Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, И. Т. Хабибуллин, А. Б. Шабат, Краевая задача для уравнения КдФ на полуоси, *ТМФ*, 1997, том 110, номер 1, 98–113

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf955>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:50:04

В. Э. Адлер*, И. Т. Хабибуллин*, А. Б. Шабат†

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ НА ПОЛУОСИ

Получена L - A -пара граничной задачи с краевым условием $u|_{x=0} = a$ для уравнения КДФ. Построен широкий класс точных решений этой задачи. Обсуждаются ее законы сохранения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) приспособлен для решения задачи Коши для нелинейных интегрируемых уравнений. В последнее время достигнут определенный прогресс в решении также и начально-краевых задач. В простейших случаях, пользуясь дискретной симметрией типа отражения $x \rightarrow -x$, удается свести задачу к задаче Коши, как это было сделано для уравнения sin-Гордон и нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [1–5]. Однако дискретная симметрия имеется далеко не всегда, и решение краевой задачи в общем случае остается открытой проблемой. В настоящей статье строятся алгебро-геометрические решения краевой задачи для уравнения КДФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = a. \quad (2)$$

С учетом преобразования Галилея можно сформулировать рассматриваемую задачу как проблему выделения конечнозонных решений, обладающих прямой, вдоль которой это решение постоянно. Точнее, это удастся сделать при наложении двух граничных условий вида

$$u|_{x=0} = a, \quad u_{xx}|_{x=0} = b. \quad (3)$$

Наша гипотеза (проверенная вплоть до рода 4) состоит в том, что в классе конечнозонных решений второе условие есть следствие первого.

Обсудим корректность задачи (1), (3). Существование и единственность решения для различных постановок краевой задачи для уравнения КДФ широко изучались в литературе, см., например, работы [6, 7], в которых показано, что корректные постановки для

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, adler@imat.rb.ru; ihabib@imat.rb.ru

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, shabat@itp.ac.ru

правой полуоси должны содержать два граничных условия и для левой – одно. Ситуация здесь полностью аналогична линейному случаю [8]. Тем не менее как в линейном, так и в нелинейном случае можно построить достаточно широкие классы решений граничной задачи с двумя условиями, регулярные на всей оси. Это удастся, когда дисперсионное соотношение

$$\eta = \xi^3 - 6C\xi$$

для линеаризованного уравнения КДФ имеет 3 различных вещественных корня.

Выделенность пары граничных условий (3) становится понятной в рамках симметричного подхода. В работе [9] показано, что эти граничные условия совместны с бесконечномерной подалгеброй высших симметрий уравнения КДФ (1). Совместность означает, что производная D_{t_n} связей (3) равна нулю в силу самих связей и их продолжений, полученных дифференцированием по t . Граничные условия с таким свойством естественно называть интегрируемыми. Симметричный подход к интегрируемым граничным условиям был развит в работах [10–12], и мы отсылаем к ним читателя за более точными определениями, см. также раздел 7, где он иллюстрируется на примере уравнения $\sin$ -Гордон.

То, что граничная задача (1), (3) обладает богатыми классами точных решений, неудивительно, так как их существование обусловлено совместностью с высшими симметриями. Однако существование решений, регулярных на всей оси, неочевидно, и основной результат нашей статьи состоит в выделении широких классов регулярных решений.

Конечнозонные решения представлены в разделе 3. Мы не приводим явные тэта-функциональные формулы и описываем решения в терминах уравнений Вейерштрасса–Дубровина. Оказывается, что граничные условия (3) накладывают определенное ограничение на спектральную кривую: ее род равен $n = 3m + 1$ и она является тройным накрытием некоторой другой гиперэллиптической кривой. Точнее говоря, спектральная кривая имеет вид

$$w^2 = P_{2n+1}(\lambda) = P_{2m+1}(\mu(\lambda)),$$

где $P_{2m+1}(\mu)$ – произвольный полином степени $2m + 1$, а полином $\mu(\lambda)$ определяется по граничным условиям:

$$\mu = 16\lambda^3 - 4(3a^2 - b)\lambda + 2ab - 4a^3.$$

Условия вещественности и регулярности приводят к некоторым ограничениям на параметры a и b :

$$a < 0, \quad b < \frac{9}{4}a^2 \quad \text{или} \quad a \geq 0, \quad b < 0,$$

а также на расположение концов зон.

В разделе 4 рассмотрен линейный предел полученных решений.

Солитонный предел рассмотрен в разделе 5. Мы оставляем термин “многосолитонные” для полученных решений, хотя это название не вполне строгое, так как они не являются быстроубывающими, а выходят на постоянную $C = \sqrt{a^2 - b/3}$ (см. рис. 1). Простейший пример получается из обычного 2-солитонного решения, если применить

Рис. 1. 2-солитонное решение.

