние с постоянной интенсивностью света в нелинейной оптике и состояние с постоянной плотностью бозонов в конденсате Бозе–Эйнштейна, неустойчиво относительно возмущений с достаточно большой длиной волны [1], [8]–[12], и данная модуляционная неустойчивость (МН) считается основным механизмом образования аномальных волн (АВ, экстремальных волн, волн-убийц) в природе [13]–[18]. АВ – это короткоживущие волны, возникающие как будто бы из ниоткуда в данных физических системах.

Интегрируемость НУШ [19] позволяет строить решения, отвечающие малым возмущениям постоянного фона, с помощью вырождения конечнозонных решений (см. работы [20]–[23]), при котором спектральная кривая вырождается в рациональную, либо напрямую с использованием классического преобразования Дарбу [24], [25] или метода одевания [26], [27]. В числе этих базисных решений мы хотели бы упомянуть решения Перегринна [28], рационально убывающие по x и t относительно фона (2), так называемые солитоны Кузнецова–Каваты–Иноуэ–Ма [29]–[31], экспоненциально локализованные в пространстве относительно фона и периодические по времени, а также решения, найденные Ахмедиевым, Элеонским и Кулагиным в статье [32], периодические по x и экспоненциально локализованные по времени относительно фона (2), известные в литературе как бризеры Ахмедиева, равно как и их эллиптические аналоги [33], [34]. Односолитонные решения более общего вида на фоне (2) (см., например, работы [20], [35]) отвечают спектральному параметру в точках общего положения. Эти решения обобщаются на многосолитонные, описывающие нелинейное взаимодействие солитонов (см., например, работы [20], [36]–[39]). Отметим, что решения Перегринна являются строго гомоклинными и описывают АВ, появляющиеся почти из ниоткуда и в будущем исчезающие, тогда как многосолитонные решения ахмедиевского типа являются почти гомоклинными, поскольку они возвращаются к фону, отличающемуся от исходного на фазовый множитель. Также были построены обобщения этих решений для интегрируемого многокомпонентного НУШ (см., например, работы [40]–[42]).

Естественным образом возникает вопрос, насколько хорошо вышеупомянутые солитонные решения фокусирующего НУШ на фоне (2) соответствуют решениям задачи Коши в осмысленной постановке, и если ответ нас устраивает, то каков механизм их появления в общих ситуациях.

Что касается задачи Коши для фокусирующего НУШ в предположении, что начальное условие является локализованным возмущением фона, то медленно модулированные периодические колебания, описываемые эллиптическими решениями (1), играют существенную роль при описании поведения на больших временах [43], [44]. Для того чтобы исследовать этот базисный вопрос в пространственно-периодической постановке, мы недавно построили решение x -периодической задачи Коши для НУШ с точностью до поправок порядка $O(\epsilon^2)$ в предположении, что начальные данные являются возмущениями фона (2) общего вида порядка $O(\epsilon)$ (данную постановку мы называем периодической задачей Коши для АВ), причем использовались два различных подхода:

1) метод конечнозонного интегрирования [45]–[47], рассмотренный в статье [48] для случая одной неустойчивой моды и использованный совсем недавно для конечного числа неустойчивых мод в работе [49], который дает равномерное по пространству и времени приближение в терминах элементарных функций в главном порядке;

2) метод сращиваемых асимптотических разложений [50] для случая одной и двух неустойчивых мод, который позволяет получить удовлетворительное описание повторяемости АВ в терминах элементарных функций.

В методе сращиваемых асимптотических разложений используется более простая математика, однако при наличии более одной неустойчивой моды он применим лишь для специальных начальных данных [49]. Отметим, что первая попытка применить конечнозонный подход для описания решений, отвечающих малым периодическим возмущениям, была предпринята в статье [51].

В простейшем случае одной неустойчивой моды $k_1 = 2\pi/L$, где L обозначает период, причем $\pi < L < 2\pi$, в работах [48], [50] было показано, что решения периодической задачи Коши для фокусирующего НУШ на интервале $[0, L]$ с начальными данными

$$u(x, 0) = 1 + \epsilon(x), \quad \epsilon(x) = c_1 e^{ik_1 x} + c_{-1} e^{-ik_1 x}, \quad |c_1|, |c_{-1}| = O(\epsilon), \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad (3)$$

можно приблизить в главном порядке следующей равномерной по пространству-времени формулой в терминах элементарных функций:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^n A(x, t; \phi_1, x_1^{(m)}, t_1^{(m)}, \rho^{(m)}) - \frac{1 - e^{4in\phi_1}}{1 - e^{4i\phi_1}} e^{2it}, \quad (4)$$

$$x \in [0, L], \quad 0 \leq t \leq t_1^{(n)} + O(1),$$

где параметры $x_1^{(m)}, t_1^{(m)}, \rho^{(m)}, m \geq 0$, выражаются следующим образом:

$$x_1^{(m)} = X_1 + (m-1)\Delta X, \quad t_1^{(m)} = T_1 + (m-1)\Delta T, \quad \rho^{(m)} = 2\phi_1 + (m-1)4\phi_1, \quad (5)$$

$$X_1 = \frac{\arg \alpha - \phi_1 + \pi/2}{k_1}, \quad \Delta X = \frac{\arg(\alpha\beta)}{k_1} \pmod{L},$$

$$T_1 \equiv \frac{1}{\sigma_1} \ln \frac{\sigma_1^2}{2|\alpha|}, \quad \Delta T = \frac{2}{\sigma_1} \ln \frac{\sigma_1^2}{2\sqrt{|\alpha\beta|}}, \quad (6)$$

