Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Р. Погосян, Г. М. Бабуджян, Г. К. Саввиди, Биллярд Артина: экспоненциальный распад корреляционных функций, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 2, 230–251

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:46:46

© 2018 г. Х. Р. Погосян*, Г. М. Бабуджян*, Г. К. Саввиди†

БИЛЬЯРД АРТИНА: ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РАСПАД КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Траектории гиперболических S -систем Амосова экспоненциально неустойчивы, поэтому S -системы обладают естественными и наиболее сильными хаотическими свойствами. Особый интерес представляют S -системы, которые определены на замкнутых поверхностях плоскости Лобачевского постоянной отрицательной кривизны. Пример такой системы был предложен в блестящей статье, опубликованной в 1924 году Эмилем Артином. Эта динамическая система определена на фундаментальной области плоскости Лобачевского, которая получается путем отождествления точек, конгруэнтных относительно модулярной группы – дискретной подгруппы изометрий плоскости Лобачевского. Фундаментальной областью в этом случае является гиперболический треугольник. Таким образом, временная эволюция геодезических траектории неевклидова бильярда происходит в фундаментальном гиперболическом треугольнике. Нами представлены результаты Артина, вычислены корреляционные функции наблюдаемых, которые определены на фазовом пространстве бильярда, и показано, что корреляционные функции со временем экспоненциально распадаются. Использована символическая динамика Артина, дифференциальная геометрия и теоретико-групповые методы Гельфанда–Фомина.

Ключевые слова: S -системы Аносова, гиперболические системы, плоскость Лобачевского, гиперболические геодезические потоки, хаотические системы, бильярд Артина, корреляционные функции, автоморфные функции.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9549>

1. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА АРТИНА С КВАЗИЭРГОДИЧЕСКИМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

В этом разделе мы напоминаем идеи и формулы из блестящей статьи Артина [1], опубликованной в 1924 г. В этой статье описан пример эргодической динамической системы, которая представляет собой геодезический поток на замкнутой поверхности.

Эта работа поддержана исследовательской и инновационной программой European Union's Horizon 2020 (грант Мариин Склодовской-Кюри № 644121).

*Национальная научная лаборатория им. А. И. Алиханяна (ЕрФИ), Ереван, Республика Армения

†Institute of Nuclear and Particle Physics, National Center for Scientific Research “Demokritos”, Athens, Greece. E-mail: savvidy@inp.demokritos.gr

сти $\mathcal{F}$ в плоскости Лобачевского. Цель статьи – построить пример динамической системы, в которой почти все геодезические траектории являются квазиэргодическими [2]–[24]; это означает, что все траектории, за исключением множества траекторий нулевой меры, в процессе эволюции подходят к любой точке фазового пространства бесконечно близко (точка фазового пространства задается координатой и направлением вектора скорости)¹⁾.

Следуя построениям Артина, рассмотрим модель плоскости Лобачевского, реализованную в верхней полуплоскости $y > 0$ комплексной плоскости переменной $z = x + iy \in \mathbb{C}$ с метрикой Пуанкаре, заданной элементом длины

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \frac{dz d\bar{z}}{(\operatorname{Im} z)^2}, \quad (1)$$

где $\bar{z}$ обозначает комплексное сопряжение к z и $\operatorname{Im} z$ – мнимая часть z . Плоскость Лобачевского является поверхностью постоянной отрицательной кривизны, ее кривизна равна $R = g^{ik} R_{ik} = -2$, т.е. удвоенной гауссовой кривизне $K = -1$. Эта метрика обладает двумя хорошо известными свойствами. Во-первых, она инвариантна относительно всех линейных подстановок g , образующих группу G изометрий плоскости Лобачевского²⁾:

$$w = g \cdot z \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot z \equiv \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (2)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – вещественные элементы матрицы g с положительным определителем, $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$. В самом деле, из формулы (2) можно вывести, что

$$dw = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} dz, \quad d\bar{w} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma\bar{z} + \delta)^2} d\bar{z}, \quad \operatorname{Im} w = y \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)(\gamma\bar{z} + \delta)},$$

следовательно,

$$\frac{dw d\bar{w}}{(\operatorname{Im} w)^2} = \frac{dz d\bar{z}}{(\operatorname{Im} z)^2}.$$

Метрика (1) также инвариантна относительно отражения $w = -\bar{z}$.

Во-вторых, геодезические линии этой метрики представляют собой полуокружности, ортогональные вещественной оси (т.е. их диаметр лежит на вещественной оси), или лучи, перпендикулярные этой оси. Уравнение геодезической на искривленной поверхности записывается как

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^l}{dt} = 0, \quad (3)$$

где Γ_{kl}^i – символы Кристоффеля метрики (1),

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1/y^2 & 0 \\ 0 & 1/y^2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

¹⁾В последующих исследованиях было доказано, что геодезический поток на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны обладает перемешиванием всех порядков, имеет лебеговский спектр и ненулевую энтропию Колмогорова [4]–[14]. Динамическая система Артина сформулирована чрезвычайно прозрачно, хорошо мотивирована физически и интуитивно понятна, и в этом ее преимущество.

²⁾Группа G является подгруппой группы преобразований Мёбиуса.

Уравнения геодезической (3) принимают вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{y} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 0$$

и имеют два решения, как мы отметили выше:

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= r \operatorname{th}(t), & y(t) &= \frac{r}{\operatorname{ch}(t)} & (\text{полуокружности, ортогональные} \\ & & & & \text{вещественной оси}), \\ x(t) &= x_0, & y(t) &= e^t & (\text{лучи, перпендикулярные} \\ & & & & \text{вещественной оси}); \end{aligned} \quad (5)$$

здесь $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ и $r \in (0, \infty)$. Подставляя каждое из этих решений в метрику (1), можно убедиться, что точки на геодезических кривых движутся с единичной скоростью,

$$\frac{ds}{dt} = 1. \quad (6)$$

Чтобы построить замкнутую поверхность $\mathcal{F}$ на плоскости Лобачевского, отождествим все точки в верхней полуплоскости, которые связаны друг с другом подстановкой (2) с целыми коэффициентами и единичным определителем. Эти преобразования d образуют модулярную группу D . Таким образом, две точки z и w “идентичны”, если

$$w = \frac{mz + n}{pz + q}, \quad d = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}, \quad d \in D, \quad (7)$$

где m, n, p, q – целые числа, ограниченные условием $mq - pn = 1$. Группа D является дискретной подгруппой группы G изометрических преобразований (2)³⁾. Это отождествление порождает регулярное разбиение плоскости Лобачевского на конгруэнтные гиперболические треугольники (см. рис. 1). Таким образом, плоскость Лобачевского покрывается треугольной периодической решеткой бесконечного порядка. Один из этих треугольников можно выбрать в качестве фундаментальной области $\mathcal{F}$ модулярной группы (7), которая представляет собой известный *модулярный треугольник*, состоящий из точек между прямыми $x = -1/2$ и $x = 1/2$, лежащих вне единичного круга (см. рис. 1). У модулярного треугольника $\mathcal{F}$ два угла равны, $\alpha = \beta = \pi/3$, а третий угол равен нулю, $\gamma = 0$, так что $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi/3 < \pi$. Площадь фундаментальной области конечна и равна $\pi/3$. Инвариантный элемент площади на плоскости Лобачевского пропорционален квадратному корню из определителя матрицы (4):

$$d\Omega = \sqrt{g} dx dy = \frac{dx dy}{y^2}, \quad (8)$$

поэтому

$$\operatorname{Area}(\mathcal{F}) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{\pi}{3}.$$

³⁾Модулярная группа D служит примером фуксовой группы [25], [26]. Напомним, что фуксовы группы являются дискретными подгруппами группы G всех изометрических преобразований (2). Фуксова группа позволяет покрыть гиперболическую плоскость непересекающимися правильными многоугольниками, один из которых может играть роль фундаментальной области.