к нему преобразование Галилея таким образом, чтобы больший из солитонов стал неподвижным:

$$u = \frac{2}{3}a_1^2 - 2D_x^2 \log \langle \cosh(a_2x + 4a_2(a_2^2 - a_1^2)t + \delta), \sinh(a_1x) \rangle, \quad a_2^2 < a_1^2, \quad (4)$$

$$u|_{x=0} = 2a_2^2 - \frac{4}{3}a_1^2, \quad u_{xx}|_{x=0} = 12a_2^4 - 16a_2^2a_1^2 + 4a_1^4, \quad u|_{x=\infty} = \frac{2}{3}a_1^2,$$

где $\langle f_1, \dots, f_n \rangle = \det(D_x^{j-1}(f_k))$ обозначает вронсиан функций $f_1, \dots, f_n$. Заметим, что на параметры нет никаких ограничений, т.е. для произвольного 2-солитонного решения существует прямая, вдоль которой это решение постоянно. Для многосолитонных решений амплитуды и фазы приходится подбирать специальным образом.

Построены также примеры решений, регулярных только на одной полуоси; простейшим является рациональное решение, впервые найденное Мозесом [13]

$$u = -2D_x^2 \log(x^3 - 12(t - t_0)), \quad (5)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\infty} = 0.$$

Это решение регулярно при $x \leq 0$, $t > t_0$. Отметим, что его можно построить, применяя преобразование Беклунда к тривиальному решению $u = \text{const}$. Еще несколько примеров перечислено в разделе 6, но пока мы не имеем разумного описания *всех* регулярных решений, которые можно получить при помощи преобразования Беклунда.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛАКСА ДЛЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Мы будем использовать представление высших симметрий уравнения (1) в терминах линейных задач

$$\psi_{xx} = (u - \lambda)\psi, \quad (6)$$

$$\psi_{t_{2n+1}} = g^{(n)}\psi_x - \frac{1}{2}g_x^{(n)}\psi, \quad (7)$$

где коэффициенты полинома $g^{(n)} = (-4\lambda)^n + (-4\lambda)^{n-1}g_1 + \dots + g_n$ определяются рекуррентно по формулам

$$g_1 = -2u + \text{const}, \quad g_{k+1} = L(g_k), \quad L = D_x^2 - 4u + 2D_x^{-1}u_x.$$

Условие совместности (6) и (7) есть

$$u_{t_{2n+1}} = -\frac{1}{2}D_x(g_{n+1}).$$

В частности, само уравнение КДФ (1) соответствует линейной задаче

$$\psi_t = A\psi_x - \frac{1}{2}A_x\psi, \quad A = -4\lambda - 2u. \quad (8)$$

Чтобы работать с граничными условиями на оси $x = 0$, мы должны сменить набор динамических переменных, перейдя от x - к t -производным. Исключая ψ_x в силу соотношений (8), уравнение (6) можно переписать в виде

$$\psi_{tt} = \frac{A_t}{A}\psi_t + \frac{1}{4}\left(2\frac{A_x A_t}{A^2} - 2A_{xt} - 2AA_{xx} + A_x^2 + 4(u - \lambda)A^2\right)\psi \quad (9)$$

и симметрию (7) – в виде

$$\psi_{t_{2n+1}} = \frac{g^{(n)}}{A}\psi_t - \frac{1}{2}\left(g_x^{(n)} - g^{(n)}\frac{A_x}{A}\right)\psi. \quad (10)$$

Фактически формулы (9), (10) задают представление иерархии КДФ, эквивалентное стандартной паре (6), (7).

Начиная с этого момента будем считать, что выполняются условия (3). В силу этих условий имеем при $x = 0$

$$A = -4\lambda - 2a, \quad A_{xx} = -2b, \quad A_t = 0,$$

так что (9) принимает вид

$$\psi_{tt} = (U - \mu)\psi, \quad (11)$$

где $U(t) = (u_x^2 + u_{xt})|_{x=0}$ и

$$\mu = (4\lambda + 2a)(2(\lambda - a)(2\lambda + a) + b) = 16\lambda^3 - 4(3a^2 - b)\lambda + 2ab - 4a^3. \quad (12)$$

Сравнивая (6), (7) и (11), (10), видим, что для того, чтобы поток $D_{t_{2n+1}}$ сохранял граничные условия (3), достаточно, чтобы формула (10) при $x = 0$ принимала вид

$$\psi_{t_{2n+1}} = G^{(m)}\psi_t - \frac{1}{2}G_t^{(m)}\psi, \quad (13)$$

где $G^{(m)} = (-4\mu)^m + (-4\mu)^{m-1}G_1 + \dots + G_m$. Это условие также и необходимо, так как формула (13) дает общий вид симметрии для (11). Таким образом, мы получаем важное соотношение

$$g^{(n)}(\lambda)|_{x=0} = -2(2\lambda + a)G^{(m)}(\mu). \quad (14)$$

Отсюда прежде всего видим, что

$$n = 3m + 1,$$

т.е. граничные условия (3) совместны только с “одной третьей” от всей иерархии КдФ, а именно с симметриями вида

$$u_{t_{6m+3}} = u_{6m+3} + \dots, \quad m = 1, 2, \dots$$

Отметим, что эти симметрии однородны, если и только если $3a^2 - b = 0$ [9].

3. КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ

Сначала напомним общую конструкцию. Определение n -зонного решения уравнения (1) как стационарного решения n -й высшей симметрии приводит к уравнению Лакса–Новикова

$$g_{n+1} = 0. \quad (15)$$

Эквивалентное определение на языке ψ -функций говорит, что уравнение (6) должно допускать пару решений $\psi, \bar{\psi}$ таких, что их произведение $g = \psi\bar{\psi}$ есть полином по λ степени n . Действительно, g удовлетворяет уравнению

$$2gg_{xx} - g_x^2 - 4(u - \lambda)g^2 = -w^2, \quad (16)$$

где $w = \psi\bar{\psi}_x - \psi_x\bar{\psi}$, и дифференцирование дает $D_x(L + 4\lambda)(g) = 0$. Отсюда и из (15) видим, что в качестве $g^{(n)}$ можно принять g . Соответствующий вронскиан равен

$$-w^2 = 4^{2n+1}(\lambda - e_1) \dots (\lambda - e_{2n+1}).$$

Переход к новым динамическим переменным, равным нулям g ,

$$g = g^{(n)} = (-4)^n(\lambda - r_1) \dots (\lambda - r_n),$$

приводит к уравнениям Вейерштрасса–Дубровина

$$r_{j,x} \prod_{s \neq j} (r_j - r_s) = 2 \sqrt{\prod_{s=1}^{2n+1} (e_s - r_j)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Для вещественности и регулярности решений этой системы необходимо и достаточно, чтобы все нули w^2 были вещественными и начальные значения $r_j|_{x=0}$ лежали в запрещенных зонах:

$$e_1 < e_2 \leq r_1 \leq e_3 < e_4 \leq r_2 \leq e_5 < \dots < e_{2n} \leq r_n \leq e_{2n+1}. \quad (18)$$

Формула для потенциала u также легко выводится из (16):

$$u = \sum_{s=1}^{2n+1} e_s - 2 \sum_{s=1}^n r_s. \quad (19)$$

Теперь вернемся к нашей граничной задаче. Из формулы (14) видим, что для n -зонного потенциала, удовлетворяющего граничным условиям (3), функция $g|_{x=0}$ имеет вид

$$g = -2(2\lambda + a)G^{(m)}(\mu).$$

Нормируя ψ -функции так, чтобы уничтожить множитель $-2(2\lambda + a)$, получаем решения $\Psi(t), \bar{\Psi}(t)$ задачи (11) такие, что $G = \Psi \bar{\Psi}$ является многочленом по μ :

$$G = G^{(m)}(\mu) = (-4)^m (\mu - R_1) \dots (\mu - R_m).$$

Следовательно, потенциал $U(t)$ является m -зонным. Функция G удовлетворяет уравнению

$$2GG_{tt} - G_t^2 - 4(U - \mu)G^2 = -W^2,$$

где $W = \Psi \bar{\Psi}_t - \Psi_t \bar{\Psi}$ и

$$-W^2 = 4^{2m+1} (\mu - E_1) \dots (\mu - E_{2m+1}). \quad (20)$$

Функции $R_j(t)$ удовлетворяют системе

$$R_{j,t} \prod_{s \neq j} (R_j - R_s) = 2 \sqrt{\prod_{s=1}^{2m+1} (E_s - R_j)}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (21)$$

с условиями вещественности и регулярности, аналогичными (18).

Чтобы связать вместе системы (17) и (21), используем соотношения

$$g(\lambda)|_{x=0} = -2(2\lambda + a)G(\mu), \quad (22)$$

$$w(\lambda) = W(\mu). \quad (23)$$

Рис. 2. График $\mu(\lambda)$ и соответствие между E_s, R_s и e_s, r_s ($m = 1$).

Последнее легко выводится из (8). Из (22) видим, что начальные значения для системы (17) находятся как корни уравнения

$$\mu(\lambda) = 16\lambda^3 - 4(3a^2 - b)\lambda + 2ab - 4a^3 = R_j(t), \quad j = 1, \dots, m.$$

Точнее, решая эти уравнения, мы находим $3m$ начальных значений $r_j(x = 0, t)$, и еще одно всегда равно $-a/2$. Аналогично формула (23) устанавливает соответствие между E_j и e_j .

Итак, конечнозонное решение граничной задачи (1), (3) получается в результате решения системы (17) со специальной спектральной кривой, которая является тройным накрытием спектральной кривой (20), и со специальными начальными данными, восстанавливаемыми по решению системы (21).

