Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Стукопин, Об изоморфизме янгиана $Y_{\hbar}(A(m, n))$ специальной линейной супералгебры Ли и квантовой петлевой супералгебры $U_{\hbar}(LA(m, n))$, *ТМФ*, 2019, том 198, номер 1, 145–161

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:40:35

© 2019 г.

В. А. Стукопин^{*†‡§}

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ЯНГИАНА $Y_h(A(m, n))$
СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ
И КВАНТОВОЙ ПЕТЛЕВОЙ
СУПЕРАЛГЕБРЫ $U_h(LA(m, n))$

С использованием подхода Толедано Ларедо и Гаутама явно строится изоморфизм янгиана $Y_h(A(m, n))$ специальной линейной супералгебры Ли и квантовой петлевой супералгебры $U_h(LA(m, n))$.

Ключевые слова: янгиан супералгебры Ли, квантовая петлевая супералгебра, янгианный модуль, супералгебра Ли, квантовая аффинная супералгебра.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9547>

Посвящается памяти академика Людвига Дмитриевича Фаддеева

1. ВВЕДЕНИЕ

Супералгебры Ли уже достаточно давно используются физиками при исследовании суперсимметричных моделей квантовой теории поля. Классификация простых супералгебр Ли классического типа была получена Кацем в конце 70-х годов прошлого века (см. статью [1]). Супералгебры Ли классического типа в этой классификации делятся на базисные и странные супералгебры Ли, причем базисные супералгебры Ли контрагredientны (см. работы [1], [2]). В середине 80-х годов прошлого века Дринфельд ввел в рассмотрение квантовые группы, которые являются деформациями универсальных обертывающих простых алгебр Ли (см. работы [3]–[7]).

Работа выполнена при поддержке междисциплинарного научного центра им. Ж.-В. Понселе (грант “Domestic Research in Moscow” UMI 2615 CNRS) и Центра перспективных исследований Сколковского института науки и технологий.

^{*}Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия.
E-mail: stukopin@mail.ru

[†]Южный математический институт ВНИЦ РАН, Владикавказ, Россия

[‡]Московский центр непрерывного математического образования, Междисциплинарный научный центр им. Ж.-В. Понселе, Москва, Россия

[§]Сколковский институт науки и технологий, Центр перспективных исследований, Москва, Россия

Один из наиболее важных примеров таких деформаций – янгианы [3], [5]–[9], связанные с рациональными решениями квантового уравнения Янга–Бакстера, а второй такой пример – квантованные универсальные обертывающие алгебры алгебр Каца–Мури и квантовые деформации петлевых алгебр [3]–[5], [7]. Несколько позднее стали изучаться и янгианы супералгебр Ли [10], [11], а также их квантовые дубли (см. статьи [12]–[14]), которым тоже нашлось применение в квантовой теории поля, в частности в квантовой теории суперструн [15], [16], и которые все шире используются как в физике, так и в математике.

При определении янгиана в соответствии с подходом Дринфельда требуется наличие на исходной алгебре (или супералгебре) Ли невырожденной инвариантной билинейной формы Киллинга, которая отсутствует на некоторых супералгебрах Ли, что мешает буквальному перенесению конструкции Дринфельда на этот случай (см. статьи [14], [17], [18]). С другой стороны, по этой же причине для скрученных алгебр токов не существуют янгианские деформации в классе алгебр Хопфа, но они существуют для скрученных петлевых алгебр, что приводит к скрученным квантовым петлевым алгебрам или скрученным квантовым аффинным алгебрам. Несмотря на отмеченные отличия янгианов и квантовых аффинных алгебр, они обладают множеством общих черт. В первую очередь, с их помощью можно схожим образом описать конечномерные неприводимые представления, что свидетельствует о глубокой связи между этими объектами. Существование этой связи было очевидно уже Дринфельду; он и определил данные классы алгебр Хопфа. Но явные точные результаты, формулирующие связь между этими объектами, были опубликованы относительно недавно (см. работы [19]–[21]).

В настоящей статье мы, следуя подходу Гаутама и Толедано Ларедо [19], строим изоморфизм (в категории ассоциативных топологических супералгебр) между янгианом специальной линейной супералгебры Ли и квантовой петлевой супералгеброй $U_{\hbar}(LA(m, n))$. Следует отметить также статьи [20], [21], в которых этот подход существенно усилен и использован для исследования связи между категориями представлений янгианов и квантовых петлевых алгебр. Собственно, изучение этой связи и является нашей целью, а представленная работа – первый шаг в данном направлении (см. также статьи [22], [23], посвященные представлениям янгиана специальной линейной супералгебры Ли и связанные с настоящей работой). Здесь также существенным образом использованы результаты статей [22], [23], в которых доказаны теоремы о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана специальной линейной супералгебры Ли. Эти теоремы применяются при доказательстве нашего основного результата – теоремы об изоморфизме. Кроме того, мы используем результаты и методы статьи [19], на которых, по существу, и основана настоящая работа.

Из-за ограниченности объема изложение несколько конспективно. Планируется отдельно опубликовать полный, со всеми деталями доказательства, вариант настоящей статьи, а также теорему о классификации конечномерных неприводимых представлений квантовой петлевой супералгебры $U_{\hbar}(LA(m, n))$. Следует отметить, что это доказательство аналогично доказательству соответствующего результата для янгиана линейной специальной супералгебры Ли (см. статью [22]).

Изложение организовано следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем определения основных “действующих лиц” – янгиана специальной линейной супералгебры Ли и квантовой петлевой супералгебры, а также теорему о классификации

конечномерных неприводимых модулей над янгианом и квантовой аффинной алгеброй. В разделе 3 мы формулируем основную теорему об изоморфизме. В последнем разделе мы проводим ее доказательство.

Мы используем следующие стандартные обозначения. Через $K[u]$, $K[[u]]$ обозначается кольцо соответственно многочленов, формальных степенных рядов и многочленов с коэффициентами из кольца K , $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных чисел, $\hbar$ всегда обозначает параметр деформации, $q = e^{\hbar/2}$.

2. ЯНГИАН $Y_{\hbar}(A(m, n))$ И КВАНТОВАЯ ПЕТЛЕВАЯ СУПЕРАЛГЕБРА $U_{\hbar}(LA(m, n))$

В этом разделе мы напоминаем определения янгиана специальной линейной супералгебры и квантовой петлевой супералгебры $U_{\hbar}(LA(m, n))$. Но сначала для удобства читателя вспомним определение специальной линейной супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(m+1, n+1) = A(m, n)$.

2.1. Специальная линейная супералгебра Ли. Супералгебра Ли $A(m, n)$ определяется своей матрицей Картана $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n+1}$. Ее ненулевые элементы имеют следующий вид:

$$a_{i,i} = 2, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1, \quad i \in I \setminus \{m+1\}, \quad I = \{1, \dots, m+n+1\}, \\ a_{m+1,m+2} = 1.$$

Данная матрица Картана является симметризуемой, и часто более удобно использовать симметрическую матрицу Картана. Правда, в соответствующей симметрической матрице диагональные элементы, начиная с $(m+2)$ -го, отрицательны и равны -2 , а элементы на рядом расположенных верхней и нижней диагоналях, начиная с $(m+1)$ -го, равны единице. Остальные элементы задаются так же, как и у выделенной матрицы Картана. Пусть $D = (d_i)$ – диагональная матрица, в которой диагональные элементы d_i таковы, что $d_i = 1$ для $1 \leq i \leq m+1$ и $d_i = -1$ при $m+2 \leq i \leq m+n+1$. Тогда ненулевые элементы матрицы DA имеют вид

$$d_i a_{i,i} = 2, \quad d_i a_{i,i+1} = d_i a_{i+1,i} = -1, \quad i < m+1, \quad i \in I = \{1, \dots, m+n+1\}. \\ d_i a_{i,i} = -2, \quad d_{i-1} a_{i-1,i} = d_i a_{i,i-1} = 1, \quad m+1 < i,$$

Таким образом, далее в соотношениях используется следующая симметризованная матрица Картана супералгебры Ли $A(m, n)$:

$$DA = (d_i a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n+1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ниже мы иногда отождествляем множество индексов $I = \{1, \dots, m+n+1\}$ с выделенным множеством простых корней $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{m+n+1}\}$. Мы предполагаем, что α_{m+1} – всегда нечетный (серый) корень, а остальные корни – четные.