Рис. 1. Фундаментальной областью $\mathcal{F}$ является гиперболический треугольник ABD , вершина D которого находится в бесконечно удаленной точке на оси y . Стороны треугольника – дуга AB и лучи AD , BD . Точки на лучах AD и BD и точки на дугах AC и CB отождествляются с помощью преобразований $w = z + 1$ и $w = -1/z$. В результате путем склеивания противоположных сторон треугольника образуется замкнутая компактная поверхность $\bar{\mathcal{F}}$. Эквивалентным образом гиперболический треугольник OAB можно рассматривать как фундаментальную область. Модулярные преобразования (7) фундаментальной области $\mathcal{F}$ порождают регулярное разбиение плоскости Лобачевского на конгруэнтные гиперболические треугольники. Дуга K – геодезическая, проходящая через точку (x, y) области $\mathcal{F}$ в направлении $\vec{v}$.

Среди всех эквивалентных точек плоскости Лобачевского имеется ровно один представитель внутри модулярного треугольника $\mathcal{F}$, за исключением точек на сторонах треугольника, противоположных друг другу. Эти точки должны быть отождествлены, так что в результате склеивания противоположных сторон модулярного треугольника образуется замкнутая поверхность $\bar{\mathcal{F}}$. На рис. 1 можно увидеть пары отождествленных точек на ребрах треугольника.

Эта конструкция позволяет рассматривать геодезический поток на абстрактной поверхности $\bar{\mathcal{F}}$, ассоциированной с плоскостью Лобачевского. Из-за однородности метрики Пуанкаре метрика в модулярном треугольнике $\bar{\mathcal{F}}$ регулярна всюду, за исключением его вершин. Основной целью настоящей работы является рассмотрение поведения геодезических траекторий, определенных на поверхности $\bar{\mathcal{F}}$ постоянной отрицательной кривизны.

Для описания поведения геодезических на поверхности $\bar{\mathcal{F}}$ можно использовать геодезические (5), определенные на всей плоскости Лобачевского. Рассмотрим произвольную точку $(x, y) \in \mathcal{F}$ и вектор скорости $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$. Переменные (x, y, θ) являются координатами фазового пространства $\mathcal{M}$, и они однозначно определяют геодезическую окружность K в плоскости Лобачевского. Когда эта траектория “пересекает” границу фундаментальной области $\mathcal{F}$ и выходит наружу, необходимо применить модулярное преобразование (7) к тем частям круга K , которые лежат за пределами $\mathcal{F}$ для того, чтобы вернуть их обратно в $\mathcal{F}$. Этот алгоритм определяет всю траекторию на $\bar{\mathcal{F}}$ для $t \in (-\infty, +\infty)$.

Заметим, что такое описание траектории на $\bar{\mathcal{F}}$ эквивалентно заданию множества $\{K'\}$ геодезических окружностей, которые возникают в результате действия

Рис. 2. Плоскость $\mathcal{E}$. Чтобы траектория была квазиэргодической, необходимо и достаточно иметь всюду плотное распределение точек (ξ', η') (9) в области $-1 < \eta < 0$, $\xi > 1$ плоскости $\mathcal{E}$. Область между “ступеньками” и диагональю $\xi = \eta$ соответствует геодезическим окружностям, не пересекающим фундаментальную область $\mathcal{F}$.

модулярной группы (7) на исходную окружность K . Следует объединить части геодезических окружностей K' , которые лежат внутри $\mathcal{F}$, в одну непрерывную траекторию на $\bar{\mathcal{F}}$ (см. далее рис. 4). В этом контексте квазиэргодичность траектории K на $\bar{\mathcal{F}}$ означает, что среди всех геодезических окружностей K' есть те, которые подходят сколь угодно близко к любой заданной окружности C . Теперь заметим, что геодезическая окружность K определяется своими базовыми точками ξ и η , лежащими на вещественной оси. При действии модулярной группы (7) координаты ξ и η отображаются в базовые точки ξ' и η' преобразованной окружности K' :

$$\xi' = \frac{m\xi + n}{p\xi + q}, \quad \eta' = \frac{m\eta + n}{p\eta + q}, \quad (9)$$

поэтому геодезические окружности лежат “близко” друг к другу, если их базовые точки находятся друг относительно друга в бесконечно малой окрестности.

Удобно ввести плоскость $\mathcal{E}$ с координатами (ξ, η) . Каждой точке (ξ, η) плоскости $\mathcal{E}$ отвечает геодезическая окружность на плоскости переменной z , проходящая через базовые точки ξ, η . И наоборот, каждой окружности на плоскости переменной z можно сопоставить две точки (ξ, η) или (η, ξ) на плоскости $\mathcal{E}$. Причина такой неоднозначности заключается в том, что под действием модулярного преобразования координаты базовой точки могут поменяться местами. Таким образом, геодезические окружности лежат в одной бесконечно малой окрестности, если их базовые координаты близки. Это означает теперь, что точки (ξ', η') на плоскости $\mathcal{E}$, которые получаются в результате действия всех преобразований модулярной группы (9) на точку (ξ, η) , должны быть всюду плотны в $\mathcal{E}$, если траектория K квазиэргодическая.

В статье Артина [1] было показано, что, для того чтобы траектория вела себя квазиэргодическим образом, необходимо и достаточно, чтобы точки (ξ', η') были

плотны в подобласти плоскости $\mathcal{E}$, заданной неравенствами (см. рис. 2)

$$-1 < \eta < 0, \quad \xi > 1. \quad (10)$$

Необходимость очевидна. Если же это условие выполнено, можно применить к точкам области (10) модулярные преобразования

$$\xi' = \xi + n, \quad \eta' = \eta + n \quad (11)$$

с некоторым целым n и заметить, что области $\xi > n$, $n - 1 < \eta < n$ тоже всюду плотно покрываются точками. Это области под “ступеньками”, показанными на рис. 2. Можно убрать упомянутый выше произвол выбора базовых точек, упорядочив их как $\eta < \xi$. Отсюда следует, что достаточно потребовать, чтобы точки, отвечающие геодезическим окружностям, пересекающим фундаментальную область $\mathcal{F}$, были всюду плотно расположены на плоскости $\mathcal{E}$. Такое множество точек на плоскости $\mathcal{E}$ лежит внутри области, определяемой условиями (10) и (11). Таким образом, можно предположить, что координаты базовой точки исходной окружности K лежат в области $-1 < \eta < 0$, $\xi > 1$.

Координаты ξ и $-\eta$ в этой области можно представить в виде цепной дроби с положительными числами a_i ,

$$\xi = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}}, \quad -\eta = \frac{1}{a_{-1} + \frac{1}{a_{-2} + \frac{1}{a_{-3} + \ddots}}}, \quad (12)$$

а это означает, что геодезическую траекторию K на $\bar{\mathcal{F}}$ можно записать в виде бесконечной A -цепочки

$$\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \quad (13)$$

Для любого целого $n \geq 0$ зададим координаты η_n и ξ_n соотношениями

$$\xi_n = a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3} + \ddots}}}, \quad -\eta_n = \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-3} + \ddots}}}. \quad (14)$$

Они отвечают сдвинутой вправо A -цепочке и удовлетворяют уравнениям

$$\xi = \frac{P_n \xi_n + P_{n-1}}{Q_n \xi_n + Q_{n-1}}, \quad \eta = \frac{P_n \eta_n + P_{n-1}}{Q_n \eta_n + Q_{n-1}}, \quad (15)$$

где P_n и Q_n – целые положительные числа. В самом деле, из (12) и (14) мы получаем

$$\xi = a_0 + \frac{1}{\xi_1} = \frac{a_0 \xi_1 + 1}{\xi_1}, \quad \eta = a_0 + \frac{1}{\eta_1} = \frac{a_0 \eta_1 + 1}{\eta_1}, \quad (16)$$

а из (15) мы видим, что

$$P_1 = a_0, \quad P_0 = 1, \quad Q_1 = 1, \quad Q_0 = 0 \quad (17)$$

Теперь можно применить метод математической индукции. Предположим, что уравнения (15) выполнены для некоторого n , тогда выражения (14) можно переписать как

$$\xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}, \quad \eta_n = a_n + \frac{1}{\eta_{n+1}}. \quad (18)$$

Далее, подставляя их в (15), мы получаем

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{P_n(a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}) + P_{n-1}}{Q_n(a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}) + Q_{n-1}} = \frac{(P_n a_n + P_{n-1})\xi_{n+1} + P_n}{(Q_n a_n + Q_{n-1})\xi_{n+1} + Q_n}, \\ \eta &= \frac{P_n(a_n + \frac{1}{\eta_{n+1}}) + P_{n-1}}{Q_n(a_n + \frac{1}{\eta_{n+1}}) + Q_{n-1}} = \frac{(P_n a_n + P_{n-1})\eta_{n+1} + P_n}{(Q_n a_n + Q_{n-1})\eta_{n+1} + Q_n}. \end{aligned} \quad (19)$$

Положив

$$P_{n+1} = P_n a_n + P_{n-1}, \quad Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1}, \quad (20)$$

мы завершаем доказательство уравнений (15).