Чтобы удовлетворить условию вещественности, мы должны выбрать спектральную кривую (20) так, чтобы концы зон $E_1, \dots, E_m$ лежали в том интервале, где уравнение $\mu(\lambda) = E$ имеет 3 вещественных корня. Очевидно, этот интервал не пуст, если и только если полином $\mu(\lambda)$ имеет две различные вещественные точки экстремума. Это так, когда $b < 3a^2$, причем экстремальные точки равны $\pm C/2$, где C – положительное значение корня

$$C = \sqrt{a^2 - b/3}.$$

Далее, из рис. 2 легко видеть, что концы зон, соответствующие E_1 , суть e_1, e_{4m+2}, e_{4m+3} . Так как μ -зона $(-\infty, E_1]$ пуста, то зона $[e_{4m+2}, e_{4m+3}]$ должна содержать корень $r_{2m+1} = -a/2$. Но $-a/2$ является корнем многочлена $\mu(\lambda)$, и мы получаем следующие дополнительные ограничения: $E_1 \geq 0$ и $\lambda = -a/2$ не является наименьшим нулем $\mu(\lambda)$.

Более явно: можно показать, что условия вещественности и регулярности приводят к следующим ограничениям:

- 1) $a < 0$, $b < \frac{9}{4}a^2$ или $a \geq 0$, $b < 0$,
- 2) $0 \leq E_1$, $E_{2m+1} \leq 4C^3 + 2ab - 4a^3$.

Отметим, что при этом концы зон e_j все лежат в интервале $[-C, C]$.

4. ЛИНЕЙНЫЙ ПРЕДЕЛ

Как известно, предельный переход к линейному уравнению заключается в стягивании запрещенных зон. Положим

$$r_j = e_{2j} + \varepsilon \rho_j, \quad e_{2j+1} = e_{2j} + \varepsilon \delta_j,$$

где ε — малый параметр. Далее, из рис. 2 видно, что для того, чтобы пропала зона $[e_{4m+2}, e_{4m+3}]$, необходимо график $\mu(\lambda)$ сдвинуть вверх так, чтобы он касался оси абсцисс в точке $\lambda = C/2$, а E_1 устремить к 0. При этом

$$e_1 = -C = a, \quad b = 0, \quad \rho_{2m+1} = \delta_{2m+1} = 0.$$

Формула для потенциала (19) принимает вид

$$u = -C + \varepsilon v, \quad v = \sum_{j=1}^n (\delta_j - 2\rho_j).$$

На переменную v получаем линеаризованное уравнение КДФ

$$v_t = v_{xxx} + 6Cv_x, \quad (24)$$

причем граничные условия (3) переходят в однородные:

$$v|_{x=0} = 0, \quad v_{xx}|_{x=0} = 0. \quad (25)$$

Система Вейерштрасса–Дубровина (17) сводится, как легко проверить, к уравнениям

$$\rho_{j,x}^2 = -\kappa_j^2 \rho_j (\rho_j - \delta_j), \quad \kappa_j^2 = 4(e_{2j} + C),$$

или после дифференцирования

$$\rho_{j,xx} = -\kappa_j^2 \left(\rho_j - \frac{\delta_j}{2} \right).$$

Таким образом, потенциал равен сумме экспонент:

$$u = -C + \sum_{j=1}^n e^{i\kappa_j x + \gamma_j(t)},$$

причем множество показателей κ_j разбивается на тройки, состоящие из корней кубического многочлена. Действительно, полагая

$$\xi^2 = \lambda + C, \quad \eta^2 = \mu$$

и учитывая, что $\mu(\lambda) = 16 \left(\lambda - \frac{C}{2}\right)^2 (\lambda + C)$, получаем, что ξ и η связаны дисперсионным соотношением

$$\eta = 4\xi^3 - 6C\xi. \quad (26)$$

Это полностью согласуется с обычным методом разделения переменных, который дает для задачи (24), (25) решения вида

$$v = e^{-2i\eta t} \left((\xi_2^2 - \xi_3^2) e^{2i\xi_1 x} + (\xi_3^2 - \xi_1^2) e^{2i\xi_2 x} + (\xi_1^2 - \xi_2^2) e^{2i\xi_3 x} \right),$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — корни уравнения (26). Эти решения регулярны на всей оси при $|\eta| < (2C)^{3/2}$.

5. МНОГОСОЛИТОННЫЙ ПРЕДЕЛ

В солитонном пределе, наоборот, стягиваются разрешенные зоны. При этом концы соседних запрещенных зон слипаются и формула (18) превращается в

$$e_1 = e_2 \leq r_1 \leq e_3 = e_4 \leq r_2 \leq e_5 = \dots = e_{2n} \leq r_n \leq e_{2n+1}.$$

Из рис. 2 видим, что это возможно, только если E_{2m+1} есть максимум полинома $\mu(\lambda)$. При этом $E_{2m+1} = \mu(-C/2)$ и $e_{2n+1} = C$. Слипшиеся концы запрещенных зон образуют дискретные спектры соответствующих потенциалов $U(t)$ и $u(x, t)$. В отличие от обычного определения многосолитонных потенциалов, только часть этих спектров отрицательна. Чтобы получить быстроубывающие потенциалы, нужно осуществить сдвиг спектральных параметров:

$$\tilde{u} = u - C, \quad \xi^2 = \lambda - C, \quad \tilde{U} = U - \mu(C), \quad \eta^2 = \mu - \mu(C).$$