Супералгебра Ли $\mathfrak{g} = A(m, n)$ порождается образующими $h_i, x_i^\pm, i \in I$, причем образующие $x_{m+1}^\pm$ являются нечетными, а остальные образующие – четные, т.е. функция четности принимает на них следующие значения: $p(h_i) = 0, i \in I, p(x_j^\pm) = 0, j \neq m+1, p(x_{m+1}^\pm) = 1$. Эти образующие удовлетворяют определяющим соотношениям

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0, & [h_i, x_j^\pm] &= \pm a_{ij} x_j^\pm, & [x_i^+, x_j^-] &= \delta_{ij} h_i, \\ [[x_m^\pm, x_{m+1}^\pm], [x_{m+1}^\pm, x_{m+2}^\pm]] &= 0, & \text{ad}^{1-\tilde{a}_{ij}}(x_i^\pm) x_j^\pm &= 0, & i &\neq j. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{a}_{i,j} = -1$ при $j \in \{i-1, i+1\}$, т.е. последнее соотношение в случае $j \in \{i-1, i+1\}$ записывается как $[x_i^\pm, [x_i^\pm, x_j^\pm]] = 0$, а в остальных случаях $[x_i^\pm, x_j^\pm] = 0$. Отметим, что последние два равенства называются соотношениями Серра.

2.2. Определение янгиана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Янгиан (точнее, $\hbar$ -янгиан) $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ – это супералгебра Хопфа над $\mathbb{C}[[\hbar]]$, порожденная как ассоциативная супералгебра образующими $h_{i,k} := h_{\alpha_i, k}, x_{i,k}^\pm := x_{\alpha_i, k}^\pm, i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений:

$$\begin{aligned} [h_{i,k}, h_{j,l}] &= 0, \\ [h_{i,0}, x_{j,s}^\pm] &= \pm d_i a_{ij} x_{j,s}^\pm, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\delta_{i,j} h_{i,k+l} = [x_{i,k}^+, x_{j,l}^-], \quad (2.2)$$

$$[h_{i,k+1}, x_{j,l}^\pm] = [h_{i,k}, x_{j,l+1}^\pm] + \frac{d_i a_{ij} \hbar}{2} (h_{i,k} x_{j,l}^\pm + x_{j,l}^\pm h_{i,k}), \quad i \text{ или } j \neq m+1, \quad (2.3)$$

$$[h_{m+1,k+1}, x_{m+1,l}^\pm] = 0,$$

$$[x_{i,k+1}^\pm, x_{j,l}^\pm] = [x_{i,k}^\pm, x_{j,l+1}^\pm] + \frac{d_i a_{ij} \hbar}{2} (x_{i,k}^\pm x_{j,l}^\pm + x_{j,l}^\pm x_{i,k}^\pm), \quad i \text{ или } j \neq m+1, \quad (2.4)$$

$$[x_{m+1,k+1}^\pm, x_{m+1,l}^\pm] = 0,$$

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_r} [x_{i,t_{\pi(1)}}^\pm, [x_{i,t_{\pi(2)}}^\pm, \dots, [x_{i,t_{\pi(r)}}^\pm, x_{j,s}^\pm], \dots]] = 0, \quad i \neq j, \quad r = 1 - \tilde{a}_{ij}, \quad (2.5)$$

$$[[x_{m,k}^\pm, x_{m+1,0}^\pm], [x_{m+1,0}^\pm, x_{m+2,t}^\pm]] = 0, \quad (2.6)$$

для произвольных натуральных чисел $t_1, \dots, t_r, s$. Здесь $\mathfrak{S}_r$ – группа перестановок r -элементного множества. Отметим, что формула (2.5) при $j \in \{i-1, i+1\}$ принимает вид (поскольку в этих случаях $\tilde{a}_{ij} = -1$) $[x_{i,k}^\pm, [x_{i,s}^\pm, x_{j,l}^\pm]] + [x_{i,s}^\pm, [x_{i,k}^\pm, x_{j,l}^\pm]] = 0$ для произвольных натуральных чисел k, s, l и $[x_{i,k}^\pm, x_{j,l}^\pm] = 0$ в остальных случаях, так как тогда $\tilde{a}_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Значения функции четности на образующих следующие: $p(x_{j,k}^\pm) = 0$ для $k \in \mathbb{Z}_+, j \in I \setminus \{m+1\}$, $p(h_{i,k}) = 0$ для $i \in I, k \in \mathbb{Z}_+$, $p(x_{i,k}^\pm) = 1, k \in \mathbb{Z}_+, i = m+1$.

Отметим, что универсальная обертывающая супералгебра $U(\mathfrak{g})$ естественно вложена в $Y(\mathfrak{g})$, причем вложение задается формулами $h_i \mapsto h_{i,0}, x_i^\pm \mapsto x_{i,0}^\pm$. Мы

отождествляем универсальную обертывающую супералгебру $U(\mathfrak{g})$ с ее образом в янгиане $Y(\mathfrak{g})$.

2.3. Определение квантовой петлевой супералгебры. Здесь мы даем определение квантованной универсальной обертывающей петлевой супералгебры в терминах токовой системы образующих и порождающих соотношений – естественного аналога новой системы образующих и определяющих соотношений Дринфельда (см. статью [5]).

Мы предполагаем, что $q = e^{\hbar/2}$, $q_i = q^{d_i}$, а также, как и выше, $\mathfrak{g} = A(m, n)$. Кроме того, ниже мы используем стандартные обозначения

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad [n]_q! = [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \dots \cdot [1]_q, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q}{[n-k]_q \cdot [k]_q}.$$

Сформулируем явным образом определение квантовой петлевой супералгебры $U_{\hbar}(LA(m, n))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $U_{\hbar}(L\mathfrak{g})$ – (супер)алгебра над $\mathbb{C}[[\hbar]]$, топологически порожденная элементами $\{E_{i,k}, F_{i,k}, H_{i,k}\}_{i \in I, k \in \mathbb{Z}}$, которые удовлетворяют следующей системе определяющих соотношений.

1. Для произвольных $i, j \in I$ и $r, s \in \mathbb{Z}$

$$[H_{i,r}, H_{j,s}] = 0.$$

2. Для произвольных $i, j \in I$ и $k \in \mathbb{Z}$

$$[H_{i,0}, E_{j,k}] = a_{i,j} E_{j,k}, \quad [H_{i,0}, F_{j,k}] = -a_{i,j} F_{j,k}.$$

3. Для произвольных $i, j \in I$ и $r, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$[H_{i,r}, E_{j,k}] = \frac{[ra_{i,j}]_{q_i}}{r} E_{j,r+k}, \quad [H_{i,r}, F_{j,k}] = -\frac{[ra_{i,j}]_{q_i}}{r} F_{j,r+k}.$$

4. Для произвольных $i, j \in I$ и $k, l \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} E_{i,k+1} E_{j,l} - q_i^{a_{ij}} E_{j,l} E_{i,k+1} &= q_i^{a_{ij}} E_{i,k} E_{j,l+1} - E_{j,l+1} E_{i,k}, \\ F_{i,k+1} F_{j,l} - q_i^{-a_{ij}} F_{j,l} F_{i,k+1} &= q_i^{-a_{ij}} F_{i,k} F_{j,l+1} - F_{j,l+1} F_{i,k}. \end{aligned}$$

5. Для произвольных $i, j \in I$ и $k, l \in \mathbb{Z}$

$$[E_{i,k}, F_{j,l}] = \delta_{i,j} \frac{\psi_{i,k+l} - \varphi_{i,k+l}}{q_i - q_i^{-1}}. \quad (2.7)$$