Члены последовательности P_n и Q_n удовлетворяют уравнению

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n. \quad (21)$$

Действительно, с учетом (20) мы получаем рекуррентные соотношения

$$P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = -(P_{n+1} Q_n - Q_{n+1} P_n). \quad (22)$$

Из формул (17) следует, что при $n = 1$

$$P_1 Q_0 - Q_1 P_0 = -1. \quad (23)$$

Теперь соотношение (21) является очевидным следствием уравнений (22) и (23).

Рассмотрим матрицу с целыми элементами вида

$$d_n = \begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

В силу (21) ее определитель равен $(-1)^n$, и при четных n она является матрицей модулярного преобразования (7). Отсюда с учетом (15) и (24) следует, что точка (ξ_n, η_n) возникает как результат модулярного преобразования d_n^{-1} точки (ξ, η) :

$$\xi_n = d_n^{-1} \cdot \xi, \quad \eta_n = d_n^{-1} \cdot \eta. \quad (25)$$

Геометрическая окружность K задается своими базовыми точками (ξ, η) , и, как мы только что показали, точки (ξ_n, η_n) являются базовыми для геодезических окружностей из множества $\{K'\}$.

Чтобы координаты базовых точек, отвечающих $\{K'\}$, были всюду плотны в $\mathcal{E}$, необходимо, чтобы матрица цепных дробей d_n (24) при некотором n совпадала с произвольной точностью с любым заданным элементом модулярной группы D (7).

Сформулируем это утверждение в терминах последовательностей. Предположим, что последовательность $2m + 1$ положительных чисел

$$c_{-m}, \dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_m \quad (26)$$

аппроксимирует заданную окружность C с достаточной точностью, тогда окружности $\{K'\}$ бесконечно близко приближается к C , если можно найти четный индекс n такой, что часть A -цепочки (13)

$$a_{n-m}, a_{n-m+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+m}$$

длины $2m + 1$ совпадает либо с $c_{-m}, \dots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_m$ либо с обратной последовательностью. Следовательно, для квазиэргодичности траектории K , заданной бесконечной A -цепочкой (13), необходимо и достаточно иметь все мыслимые конечные последовательности (26) положительных целых чисел в качестве части A -цепочки (13).

Подведем краткие итоги. Геодезическая траектория K представляет собой бесконечную A -цепочку (13). Точки на плоскости $\mathcal{E}$, которые соответствуют окружностям $\{K'\}$, генерируются с помощью алгоритма, заданного формулами (14) и (25). Чтобы геодезическая траектория K была квазиэргодической, необходимо и достаточно, чтобы каждую мыслимую конечную последовательность натуральных чисел можно было найти как часть соответствующей A -цепочки (13). Согласно результатам публикаций [27], [28] почти все числа ξ имеют квазиэргодические непрерывные дроби. Таким образом, почти все геодезические траектории на поверхности $\mathcal{F}$ квазиэргодичны.

Артин замечает, что такие квазиэргодические -цепочки можно явно построить. Рассмотрим точки решетки в N -мерном евклидовом пространстве с целочисленными положительными координатами и диагональные плоскости, проходящие через вершины решетки. Если рассматривать координаты вершины решетки, записанные в фиксированном порядке, то можно получить последовательность $a_1, \dots, a_N$ положительных чисел с требуемым свойством, так как они естественным образом представляют собой возможный участок A -цепочки длины N . Все возможные цепочки длины N получаются путем рассмотрения точек решетки на диагональных плоскостях при увеличении суммы $a_1 + \dots + a_N$ их координат от нуля до бесконечности. Увеличивая далее величину N , можно получить все возможные цепочки $a_0, a_1, a_2, \dots$ любой длины. Числа $a_{-1}, a_{-2}, \dots$ можно также получить аналогичным образом. Из этого также следует, что вышеописанная конструкция “квазиэргодических цепей” имеет мощность континуума.

В статье [1] Артин привел примеры траекторий, которые не являются квазиэргодическими, но существуют в рассматриваемой системе и обладают интересными свойствами. Рассмотрим эти примеры. Периодические A -цепочки соответствуют периодическим орбитам, и наоборот. Ниже приведен пример периодической A -цепочки с периодом 3:

$$\dots, a_0, a_1, a_2, a_0, a_1, a_2, a_0, a_1, a_2, \dots$$

Если A -цепочка рано или поздно становится периодической справа, а также периодической слева, то это “дважды” асимптотическая траектория. Траектория “отрывается” от периодической траектории, чтобы в конечном итоге приблизиться ко второй

Рис. 3. Область $-1/2 \leq x < 1/2$, $y > 1/2$ на плоскости Лобачевского изометрически отображается в псевдосферу по формулам $u = \cos(4\pi x) / \text{sh}(\text{arch}(2y))$, $v = \sin(4\pi x) / \text{sh}(\text{arch}(2y))$, $z = \text{arch}(2y) - \text{th}(\text{arch}(2y))$. На рисунке показана псевдосфера, соответствующая области $-1/2 \leq x < 1/2$, $y > 1/2$.

(той же или другой) периодической траектории. Ниже приведен пример a -цепочки, которая становится периодической слева с периодом 3 и справа с периодом 2:

$$\dots, a_0, a_1, a_2, a_0, a_1, a_2, g, e, f, \dots, d, h, b_0, b_1, b_0, b_1, \dots$$

Рассмотрим теперь пример траектории, которая является не квазиэргодической, а “квазипериодической”, т. е. каждый отдельный сегмент A -цепочки встречается бесконечно много раз, но периодичность отсутствует. Такую цепочку можно построить, начав с квазиэргодической A -цепочки, а затем дублируя ее сегменты. Тогда соответствующая орбита является приближением для самой себя, не будучи квазиэргодической, потому что каждый отдельный сегмент повторяется бесконечно, часто со сколь угодно высокой точностью. Явным примером может быть

$$\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_0, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_{-1}, a_0, a_1, a_0, \\ a_{-1}, a_0, a_1, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_0, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$$

Рассмотрим орбиту, построенную в предыдущем примере, и вставим единицу в некотором месте этой A -цепочки. Эта часть цепочки никогда не повторится, и орбита будет подходить все ближе и ближе к орбите, построенной выше.

Добавим несколько слов о физической реализации вышеуказанной системы из статьи [1]. Альтернативную систему можно получить, если, помимо точек, которые отождествляются при модулярных преобразованиях, отождествить точки, преобразующиеся друг в друга преобразованием четности $z_1 = -\bar{z}_2$. Тогда фундаментальная область $\mathcal{F}$ разделяется на две части, одна из которых находится между $x = 0$ и $x = 1/2$. Геодезические траектории – это просто окружности. Поскольку еще больше точек считаются тождественными, предыдущие соображения остаются в силе, так что здесь тоже почти все геодезические траектории квазиэргодичны.