Используя (12), легко проверить, что определенные таким образом ξ и η связаны соотношением

$$\eta = -4\xi^3 - 6C\xi.$$

Теперь мы можем наложить классическое условие Баргманна (см., например, [14, 15]). Пусть волновая функция ψ оператора $-D_x^2 + u(x, t)$ есть квазиполином по ξ :

$$\psi(x, t, \xi) = e^{i\xi x - i(4\xi^3 + 6C\xi)t} \left((i\xi)^n + (i\xi)^{n-1} f_1 + \dots + f_n \right).$$

Спектр этого оператора совпадает с нулями вронскиана

$$w = \psi \bar{\psi}_x - \psi_x \bar{\psi} = -2i\xi(\xi^2 + a_1^2) \dots (\xi^2 + a_n^2), \quad 0 < a_n^2 < \dots < a_1^2.$$

При $x = 0$ имеем

$$(\psi \bar{\psi}_t - \psi_t \bar{\psi})|_{x=0} = -(4\lambda + 2a)w = -(4\xi^2 + 4C + 2a)w,$$

так что формула

$$\psi(0, t, \xi) = 2(i\xi + K)\Psi(t, \eta), \quad (27)$$

где

$$K = \sqrt{C + a/2},$$

определяет волновую функцию Ψ оператора $-D_t^2 + U(t)$. Эта функция имеет вид

$$\Psi(t, \eta) = 2^{-2m-1} e^{i\eta t} ((i\eta)^m + (i\eta)^{m-1} F_1 + \dots + F_m),$$

и ее вронскиан равен

$$W = \Psi \bar{\Psi}_t - \Psi_t \bar{\Psi} = -2^{-4m-1} i\eta (\eta^2 + A_1^2) \dots (\eta^2 + A_m^2), \quad 0 < A_m^2 < \dots < A_1^2.$$

С другой стороны, $W = -w$, и сравнение этих двух формул дает нам следующее соотношение между μ - и λ -спектрами:

$$(\xi^2 + a_1^2) \dots (\xi^2 + a_n^2) = \left(\xi^2 + \frac{3}{2}C \right) \left[\left(\xi^3 + \frac{3}{2}C\xi \right)^2 + \frac{A_1^2}{16} \right] \dots \left[\left(\xi^3 + \frac{3}{2}C\xi \right)^2 + \frac{A_m^2}{16} \right].$$

Легко видеть, что $n = 3m + 1$ и $a_{m+1}^2 = \frac{3}{2}C$. Множество остальных собственных чисел a_s^2 распадается на тройки так, что $a_j, a_{2m+2-j}, a_{2m+j+1}$ суть корни уравнения $4a^3 - 6Ca = A_j, j = 1, \dots, m$.

Коэффициенты f_s и F_s находятся из соотношений

$$D_x \log \left(\frac{\bar{\psi}}{\psi} \right) \Big|_{\xi=ia_s} = D_t \log \left(\frac{\bar{\psi}}{\psi} \right) \Big|_{\xi=ia_s} = 0, \quad D_t \log \left(\frac{\bar{\Psi}}{\Psi} \right) \Big|_{\eta=iA_s} = 0, \quad (28)$$

которые, очевидно, эквивалентны системам линейных уравнений. Решая их и используя формулу следа $u = C + 2D_x(f_1)$, получаем

$$u = C - 2D_x^2 \log \langle \cosh(y_n), \sinh(y_{n-1}), \dots \rangle,$$

где $y_s = a_s x + a_s(4a_s^2 - 6C)t + \gamma_s$. Напомним, что такое чередование $\cosh$ и $\sinh$ необходимо и достаточно для регулярности потенциала u .

Главная задача теперь — вычислить фазы γ_s , которые должны быть весьма тщательно сбалансированы, чтобы удовлетворить нашим граничным условиям. Это можно сделать, используя формулу (27), которая связывает коэффициенты F_s и $f_s|_{x=0}$:

$$\begin{aligned} (i\xi)^n + (i\xi)^{n-1} f_1(0, t) + \dots + f_n(0, t) = \\ = 2^{-2m} (i\xi + K) ((i\eta)^m + (i\eta)^{m-1} F_1(t) + \dots + F_m(t)). \end{aligned}$$

Рассмотрим для примера простейший 4-солитонный случай. Последняя формула дает

$$f_1(0, t) = K, \quad f_2(0, t) = -\frac{3}{2}C, \quad f_3(0, t) = \frac{1}{4}F_1 - \frac{3}{2}KC, \quad f_4(0, t) = \frac{1}{4}KF_1,$$