6. Пусть $i \neq j \in I$ и $r = 1 - \tilde{a}_{ij}$ (т.е. $r = 2$, если $j \in \{i-1, i+1\}$, или $r = 1$ в остальных случаях). Для произвольных $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$ и $l \in \mathbb{Z}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_r} \sum_{s=0}^r (-1)^s \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_{q_i} E_{i,k_{\pi(1)}} \cdot \dots \cdot E_{i,k_{\pi(s)}} \cdot E_{j,l} \cdot E_{i,k_{\pi(s+1)}} \cdot \dots \cdot E_{i,k_{\pi(r)}} &= 0, \\ \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_r} \sum_{s=0}^r (-1)^s \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_{q_i} F_{i,k_{\pi(1)}} \cdot \dots \cdot F_{i,k_{\pi(s)}} \cdot F_{j,l} \cdot F_{i,k_{\pi(s+1)}} \cdot \dots \cdot F_{i,k_{\pi(r)}} &= 0. \end{aligned}$$

7. Справедливы соотношения

$$[[E_{m,k}, E_{m+1,0}]_q, [E_{m+1,0}, E_{m+2,r}]_q]_q = 0, \quad (2.8)$$

$$[[F_{m,k}, F_{m+1,0}]_{q^{-1}}, [F_{m+1,0}, F_{m+2,r}]_{q^{-1}}]_{q^{-1}} = 0, \quad (2.9)$$

где элементы $\psi_{i,r}, \varphi_{i,r}, r \in \mathbb{Z}$, определяются формулами

$$\begin{aligned} \psi_i(z) &= \sum_{r \geq 0} \psi_{i,r} z^{-r} = e^{\hbar d_i H_{i,0}/2} e^{(q_i - q_i^{-1}) \sum_{s \geq 1} H_{i,s} z^{-s}}, \\ \varphi_i(z) &= \sum_{r \geq 0} \varphi_{i,-r} z^r = e^{-\hbar d_i H_{i,0}/2} e^{-(q_i - q_i^{-1}) \sum_{s \geq 1} H_{i,-s} z^s}, \end{aligned}$$

причем $\psi_{i,-k} = \varphi_{i,k} = 0$ для $k \geq 1$. Кроме того, $p(H_{i,r}) = 0$ для $i \in I, r \in \mathbb{Z}_+$, $p(X_{i,r}^\pm) = 0$ для $i \in I \setminus \{m+1\}, r \in \mathbb{Z}$, а $p(x_{m+1,r}^\pm) = 1$ для $r \in \mathbb{Z}$, и используется обозначение $[a, b]_q := ab - (-1)^{p(a)p(b)} qba$ для q -(супер)коммутатора.

Далее мы также обозначаем через $U^0 \subset U_\hbar(L\mathfrak{g})$ коммутативную подалгебру, порожденную элементами $\{H_{i,r}\}_{i \in I, r \in \mathbb{Z}}$.

2.4. Теория представлений янгиана и квантовой петлевой алгебры. Для удобства читателя сформулируем основной результат работы [22] – теорему о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана $Y(A(m, n))$ (отметим, что $Y(\mathfrak{sl}(m+1, n+1)) = Y(A(m, n))$ при $m \neq n$). Мы приводим его очевидную модификацию для $Y_\hbar(A(m, n))$.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Каждый неприводимый конечномерный $Y_\hbar(A(m, n))$ -модуль V является модулем со старшим весом d : $V = V(d)$, т. е.*

$$h_i(u)v_0 = \left(1 + \hbar \sum_{k=0}^{\infty} h_{i,k} \cdot u^{-k-1}\right)v_0 = \left(1 + \hbar \sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} \cdot u^{-k-1}\right)v_0,$$

где v_0 – старший вектор, а $i = \{1, 2, \dots, m+n+1\}$.

2. *Модуль $V(d)$ конечномерен тогда и только тогда, когда существуют многочлены $P_i^d, i \in \{1, 2, \dots, m, m+2, \dots, m+n+1\} = I \setminus \{m+1\}$, а также многочлены P_{m+1}^d, Q_{m+1}^d , удовлетворяющие следующим условиям:*

а) *все эти многочлены являются многочленами со старшими коэффициентами, равными единице;*

б) *имеют место выражения*

$$\begin{aligned} \frac{P_i^d(u + d_i a_{ii} \hbar/2)}{P_i^d(u)} &= 1 + \hbar \sum_{k=0}^{\infty} d_{i,k} \cdot u^{-k-1}, \quad i \in I \setminus \{m+1\}, \\ \frac{P_{m+1}^d(u)}{Q_{m+1}^d(u)} &= 1 + \hbar \sum_{k=0}^{\infty} d_{m+1,k} \cdot u^{-k-1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь $d_i a_{ii}$ – матричный элемент симметризованной матрицы Картана супералгебры Ли $A(m, n)$.

Теперь запишем аналог сформулированного выше результата о классификации конечномерных неприводимых представлений янгиана для квантовой аффинной супералгебры Ли $U_q(A^{(1)}(m, n))$. Доказательство этой теоремы будет опубликовано отдельно. Отметим, что множества конечномерных неприводимых представлений квантовой аффинной супералгебры $U_q(A^{(1)}(m, n))$ и квантовой петлевой супералгебры $U_h(LA(m, n))$ совпадают.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Каждый неприводимый конечномерный $U_q(A^{(1)}(m, n))$ -модуль V является модулем со старшим весом δ : $V = V(\delta)$, т. е.*

$$\psi_i(z)v_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{i,k}^+ \cdot z^{-k} \right) v_+, \quad \varphi_i(z)v_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \delta_{-i,k}^- \cdot z^k \right) v_+,$$

где v_0 – старший вектор, а $i = \{1, 2, \dots, m + n + 1\}$.

2. *Модуль $V(\delta)$ конечномерен тогда и только тогда, когда существуют многочлены P_i^δ , $i \in \{1, 2, \dots, m, m + 2, \dots, m + n + 1\} = I \setminus \{m + 1\}$, а также многочлены $P_{m+1}^\delta, Q_{m+1}^\delta$, удовлетворяющие следующим условиям:*

а) *все эти многочлены являются многочленами со старшими коэффициентами, равными единице, и ненулевыми свободными членами;*

б) *имеют место выражения*

$$q^{-d_{ia_{ii}/2}} \frac{P_i^\delta(q^{d_{ia_{ii}}z})}{P_i^\delta(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{i,k}^+ \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{i,-k}^- \cdot z^k, \quad i \in I \setminus \{m + 1\},$$

$$\frac{P_{m+1}^\delta(z)}{Q_{m+1}^\delta(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{m+1,k}^+ \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{m+1,-k}^- \cdot z^k.$$

Здесь, как и в предыдущей теореме, $d_{ia_{ii}}$ – матричный элемент симметризованной матрицы Картана супералгебры Ли $A(m, n)$.

3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Обозначим через $L\mathfrak{g} = \mathfrak{g}[u, u^{-1}]$ алгебру Ли (лорановских полиномиальных) петель со значениями в простой алгебре (базисной супералгебре) Ли $\mathfrak{g}$. Отметим, что $L\mathfrak{g}$ – это просто аффинная (супер)алгебра Каца–Мууди без центрального элемента и градуировочного элемента d , задающего дифференцирование. В этом разделе мы строим гомоморфизм квантовой (супер)алгебры токов $U_h(L\mathfrak{g})$ на квантовую (супер)алгебру $Y_h(\mathfrak{g})$, из которой янгиан $Y(\mathfrak{g})$ получается специализацией при $\hbar = 1$. При построении мы ограничиваемся рассмотрением частного случая базисной супералгебры Ли типа $A(m, n)$, т. е. мы предполагаем, что $\mathfrak{g} = A(m, n)$.

Пусть, как и выше, $I = \{1, 2, \dots, m + 1, \dots, m + n + 1\}$. Это множество мы отождествляем с множеством простых корней $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+n+1}\}$ базисной супералгебры Ли, причем мы считаем, что α_{m+1} – нечетный корень, т. е. мы имеем дело с выделенной системой простых корней базисной супералгебры Ли $A(m, n)$.