Теперь рассмотрим псевдосферу, поверхность так называемого трактрикоида, получающегося в результате вращения трактрисы вокруг своей асимптоты (см. рис. 3). Как известно, кривизна трактрикоида $K = -1$, и поэтому он локально изометричен плоскости Лобачевского. Можно отобразить изометрически фундаментальную область $\mathcal{F}$ на псевдосферу так, чтобы она “целиком уложилась” на псевдосфере. Это обеспечивает физическую реализацию абстрактной динамической системы Артина в обычном трехмерном пространстве, поскольку геодезические траектории теперь можно интерпретировать как траектории движения массивной точки на части псевдосферы без особенностей.

2. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ

В этом разделе мы продемонстрируем, как можно использовать алгоритм Артина для построения периодической геодезической траектории. Рассмотрим пример траектории, соответствующей периодической A -цепочке вида

$$\dots, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots,$$

где $a_0 = 1$. С помощью формул (12) можно найти базовые точки траектории, соответствующие данной цепочке:

$$\xi = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi}}}, \quad -\eta = \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 - \eta}}},$$

где мы учли, что цепочка имеет период 3 и что непрерывные дроби повторяются через три шага. Эти уравнения можно переписать как квадратные уравнения для базовых координат ξ, η траектории K :

$$7\xi^2 - 8\xi - 3 = 0, \quad 7\eta^2 - 8\eta - 3 = 0.$$

Чтобы получить базовые точки окружности K в области (10), выберем следующие решения этих уравнений:

$$\xi = \frac{1}{7}(4 + \sqrt{37}), \quad \eta = \frac{1}{7}(4 - \sqrt{37}).$$

Из соотношений (2), (24) и (25) следует, что $\xi = d_n \cdot \xi_n$ и $\eta = d_n \cdot \eta_n$, откуда

$$\xi_n = d_n^{-1} \cdot \xi, \quad \eta_n = d_n^{-1} \cdot \eta,$$

где

$$d_n^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{n-1} & -P_{n-1} \\ -Q_n & P_n \end{pmatrix}.$$

Рис. 4. Координаты (ξ, η) однозначно определяют геодезическую траекторию как ортогональную окружность K на всей плоскости Лобачевского. Когда траектория “сталкивается” с границами фундаментальной области $\mathcal{F}$, необходимо применить модулярные преобразования (7) к тем частям круга K , которые лежат вне $\mathcal{E}$, чтобы вернуть их обратно в $\mathcal{F}$. Получается множество геодезических $\{K'\}$, определяющее траекторию в $\bar{\mathcal{F}}$ при всех временах $t \in (-\infty, +\infty)$. Периодическая траектория K в $\mathcal{F}$ – жирная линия, геодезические K' – штриховые линии.

Это матрицы модулярной группы, определяющие геодезические окружности $\{K'\}$. С помощью последних двух выражений легко найти их базовые точки, описывающие периодическую геодезическую:

$$\begin{aligned}\xi_0 = \xi &= \frac{1}{7}(4 + \sqrt{37}), & \xi_1 &= \frac{1}{4}(3 + \sqrt{37}), \\ \xi_2 &= \frac{1}{3}(5 + \sqrt{37}), & \xi_3 &= \frac{1}{7}(4 + \sqrt{37}), \\ \eta_0 = \eta &= \frac{1}{7}(4 - \sqrt{37}), & \eta_1 &= \frac{1}{4}(3 - \sqrt{37}), \\ \eta_2 &= \frac{1}{3}(5 - \sqrt{37}), & \eta_3 &= \frac{1}{7}(4 - \sqrt{37}).\end{aligned}$$

Эти базовые координаты определяют всю траекторию на поверхности $\bar{\mathcal{F}}$, которая изображена на рис. 4.

3. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК И ФИЗИЧЕСКИЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ В ОБЛАСТИ $\bar{\mathcal{F}}$

В предыдущих разделах геодезический поток на поверхности $\bar{\mathcal{F}}$ был сформулирован в терминах теоретико-групповых преобразований. В данном разделе мы будем использовать аналогичный подход для описания временной эволюции функций, которые определены на фазовом пространстве $\mathcal{M}$ переменных (x, y, θ) , где $z = x + iy \in \bar{\mathcal{F}}$ и $\theta \in S^1$ задает направление единичного вектора скорости. Другими словами, нас интересует описание временной эволюции набора физических наблюдаемых $\{f(x, y, \theta)\}$.

Сначала опишем непрерывную временную эволюцию геодезических в фазовом пространстве $\mathcal{M}$. Простейшее движение по лучу CD (см. рис. 1) задается решением $x(t) = 0$, $y(t) = e^t$ и может быть представлено как групповое преобразование (2):

$$z_1(t) = g_1(t) \cdot i = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \cdot i = ie^t, \quad t \in (-\infty, +\infty). \quad (27)$$

Другое движение по кругу единичного радиуса (по дуге ACB на рис. 1) задается преобразованием

$$z_2(t) = g_2(t) \cdot i = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{t}{2} & \operatorname{sh} \frac{t}{2} \\ \operatorname{sh} \frac{t}{2} & \operatorname{ch} \frac{t}{2} \end{pmatrix} \cdot i = \frac{i \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{i \operatorname{sh} \frac{t}{2} + \operatorname{ch} \frac{t}{2}}. \quad (28)$$

Поскольку группа изометрий G на плоскости Лобачевского действует транзитивно, любая геодезическая может быть отображена в любую другую геодезическую посредством действия преобразования $g \in G$ (2), следовательно, общий вид траектории таков:

$$z(t) = gg_1(t) \cdot i = \begin{pmatrix} \alpha e^{t/2} & \beta e^{-t/2} \\ \gamma e^{t/2} & \delta e^{-t/2} \end{pmatrix} \cdot i, \quad z(t) = \frac{i\alpha e^t + \beta}{i\gamma e^t + \delta}. \quad (29)$$

Это представление дает нам удобное описание временной эволюции геодезического потока на всей плоскости Лобачевского с единичным вектором скорости (6).

Чтобы проецировать движение на фундаментальную область $\mathcal{F}$, отождествим групповые элементы $g \in G$, связанные модулярными преобразованиями D . Для этого нам потребуется более удобная параметризация элемента $g \in G$ [11]:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad \det g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = 1.$$

Для этого достаточно ввести пару комплексных параметров

$$\omega_1 = g_{11} + ig_{12}, \quad \omega_2 = -g_{21} - ig_{22} \quad (30)$$

с условием на определитель

$$\operatorname{Im}(\bar{\omega}_1 \omega_2) = -1. \quad (31)$$

Геодезические движения, индуцированные двумя элементами g и g' группы G должны быть отождествлены, если они связаны преобразованием d из модулярной группы D :

$$g' = dg = \begin{pmatrix} m & -n \\ p & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg_{11} - ng_{21} & mg_{12} - ng_{22} \\ pg_{11} - qg_{21} & pg_{12} - qg_{22} \end{pmatrix}$$

следовательно,

$$\omega'_1 = m\omega_1 + n\omega_2, \quad \omega'_2 = p\omega_1 + q\omega_2.$$

Если ввести отношение

$$\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \tau' = \frac{\omega'_1}{\omega'_2}, \quad (32)$$

то мы можем видеть, что

$$\tau' = \frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \frac{m\omega_1 + n\omega_2}{p\omega_1 + q\omega_2} = \frac{m\tau + n}{p\tau + q}, \quad \omega'_2 = (p\tau + q)\omega_2. \quad (33)$$

Преобразование величины τ под действием модулярной группы D лежит в фундаментальном представлении. Этот важный факт означает, что для описания движения в области $\mathcal{F}$ параметр $\tau = x + iy$ должен принадлежать фундаментальной области $\mathcal{F}$ модулярной группы D . Таким образом, вместо того чтобы описывать групповой элемент $g \in G$ парой (ω_2, ω_1) , более удобно использовать параметры (ω_2, τ) . Эти параметры связаны условием (31) на определитель,

$$(\tau - \bar{\tau})|\omega_2|^2 = 2i,$$

при этом каждый элемент g задается параметрами (ω_2, τ) :

$$(\omega_2, \tau), \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2i}{\tau - \bar{\tau}}} e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \tau \in \mathcal{F}, \quad (34)$$