где $F_1 = -A_1 \tanh(A_1 t + \delta_1)$. Подставляя в систему (28), получаем

$$A_1 \tanh(A_1 t + \delta_1)(a_s p_s + K) = a_s(4a_s^2 - 6C)(a_s + K p_s),$$

где $p_s = \coth y_s|_{x=0}$ для $s = 1, 3$ и $p_s = \tanh y_s|_{x=0}$ для $s = 2, 4$. Отсюда γ_s можно легко найти, используя формулу сложения для гиперболического тангенса. Собирая все вместе, мы получаем следующее решение задачи (1), (3):

$$\begin{aligned} u &= C - 2D_x^2 \log \langle \cosh(y_4), \sinh(y_3), \cosh(y_2), \sinh(y_1) \rangle, \\ C &= \sqrt{a^2 - b/3}, \quad y_s = a_s x + a_s(4a_s^2 - 6C)(t - t_0) + \gamma_s, \end{aligned}$$

где собственные числа a_s и фазы γ_s определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_2^2 &= \frac{3}{2}C, \quad 4a_s^3 - 6Ca_s = A_1, \quad s = 1, 3, 4, \\ \tanh \gamma_s &= -\frac{K}{a_s}, \quad s = 1, 2, 3, \quad \tanh \gamma_4 = -\frac{a_4}{K}, \quad K = \sqrt{C + a/2}, \\ 0 &< a_4^2 < K^2 < a_3^2 < a_2^2 < a_1^2. \end{aligned}$$

Здесь t_0 и A_1 – свободные параметры, но A_1 ограничено: $|A_1| < (2C)^{3/2}$ (иначе говоря, $a_1^2 < \frac{4}{3}a_2^2$).

Качественное поведение полученных решений можно описать так (см. рис. 3). При $t \ll t_0$ меньшие солитоны (соответствующие $2m$ собственным числам $a_n^2, \dots, a_{m+2}^2$) приближаются к началу координат с левой бесконечности, в то время как m больших солитонов приближаются с правой. Солитон, отвечающий собственному числу a_{m+1}^2 , локализован около нуля и остается практически неподвижным для всех t , претерпевая лишь несущественные фазовые сдвиги. При $t \sim t_0$ солитоны взаимодействуют довольно сложным образом, а затем продолжают свое путешествие. Если смотреть только на одну полуось, то эту картину можно интерпретировать как нелинейное отражение волн от неподвижной стенки. На левой полуоси отраженные волны попарно сливаются, а на правой распадаются на пары. Это отражение упруго, так как регуляризованный интеграл энергии (ср. с разделом 7)

$$\tilde{I}_5 = \int_0^\infty (u_x^2 + 2u^3 - 2C^3) dx$$

сохраняется. Действительно,

$$D_t(\tilde{I}_5) = (2u_x u_{xxx} - u_{xx}^2 + 6u^2 u_{xx} - 12u u_x^2 - 9u^4)|_0^\infty = -9C^4 + 9a^4 - 6a^2 b + b^2 = 0.$$

6. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ РЕШЕНИЯ

Представленная многосолитонная конструкция допускает некоторые обобщения и вырождения. Например, рассмотрим 4-солитонное решение, полученное в конце предыдущего раздела, и подберем параметры таким образом, чтобы $K^2 \rightarrow a_s^2$, где $s = 3$ или 4.

Рис. 3. 4-солитонное решение.

Тогда фаза γ_s устремится к бесконечности и соответствующий солитон станет удаленным. В результате решение будет выглядеть более просто, чем на рис. 3, поскольку вза-

имодействие стационарного солитона с этим удаленным солитоном будет происходить практически независимо от двух других. Таким образом, этот предельный переход позволяет получить одновременно 2- и 3-солитонные вырождения (первое приведено во введении). По всей видимости, такие вырождения осуществимы и в общем $3m + 1$ -солитонном случае, и, следовательно, n -солитонные решения задачи (1), (3) существуют для всех n . Заметим, что аналогичные вырождения в $3m + 1$ -зонном решении невозможны, так как в этом случае фазы лежат на компактном торе.

Вырождения другого типа (по спектру) ведут к рациональным решениям. К сожалению, можно показать, что решение Мозеса (5) единственное регулярное хотя бы на одной полусоси. Комбинированные вырождения также возможны; например, следующие решения регулярны при $x \leq 0$, $t > t_0$:

$$\begin{aligned} u &= -2D_x^2 \log \langle x, \sinh(a_1 x + 4a_1^3(t - t_0)) \rangle, \\ u|_{x=0} &= 2a_1^2, \quad u_{xx}|_{x=0} = 12a_1^4, \quad u|_{x=\infty} = 0, \\ u &= \frac{2}{3}a_1^2 - 2D_x^2 \log \langle x - 4a_1^2(t - t_0), \sinh(a_1 x) \rangle, \\ u|_{x=0} &= -\frac{4}{3}a_1^2, \quad u_{xx}|_{x=0} = 4a_1^4, \quad u|_{x=\infty} = \frac{2}{3}a_1^2, \\ u &= \frac{2}{3}a_1^2 - 2D_x^2 \log \langle \sinh(a_1 x), (x + 8a_1^2(t - t_0)) \cosh(a_1 x) \rangle, \\ u|_{x=0} &= \frac{2}{3}a_1^2, \quad u_{xx}|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\infty} = \frac{2}{3}a_1^2. \end{aligned}$$

Следует отметить, что эти решения были получены двукратным применением преобразования Беклунда к постоянному решению. Конечно, это более удобный способ, чем непосредственный предельный переход в формуле (4).