Пусть $\{E_{i,r}, F_{i,r}, H_{i,r}\}_{i \in I, r \in \mathbb{Z}}$ – токовые образующие квантовой аффинной алгебры $U_{\hbar}(L\mathfrak{g})$, а $\{e_{i,k}, f_{i,k}, h_{i,k}\}_{i \in I, k \in \mathbb{Z}_+}$ – образующие янгиана $Y_{\hbar}(\mathfrak{g})$. Определим отображение $\Phi: U_{\hbar}(L\mathfrak{g}) \rightarrow Y_{\hbar}(\mathfrak{g})$ на образующих с помощью формул

$$\Phi(H_{i,r}) = \frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}} \sum_{k \geq 0} t_{i,k} \frac{r^k}{k!}, \quad (3.1)$$

$$\Phi(E_{i,r}) = e^{r\sigma_i^+} \sum_{m \geq 0} g_{i,m} e_{i,m}, \quad (3.2)$$

$$\Phi(F_{i,r}) = e^{r\sigma_i^-} \sum_{m \geq 0} g_{i,m} f_{i,m}. \quad (3.3)$$

Здесь, как и выше, $q = e^{\hbar/2}$, $q_i = q^{d_i}$, где d_i – элементы матрицы, симметризирующей матрицу Картана (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m, n)$. Другими словами, $d_i = 1$, $1 \leq i \leq m+1$, $d_i = -1$, $m+1 < i \leq m+n+1$. Применим систему логарифмических образующих $\{t_{i,r}\}_{i \in I, r \in \mathbb{N}}$ коммутативной подалгебры $Y^0 := Y_{\hbar}(\mathfrak{h}) \subset Y_{\hbar}(\mathfrak{g})$, порожденной элементами $\{h_{i,r}\}_{i \in I, r \in \mathbb{N}}$. Эти логарифмические образующие определяются следующим равенством для порождающих функций:

$$\hbar \sum_{r \geq 0} t_{i,r} u^{-r-1} = \ln \left(1 + \sum_{r \geq 0} h_{i,r} u^{-r-1} \right).$$

Элементы $\{g_{i,m}\}_{i \in I, m \in \mathbb{N}}$ лежат в пополнении $\widehat{Y^0}$ алгебры $Y^0 = Y_{\hbar}(\mathfrak{h})$ относительно N -градуировки, задаваемой вторыми индексами образующих, и задаются следующим образом. Рассмотрим формальный степенной ряд

$$G(v) = \ln \left(\frac{v}{e^{v/2} - e^{-v/2}} \right) \in Q[[v]]$$

и определим $\gamma_i \in \widehat{Y^0[v]}$ формулой

$$\gamma_i(v) = \hbar \sum_{r \geq 0} \frac{t_{i,r}}{r!} \left(-\frac{d}{dv} \right)^{r+1} G(v).$$

Тогда

$$\sum_{m \geq 0} g_{i,m} v^m = \left(\frac{\hbar}{q_i - q_i^{-1}} \right)^{1/2} e^{\gamma_i(v)/2}.$$

Окончательно, $\sigma_i^{\pm}$ – гомоморфизмы подсупералгебр $\sigma_i^{\pm}: Y_{\hbar}(\mathfrak{b}_{\pm}) (\subset Y_{\hbar}(\mathfrak{g})) \rightarrow Y_{\hbar}(\mathfrak{b}_{\pm})$, которые задаются на образующих $\{h_{i,r}, e_{i,r}, f_{i,r}\}$ следующим образом: они оставляют неподвижными образующие $h_{i,k}$, а на остальные образующие действуют сдвигами $\sigma_i^+ : e_{j,r} \rightarrow e_{j,r+\delta_{ij}}$, $\sigma_i^- : f_{j,r} \rightarrow f_{j,r+\delta_{ij}}$.

Пусть, как и выше, $\mathfrak{g} = A(m, n)$. Пусть также $\widehat{Y_{\hbar}(\mathfrak{g})}$ – пополнение янгиана относительно его N -градуировки. Рассмотрим отображение $c: U_{\hbar}(L\mathfrak{g}) \rightarrow U(L\mathfrak{g})$, которое задается условием $\hbar \rightarrow 0$, а также отображение $d: U(L\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}[z, z^{-1}]) \rightarrow U(\mathfrak{g})$,

которое определяется формулой $d(f(z)) = f(1)$. Тогда ядро композиции этих отображений $e = d \circ c: U_{\hbar}(L\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ обозначим через $J := \text{Ker}(e)$. Определим пополнение квантовой петлевой алгебры относительно J -адической топологии, задаваемой степенями идеала J : $\widehat{U_{\hbar}(L\mathfrak{g})} := \lim_{n \rightarrow \infty} U_{\hbar}(L\mathfrak{g})/J^n$.

Сформулируем основную теорему настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3. *Отображение Φ , заданное формулами (3.1)–(3.3), определяет мономорфизм ассоциативных супералгебр над $\mathbb{Q}[[\hbar]]$*

$$\Phi: U_{\hbar}(L\mathfrak{g}) \rightarrow \widehat{Y_{\hbar}(\mathfrak{g})}, \quad (3.4)$$

который продолжается до изоморфизма пополнений

$$\widehat{\Phi}: \widehat{U_{\hbar}(L\mathfrak{g})} \rightarrow \widehat{Y_{\hbar}(\mathfrak{g})}. \quad (3.5)$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Доказательство проводится в несколько этапов, которые в свою очередь состоят из вспомогательных утверждений.

4.1. Случай супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1, 1)$. Рассмотрим сначала важный для дальнейшего частный случай супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(1, 1)$. Легко видеть, что янгиан $Y(\mathfrak{sl}(1, 1))$ порождается образующими $h_n, e_n, f_n, n \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют системе определяющих соотношений

$$[h_k, h_l] = 0, \quad [h_k, e_l] = [h_k, f_l] = 0, \quad [e_k, e_l] = [f_k, f_l] = 0, \quad [e_k, f_l] = h_{k+l}.$$

Аналогично, квантовая петлевая алгебра $U_{\hbar}(L\mathfrak{sl}(1, 1))$ порождается образующими $\{E_n, F_n, H_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, которые удовлетворяют системе определяющих соотношений

$$[H_r, H_s] = 0, \quad [H_r, E_s] = [H_r, F_s] = 0, \quad [E_r, E_s] = [F_r, F_s] = 0, \\ [E_r, F_s] = \frac{\psi_{r+s} - \varphi_{r+s}}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}}$$

для произвольных $r, s \in \mathbb{Z}$. Здесь, как и выше, элементы ψ_r, φ_r задаются формулами

$$\psi(z) = \sum_{r \geq 0} \psi_r z^{-r} = e^{\hbar H_0/2} e^{(e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}) \sum_{s \geq 1} H_s z^{-s}}, \\ \varphi(z) = \sum_{r \geq 0} \varphi_{-r} z^r = e^{-\hbar H_0/2} e^{-(e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}) \sum_{s \geq 1} H_{-s} z^s}.$$

Опишем гомоморфизм $\Phi: U_{\hbar}(\mathfrak{sl}(1, 1)) \rightarrow Y_{\hbar}(\mathfrak{sl}(1, 1))$. Напомним сначала определение преобразования Бореля (точнее, обратного к преобразованию Бореля), являющегося дискретным аналогом преобразования Лапласа. Обозначим буквой B преобразование, сопоставляющее функции $f(u) \in A[[u]]$ со значениями в некоторой ассоциативной алгебре A функцию $B(f)(v) \in u^{-1}A[[u^{-1}]]$, определяемую формулой

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k u^{-k-1} \rightarrow B(f)(v) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_r v^r}{r!}. \quad (4.1)$$