через начальные данные

$$\alpha = \bar{c}_1 - e^{2i\phi_1} c_{-1}, \quad \beta = \bar{c}_{-1} - e^{-2i\phi_1} c_1. \quad (7)$$

Здесь k_1 ($0 < k_1 < 2$) и σ_1 обозначают волновой вектор и инкремент нарастания для неустойчивой моды соответственно:

$$k_1 = 2 \cos \phi_1 \iff \phi_1 = \arccos \frac{k_1}{2},$$

$$\sigma_1 = \sigma(k_1) \equiv k_1 \sqrt{4 - k_1^2} = 2 \sin(2\phi_1). \quad (8)$$

Функция A – это бризер Ахмедиева,

$$A(x, t; \theta, X, T, \rho) = e^{2it+i\rho} \frac{\text{ch}[\sigma(\theta)(t-T) + 2i\theta] + \sin \theta \cos[k(\theta)(x-X)]}{\text{ch}[\sigma(\theta)(t-T)] - \sin \theta \cos[k(\theta)(x-X)]}, \quad (9)$$

$$k(\theta) = 2 \cos \theta, \quad \sigma(\theta) = k(\theta) \sqrt{4 - k^2(\theta)} = 2 \sin(2\theta),$$

Рис. 1. Карта линий уровня для $|u(x, t)|$ (а) и соответствующий трехмерный график (б), показывающие чередование линейных и нелинейных стадий модуляционной неустойчивости (последовательность АВ), полученные численным интегрированием НУШ с помощью улучшенного (см. статью [52]) метода расщепления Фурье (Split Step Fourier Method) [53]–[55]. Здесь $L = 6$ (присутствует одна неустойчивая мода k_1), $c_1 = \epsilon/2$, $c_{-1} = \epsilon(0.3 - 0.4i)/2$, $\epsilon = 10^{-4}$, короткая ось – ось x , $x \in [-L/2, L/2]$. Светлые области на графиках отвечают большим значениям $|u(x, t)|$. Темные области отвечают малым значениям $|u(x, t)|$. Эти графики полностью согласуются с теоретическими предсказаниями (4).

который является точным решением фокусирующего НУШ при всех вещественных значениях параметров θ , X , T , ρ . Равномерное по пространству-времени представление в терминах элементарных функций имеет ошибку порядка $O(\epsilon^2)$ в областях, описывающих линейную стадию модуляционной неустойчивости, и ошибку порядка $O(\epsilon)$ в областях, описывающих нелинейную стадию модуляционной неустойчивости (последовательность аномальных волн), см. рис. 1.

Если вместо начального условия (3) рассмотреть периодическое возмущение общего вида

$$\epsilon(x) = \sum_{j \geq 1} (c_j e^{ik_j x} + c_{-j} e^{-ik_j x}), \quad k_j = \frac{2\pi}{L} j, \quad |c_j| = O(\epsilon), \quad (10)$$

для случая одной неустойчивой моды k_1 , последовательность АВ, описываемая формулами (4)–(9), не изменится в ведущем порядке $O(1)$, и поправка будет иметь порядок $O(\epsilon)$ [50].

Таким образом, мы имеем следующую простую картину: *решение x -периодической задачи Коши описывается в простейшем случае одной неустойчивой моды точной последовательностью бризеров Ахмедиева, параметры которых, меняющиеся при каждом следующем повторении, выражаются через начальные данные в терминах элементарных функций.* Здесь T_1 – момент первого появления АВ (момент времени, в который АВ достигает максимума абсолютного значения), X_1 – положение этого максимума, $1 + 2\sin\phi_1$ – значение в максимуме, ΔT – время повторения (временной промежуток между двумя последовательными повторениями АВ), ΔX – x -сдвиг максимума при повторении. Кроме этого, при каждом следующем появлении АВ порождает изменение фона на фазовый множитель $e^{4i\phi_1}$.

После того как мы показали, что общая периодическая задача Коши с одной неустойчивой модой порождает точную повторяемость АВ, описываемую солитонами Ахмедиева, возникает естественный вопрос: что произойдет, если в качестве начального условия выбрать специальное условие – солитон Ахмедиева? Поскольку гомоклинные решения неустойчивы и соответствуют в конечнозонной картине спектральным кривым, у которых все зоны закрыты, малое возмущение (возникающее, например, за счет ошибок дискретизации численной схемы для НУШ или малых поправок в силу физики процесса) приводит к открытию небольших зон, поэтому вслед за первым появлением АВ, предсказанным из начальных данных, возникает устойчивая повторяемость АВ, описываемая выражениями (4) (см. работу [56]).

Отметим также, что использование метода сращиваемых асимптотических разложений позволяет хорошо описать первое появлению АВ в другой интересной модели – РТ-симметричном НУШ (РТНУШ) [57]–[59] – с использованием семейств точных решений, недавно найденных в препринте [60], причем свободные параметры этих решений снова выражаются через начальные данные в элементарных функциях. В зависимости от начальных данных аномальные волны в РТНУШ либо регулярны, либо имеют особенность при первом появлении [61], в отличие от НУШ, АВ которого всегда регулярны.