где τ — координата в фундаментальной области $\mathcal{F}$, а угол θ определяет направление единичного вектора скорости $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ в точке (x, y) (см. рис. 1). Итак, функции на фазовом пространстве можно записать в терминах переменных (ω_2, τ) , при этом условие инвариантности функций относительно модулярных преобразований (33) принимает вид [25], [29]⁴⁾

$$f(\omega'_2, \tau') = f\left[(p\tau + q)\omega_2, \frac{m\tau + n}{p\tau + q}\right] = f(\omega_2, \tau). \quad (35)$$

Чтобы описать эволюцию функций/наблюдаемых под действием геодезического потока (27)–(29), мы должны знать параметризацию группового элемента gg_t . Параметризуем элементы g и g_t соответственно параметрами (ω_1, ω_2) и (χ_1, χ_2) :

$$\omega_1 = g_{11} + ig_{12}, \quad \omega_2 = -g_{21} - ig_{22}, \quad \chi_1 = h_{11} + ih_{12}, \quad \chi_2 = -h_{21} - ih_{22}.$$

Групповое умножение задает элемент gg_t , параметризованный (ω'_1, ω'_2) , в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= g_{11}h_{11} - g_{12}h_{21} + i(g_{11}h_{12} - g_{12}h_{22}), \\ \omega'_2 &= -g_{21}h_{11} + g_{22}h_{21} + i(-g_{21}h_{12} + g_{22}h_{22}), \end{aligned}$$

и в терминах (ω_1, ω_2) и (χ_1, χ_2) результат принимает вид

$$\omega'_1 = \frac{\omega_1 + \bar{\omega}_1}{2}\chi_1 + \frac{\omega_1 - \bar{\omega}_1}{2i}\chi_2, \quad \omega'_2 = \frac{\omega_2 + \bar{\omega}_2}{2}\chi_1 + \frac{\omega_2 - \bar{\omega}_2}{2i}\chi_2.$$

Используя упомянутое выше правило умножения, можно найти преобразование, индуцированное геодезическим потоком $g_1(t)$, в котором $\chi_1 = e^{t/2}$, $\chi_2 = ie^{-t/2}$. Имеем

$$\omega'_1 = \omega_1 \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \bar{\omega}_1 \operatorname{sh} \frac{t}{2}, \quad \omega'_2 = \omega_2 \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \bar{\omega}_2 \operatorname{sh} \frac{t}{2},$$

⁴⁾Это определяет автоморфные функции, являющиеся обобщением тригонометрических, гиперболических, эллиптических и других периодических функций [30].

следовательно,

$$\tau' = \frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \frac{\omega_1 \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \bar{\omega}_1 \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\omega_2 \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \bar{\omega}_2 \operatorname{sh} \frac{t}{2}} = \frac{\tau \operatorname{ch} \frac{t}{2} + u \bar{\tau} \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2} + u \operatorname{sh} \frac{t}{2}}. \quad (36)$$

С учетом того, что $\tau' = x' + iy'$ и $u = \bar{\omega}_2/\omega_2 = e^{-2i\theta}$, используя выражения (34), мы получаем, что формула (36) определяет геодезическую траекторию:

$$x' = x'(x, y, u, t), \quad y' = y'(x, y, u, t). \quad (37)$$

Рассчитав отношение $u' = \bar{\omega}'_2/\omega'_2 = e^{-2i\theta'}$, получаем

$$u' = \frac{u \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2} + u \operatorname{sh} \frac{t}{2}}, \quad (38)$$

таким образом,

$$u' = u'(u, t). \quad (39)$$

Соотношения (36), (38) полностью описывают временную эволюцию координат (x, y, u) фазового пространства $\mathcal{M}$.

Для движения $g_2(t)$ из (28) мы имеем

$$\chi_1 = \operatorname{ch} \frac{t}{2} + i \operatorname{sh} \frac{t}{2}, \quad \chi_2 = \operatorname{sh} \frac{t}{2} + i \operatorname{ch} \frac{t}{2},$$

отсюда

$$\omega'_1 = \omega_1 \operatorname{ch} \frac{t}{2} + i \bar{\omega}_1 \operatorname{sh} \frac{t}{2}, \quad \omega'_2 = \omega_2 \operatorname{ch} \frac{t}{2} + i \bar{\omega}_2 \operatorname{sh} \frac{t}{2}.$$

Формула для τ' та же, что и выше, за исключением дополнительного множителя i перед u . Эти выражения позволяют определить преобразование функций $f(x, y, u)$ в процессе временной эволюции как $f(x, y, u) \rightarrow f(x', y', u')$.

Абелева подгруппа группы G , задающая $SO(2)$ -повороты, определяется матрицами вида

$$g_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \det g_\phi = 1.$$

Для них $\chi_1 = e^{i\phi}$, $\chi_2 = ie^{i\phi}$, и индуцированное такими матрицами преобразование имеет вид $\omega'_1 = \omega_1 e^{i\phi}$, $\omega'_2 = e^{i\phi} \omega_2$, $\tau' = \tau$.

Используя теорему Стоуна, преобразование функций можно выразить как действие однопараметрической группы унитарных операторов U_t :

$$U_t f(g) = f(gq_t). \quad (40)$$

Найдем преобразования, которые индуцируются матрицами $g_1(t)$, $g_2(t)$ и g_ϕ из формул (27)–(29). Для этой цели удобнее использовать независимые переменные фазового пространства $(x, y, \theta) \in \mathcal{M}$ или (x, y, u) и функции $f(x, y, u)$, где $u = e^{-2i\theta}$. Эволюция переменных (x, y, u) задается формулами (36) и (38):

$$\begin{aligned} U_1(t) f(x, y, u) &= f\left(\frac{u \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2} + u \operatorname{sh} \frac{t}{2}}, \frac{\tau \operatorname{ch} \frac{t}{2} + u \bar{\tau} \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2} + u \operatorname{sh} \frac{t}{2}}\right), \\ U_2(t) f(x, y, u) &= f\left(\frac{u \operatorname{ch} \frac{t}{2} - i \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2} + i u \operatorname{sh} \frac{t}{2}}, \frac{\tau \operatorname{ch} \frac{t}{2} + i u \bar{\tau} \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2} + i u \operatorname{sh} \frac{t}{2}}\right), \end{aligned} \quad (41)$$

$$U_\phi f(\omega_2, \tau) = f(e^{i\phi} \omega_2, \tau).$$

Оператор U_t из однопараметрического семейства унитарных операторов может быть представлен как экспонента от самосопряженного оператора, $U_t = \exp(iHt)$, отсюда мы имеем

$$U_t f(g) = \exp(iHt) f(g) = f(gg_t);$$

дифференцируя по t в точке $t = 0$, получаем

$$Hf = -i \frac{dU_t f}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Найдем операторы H , отвечающие $U_1(t)$ и $U_2(t)$. Временная эволюция этих переменных задана выше соотношениями (41), дифференцируя которые по времени, мы получаем для H_1 и H_2 следующие выражения:

$$\begin{aligned} 2H_1 &= \frac{y}{u} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) - i \frac{\partial}{\partial u} - uy \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) + iu^2 \frac{\partial}{\partial u}, \\ 2iH_2 &= \frac{y}{u} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) - i \frac{\partial}{\partial u} + uy \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) - iu^2 \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

Введение операторов уничтожения $H_- = H_1 - iH_2$ и рождения $H_+ = H_1 + iH_2$ дает

$$H_+ = \frac{y}{u} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) - i \frac{\partial}{\partial u}, \quad H_- = -uy \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) + iu^2 \frac{\partial}{\partial u},$$