Отметим следующие свойства преобразования Бореля производящей функции $t(u)$ логарифмических образующих $\{t_k\}_{k=0}^\infty$. Поскольку $[h(u), e_k] = [h(u), f_k] = 0$, то отсюда следует, что и $[t(u), e_k] = [t(u), f_k] = 0$, а значит, и $[B(t(u))(v), e_k] = [B(t(u))(v), f_k] = 0$. Легко проверить также, что

$$B(\ln(1 - pu^{-1})) = \frac{1 - e^{pv}}{v}. \quad (4.2)$$

Действительно, используя свойства преобразования Бореля, совпадающие со свойствами преобразования Лапласа, получаем равенства

$$\begin{aligned} B(\ln(1 - pu^{-1})) &= \frac{1}{v} B\left(\frac{d}{du}(\ln(1 - pu^{-1}))\right) = \frac{1}{v} B\left(\frac{-pu^{-2}}{1 - pu^{-1}}\right) = \\ &= \frac{1}{v} B\left(\frac{-p}{u(u-p)}\right) = \frac{1}{v} B\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u-p}\right) = \frac{1}{v}(1 - e^{pv}). \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы в данном частном случае достаточно проверить эквивалентность соотношений (2.2) и (2.7). Заметим сначала, что

$$\begin{aligned} \Phi(E_r) &= e^{r\sigma_+} \sum_{m \geq 0} g_m e_m = \sum_{m \geq 0} g_m^{(+,k)} e_m = e^{r\sigma_+} g(\sigma_+) e_0, \\ \Phi(F_r) &= e^{r\sigma_-} \sum_{m \geq 0} g_m f_m = \sum_{m \geq 0} g_m^{(-,k)} f_m = e^{r\sigma_-} g(\sigma_-) f_0. \end{aligned}$$

Докажем явным вычислением равенство

$$[\Phi(E_r), \Phi(F_l)] = \frac{\Phi(\psi_{r+s}) - \Phi(\varphi_{-r-s})}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}}. \quad (4.3)$$

Вычислим правую и левую часть доказываемого равенства (4.3). Легко видеть, что $\Phi(E_r)\Phi(F_l) = e^{r\sigma_+} g(\sigma_+) e_0 e^{r\sigma_-} g(\sigma_-) f_0$, так как

$$\begin{aligned} g(v) &= \sum_{m \geq 0} g_m v^m = \left(\frac{\hbar}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}} \right)^{1/2} e^{\gamma(v)/2} = \\ &= \left(\frac{\hbar}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{1}{2} B(t(u)) \left(-\frac{d}{dv} \right) \left(\frac{d}{dv} \ln \left(\frac{e^{v/2} - e^{-v/2}}{v} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Для краткости обозначим $\partial_v := \frac{d}{dv}$. Тогда

$$g(v) = \sum_{m \geq 0} g_m v^m = \left(\frac{\hbar}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{1}{2} B(t(u)) \left(-\partial_v \right) \left(\ln \left(\frac{e^{v/2} - e^{-v/2}}{v} \right) \right)' \right].$$

Нетрудно проверить, что $g(\sigma_+) e_0 = \sum_{m \geq 0} g_m \sigma_+^m e_0 = \sum_{m \geq 0} g_m e_m$. Аналогично, $g(\sigma_-) f_0 = \sum_{m \geq 0} g_m \sigma_-^m e_0 = \sum_{m \geq 0} g_m f_m$. Заметим также, что если переменные u и v коммутируют, то

$$\begin{aligned} g(u)g(v) &= \frac{\hbar}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}} e^{\gamma(u)/2 + \gamma(v)/2} = \\ &= \frac{\hbar}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}} \exp \left[\frac{1}{2} B(t(u)) \left(-\frac{d}{du} \right) (\ln(f_0(u)))' + \frac{1}{2} B(t(v)) \left(-\frac{d}{dv} \right) \frac{d}{dv} (\ln(f_0(v)))' \right], \end{aligned}$$

где $f_0(u) = (e^{u/2} - e^{-u/2})/u$.

Теперь мы можем вычислить $\Phi(E_r)\Phi(E_l)$. Действительно,

$$\Phi(E_r)\Phi(E_l) = e^{r\sigma_+}g(\sigma_+)e_0e^{r\sigma_-}g(\sigma_-)e_0f_0 = g(\sigma_+)g(\sigma_-)e_rf_l.$$

Аналогично, $\Phi(F_l)\Phi(E_r) = g(\sigma_+)g(\sigma_-)f_le_r$. Отсюда сразу получаем, что

$$\begin{aligned} [\Phi(E_r)\Phi(E_l), \Phi(E_l)\Phi(E_r)] &= [g(\sigma_+)g(\sigma_-)e_rf_l, g(\sigma_+)g(\sigma_-)f_le_r] = \\ &= \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} g_m g_n (e_{m+r} f_{n+l} - f_{n+l} e_{m+r}) = \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} g_m g_n h_{m+n+r+l}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\Phi(H_r) = B(t(u))(r)/(e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2})$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi(\psi(z)) &= \sum_{r \geq 0} \Phi(\psi_r) z^{-r} = e^{\hbar\Phi(H_0)/2} \exp \left[\left(e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2} \right) \sum_{s \geq 1} \Phi(H_s) z^{-s} \right] = \\ &= e^{\hbar\Phi(H_0)/2} \exp \left[\sum_{s \geq 1} B(t(u))(s) z^{-s} \right] = \\ &= \exp \left[\frac{\hbar}{2(e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2})} t_0 \right] \exp \left[\sum_{s \geq 1} B(t(u))(s) z^{-s} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\Phi(\varphi(z)) = \sum_{r \geq 0} \Phi(\varphi_{-r}) z^r = e^{-\hbar\Phi(H_0)/2} \exp \left[\sum_{s \geq 1} B(t(u))(-s) z^s \right].$$

Опишем действие образующих соответственно квантовой петлевой супералгебры и янгиана в конечномерных неприводимых модулях. Нам понадобятся приведенные выше теоремы 1, 2, в которых описаны неприводимые представления янгиана специальной линейной супералгебры Ли и квантовой петлевой супералгебры (см. также работы [22] и [23], в которых дана классификация конечномерных неприводимых модулей янгиана специальной линейной супералгебры Ли). Также нам придется задать в явном виде действие картановских образующих на старших векторах конечномерных неприводимых модулей над соответственно янгианом и квантовой петлевой алгеброй (см. теоремы 1, 2).

Обозначим через D^Y морфизм янгиана в конечномерный неприводимый модуль, задаваемый семейством многочленов Дринфельда. Остановимся на случае янгиана $Y(\mathfrak{sl}(1, 1))$. Здесь конечномерный неприводимый янгианный модуль задается парой многочленов Дринфельда $P^d(u)$ и $Q^d(u)$ со старшими коэффициентами, равными единице, которые однозначно определяются своими комплексными корнями $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$. Действие производящей функции янгиана на старшем векторе задается формулами (см. статью [22] и теорему 1)

$$h(u)v_0 = \left(1 + \sum_{k \geq 0} d_{1,k} u^{-k-1} \right) v_0, \quad \frac{P^d(u)}{Q^d(u)} = 1 + \sum_{k \geq 0} d_{1,k} u^{-k-1},$$

где, как и выше, $h(u) = 1 + \sum_{k \geq 0} h_k u^{-k-1}$ – производящая функция картановских образующих. Другими словами,

$$h(u)v_0 = \frac{P^d(u)}{Q^d(u)} v_0 = R(m) = \frac{(u - a_1) \cdots (u - a_n)}{(u - b_1) \cdots (u - b_n)} v_0.$$

Определим тогда

$$D^Y(h(u)) = \frac{P^d(u)}{Q^d(u)} = \frac{(u - a_1) \cdot \dots \cdot (u - a_n)}{(u - b_1) \cdot \dots \cdot (u - b_n)}. \quad (4.4)$$

Считая величины $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ параметрами, получаем определяемое формулой (4.4) отображение $D^Y: Y^0 \rightarrow \mathbb{C}[\hbar, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]$ картановской подалгебры янгиана в коммутативное кольцо полиномов.