Повторяемость АВ в периодической задаче уже изучалась в литературе (см., например, работы [62]–[67]), причем в экспериментах с волнами на воде [68], нелинейным распространением света в оптических волокнах [69] и фоторефрактивных кристаллах [70] удавалось аккуратно воспроизвести эффект повторяемости. В частности, в препринте [70] было проведено сопоставление измерений в эксперименте с вышеприведенными формулами, описывающими повторяемость в НУШ, и было получено очень хорошее качественное и количественное согласие. Мы надеемся, что хорошее согласие удастся получить и для экспериментов с оптическими волокнами, в водных бассейнах и, возможно, в бозе-конденсате с притяжением.

Общей чертой указанных экспериментов являлось использование в большинстве случаев экспериментальных установок со специальной симметрией, которая отвечает особым случаям, в которых фазовый сдвиг ΔX за одно повторение в формулах (6) равен либо нулю, либо $L/2$, что влечет временную периодичность решений с периодом ΔT или $2\Delta T$ соответственно, где ΔT – время повторного появления в (6). Под влиянием этих экспериментов мы посвятили оставшуюся часть работы

исследованию АВ для начальных данных, для которых указанные симметричные ограничения почти выполнены, и выводу полезных формул, описывающих, в частности, фазовый резонанс в повторяемости и пригодных для сопоставления как с уже доступными данными экспериментов (частично такое сопоставление было успешно проведено в препринте [70]), так и с теми, которые будут получены в ближайшем будущем.

2. СИММЕТРИЧНЫЙ И КВАЗИСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАИ

При работе в симметричном и квазисимметричном случае удобно для начала переписать формулы (4)–(7) в полярных координатах в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_1 &= (|c| + \Delta)e^{i(\zeta + \delta)}, & c_{-1} &= (|c| - \Delta)e^{i(\zeta - \delta)}, \\ \zeta &= \frac{\arg c_1 + \arg c_{-1}}{2}, & \delta &= \frac{\arg c_1 - \arg c_{-1}}{2}, \\ |c| &= \frac{|c_1| + |c_{-1}|}{2}, & \Delta &= \frac{|c_1| - |c_{-1}|}{2}, & |c|, \Delta &= O(\epsilon), \end{aligned} \quad (11)$$

откуда вытекает, что

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 1 + 2(|c| \cos(k_1 x + \delta) + i\Delta \sin(k_1 x + \delta))e^{i\zeta}, \\ |u(x, 0)|^2 &= 1 + A \cos(k_1 x + \delta + B) + O(\epsilon^2), \\ A &= 4\sqrt{|c|^2 \cos^2 \zeta + \Delta^2 \sin^2 \zeta}, & B &= \arctg\left(\frac{\Delta}{|c|} \operatorname{tg} \zeta\right), \end{aligned} \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha &= [-2i|c| \sin(\phi_1 + \zeta) + 2\Delta \cos(\phi_1 + \zeta)]e^{i(\phi_1 - \delta)}, \\ \beta &= [2i|c| \sin(\phi_1 - \zeta) - 2\Delta \cos(\phi_1 - \zeta)]e^{-i(\phi_1 - \delta)}, \\ \alpha\beta &= 2|c|^2 [\cos(2\zeta) - \cos(2\phi_1)] - 2\Delta^2 [\cos(2\zeta) + \cos(2\phi_1)] + 2i\Delta|c|\sigma_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что в случае, когда мы возбуждаем только единственную неустойчивую моду, фазовый сдвиг δ отвечает тривиальному сдвигу по x начальных условий, поэтому, используя трансляционную симметрию НУШ, можно без потери общности положить $\delta = 0$, что мы и делаем ниже.

2.1. Симметричный случай $|c_1| = |c_{-1}| \iff \Delta = 0$. Для начала отметим, что из формул (6) и (13) видно, что эксперименты [68]–[70] по повторяемости АВ, в которых сдвиг по x при повторении оказывается чаще всего равным $\Delta X = 0$ или $\Delta X = L/2$, отвечают специальному выбору параметров, для которого $\alpha\beta \in \mathbb{R}$ или, что эквивалентно, $\Delta = 0$:

$$\alpha\beta \in \mathbb{R} \iff \Delta = 0 \iff |c_1| = |c_{-1}|. \quad (14)$$

В этих двух важных случаях (см. рис. 2)

$$\begin{aligned} \Delta X = 0 &\iff \alpha\beta > 0 \iff \cos(2\zeta) > \cos(2\phi_1) \iff |\zeta| < \phi_1, \\ &\pi - \phi_1 < |\zeta| \leq \pi, \\ \Delta X = \frac{L}{2} &\iff \alpha\beta < 0 \iff \cos(2\zeta) < \cos(2\phi_1) \iff \phi_1 < |\zeta| < \pi - \phi_1, \end{aligned} \quad (15)$$

Рис. 2. Две карты линий уровня для $|u(x, t)|$ (а, б) и соответствующие трехмерные графики (в, г), полученные численным интегрированием НУШ, описывающие повторяемость АВ в симметричном случае $\Delta = 0$ с $L = 6$ ($k_1 \sim 1.047$ и $\phi_1 \sim 1.020$), $|c_1| = |c_{-1}| = 0.5\epsilon$, $\epsilon = 10^{-3}$. На рис. а, в $\zeta = 0.3 < \phi_1$, соответственно $\Delta X = 0$. На рис. б, г $\phi_1 < \zeta = 1.3 < \pi - \phi_1$, соответственно $\Delta X = L/2$. Светлым на графиках показаны большие значения $|u(x, t)|$, темным – малые значения $|u(x, t)|$. Мы имеем полное согласие с теорией (4).