а вычислив коммутатор $[H_+, H_-]$, мы получаем, что $H_0 = u \partial / \partial u$ и $sl(2, \mathbb{R})$ -алгебра этих операторов такова:

$$[H_+, H_-] = 2H_0, \quad [H_0, H_+] = -H_+, \quad [H_0, H_-] = H_-.$$

Рассмотрим класс функций, которые удовлетворяют следующим двум уравнениям:

$$H_0 f(x, y, u) = -\frac{n}{2} f(x, y, u), \quad H_- f(x, y, u) = 0,$$

где n – целое число. Первое уравнение имеет решение

$$f_n(x, y, u) = \left(\frac{1}{uy} \right)^{n/2} \psi(x, y) = \omega_2^n \psi(x, y),$$

подставляя которое во второе уравнение, мы получаем

$$n\psi(\tau, \bar{\tau}) + (\bar{\tau} - \tau) \frac{\partial \psi(\tau, \bar{\tau})}{\partial \tau} = 0.$$

Положим $\psi(\tau, \bar{\tau}) = (\bar{\tau} - \tau)^n \Theta(\bar{\tau}, \tau)$, тогда $\partial \Theta / \partial \tau = 0$, т. е. Θ является антиголоморфной функцией и $f(\omega_2, \tau, \bar{\tau})$ принимает вид ⁵⁾

$$f(\omega_2, \tau, \bar{\tau}) = \omega_2^n (\bar{\tau} - \tau)^n \Theta(\bar{\tau}) = \frac{1}{\omega_2^n} \Theta(\bar{\tau}). \quad (42)$$

⁵⁾ Множитель $(2i)^n$ убирается путем переопределения функции Θ .

Условие инвариантности относительно модулярного преобразования (35) таково:

$$\frac{1}{(p\bar{\omega}_1 + q\bar{\omega}_2)^n} \Theta\left(\frac{m\bar{\tau} + n}{p\bar{\tau} + q}\right) = \frac{1}{\bar{\omega}_2^n} \Theta(\bar{\tau}).$$

Следовательно, $\Theta(\bar{\tau})$ есть тета-функция Пуанкаре веса n [25], [29], [30]:

$$\Theta\left(\frac{m\bar{\tau} + n}{p\bar{\tau} + q}\right) = \Theta(\bar{\tau})(p\bar{\tau} + q)^n.$$

Оператор H_+ порождает тета-функцию веса $n + 1$.

Инвариантная мера интегрирования на группе G задается как

$$d\mu = \frac{dg_{12} dg_{21} dg_{22}}{g_{22}},$$

и, используя выражения (30) и (32), мы можем записать меру в терминах независимых параметров (x, y, θ) ,

$$x = -\frac{g_{21}}{g_{22}((g_{21})^2 + (g_{22})^2)} - \frac{g_{12}}{g_{22}}, \quad y = \frac{1}{(g_{21})^2 + (g_{22})^2}, \quad \theta = \arctg \frac{g_{22}}{g_{21}},$$

в следующем виде [10], [11]:

$$d\mu = \frac{dx dy}{y^2} d\theta.$$

Это согласуется с мерой (8), определенной в разделе 1. Таким образом, инвариантное интегрирование функций/наблюдаемых $f(\omega_2, \bar{\tau}, \tau) = f(\theta, x, y)$ по нашим фазовым переменным $(x, y, \theta) \in \mathcal{M}$ задается интегралом

$$(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} f_1(\theta, x, y) \overline{f_2(\theta, x, y)} \frac{dx dy}{y^2}.$$

Итак, мы показали, что функции на фазовом пространстве имеют вид (42), где $\tau = x + iy$ и $(\tau - \bar{\tau})/2i = y$, следовательно, скалярное произведение определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} f_1(\theta, x, y) \overline{f_2(\theta, x, y)} \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} \Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau})} \frac{1}{|\omega_2|^{2n}} \frac{dx dy}{y^2} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} \Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau})} (\tau - \bar{\tau})^n \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} \Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau})} y^n \frac{dx dy}{y^2} = \\ &= 2\pi \int_{\mathcal{F}} \Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau})} y^{n-2} dx dy, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

В следующем разделе это выражение позволит нам вычислить корреляционные функции на геодезических (27)–(29).

4. ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Корреляционные функции геодезических потоков Аносова ранее исследовались в работах [12], [13], [16], [17], [31] с использованием различных подходов, включая ряды Фурье для группы $SL(2, \mathbb{R})$, дзета-функции, связи полюсов преобразования Фурье корреляционной функции со спектром соответствующего оператора Руэля, методы теории унитарных представлений, спектральные свойства соответствующих лапласианов и другие. В нашем анализе мы используем уравнения эволюции и свойства автоморфных функций на $\mathcal{F}$ и оцениваем показатель экспоненты, описывающей распад корреляционных функций, в терминах кривизны фазового пространства и весов тета-функций.

Корреляционную функцию можно определить как интеграл от пары функций/наблюдаемых, первая из которых не зависит от времени, а вторая эволюционирует вместе с геодезическим потоком:

$$\mathcal{D}_t(f_1, f_2) = \int_{\mathcal{M}} f_1(g) \overline{f_2(gg_t)} d\mu. \quad (43)$$

Используя преобразования (37), (39) перепишем интеграл в виде, полезном для последующих расчетов [19]:

$$\mathcal{D}_t(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} f_1[x, y, \theta] \overline{f_2[x'(x, y, \theta, t), y'(x, y, \theta, t), \theta'(\theta, t)]} \frac{dx dy}{y^2}.$$

В соответствии с приведенными выше выкладками (40), (41) и (36) имеем

$$f_1(\omega_2, \tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{\bar{\omega}_2^n} \Theta_1(\bar{\tau}),$$

$$\overline{f_2(\omega'_2, \tau', \bar{\tau}')} = \frac{1}{\omega_2^n [\operatorname{ch} \frac{t}{2} + (\bar{\omega}_2/\omega_2) \operatorname{sh} \frac{t}{2}]^n} \overline{\Theta_2\left(\frac{\bar{\tau} \operatorname{ch} \frac{t}{2} + (\omega_2/\bar{\omega}_2)\tau \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2} + (\omega_2/\bar{\omega}_2) \operatorname{sh} \frac{t}{2}}\right)}.$$

Следовательно, корреляционная функция имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t(f_1, f_2) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} \Phi_1(\bar{\tau}) \overline{\Phi_2(\bar{\tau}')} \frac{y^n}{[\operatorname{ch} \frac{t}{2} + (\bar{\omega}_2/\omega_2) \operatorname{sh} \frac{t}{2}]^n} \frac{dx dy}{y^2} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} \Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2\left(\frac{\bar{\tau} e^{-2i\theta} \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \tau \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{e^{-2i\theta} \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \operatorname{sh} \frac{t}{2}}\right)} \frac{y^{n-2} dx dy}{[\operatorname{ch} \frac{t}{2} + e^{-2i\theta} \operatorname{sh} \frac{t}{2}]^n}. \end{aligned}$$

Для вычисления корреляционной функции на произвольной траектории рассмотрим отображение gg_t , заданное в (29). В этом случае для χ_1, χ_2 получаем

$$\chi_1 = \alpha e^{t/2} + i\beta e^{-t/2}, \quad \chi_2 = \gamma e^{t/2} + i\delta e^{-t/2},$$

для ω'_1, ω'_2 имеем

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1 \frac{(\alpha - i\gamma)e^{t/2} + (\delta + i\beta)e^{-t/2}}{2} + \bar{\omega}_1 \frac{(\alpha + i\gamma)e^{t/2} - (\delta - i\beta)e^{-t/2}}{2}, \\ \omega'_2 &= \omega_2 \frac{(\alpha - i\gamma)e^{t/2} + (\delta + i\beta)e^{-t/2}}{2} + \bar{\omega}_2 \frac{(\alpha + i\gamma)e^{t/2} - (\delta - i\beta)e^{-t/2}}{2}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\tau' = \frac{\omega'_1}{\omega'_2} = \frac{\tau[(\alpha - i\gamma)e^{t/2} + (\delta + i\beta)e^{-t/2}] + u\bar{\tau}[(\alpha + i\gamma)e^{t/2} - (\delta - i\beta)e^{-t/2}]}{[(\alpha - i\gamma)e^{t/2} + (\delta + i\beta)e^{-t/2}] + u[(\alpha + i\gamma)e^{t/2} - (\delta - i\beta)e^{-t/2}]}. \quad (44)$$