Другая возможность состоит в том, чтобы допустить сингулярности (типа тригонометрического или гиперболического котангенса) у некоторых солитонов. Например, следующие модификации 2-солитонного решения также регулярны при $x \leq 0$, $t > t_0$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2}{3}a_1^2 - 2D_x^2 \log \langle \sinh(a_1 x), \sinh(a_2 x + 4a_2(a_2^2 - a_1^2)(t - t_0)) \rangle, \\ u|_{x=0} &= 2a_2^2 - \frac{4}{3}a_1^2, \quad u_{xx}|_{x=0} = 12a_2^4 - 16a_2^2 a_1^2 + 4a_1^4, \quad u|_{x=\infty} = \frac{2}{3}a_1^2, \\ u &= -\frac{2}{3}a_1^2 - 2D_x^2 \log \langle \sin(a_1 x), (x - 8a_1^2(t - t_0)) \cos(a_1 x) \rangle, \\ u|_{x=0} &= -\frac{2}{3}a_1^2, \quad u_{xx}|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\infty} = -\frac{2}{3}a_1^2. \end{aligned}$$

Наконец, упомянем совершенно элементарное решение

$$u = \frac{x}{6t + \delta}.$$

Одевание его приводит к решениям КдФ, выражающимся в терминах функции Эйри.

Подводя итог, можно сказать, что приведенные примеры показывают, что граничная задача (1), (3) допускает весьма разнообразные классы точных решений на полусоси, однако их полная классификация выходит за рамки нашей статьи.

7. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе мы применим, следуя [9], симметричный тест для классификации интегрируемых граничных условий вида

$$a(u, u_x)|_{x=0} = 0 \quad (29)$$

для уравнения sin-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0.$$

Выберем в качестве пробной симметрию

$$u_\tau = u_{\xi\xi\xi} + \frac{1}{2}u_\xi^3 - u_{\eta\eta\eta} - \frac{1}{2}u_\eta^3,$$

где ξ и η — обычные переменные светового конуса. Отметим, что для уравнения КДФ в качестве пробной симметрии берется симметрия 9-го порядка. Обозначая $v = u_x$ и переходя к динамическим переменным $u, v, u_t, v_t, u_{tt}, v_{tt}, \dots$, можно переписать симметрию в виде системы

$$\begin{aligned} u_\tau &= 8u_{ttt} + 6u_t \cos u + 3v^2 u_t + u_t^3, \\ v_\tau &= 8v_{ttt} + 6v_t \cos u + 6u_{tt} v u_t + 3v^2 v_t + 3u_t^2 v_t. \end{aligned}$$

Граничное условие (29) при этом принимает вид связи

$$a(u, v) = 0,$$

и мы требуем, чтобы ее производная D_τ была равна нулю в силу самой связи и ее продолжений, полученных дифференцированием по t . Непосредственные вычисления показывают, что возможны всего два ответа:

$$u = c_0 \quad \text{или} \quad u_x = c_1 \cos \frac{u}{2} + c_2 \sin \frac{u}{2}. \quad (30)$$

Эти два граничных условия связаны друг с другом преобразованием Беклунда. К настоящему времени соответствующие краевые задачи “погружены” в схему МОЗР [3, 11] только в случаях $c_0 = k\pi$ или $c_1 c_2 = 0$, отвечающих дискретным симметриям типа отражения. По-видимому, схема построения конечнозонных решений, предложенная в настоящей работе, применима для случая общих граничных условий (30) (ср. с [16]).

Кроме симметричного критерия известны также другие определения совместности интегрируемости с граничными условиями [17, 18]. Наиболее популярный подход, основанный на рассмотрении законов сохранения, был предложен Склиняным. Следует отметить, что задача (1), (3) проходит также и этот тест: в дополнение к “одной третьей” высших симметрий, совместных с этой задачей, она наследует также “две третьих” констант движения типа

$$I_1 = \int_0^\infty u \, dx, \quad I_5 = \int_0^\infty (u_x^2 + 2u^3) \, dx, \quad I_7 = \int_0^\infty (u_{xx}^2 - 5u^2 u_{xx} + 5u^4) \, dx, \dots$$

Естественно, эти интегралы определены только для быстроубывающих решений, однако их можно регуляризовать, чтобы работать с решениями типа (4). Для простоты мы ограничимся рассмотрением нулевых граничных условий

$$u = u_{xx} = 0, \quad x = 0; \quad u = u_x = u_{xx} = \dots = 0, \quad x = \infty. \quad (31)$$