причем

$$\begin{aligned} \alpha &= -2i|c|\sin(\phi_1 + \zeta)e^{i\phi_1}, & \beta &= 2i|c|\sin(\phi_1 - \zeta)e^{-i\phi_1}, \\ \alpha\beta &= 2|c|^2(\cos(2\zeta) - \cos(2\phi_1)) \end{aligned} \quad (16)$$

(здесь мы воспользовались элементарным соотношением

$$2\sin(\phi_1 + \zeta)\sin(\phi_1 - \zeta) = \cos(2\zeta) - \cos(2\phi_1)).$$

В резонансных фазах $\zeta = -\phi_1, \pi - \phi_1$, $\alpha = 0$, поэтому величина T_1 обращается в бесконечность, а X_1 имеет разрыв. Аналогично, в резонансных фазах $\zeta = \pm\phi_1, \pm(\pi - \phi_1)$, $\alpha\beta = 0$, величина ΔT обращается в бесконечность, а ΔX имеет разрыв. Особое поведение связано с тем, что формулы (6) представляют собой лишь первый член соответствующего асимптотического ряда [48], и вблизи указанных точек нужно учитывать следующие поправки. Вместо этого ниже мы исследуем регуляризацию, порождаемую тем обстоятельством, что соотношение симметрии начальных данных $\Delta = 0 \iff |c_1| = |c_{-1}|$ (3) в реальных экспериментах выполнено лишь приблизительно.

2.2. Квазисимметричный случай $|c_1| \sim |c_{-1}|$. Начиная с данного момента мы работаем с квазисимметричной конфигурацией

$$|c_1| \sim |c_{-1}| = O(\epsilon), \quad O(\epsilon^2) \ll |\Delta| \ll O(\epsilon). \quad (17)$$

Неравенства в формуле (17) вытекают из того, что величина $|\Delta|$ должна быть существенно меньше, чем $|c_1|, |c_{-1}| = O(\epsilon)$, и больше, чем поправка $O(\epsilon^2)$, возникающая в разложении по малому возмущению, порождающему (6).

При указанных предположениях формулы (12) и (13) существенно упрощаются:

$$u(x, 0) = 1 + 2|c| \cos(k_1 x) e^{i\zeta} + O(\Delta), \quad |u(x, 0)|^2 = 1 + 4|c| |\cos \zeta| \cos(k_1 x) + O(\Delta), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= (-2i|c| \sin(\phi_1 + \zeta) + 2\Delta \cos(\phi_1 + \zeta)) e^{i\phi_1} \sim \\ &\sim \begin{cases} -2i|c| \sin(\phi_1 + \zeta) e^{i(\phi_1 - \delta)}, & |\zeta + \phi_1|, |\zeta - \pi + \phi_1| = O(1), \\ 2\Delta e^{i\phi_1}, & \zeta = -\phi_1, \\ -2\Delta e^{i\phi_1}, & \zeta = \pi - \phi_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \beta &= (2i|c| \sin(\phi_1 - \zeta) - 2\Delta \cos(\phi_1 - \zeta)) e^{-i\phi_1} \sim \\ &\sim \begin{cases} 2i|c| \sin(\phi_1 - \zeta) e^{-i\phi_1}, & |\zeta - \phi_1|, |\zeta + \pi - \phi_1| = O(1), \\ -2\Delta e^{-i\phi_1}, & \zeta = \phi_1, \\ 2\Delta e^{-i\phi_1}, & \zeta = -\pi + \phi_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= 2|c|^2 (\cos(2\zeta) - \cos(2\phi_1)) + 2i\sigma_1 |c| \Delta + O(\Delta^2) \sim \\ &\sim \begin{cases} 2|c|^2 (\cos(2\zeta) - \cos(2\phi_1)), & |\zeta \mp \phi_1|, |\zeta \mp (\pi - \phi_1)| = O(1), \\ 2i\sigma_1 |c| \Delta, & \zeta = \pm\phi_1, \pm(\pi - \phi_1). \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда следует, что для момента появления первой АВ мы имеем соотношение

$$\begin{aligned} T_1 &\sim \frac{1}{\sigma_1} \ln \left(\frac{\sigma_1^2}{4\sqrt{|c|^2 \sin^2(\phi_1 + \zeta) + \Delta^2 \cos^2(\phi_1 + \zeta)}} \right) \sim \\ &\sim \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} \ln \left(\frac{\sigma_1^2}{4|c| |\sin(\phi_1 + \zeta)|} \right), & |\zeta + \phi_1|, |\zeta - \pi + \phi_1| = O(1), \\ \frac{1}{\sigma_1} \ln \left(\frac{\sigma_1^2}{4|\Delta|} \right), & \zeta = -\phi_1, \pi - \phi_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

Если зафиксировать k_1 (ϕ_1) и $|c|$, величина T_1 становится функцией единственной переменной ζ , и эта функция имеет максимумы в резонансных фазах $\zeta = -\phi_1, \pi - \phi_1$ со значением

$$T_1(-\phi_1) = \frac{1}{\sigma_1} \ln \left(\frac{\sigma_1^2}{4|\Delta|} \right) \quad (23)$$

и минимумы при $\zeta = \pi/2 - \phi_1$ и $\zeta = -\pi/2 - \phi_1$ со значением

$$T_1\left(\frac{\pi}{2} - \phi_1\right) = \frac{1}{\sigma_1} \ln \left(\frac{\sigma_1^2}{4|c|} \right) \quad (24)$$