Аналогично, учитывая теорему 2, определим отображение

$$D^U: U^0 \rightarrow S(m) = \mathbb{C}[q, A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n],$$

$$D^U(\psi(z)) = \frac{P^\delta(z)}{Q^\delta(z)} = \frac{(z - A_1) \cdot \dots \cdot (z - A_n)}{(z - B_1) \cdot \dots \cdot (z - B_n)}.$$

Вычислим теперь действие гомоморфизма $D^Y: Y(\mathfrak{sl}(1, 1)) \rightarrow \text{End}(V_{P,Q})$ на $t(u)$, а также образы образующих h_k и t_k под действием этого отображения. Здесь мы используем обозначение $V_{P,Q}$ для пространства представления $V(d)$, введенного в теореме 1, где $d = \{d_{1,k}\}$ определяется многочленами P, Q по формуле (2.10). Имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Справедливы формулы

$$D^U(\psi_r) = (e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}) \sum_{p=1}^n B_p^r (B_p - A_p) \left(\prod_{p' \neq p} \frac{B_p - A_{p'}}{B_p - B_{p'}} \right), \quad (4.5)$$

$$D^U(\varphi_r) = (e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}) \sum_{p=1}^n B_p^{-r} (A_p - B_p) \left(\prod_{p' \neq p} \frac{B_p - A_{p'}}{B_p - B_{p'}} \right), \quad (4.6)$$

$$D^U((q - q^{-1})H_k) = \frac{1}{p} \sum_{p=1}^n (B^p - A^p), \quad (4.7)$$

$$D^Y(h_r) = \sum_{p=1}^n b_p^r (b_p - a_p) \left(\prod_{p' \neq p} \frac{b_p - a_{p'}}{b_p - b_{p'}} \right), \quad (4.8)$$

$$D^Y(t_r) = \frac{1}{r+1} \sum_{p=1}^n \frac{b_p^{r+1} - a_p^{r+1}}{\hbar}, \quad (4.9)$$

$$D^Y(B(t(u))(v)) = \sum_{p=1}^n \frac{e^{b_p v} - e^{a_p v}}{v}. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится прямым вычислением путем разложения по степеням переменной u^{-1} левой и правой частей доказываемых равенств.

Из предложения 1 легко вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Гомоморфизмы $D^Y: Y^0 \rightarrow \bigoplus_{n \geq 1} R(n)$ и $D^U: U^0 \rightarrow \bigoplus_{n \geq 1} S(n)$ инъективны.

Теперь мы можем сформулировать и доказать самое важное вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство*

$$\Phi\left(\frac{\psi_k - \varphi_k}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}}\right) = \frac{\hbar}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}} e^{kv} e^{\gamma(v)} \Big|_{v^n=h_n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим сначала левую часть доказываемого равенства:

$$\begin{aligned} \hbar e^{kv} e^{B(-\partial)G'(v)} \Big|_{v^n=h_n} &= \hbar e^{kv} \exp\left[\sum_{p=1}^n \frac{e^{b_p(\partial)} - e^{a_p(\partial)}}{\partial}\right] G(v) \Big|_{v^n=h_n} = \\ &= \hbar e^{kv} \sum_{p=1}^n e^{G(v+b_p)-G(v+a_p)} \Big|_{v^n=h_n} = \hbar e^{kv} \prod_{p=1}^n \frac{v-b_p}{v-a_p} \frac{e^{(v-a_p)/2} - e^{-(v-a_p)/2}}{e^{(v-b_p)/2} - e^{-(v-b_p)/2}} \Big|_{v^n=h_n}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$D^Y(\hbar e^{kv} e^{\gamma v} \Big|_{v^n=h_n}) = D^Y\left(\hbar e^{kv} \prod_{p=1}^n \frac{v-b_p}{v-a_p} \frac{e^{(v-a_p)/2} - e^{-(v-a_p)/2}}{e^{(v-b_p)/2} - e^{-(v-b_p)/2}} \Big|_{v^n=h_n}\right).$$

Прямым вычислением доказывается следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $F(v) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k v^k$. Тогда $F(v)|_{v^n=h_n} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k h_k$.

Согласно равенству (4.8) и предложению 3 предыдущая формула имеет вид

$$D^Y(\hbar e^{kv} e^{\gamma v} \Big|_{v^n=h_n}) = D^Y\left(\hbar e^{kv} \prod_{p=1}^n \frac{v-b_p}{v-a_p} e^{(b_p-a_p)/2} \frac{e^v - e^{a_p}}{e^v - e^{b_p}} \Big|_{v^n=h_n}\right).$$

Учитывая, что $\lim_{v \rightarrow b_p} \frac{v-b_p}{e^v - e^{b_p}} = e^{-b_p}$, находим, что последнее равенство записывается как

$$\hbar \sum_{p=1}^n e^{kb_p} \hbar \prod_{p' \neq p} \frac{b_p - b_{p'}}{b_p - a_{p'}} \frac{1}{b_p - a_p} \frac{e^{b_p} - e^{a_{p'}}}{e^{b_p} - e^{b_{p'}}} (e^{b_p} - e^{a_p}) = \hbar \sum_{p=1}^n e^{kb_p} (e^{b_p} - e^{a_p}) \prod_{p' \neq p} \frac{e^{b_p} - e^{a_{p'}}}{e^{b_p} - e^{b_{p'}}}.$$

С учетом формулы (4.8) легко видеть, что

$$\left(\frac{\hbar}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}}\right) D^U(\psi_r) = \hbar \sum_{p=1}^n B_p^r (B_p - A_p) \left(\prod_{p' \neq p} \frac{B_p - A_{p'}}{B_p - B_{p'}}\right),$$

откуда после замены $A_p = e^{a_p}$, $B_p = e^{b_p}$ получаем $D^Y(\hbar e^{rv} e^{\gamma v} \Big|_{v^n=h_n})$. Аналогично, рассматривая разложение в окрестности бесконечно удаленной точки, заключаем, что $D^Y(\hbar e^{rv} e^{\gamma v} \Big|_{v^{-n-1}=h_n})$ совпадает с $\hbar D^U(\varphi_r)/(e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2})$. Лемма доказана.

Легко видеть, что из леммы 1 и предложения 2 вытекает доказываемое равенство (4.3)

$$[\Phi(E_r), \Phi(F_l)] = \frac{\Phi(\psi_{r+s}) - \Phi(\varphi_{r+s})}{e^{\hbar/2} - e^{-\hbar/2}},$$

поскольку, как доказано ранее, его левая часть в силу инъективности отображения D^U , которое следует из предложения 2, равна $e^{kv} e^{\gamma v} \Big|_{v^n=h_n}$, а из леммы 1 и инъективности отображения D^Y , также вытекающей из предложения 2, следует, что этому же выражению равна и правая часть доказываемого равенства (4.3). Таким образом равенство (4.3) доказано.

4.2. Общий случай. Приступим теперь к доказательству теоремы 3. Отметим, что эквивалентность соотношений (2.2) и (2.7) в случае, когда $i = m + 1$, доказана выше. Случай, когда $i \neq m + 1$, по существу разобран в статье [19], и мы на его доказательстве не останавливаемся.

Именно, покажем сначала, что соотношения (2.1), (2.3) эквивалентны следующему соотношению, записанному в терминах производящих функций образующих с использованием операторов сдвига $\sigma_j^\pm$:

$$[h_i(u), x_{j,s}^\pm] = \frac{\pm \hbar d_i a_{i,j}}{u - \sigma_j^\pm \pm \hbar d_i a_{i,j}} h_i(u) x_{j,s}^\pm. \quad (4.11)$$

Здесь $h_i(u) = 1 + \hbar \sum_{r \geq 0} h_{i,r} \cdot u^{-r-1} \in Y_{\hbar}(\mathfrak{g})[[u^{-1}]]$. Правая часть в (4.11) понимается как разложение по степеням u^{-1} , а скобки – как суперкоммутатор. Утверждение доказывается прямой проверкой. Для простоты записи положим $a = \pm \hbar d_i a_{i,j}/2$. Умножим правую часть соотношения (2.3) на $\hbar u^{-r-1}$ и просуммируем по всем $r \geq 0$. Получаем формулу

$$u[h_i(u) - 1 - \hbar u^{-1} h_{i,0}, x_{j,s+1}^\pm] - [h_i(u) - 1, x_{j,s+1}^\pm] = a\{x_{j,s}^\pm, h_i(u) - 1\}, \quad (4.12)$$

где $\{x, h\} = xh + (-1)^{p(h)p(x)}hx$ обозначает антисуперкоммутатор. Используя выражение (2.1) и равенство $\{x, h\} = [x, h] + 2(-1)^{p(h)p(x)}hx$, мы получаем соотношение $(u - \sigma_j^\pm + a)[h_i(u), x_{j,s}^\pm] = 2ah_i(u)x_{j,s}^\pm$, что и требовалось показать. Верно и обратное. Достаточно в правой части формулы (4.12) взять коэффициенты при u^{-k} , $k \geq 0$, чтобы получить формулы (2.1), (2.3).