Выписанные интегралы сохраняются в силу соотношений

$$u_{3k}|_{x=0} = u_{3k+2}|_{x=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (32)$$

где $u_n = D_x^n(u)$. Например,

$$\begin{aligned} D_t(I_1) &= (u_{xx} - 3u^2)|_0^\infty = 0, \\ D_t(I_5) &= (2u_x u_{xxx} - u_{xx}^2 + 6u^2 u_{xx} - 12u u_x^2 - 9u^4)|_0^\infty = 0 \end{aligned}$$

и т.д. Наоборот, интеграл I_3 с плотностью u^2 не годится, поскольку его производная выражается через неконтролируемую переменную $u_x|_{x=0}$:

$$D_t(I_3) = (2u u_{xx} - u_x^2 - 4u^3)|_0^\infty = u_x^2|_{x=0}.$$

Соотношения (32) следуют из однородности уравнения КдФ по отношению к весу

$$u \sim 2, \quad D_x \sim 1, \quad D_t \sim 3.$$

Действительно, пусть эти соотношения доказаны для $k = 0, \dots, m$, тогда

$$0 = D_t(u_{3m}) = u_{3m+3} + \dots, \quad 0 = D_t(u_{3m+2}) = u_{3m+5} + \dots, \quad x = 0,$$

где многоточия обозначают суммы младших членов веса $3m+5$ и $3m+7$, соответственно. Очевидно, каждый член содержит в качестве сомножителя по крайней мере одну производную порядка $3k$ или $3k+2$, $k \leq m$, и, следовательно, обращается в ноль при $x = 0$.

Далее, хорошо известно, что уравнение КдФ допускает бесконечную серию законов сохранения $D_t(\rho_{2j+1}) = D_x(\sigma_{2j+1})$ с плотностями веса $2j+2$ и потоками веса $2j+4$. Из (32) следует, что произвольный однородный полином обращается в ноль при $x = 0$, если его вес не делится на 3, так что если $2j+1 \not\equiv 0 \pmod{3}$, то

$$D_t \int_0^\infty \rho_{2j+1} dx = -\sigma_{2j+1}|_{x=0} = 0.$$

Мы доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Задача (1), (31) допускает бесконечную последовательность констант движения*

$$I_n = \int_0^\infty \rho_n dx, \quad n \not\equiv 0 \pmod{2, 3},$$

где ρ_n есть однородный полином веса $n+1$.

Работа поддержана РФФИ, гранты № 96-01-00128 и № 95-01-00755.

Список литературы

- [1] *M. J. Ablowitz, H. Segur.* J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 1054.
- [2] *A. S. Focas.* Physica D. 1989. V. 35. P. 167.
- [3] *V. O. Tarasov.* Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 435.
- [4] *И. Т. Хабибуллин.* ТМФ. 1991. Т. 86. № 1. С. 43.
- [5] *E. Corrigan, P. E. Dorey, R. H. Rietdijk, R. Sasaki.* Affine Toda field theory on a half-line: Preprint hep-th/9404108, 1994.
- [6] *An Ton Bui.* J. Diff. Eq. 1977. V. 25. № 3. P. 288.
- [7] *А. В. Фаминский.* Труды ММО. 1988. Т. 51. С. 54.
- [8] *М. Д. Рамазанов.* Мат. сб. 1964. Т. 64. № 2. С. 234.
- [9] *V. Adler, B. Gürel, M. Gürses, I. Habibullin.* Boundary conditions for integrable equations (submitted to J. Phys. A, 1996).
- [10] *I. T. Habibullin.* Phys. Lett. A. 1993. V. 178. P. 369.
- [11] *И. Т. Хабибуллин.* Мат. заметки. 1991. Т. 49. № 4. С. 130.
- [12] *B. Gürel, M. Gürses, I. Habibullin.* J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 12. P. 6809.
- [13] *H. E. Moses.* J. Math. Phys. 1976. V. 17. № 1. P. 73.
- [14] *I. Kay, H. E. Moses.* J. Appl. Phys. 1956. V. 27. № 12. P. 1503.
- [15] *А. Б. Шабат.* Динамика сплошной среды. 1970. Т. 5. С. 130.
- [16] *Р. Ф. Бикбаев, В. О. Тарасов.* Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. № 4. С. 78.
- [17] *Е. К. Склянин.* Функ. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. С. 86.
- [18] *S. Ghoshal, A. B. Zamolodchikov.* Boundary state and boundary S -matrix in two-dimensional integrable field theory: Preprint RU-93-20, hep-th/9306002, 1993.

Поступила в редакцию 1.VIII.1996 г.

V. E. Adler, I. T. Habibullin, A. B. Shabat
BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR
THE KDV EQUATION ON A HALF-LINE

The L - A pair corresponding the boundary condition $u|_{x=0} = a$ for the KdV equation is represented. A large class of exact solutions of this equation is constructed, obeying the boundary condition. Conservation laws of the boundary value problem are discussed.