(см. график с двумя пиками на рис. 3). Соответственно X_1 приблизительно равно $\operatorname{sgn} \Delta L/2$ на интервале $-\pi \leq \zeta < -\phi_1$ с резким переходом от $\operatorname{sgn} \Delta L/2$ к нулю на

Рис. 3. Графики момента первого появления T_1 (кривая с двумя максимумами) и интервала между последующими появлениями ΔT (кривая с четырьмя максимумами) как функций от переменной ζ для $|c| = 10^{-3}$, $\Delta = |c|^{3/2}$, $k_1 = 2\pi/L = 1.0472$ (и $\phi_1 = 1.0197$). График T_1 имеет два максимума в резонансах $\zeta = -\phi_1$ и $\zeta = \pi - \phi_1 \sim 2.12$ и два минимума при $\zeta = \pi/2 - \phi_1 \sim 0.55$ и $\zeta = -\pi/2 - \phi_1 \sim -2.59$. График ΔT имеет четыре максимума в резонансах $\zeta = \pm\phi_1$ и $\zeta = \pm(\pi - \phi_1) \sim \pm 2.12$ и глобальный минимум при $\zeta = 0$.

интервале порядка $O(|\Delta|/|c|)$, когда ζ проходит в положительном направлении резонансную точку $-\phi_1$. Далее оно почти постоянно на интервале $-\phi_1 < \zeta < \pi - \phi_1$ с резким переходом того же типа от нуля к $-\text{sgn } \Delta L/2$, когда ζ проходит в положительном направлении резонансную точку $\pi - \phi_1$. Наконец, оно почти постоянно на интервале $\pi - \phi_1 < \zeta \leq \pi$. Отметим, что $X_1 = \text{sgn } \Delta L/4$ при $\zeta = -\phi_1$ и $X_1 = -\text{sgn } \Delta L/4$ при $\zeta = \pi - \phi_1$. Заметим также, что поскольку X_1 определено по $\text{mod } L$, то $X_1 = \pm L/2$ отвечает одной и той же конфигурации.

Можно выписать аналогичные формулы для ΔT и ΔX :

$$\begin{aligned} \Delta T &\sim \frac{2}{\sigma_1} \ln \left(\frac{\sigma_1^2}{2\sqrt{2|c|} \sqrt[4]{|c|^2(\cos(2\zeta) - \cos(2\phi_1))^2 + \Delta^2 \sigma_1^2}} \right) \sim \\ &\sim \begin{cases} \frac{2}{\sigma_1} \ln \left(\frac{\sigma_1^2}{2\sqrt{2|c|} \sqrt{|\cos(2\zeta) - \cos(2\phi_1)|}} \right), & |\zeta \mp \phi_1|, |\zeta \mp (\pi - \phi_1)| = O(1) \\ \frac{2}{\sigma_1} \ln \left(\frac{\sigma_1^2}{2\sqrt{2\sigma_1|c||\Delta|}} \right), & \zeta = \pm\phi_1, \pm(\pi - \phi_1) \end{cases} \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X &\sim \frac{1}{k_1} \arg \left((\cos(2\zeta) - \cos(2\phi_1)) + i \frac{\Delta}{|c|} \sigma_1 \right) \sim \\ &\sim \begin{cases} \frac{\sigma_1 \Delta}{k_1 |c| (\cos(2\zeta) - \cos(2\phi_1))} \sim 0, & \cos(2\zeta) > \cos(2\phi_1), \\ \text{sgn } \Delta \frac{L}{2} - \frac{\sigma_1 \Delta}{k_1 |c| (\cos(2\zeta) - \cos(2\phi_1))} \sim \text{sgn } \Delta \frac{L}{2}, & \cos(2\zeta) < \cos(2\phi_1), \\ \text{sgn } \Delta \frac{L}{4}, & \zeta = \pm\phi_1, \pm(\pi - \phi_1). \end{cases} \quad (26) \end{aligned}$$

Рис. 4. Графики x -сдвигов ΔX при повторных появлениях в зависимости от переменной ζ для $k_1 = 2\pi/L = 1.0472$ ($\phi_1 = 1.0197$) и $|c| = 10^{-3}$ при $\Delta = |c|^{3/2} \sim 3.16 \cdot 10^{-5}$ (а) и $\Delta = -|c|^{3/2}$ (б).

Рис. 5. Две карты линий уровня для $|u(x, t)|$ (а, б) и соответствующие трехмерные графики (в, г), описывающие повторяемость АВ в квазисимметричном случае для резонанса $\arg c_1 = \arg c_{-1} = \phi_1$, полученные численным интегрированием НУШ для $L = 6$ ($k_1 = 1.0472$ и $\phi_1 = 1.0197$). На рис. а, в $|c_1| = 0.515\epsilon$, $|c_{-1}| = 0.485\epsilon$, $\epsilon = 10^{-3}$. Поскольку $\Delta = 0.015\epsilon > 0$, то $\Delta X = L/4$. На рис. б, г $|c_1| = 0.485\epsilon$, $|c_{-1}| = 0.515\epsilon$, $\epsilon = 10^{-3}$. Светлым на графиках показаны большие значения $|u(x, t)|$, темным – малые значения $|u(x, t)|$. Эти графики полностью согласуются с изложенной выше теорией.