Рассмотрим также временную эволюцию направления $u'(t)$ вектора скорости аналогично (36) и (38), получим

$$u' = \frac{[(\alpha + i\gamma)e^{t/2} + (\delta - i\beta)e^{-t/2}]u + [(\alpha - i\gamma)e^{t/2} - (\delta + i\beta)e^{-t/2}]}{[(\alpha - i\gamma)e^{t/2} + (\delta + i\beta)e^{-t/2}] + u[(\alpha + i\gamma)e^{t/2} - (\delta - i\beta)e^{-t/2}]}.$$

При $t \rightarrow \pm\infty$ мы имеем

$$u' = e^{-2i\theta'} \rightarrow \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \theta' \rightarrow 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$$

Теперь мы можем вычислить корреляционную функцию для общего геодезического потока:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t(f_1, f_2) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} f_1(\omega_2, \tau, \bar{\tau}) \overline{f_2(\omega'_2, \tau', \bar{\tau}')} \frac{dx dy}{y^2} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} \frac{\Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau}')} y^{n-2} dx dy}{[(\alpha - i\gamma)e^{t/2} + (\delta + i\beta)e^{-t/2}] + u[(\alpha + i\gamma)e^{t/2} - (\delta - i\beta)e^{-t/2}]^n} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} \frac{\Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau}')} y^{n-2} dx dy}{[(\alpha - i\gamma)e^{t/2} + (\delta + i\beta)e^{-t/2}] + e^{-2i\theta}[(\alpha + i\gamma)e^{t/2} - (\delta - i\beta)e^{-t/2}]^n}, \end{aligned}$$

где τ' задана выражением (44) и из формул (34) мы имеем $\bar{\omega}_2/\omega_2 = e^{-2i\theta}$. Наша цель – поиск оценки сверху для корреляционных функций, поэтому запишем неравенство

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_t(f_1, f_2)| &\leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} \left| \frac{|\Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau}')}| y^{n-2} dx dy}{[(\alpha - i\gamma)e^{t/2} + (\delta + i\beta)e^{-t/2}] + e^{-2i\theta}[(\alpha + i\gamma)e^{t/2} - (\delta - i\beta)e^{-t/2}]^n} \right|. \end{aligned}$$

Модуль знаменателя равен $4e^t(\alpha \cos \theta + \gamma \sin \theta)^2 + 4e^{-t}(\beta \cos \theta + \delta \sin \theta)^2$, следовательно, в пределе $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_t(f_1, f_2)| &\leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} \frac{|\Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau}')}| y^{n-2} dx dy}{2^n [e^t(\alpha \cos \theta + \gamma \sin \theta)^2 + e^{-t}(\beta \cos \theta + \delta \sin \theta)^2]^{n/2}} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} \frac{|\Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau}')}| y^{n-2} dx dy}{2^n [e^t(\alpha \cos \theta + \gamma \sin \theta)^2 + e^{-2t}(\beta \cos \theta + \delta \sin \theta)^2]^{n/2}} e^{-nt/2}. \end{aligned}$$

Отбрасывая в знаменателе положительное слагаемое $e^{-2t}(\beta \cos \theta + \delta \sin \theta)^2$, получаем

$$|\mathcal{D}_t(f_1, f_2)| \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} |\Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau}')}| \frac{y^{n-2} dx dy}{2^n [e^t(\alpha \cos \theta + \gamma \sin \theta)^2]^{n/2}} e^{-nt/2}.$$

Геодезический поток задается уравнением эволюции (29), следовательно, взяв предел $t \rightarrow \pm\infty$, можно выразить параметры матрицы $g = g(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ через координаты (ξ, η) из соотношений (10):

$$z(-\infty) = \eta = \frac{\beta}{\delta}, \quad z(+\infty) = \xi = \frac{\alpha}{\gamma} > 1.$$

Отсюда получаем, что

$$|\mathcal{D}_t(f_1, f_2)| \leq \frac{1}{2^n |\gamma|^n} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} |\Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau}')}| \frac{y^{n-2} dx dy}{[(\xi \cos \theta + \sin \theta)^2]^{n/2}} e^{-nt/2}.$$

Последний интеграл является средним по всем геодезическим траекториям, которые определяются координатами точки $(x, y) \in \mathcal{F}$ и направлениями векторов скорости $\vec{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$. Чтобы исключить очевидную сингулярность при $\theta = \theta_0$, где θ_0 – решение уравнения $\xi \cos \theta + \sin \theta = 0$, мы должны удалить небольшой ϵ -объем фазового пространства, который окружает сингулярное направление θ_0 . При таком предположении мы получаем экспоненциальную оценку корреляционных функций:

$$|\mathcal{D}_t(f_1, f_2)| \leq M_{\Theta_1 \Theta_2}(\epsilon) e^{-nt/2}.$$

В противоположном пределе $t \rightarrow -\infty$ имеет место неравенство

$$|\mathcal{D}_t(f_1, f_2)| \leq \frac{1}{2^n |\delta|^n} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathcal{F}} |\Theta_1(\bar{\tau}) \overline{\Theta_2(\bar{\tau}')}| \frac{y^{n-2} dx dy}{[(\eta \cos \theta + \sin \theta)^2]^{n/2}} e^{nt/2}.$$

Комбинируя эти результаты, получаем в обоих пределах $t \rightarrow \pm\infty$ оценку

$$|\mathcal{D}_t(f_1, f_2)| \leq M_{\Theta_1 \Theta_2}(\epsilon) e^{-n|t|/2}. \quad (45)$$

Если поверхность имеет кривизну $K < 0$, то

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{Ky^2},$$

тогда в оценке (45) экспоненциальный множитель принимает вид

$$|\mathcal{D}_t(f_1, f_2)| \leq M_{\Theta_1 \Theta_2}(\epsilon) e^{-nK|t|/2}. \quad (46)$$

Для характерного времени распада [20], [32] получим $\tau_0 = 2/nK$. Время затухания корреляционных функций меньше, когда поверхность имеет большую отрицательную кривизну, другими словами, когда расходимость траекторий сильнее.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Скорость сходимости приближений вещественного числа цепными дробями можно рассчитать в терминах отношений P_n/Q_n . Из (20) получаем

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}}. \quad (47)$$

Сначала покажем, что можно получить отношение P_{n+1}/Q_{n+1} из P_n/Q_n , делая замену

$$a_{n-1} \mapsto a_{n-1} + \frac{1}{a_n}. \quad (48)$$

В самом деле, подставим (48) в (47), получим

$$\begin{aligned} \frac{P_n}{Q_n} &= \frac{P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{P_{n-1}(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}) + P_{n-2}}{Q_{n-1}(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}) + Q_{n-2}} = \frac{(P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2})a_n + P_{n-2}}{(Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2})a_n + Q_{n-2}} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \end{aligned}$$

где последнее равенство есть следствие формул (20).