Теперь таким же образом перепишем и соотношения (2.4), (2.5) в терминах производящих функций образующих. Используем введенное выше обозначение. Для оператора $B \in \text{End}(V)$ обозначим через $B_{(i)} \in \text{End}(V^{\otimes n})$ оператор, определяемый формулой $B_{(i)} = I^{\otimes i-1} \otimes B \otimes I^{\otimes n-i}$. Также для (супер)алгебры A зададим $\text{ad}^{(m)} : A^{\otimes m} \rightarrow \text{End}(A)$ как

$$\text{ad}^{(m)}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) = \text{ad}(a_1)_{(1)} \circ \cdots \circ \text{ad}(a_m)_{(m)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1. Соотношение (2.4) для $i \neq j$ эквивалентно тому, что для произвольного $A(v_1, v_2) \in \mathbb{C}[[v_1, v_2]]$

$$A(\sigma_i^\pm, \sigma_j^\pm)(\sigma_i^\pm - \sigma_j^\pm \mp a\hbar)x_{i,0}^\pm x_{j,0}^\pm = A(\sigma_i^\pm, \sigma_j^\pm)(\sigma_i^\pm - \sigma_j^\pm \pm a\hbar)x_{i,0}^\pm x_{j,0}^\pm,$$

где $a = \pm \hbar d_i a_{i,j}/2$.

2. Соотношение (2.4) для $i = j$ эквивалентно тому, что для произвольного $B(v_1, v_2) \in \mathbb{C}[[v_1, v_2]]$, такого, что $B(v_1, v_2) = B(v_2, v_1)$,

$$\mu(B(\sigma_{i,(1)}^\pm, \sigma_{j,(2)}^\pm)(\sigma_{i,(1)}^\pm - \sigma_{j,(2)}^\pm \mp d_i \hbar)x_{i,0}^\pm \otimes x_{j,0}^\pm) = 0,$$

где $\mu : Y_{\hbar}(\mathfrak{g})^{\otimes 2} \rightarrow Y_{\hbar}(\mathfrak{g})$ – умножение в $Y_{\hbar}(\mathfrak{g})$, а $\sigma_{i,(j)}^\pm := (\sigma_i^\pm)_{(j)}$.

3. Соотношение (2.5) для $i \neq j$ эквивалентно требованию, чтобы для произвольного $A(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{C}[v_1, v_2, \dots, v_n]^{\mathfrak{S}_n}$ имело место равенство

$$\text{ad}^{(n)}(A(\sigma_{i,(1)}^\pm, \dots, \sigma_{i,(n)}^\pm)(x_{i,0}^\pm)^{\otimes n})x_{j,l}^\pm = 0, \quad (4.13)$$

где $n = 1 - d_i a_{i,j}$ для $i \leq m + 1$ и $n = 1 + d_i a_{i,j}$ для $i \geq m + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Заметим, что формулу (2.4)

$$[x_{i,r+1}^{\pm}, x_{j,s}^{\pm}] - [x_{i,r}^{\pm}, x_{j,s+1}^{\pm}] = \pm \frac{d_i a_{ij} \hbar}{2} (x_{i,r}^{\pm} x_{j,s}^{\pm} + x_{j,s}^{\pm} x_{i,r}^{\pm})$$

можно переписать в виде

$$\sigma_i^{\pm r} \sigma_j^{\pm s} (\sigma_i^{\pm} - \sigma_j^{\pm} \mp a \hbar) x_{i,0}^{\pm} x_{j,0}^{\pm} = \sigma_i^{\pm r} \sigma_j^{\pm s} (\sigma_i^{\pm} - \sigma_j^{\pm} \pm a \hbar) x_{i,0}^{\pm} x_{j,0}^{\pm}, \quad (4.14)$$

что и доказывает первое утверждение предложения.

2. Если $i = j, a = d_i a_{ii}$, то заметим, что из (4.14) следует равенство

$$\mu(\sigma_{i,(1)}^{\pm r} \sigma_{j,(2)}^{\pm s}) (\sigma_{i,(1)}^{\pm} - \sigma_{j,(2)}^{\pm} \mp d_i \hbar) x_{i,0}^{\pm} \otimes x_{j,0}^{\pm} = \mu(\sigma_{i,(1)}^{\pm s} \sigma_{j,(2)}^{\pm r}) (\sigma_{i,(2)}^{\pm} - \sigma_{j,(1)}^{\pm} \mp d_i \hbar) x_{i,0}^{\pm} \otimes x_{j,0}^{\pm}.$$

Отметим, что оно эквивалентно равенству

$$\mu(\sigma_{i,(1)}^{\pm r} \sigma_{j,(2)}^{\pm s} + \sigma_{i,(1)}^{\pm s} \sigma_{j,(2)}^{\pm r}) (\sigma_{i,(1)}^{\pm} - \sigma_{j,(2)}^{\pm} \mp d_i \hbar) x_{i,0}^{\pm} \otimes x_{j,0}^{\pm} = 0,$$

которое и доказывает второе утверждение предложения.

3. Заметим, что (4.13) есть просто переписанное тождество (2.4), что и доказывает третье утверждение предложения. Отметим, что доказательство этого соотношения в нашем случае совпадает с доказательством для янгианов простых алгебр Ли и квантовых петлевых алгебр, подробно изложенным в работе [19].

Рассмотрим в Y^0 введенную ранее систему образующих $\{t_{i,r}\}_{i \in I, r \in \mathbb{Z}_+}$. Эта система, как нетрудно видеть, однородна, причем $\deg(t_{i,r}) = r$. Более того, $t_{i,0} = h_{i,0}$ и $t_{i,r} \equiv h_{i,r} \pmod{\hbar}$ для произвольного $r \geq 1$ в силу того, что $t_i(u) \equiv \hbar \sum_{r \geq 0} h_{i,r} u^{-r-1} \pmod{\hbar^2}$. Рассмотрим, как и выше, $B(t_i(u))(v)$ — обратное преобразование Бореля B (см. (4.1)) формального степенного ряда $t_i(u)$:

$$B(t_i(u))(v) = \hbar \sum_{r \geq 0} t_{i,r} \frac{v^r}{r!} \in Y^0[[v]].$$

ЛЕММА 2. Для произвольных $i, j \in I$ имеет место равенство

$$[B(t_i(u))(v), x_{j,s}^{\pm}] = \pm \frac{q_i^{a_{i,j}v} - q_i^{-a_{i,j}v}}{v} e^{\sigma_j^{\pm} v} x_{j,s}^{\pm}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для простоты $a = \pm \hbar d_i a_{i,j}/2$, $e^a = q_i^{\pm a_{i,j}}$. Тогда в силу (4.11) имеем

$$h_i(u) x_{j,s}^{\pm} h_i(u)^{-1} = \frac{u - \sigma_j^{\pm} + a}{u - \sigma_j^{\pm} - a} x_{j,s}^{\pm}.$$

Отсюда следует, что

$$[t_i(u), x_{j,s}^{\pm}] = \ln \left(\frac{u - \sigma_j^{\pm} + a}{u - \sigma_j^{\pm} - a} \right) x_{j,s}^{\pm}.$$