Отсюда следует, что величина ΔT , рассматриваемая как функция фазы ζ , имеет максимумы в резонансных фазах $\zeta = \pm\phi_1, \pm(\pi - \phi_1)$ со значением

$$\Delta T(\pm\phi_1) \sim \frac{2}{\sigma_1} \ln\left(\frac{\sigma_1^2}{2\sqrt{2\sigma_1|c||\Delta|}}\right) \quad (27)$$

и глобальный минимум при $\zeta = 0$ со значением

$$\Delta T(0) \sim \frac{2}{\sigma_1} \ln\left(\frac{\sigma_1^2}{2\sqrt{2|c|\sqrt{1-\cos(2\phi_1)}}}\right) \quad (28)$$

(см. график с четырьмя пиками на рис. 3).

Соответственно ΔX приблизительно равно нулю при $0 \leq \zeta < \phi_1$, резко изменяясь от нуля до $\operatorname{sgn} \Delta L/2$ на малом интервале порядка $O(2|\Delta|/|c|)$, когда ζ проходит в положительном направлении через резонанс ϕ_1 , далее оно почти постоянно на интервале $\phi_1 < \zeta < \pi - \phi_1$ и снова резко изменяется от $\operatorname{sgn} \Delta L/2$ до нуля, когда ζ проходит в положительном направлении через резонанс $\pi - \phi_1$. Наконец, оно остается почти постоянным на интервале $\pi - \phi_1 < \zeta \leq \pi$. Кроме того, в резонансных фазах ϕ_1 и $\pi - \phi_1$ имеет место равенство $\Delta X = \operatorname{sgn} \Delta L/4$. Поведение при отрицательных ζ следует из симметрии ΔX по отношению к ζ (см. графики $\Delta X(\zeta)$ для положительных и отрицательных значений Δ на рис. 4, а также результаты численного интегрирования НУШ в резонансной точке $\zeta = \phi_1$ на рис. 5).

3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе мы детально изучили фазовые резонансы для повторяемости АВ в модели НУШ в квазисимметричном случае, который имеет приложения к ряду практических задач, включая волны на воде [68], в волоконной оптике [69] и фоторефрактивных кристаллах [70]. В частности, в препринте [70] был использован симметричный трехволновой интерферометр для генерации фоновой волны и одномодового возмущения вида (18), распространяющихся в фоторефрактивных кристаллах (переменная t в уравнении НУШ в данном случае соответствует расстоянию, пройденному волной в кристалле), а условие симметрии (17) отражало тот факт, что боковые пучки имеют почти равную интенсивность. Резонанс появляется, когда средняя величина ζ для фаз двух боковых пучков (измеренная относительно центрального пучка) равна $\pm\phi_1, \pm(\pi - \phi_1)$, где $\phi_1 = \arccos(k_1/2)$ и k_1 – мода, возбуждаемая начальным возмущением.

Формулы, выведенные в данной работе, во-первых, можно сопоставить с экспериментальными данными, доступными в настоящее время (частично такое сравнение было проведено в работе [70]), или теми, которые будут получены в ближайшем будущем, что позволит, в частности, проверить, насколько точно интегрируемая модель НУШ описывает физику изучаемых процессов; во-вторых, их можно использовать, в частности, для восстановления точных начальных данных по экспериментальным измерениям параметров повторяемости (то, что мы называем обратной задачей в статье [50], см. также препринт [70]).

Благодарности. Авторы благодарны Е. Дель Ре, Д. Пьеранжели и С. Трилло за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, “Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости”, *ПМТФ*, **9**:2 (1968), 86–94.
- [2] D. R. Solli, C. Ropers, P. Koonath, B. Jalali, “Optical rogue waves”, *Nature*, **450**:7172 (2007), 1054.
- [3] U. Bortolozzo, A. Montina, F. T. Arecchi, J. P. Huignard, S. Residori, “Spatiotemporal pulses in a liquid crystal optical oscillator”, *Phys. Rev. Lett.*, **99**:2 (2007), 023901, 4 pp.
- [4] D. Pierangeli, F. Di Mei, C. Conti, A. J. Agranat, E. DelRe, “Spatial rogue waves in photorefractive ferroelectrics”, *Phys. Rev. Lett.*, **115**:9 (2015), 093901, 6 pp.
- [5] C. Sulem, P.-L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation. Self Focusing and Wave Collapse*, Applied Mathematical Sciences, **139**, Springer, New York, 1999.
- [6] Yu. V. Bludov, V. V. Konotop, N. Akhmediev, “Matter rogue waves”, *Phys. Rev. A*, **80**:3 (2009), 033610, 5 pp.
- [7] G. G. Stokes, “On the theory of oscillatory waves”, *Mathematical and Physical Papers*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, **VIII**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009, 441–455; “Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves”, *Mathematical and Physical Papers*, v. 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1880, 314–326.
- [8] В. И. Беспалов, В. И. Таланов, “О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях”, *Письма в ЖЭТФ*, **3**:12 (1966), 471–476.
- [9] T. B. Benjamin, J. E. Feir, “The disintegration of wave trains on deep water. Part I. Theory”, *J. Fluid Mech.*, **27** (1967), 417–430.
- [10] V. Zakharov, L. Ostrovsky, “Modulation instability: the beginning”, *Phys. D*, **238**:5 (2009), 540–548.
- [11] T. Taniuti, H. Washimi, “Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma”, *Phys. Rev. Lett.*, **21**:4 (1968), 209–212.
- [12] L. Salasnich, A. Parola, L. Reatto, “Modulational instability and complex dynamics of confined matter-wave solitons”, *Phys. Rev. Lett.*, **91**:8 (2003), 080405, 4 pp., arXiv: cond-mat/0307206.
- [13] K. L. Henderson, D. H. Peregrine, J. W. Dold, “Unsteady water wave modulations: fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrödinger equation”, *Wave Motion*, **29**:4 (1999), 341–361.
- [14] K. B. Dysthe, K. Trulsen, “Note on breather type solutions of the NLS as models for freak-waves”, *Phys. Scr.*, **T82**:1 (1999), 48–52.
- [15] A. Osborne, M. Onorato, M. Serio, “The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep-water gravity wave trains”, *Phys. Lett. A*, **275**:5–6 (2000), 386–393.
- [16] C. Kharif, E. Pelinovsky, “Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon”, *Eur. J. Mech. B Fluids*, **22**:6 (2004), 603–634.
- [17] C. Kharif, E. Pelinovsky, T. Talipova, A. Slunyaev, “Focusing of nonlinear wave groups in deep water”, *Письма в ЖЭТФ*, **73**:4 (2001), 190–195.
- [18] M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montina, F. T. Arecchi, “Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts”, *Phys. Rep.*, **528**:2 (2013), 47–89.
- [19] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах”, *ЖЭТФ*, **61**:1 (1971), 118–134.
- [20] А. Р. Итс, А. В. Рыбин, М. А. Салль, “К вопросу о точном интегрировании нелинейного уравнения Шредингера”, *ТМФ*, **74**:1 (1988), 29–45.
- [21] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol’ski, A. R. Its, V. B. Matveev, *Algebro-Geometric Approach in the Theory of Integrable Equations*, Springer Series in Nonlinear Dynamics, Springer, Berlin, 1994.
- [22] И. М. Кричевер, “Спектральная теория двумерных периодических операторов и ее приложения”, *УМН*, **44**:2(266) (1989), 121–184.