С другой стороны, из уравнений (47) и (17) вытекает, что $P_1/Q_1 = a_0$, и мы можем рассчитать отношения $P_2/Q_2, \dots, P_n/Q_n$, используя рекуррентную формулу (48). Результат имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{Q_1} &= a_0, & \frac{P_2}{Q_2} &= a_0 + \frac{1}{a_1}, & \frac{P_3}{Q_3} &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, & \dots, \\ \frac{P_n}{Q_n} &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}}}}. \end{aligned}$$

В силу условия (21) $P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} = (-1)^n$. Отсюда при четном n отношения P_n/Q_n возрастают с ростом n , но все время остаются меньше ξ , а при нечетном n они убывают, оставаясь больше ξ . Таким образом,

$$\left| \xi - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Последовательность Q_n возрастает с ростом n ; это вытекает из выражений (20), (17) и из того, что коэффициенты a_n – ненулевые положительные числа. Итак, мы получили, что $Q_{n+1} > Q_n$, поэтому любое вещественное число ξ можно приблизить отношением P_n/Q_n со следующей оценкой точности приближения:

$$\left| \xi - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \xi.$$

Отношение P_n/Q_n называется n -й подходящей дробью.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Для описания геодезического потока вместо (u, x, y) можно использовать альтернативные независимые переменные $(u, \tau, \bar{\tau})$ и записать в новых переменных операторы H_+ , H_- , H_0 (см. ниже). В некоторых случаях такое представление более подходит для расчетов и потому удобнее. Преобразования функции $f(u, \tau, \bar{\tau})$ записываются как

$$\begin{aligned} U_1 f(u, \tau, \bar{\tau}) &= f\left(\frac{u \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{u \operatorname{sh} \frac{t}{2} + \operatorname{ch} \frac{t}{2}}, \frac{\bar{\tau} u \operatorname{sh} \frac{t}{2} + \tau \operatorname{ch} \frac{t}{2}}{u \operatorname{sh} \frac{t}{2} + \operatorname{ch} \frac{t}{2}}, \frac{\bar{\tau} \operatorname{ch} \frac{t}{2} + \frac{\tau}{u} \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\frac{1}{u} \operatorname{sh} \frac{t}{2} + \operatorname{ch} \frac{t}{2}}\right), \\ U_2 f(u, \tau, \bar{\tau}) &= f\left(\frac{u \operatorname{ch} \frac{t}{2} - i \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2} + i u \operatorname{sh} \frac{t}{2}}, \frac{\tau \operatorname{ch} \frac{t}{2} + i \bar{\tau} u \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2} + i u \operatorname{sh} \frac{t}{2}}, \frac{\bar{\tau} \operatorname{ch} \frac{t}{2} - i \frac{\tau}{u} \operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2} - i \frac{1}{u} \operatorname{sh} \frac{t}{2}}\right). \end{aligned}$$

Применяя соотношение

$$Hf = -i \frac{dU_t f}{dt} \Big|_{t=0},$$

получаем

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{i}{2} \left(-(u^2 - 1) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\tau - \bar{\tau}}{u} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} + u(\bar{\tau} - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\ H_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\tau} - \tau}{u} \left(u^2 \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \right) - (u^2 + 1) \frac{\partial}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Положив $H_- = H_1 - iH_2$ и $H_+ = H_1 + iH_2$, мы выводим, что

$$H_+ = -i \left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{u} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} + \frac{\partial}{\partial u} \right), \quad H_- = iu \left((\tau - \bar{\tau}) \frac{\partial}{\partial \tau} + u \frac{\partial}{\partial u} \right), \quad H_0 = u \frac{\partial}{\partial u},$$

а соответствующая алгебра задается как

$$[H_0, H_+] = -H_+, \quad [H_0, H_-] = H_-, \quad [H_+, H_-] = 2H_0.$$

Благодарности. Г. Саввиди благодарит Спенту Вадью за указание на статью Артина [1].

Список литературы

- [1] E. Artin, “Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **3:1** (1924), 170–175.
- [2] J. Hadamard, “Les surfaces à courbures opposées et leur lignes géodésiques”, *J. Math. Pures Appl.*, **4** (1898), 27–73.
- [3] G. A. Hedlund, “The dynamics of geodesic flow”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **45:4** (1939), 241–246.
- [4] Д. В. Аносов, “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Тр. МИАН СССР*, **90** (1967), 3–210.
- [5] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, **470**, Springer, Berlin, 1975.
- [6] А. Н. Колмогоров, “Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега”, *Тр. МИАН СССР*, **169** (1985), 94–98.
- [7] А. Н. Колмогоров, “Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов”, *Докл. АН СССР*, **124:4** (1959), 754–755.
- [8] Я. Г. Синай, “О понятии энтропии динамической системы”, *Докл. АН СССР*, **124:4** (1959), 768–771.
- [9] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism. The Mathematical Structures of Classical Equilibrium Statistical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1978.
- [10] E. Hopf, “Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77:6** (1971), 863–877.
- [11] И. М. Гельфанд, С. В. Фомин, “Геодезические потоки на многообразиях постоянной отрицательной кривизны”, *УМН*, **7:1(47)** (1952), 118–137.
- [12] P. Collet, H. Epstein, G. Gallavotti, “Perturbations of geodesic flows on surface of constant negative curvature and their mixing properties”, *Commun. Math. Phys.*, **95:1** (1984), 61–112.

- [13] C. C. Moore, “Exponential decay of correlation coefficients for geodesic flows”, *Group Representations, Ergodic Theory, Operator Algebras, and Mathematical Physics*, Proceedings of a Conference in Honor of George W. Mackey (Berkeley, CA, 21–23 May, 1984), Mathematical Sciences Research Institute Publications, **6**, ed. C. C. Moore, Springer, New York, 1987, 163–181.
- [14] Н. С. Крылов, *Работы по обоснованию статистической физики*, Изд-во АН СССР, М.-Л., 1950.
- [15] E. Hopf, “Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus. II”, *Math. Ann.*, **117**:1 (1940), 590–608.
- [16] D. Dolgopyat, “On decay of correlations in Anosov flows”, *Ann. of Math.* (2), **147**:2 (1998), 357–390.
- [17] N. I. Chernov, “Markov approximations and decay of correlations for Anosov flows”, *Ann. of Math.* (2), **147**:2 (1998), 269–324.
- [18] G. K. Savvidy, “The Yang–Mills classical mechanics as a Kolmogorov K-system”, *Phys. Lett. B*, **130**:5 (1983), 303–307.
- [19] G. K. Savvidy, “Classical and quantum mechanics of non-abelian gauge fields”, *Nucl. Phys. B*, **246**:2 (1984), 302–334.
- [20] G. K. Savvidy, N. G. Ter-Arutyunyan-Savvidy, “On the Monte Carlo simulation of physical systems”, *J. Comput. Phys.*, **97**:2 (1991), 566–572.
- [21] K. G. Savvidy, “The MIXMAX random number generator”, *Comput. Phys. Commun.*, **196** (2015), 161–165.
- [22] Г. К. Саввиди, “C-системы Аносова и генераторы случайных чисел”, *ТМФ*, **188**:2 (2016), 223–243.
- [23] K. G. Savvidy, G. K. Savvidy, “Spectrum and entropy of C-systems MIXMAX random number generator”, *Chaos Solitons Fractals*, **91** (2016), 33–38, arXiv:1510.06274.
- [24] J. Maldacena, S. H. Shenker, D. Stanford, “A bound on chaos”, *JHEP*, **08** (2016), 106, 16 pp., arXiv:1503.01409.
- [25] H. Poincaré, “Théorie des groupes fuchsien”, *Acta Math.*, **1**:1 (1882), 1–62.
- [26] L. Fuchs, “Über eine Klasse von Funktionen mehrerer Variablen, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen”, *J. Reine Angew. Math.*, **89** (1880), 151–169.
- [27] C. Burstin, “Über eine spezielle Klasse reeller periodischer Funktionen”, *Monatsh. Math. Phys.*, **26**:1 (1915), 229–262.
- [28] H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig, 1910.
- [29] H. Poincaré, “Mémoire sur les fonctions fuchsiennes”, *Acta Math.*, **1** (1882), 193–294.
- [30] L. R. Ford, *An Introduction to the Theory of Automorphic Functions*, G. Bell and Sons, London, 1915.
- [31] M. Pollicott, “On the rate of mixing of Axiom A flows”, *Invent. Math.*, **81**:3 (1985), 413–426.
- [32] G. K. Savvidy, K. G. Savvidy, “Exponential decay of correlations functions in MIXMAX generator of pseudorandom numbers”, *Chaos Solitons Fractals*, **107** (2018), 244–250.

Поступила в редакцию 15.02.2018