Используя отмеченное ранее равенство (4.2) $B(\ln(1 - pu^{-1})) = (1 - e^{pv})/v$, получаем, что

$$\begin{aligned} [B(t_i(u))(v), x_{j,s}^{\pm}] &= B(\ln(1 - (\sigma_j^{\pm} - a)u^{-1}) - \ln(1 - (\sigma_j^{\pm} + a)u^{-1})) x_{j,s}^{\pm} = \\ &= \left(\frac{1 - e^{(T_j^{\pm} - a)v}}{v} - \frac{1 - e^{(T_j^{\pm} + a)v}}{v} \right) x_{j,s}^{\pm} = \frac{e^{av} - e^{-av}}{v} e^{\sigma_j^{\pm} v} x_{j,s}^{\pm}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для доказательства теоремы осталось доказать эквивалентность формул (2.6) и (2.8), (2.9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Соотношения (2.6) эквивалентны соотношениям (2.8), (2.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство несколько громоздко и основано на доказанных выше формулах и теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта для янгиана (см., например, статью [11], а также работу [14] для более сложного случая янгиана странной супералгебры Ли). Как показано выше,

$$\begin{aligned}
 & \Phi(E_{m,r})\Phi(E_{m+1,0}) - q\Phi(E_{m+1,0})\Phi(E_{m,r}) = \\
 & = e^{r\sigma_m^+}g_m(\sigma_m^+)\lambda_m^+(\sigma_m^+)(g_{m+1}(\sigma_{m+1}^+))x_{m,0}^+x_{m+1}^+ - \\
 & - qe^{r\sigma_m^+}g_{m+1}(\sigma_{m+1}^+)\lambda_{m+1}^+(\sigma_{m+1}^+)(g_m(\sigma_m^+))x_{m+1,0}^+x_m^+ = \\
 & = e^{r\sigma_m^+}g_m(\sigma_m^+)\lambda_m^+(\sigma_m^+)(g_{m+1}(\sigma_{m+1}^+))(x_{m,0}^+x_{m+1}^+) - \\
 & - q\frac{e^{\sigma_{m+1}^+} - e^{\sigma_m^+ + a\hbar}}{e^{\sigma_m^+} - e^{\sigma_{m+1}^+ + a\hbar}}\frac{\sigma_m^+ - \sigma_{m+1}^+ - a\hbar}{\sigma_{m+1}^+ - \sigma_m^+ + a\hbar}(x_{m+1,0}^+x_m^+) = \\
 & = e^{r\sigma_m^+}g_m(\sigma_m^+)\lambda_m^+(\sigma_m^+)(g_{m+1}(\sigma_{m+1}^+))([x_{m,0}^+, x_{m+1,0}^+]).
 \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что

$$\begin{aligned}
 & \Phi(E_{m+1,0})\Phi(E_{m+2,s}) - q\Phi(E_{m+2,s})\Phi(E_{m+1,0}) = \\
 & = e^{s\sigma_{m+2}^+}g_{m+1}(\sigma_{m+1}^+)\lambda_{m+1}^+(\sigma_{m+1}^+)(g_{m+2}(\sigma_{m+2}^+))([x_{m+1,0}^+, x_{m+2,0}^+]).
 \end{aligned}$$

Вычисляя коммутатор найденных выражений, убеждаемся, что результатом является

$$A(g_m(\sigma_m^+), g_{m+1}(\sigma_{m+1}^+), g_{m+2}(\sigma_{m+2}^+))([x_{m,r}^+, x_{m+1,0}^+], [x_{m+1,0}^+, x_{m+2,s}^+]), \quad (4.15)$$

причем $A(g_m(\sigma_m^+), g_{m+1}(\sigma_{m+1}^+), g_{m+2}(\sigma_{m+2}^+))$ обратима.

Таким образом, выражение (4.15) обращается в ноль в том и только том случае, когда имеет место соотношение (2.6), если в нем выбран знак плюс. Но обращение в ноль выражения (4.15) в силу проведенных вычислений эквивалентно справедливости формулы (2.8). Проверка эквивалентности (2.9) и (2.6), когда в нем выбирается знак минус, проводится аналогично. Предложение доказано.

Как нетрудно видеть, существование мономорфизма Φ , определяемого формулой (3.4), вытекает из доказанных предложений. Утверждение о том, что это отображение единственным образом продолжается до изоморфизма (3.5), доказывается с помощью стандартных рассуждений, аналогичных проведенным в работе [19]. Именно, доказывается справедливость изоморфности пополнений петлевой и токовой супералгебр, т.е. справедливость доказываемого утверждения в случае, когда параметр деформации $\hbar = 0$. Затем с использованием теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта и того факта, что янгиан и квантовая петлевая супералгебра являются плоскими деформациями, соответствующими токовой и петлевой супербиалгебре, можно показать, что отображение $\widehat{\Phi}$ является изоморфизмом. Таким образом, теорема 3 следует из доказанных выше утверждений.

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению данной работы.

Список литературы

- [1] V. Kac, “A sketch of Lie superalgebra theory”, *Commun. Math. Phys.*, **53**:1 (1977), 31–64.
- [2] L. Frappat, A. Sciarrino, P. Sorba, *Dictionary on Lie algebras and superalgebras*, Academic Press, London, 2000.
- [3] V. G. Drinfel’d, “Quantum groups”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 1 (Berkeley, CA, August 3–11, 1986), AMS, Providence, RI, 1987, 789–820.
- [4] В. Г. Дринфельд, “Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера”, *Докл. АН СССР*, **283**:5 (1985), 1060–1064.
- [5] В. Г. Дринфельд, “Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр”, *Докл. АН СССР*, **269**:1 (1987), 13–17.
- [6] В. Г. Дринфельд, “Вырожденные аффинные алгебры Гекке и янгианы”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:1 (1986), 69–70.
- [7] V. Chari, A. Pressley, *A guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [8] A. I. Molev, “Yangians and their applications”, *Handbook of Algebra*, **3**, ed. M. Hazewinkel, Elsevier, Amsterdam, 2003, 907–959, arXiv: math/0211288.
- [9] А. И. Молев, *Янгианы и классические алгебры Ли*, МЦНМО, М., 2009.
- [10] M. Nazarov, “Quantum Berezinian and the classical Capelly identity”, *Lett. Math. Phys.*, **21**:2 (1991), 123–131.
- [11] В. А. Стукопин, “О янгианах супералгебр Ли типа $A(m, n)$ ”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **28**:3 (1994), 85–88.
- [12] В. А. Стукопин, “О дубле янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:2 (2006), 86–90.
- [13] В. А. Стукопин, “Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ и вычисление универсальной R -матрицы”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:2 (2005), 185–208.
- [14] В. А. Стукопин, “Янгиан странной супералгебры Ли и его квантовый дубль”, *ТМФ*, **174**:1 (2013), 140–153.
- [15] L. Dolan, Ch. Nappi, E. Witten, “Yangian Symmetry in $D = 4$ superconformal Yang–Mills theory”, *Quantum Theory and Symmetries*, Proceedings of the 3rd International Symposium, dedicated to the memory of Professor Freydoon Mansouri (Cincinnati, OH, September 10–14, 2003), World Sci., Singapore, RI, 2004, 300–315, arXiv: hep-th/0401243.
- [16] F. Spill, A. Torrielli, “On Drinfeld’s second realization of the $\text{AdS/CFT } \mathfrak{su}(2|2)$ Yangian”, *J. Geom. Phys.*, **59**:4 (2009), 489–502, arXiv: 0803.3194.
- [17] V. Stukopin, “Yangian of the strange Lie superalgebra Q_{n-1} type, Drinfel’d approach”, *SIGMA*, **3** (2007), 069, 12 pp., arXiv: 0705.3250.
- [18] В. А. Стукопин, “Скрученные янгианы, подход Дринфельда”, *Современная математика и ее приложения*, т. 60: *Алгебра*, Ин-т кибернетики НАН Грузии, Тбилиси, 2008.
- [19] S. Gautam, V. Toledano Laredo, “Yangians and quantum loop algebras”, *Selecta Math.*, **19**:2 (2013), 271–336.
- [20] S. Gautam, V. Toledano Laredo, “Yangians, quantum loop algebras and abelian difference equations”, *J. Amer. Math. Soc.*, **29**:3 (2016), 775–824.
- [21] S. Gautam, V. Toledano Laredo, “Meromorphic tensor equivalence for Yangians and quantum loop algebras”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **125**:1 (2017), 267–337.
- [22] В. А. Стукопин, “О представлениях янгиана супералгебры Ли типа $A(m, n)$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:5 (2013), 179–202.
- [23] V. Stukopin, “Representations of the Yangian of a Lie superalgebra $A(n, n)$ type”, *J. Phys.: Conf. Ser.*, **411**:1 (2013), 012027, 14 pp.

Поступила в редакцию 15.02.2018,
после доработки 22.03.2018,
принята к печати 23.04.2018