- [23] I. M. Krichever, “Perturbation theory in periodic problems for two-dimensional integrable systems”, *Sov. Sci. Rev., Sect. C, Math. Phys. Rev.*, **9**:2 (1992), 1–103.
- [24] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, Berlin, 1991.
- [25] N. Ercolani, M. G. Forest, D. W. McLaughlin, “Geometry of the modulation instability Part III: homoclinic orbits for the periodic sine–Gordon equation”, *Phys. D*, **43**:2–3 (1990), 349–384.
- [26] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. Г”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 43–53.
- [27] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, “Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи”, *ЖЭТФ*, **74**:6 (1978), 1953–1973.
- [28] D. H. Peregrine, “Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **25**:1 (1983), 16–43.
- [29] Е. А. Кузнецов, “Солитоны в параметрически неустойчивой плазме”, *Докл. АН СССР*, **236**:1–3 (1977), 575–577.
- [30] T. Kawata, H. Inoue, “Inverse scattering method for the nonlinear evolution equations under nonvanishing conditions”, *J. Phys. Soc. Japan*, **44**:5 (1978), 1722–1729.
- [31] Y.-C. Ma, “The perturbed plane wave solutions of the cubic Schrödinger equation”, *Stud. Appl. Math.*, **60**:1 (1979), 43–58.
- [32] Н. Н. Ахмедиев, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, “Генерация периодических пакетов пикосекундных импульсов в оптическом фибере: точные решения”, *ЖЭТФ*, **89** (1985), 1542–1551.
- [33] Н. Н. Ахмедиев, В. И. Корнеев, “Модуляционная неустойчивость и периодические решения нелинейного уравнения Шредингера”, *ТМФ*, **69**:2 (1986), 189–194.
- [34] Н. Н. Ахмедиев, В. М. Елеонский, Н. Е. Кулагин, “Точные решения первого порядка нелинейного уравнения Шредингера”, *ТМФ*, **72**:2 (1987), 183–196.
- [35] V. E. Zakharov, A. A. Gelash, *Soliton on unstable condensate*, arXiv:1109.0620.
- [36] P. Dubard, P. Gaillard, C. Klein, V. B. Matveev, *Eur. Phys. J. Special Topics*, **185**:1 (2010), 247–258.
- [37] R. Hirota, *Direct Methods for Finding Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations*, Lecture Notes in Mathematics, **515**, Springer, New York, 1976.
- [38] D. J. Kedziora, A. Ankiewicz, N. Akhmediev, “Second-order nonlinear Schrödinger equation breather solutions in the degenerate and rogue wave limits”, *Phys. Rev. E*, **85**:6 (2012), 066601, 9 pp.
- [39] V. E. Zakharov, A. A. Gelash, “On the nonlinear stage of modulation instability”, *Phys. Rev. Lett.*, **111**:5 (2013), 054101, 5 pp.
- [40] F. Baronio, A. Degasperis, M. Conforti, S. Wabnitz, “Solutions of the vector nonlinear Schrödinger equations: evidence for deterministic rogue waves”, *Phys. Rev. Lett.*, **109**:4 (2012), 044102, 4 pp.
- [41] A. Degasperis, S. Lombardo, “Integrability in action: solitons, instability and rogue waves”, *Rogue and Shock Waves in Nonlinear Dispersive Media*, Lecture Notes in Physics, **926**, eds. M. Onorato, S. Resitori, F. Baronio, Springer, Cham, 2016.
- [42] A. Degasperis, S. Lombardo, M. Sommacal, “Integrability and linear stability of nonlinear waves”, *J. Nonlinear Sci.*, 2018, 1–41, arXiv:1707.09536.
- [43] G. Biondini, G. Kovacic, “Inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrödinger equation with nonzero boundary conditions”, *J. Math. Phys.*, **55**:3 (2014), 031506, 22 pp.
- [44] G. Biondini, S. Li, D. Mantzavinos, “Oscillation structure of localized perturbations in modulationally unstable media”, *Phys. Rev. E*, **94**:6 (2016), 060201, 6 pp.
- [45] С. П. Новиков, “Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. Г”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 54–66.

- [46] А. Р. Итс, В. П. Котляров, “Явные формулы для решения нелинейного уравнения Шредингера”, *Докл. АН УССР. Сер. А*, **11** (1976), 965–968, 1051.
- [47] И. М. Кричевер, “Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений”, *УМН*, **32:6(198)** (1977), 183–208.
- [48] P. G. Grinevich, P. M. Santini, *The finite gap method and the analytic description of the exact rogue wave recurrence in the periodic NLS Cauchy problem*. 1, [arXiv:1707.05659](#).
- [49] P. G. Grinevich, P. M. Santini, *The finite gap method and the solution of the rogue wave periodic Cauchy problem in the case of a finite number of unstable modes*, Preprint, 2018, in preparation.
- [50] P. G. Grinevich, P. M. Santini, “The exact rogue wave recurrence in the NLS periodic setting via matched asymptotic expansions, for 1 and 2 unstable modes”, *Phys. Lett. A*, **382:14** (2018), 973–979, [arXiv:1708.04535](#).
- [51] E. R. Tracy, H. H. Chen, “Nonlinear self-modulation: an exactly solvable model”, *Phys. Rev. A*, **37:3** (1988), 815–839.
- [52] J. Javanainen, J. Ruostekoski, “Symbolic calculation in development of algorithms: split-step methods for the Gross–Pitaevskii equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39:12** (2006), L179–L184, [arXiv:cond-math/0411154](#).
- [53] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, New York, 2001.
- [54] J. A. C. Weideman, B. M. Herbst, “Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **23:3** (1986), 485–507.
- [55] T. R. Taha, X. Xu, “Parallel split-step fourier methods for the coupled nonlinear Schrödinger type equations”, *J. Supercomp.*, **32:1** (2005), 5–23.
- [56] P. G. Grinevich, P. M. Santini, *Numerical instability of the Akhmediev breather and a finite-gap model of it*, [arXiv:1708.00762](#); *Recent Developments in Integrable Systems and Related Topics of Mathematical Physics*, eds. V. M. Buchstaber, S. Konstantinou-Rizo, A. V. Mikhailov, Springer, New York, 2018 (to appear).
- [57] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, “Integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. Rev. Lett.*, **110:8** (2013), 064105, 5 pp.
- [58] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, “Integrable discrete PT symmetric model”, *Phys. Rev. Lett. E*, **90:3** (2014), 032912, 5 pp.
- [59] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, “Integrable nonlocal nonlinear equations”, *Stud. Appl. Math.*, **139:1** (2017), 7–59.
- [60] P. M. Santini, *Darboux–Dressing and symmetry construction of classes of regular and singular solutions of the NLS and the PT-symmetric NLS equations over the constant background*, Preprint, 2018.
- [61] P. M. Santini, *The first rogue wave appearance in the rogue wave periodic Cauchy problem for the PT-symmetric NLS: regular dynamics or blow up at finite time*, Preprint, 2018.
- [62] H. C. Yuen, W. E. Ferguson, “Relationship between Benjamin–Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. Fluids*, **21:8** (1978), 1275–1278.
- [63] B. M. Lake, H. C. Yuen, H. Rungaldier, W. E. Ferguson, “Nonlinear deep-water waves: Theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train”, *J. Fluid Mech.*, **83:1** (1977), 49–74.
- [64] H. Yuen, B. Lake, “Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves”, *Adv. Appl. Mech.*, **22** (1982), 67–229.
- [65] N. N. Akhmediev, “Nonlinear physics: *Déjà vu* in optics”, *Nature*, **413** (2001), 267–268.
- [66] G. Van Simaëys, P. Emplit, M. Haelterman, “Experimental demonstration of the Fermi–Pasta–Ulam recurrence in a modulationally unstable optical wave”, *Phys. Rev. Lett.*, **87:3** (2001), 033902, 4 pp.
- [67] E. A. Kuznetsov, “Fermi–Pasta–Ulam recurrence and modulation instability”, *Письма в ЖЭТФ*, **105:2** (2017), 108–109.

- [68] O. Kimmoun, H.C. Hsu, H. Branger, M.S. Li, Y.Y. Chen, C. Kharif, M. Onorato, E.J.R. Kelleher, B. Kibler, N. Akhmediev, A. Chabchoub, “Modulation instability and phase-shifted Fermi–Pasta–Ulam recurrence”, *Sci. Rep.*, **6** (2016), 28516, 9 pp.
- [69] A. Mussot, C. Naveau, M. Conforti, A. Kudlinski, P. Szriftgiser, F. Copie, S. Trillo, “Fibre multiwave-mixing combs reveal the broken symmetry of Fermi–Pasta–Ulam recurrence”, *Nature Photonics*, **12** (2018), 303–308.
- [70] D. Pierangeli, M. Flammini, L. Zhang, G. Marcucci, A.J. Agranat, P.G. Grinevich, P.M. Santini, C. Conti, E. DelRe, *Observation of exact Fermi–Pasta–Ulam recurrence*, Preprint, 2018.