Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Валиневич, Построение базиса Гельфанда–Цетлина для представлений основной унитарной серии алгебры $sl_n(\mathbb{C})$, *ТМФ*, 2019, том 198, номер 1, 162–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:00:34

© 2019 г.

П. А. Валиневич*

ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ГЕЛЬФАНДА–ЦЕТЛИНА ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОСНОВНОЙ УНИТАРНОЙ СЕРИИ АЛГЕБРЫ $sl_n(\mathbb{C})$

Рассматриваются бесконечномерные представления основной унитарной серии алгебры $sl_n(\mathbb{C})$, реализованные на пространстве функций $n(n-1)/2$ комплексных переменных. Для таких представлений элементы базиса Гельфанда–Цетлина определяются как собственные функции определенной системы квантовых миноров; параметры этих функций, в отличие от конечномерного случая, принимают непрерывный ряд значений. Получены явные формулы, позволяющие строить эти функции рекуррентным образом по рангу алгебры n . Основными элементами конструкции являются операторы, сплетающие эквивалентные представления, а также групповой оператор специального вида. Работа рекуррентных формул продемонстрирована для случая малых рангов.

Ключевые слова: базис Гельфанда–Цетлина, сплетающие операторы, основная унитарная серия представлений.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9551>

Памяти Л.Д. Фаддеева

1. ВВЕДЕНИЕ

Введенный в 1950 г. Гельфандом и Цетлиным [1] базис неприводимых представлений алгебры gl_n , впоследствии названный базисом Гельфанда–Цетлина, к настоящему времени стал классической конструкцией в теории представлений. Базис Гельфанда–Цетлина оказывается удобным при решении как чисто математических задач [2], так и задач математической физики [3]. Впоследствии было разработано большое число методов (см., например, [4]), которые позволяют строить базисные векторы, но все эти методы опираются на существование старшего (младшего) вектора в представлении.

Однако существуют бесконечномерные представления – представления основной унитарной серии [5], которые таких векторов не содержат. Кроме того, для этих

Работа поддержана грантом РНФ № 14-11-00598.

* Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: valinevich@pdmi.ras.ru

представлений элементы схем Гельфанда–Цетлина, нумерующих базисные векторы, перестают быть целыми числами. Это делает неприменимыми существующие методы построения базиса для таких представлений. В ряде работ [6]–[8] рассматривались свойства операторов, действующих на пространстве схем, но явных формул для элементов базиса получено не было.

Представления основной унитарной серии $gl_n(\mathbb{C})$ реализованы на пространстве квадратично-интегрируемых функций $n(n-1)/2$ комплексных переменных, а генераторы алгебры являются дифференциальными операторами первого порядка по производным. Задача нахождения функций базиса Гельфанда–Цетлина в этом случае может быть сформулирована как задача нахождения собственных функций для системы коммутирующих операторов – квантовых миноров [9].

В настоящей работе предложена рекуррентная процедура (по рангу алгебры n) построения функций базиса Гельфанда–Цетлина. Основную роль играет эквивалентность некоторых из представлений, которая теряется при переходе к конечномерному случаю. Базисная функция для алгебры sl_n строится путем применения к функции для sl_{n-1} определенного оператора, принадлежащего представлению группы (оператора циклической перестановки индексов, см. раздел 4), а также произведения операторов, сплетающих эквивалентные представления.

Работа имеет следующую структуру. Разделы 2, 3 носят в основном вводный характер. В разделе 2 определяются представления основной унитарной серии группы $SL(n, \mathbb{C})$ и сплетающие операторы для эквивалентных представлений. Раздел 3 посвящен определению базиса Гельфанда–Цетлина для конечномерных представлений алгебры $sl_n(\mathbb{C})$. Обобщение этого понятия на случай бесконечномерных представлений основной серии и сама рекуррентная процедура, позволяющая строить функции базиса, изложена в разделе 4. Раздел 5 посвящен применению этой процедуры к алгебрам малых рангов $sl_2(\mathbb{C})$ и $sl_3(\mathbb{C})$.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОСНОВНОЙ УНИТАРНОЙ СЕРИИ ГРУППЫ $SL(n, \mathbb{C})$

2.1. Определение. Представления основной унитарной серии группы $SL(n, \mathbb{C})$ являются бесконечномерными неприводимыми унитарными представлениями [5], которые строятся следующим образом.

Почти любая матрица $g \in GL(n, \mathbb{C})$ может быть представлена в виде произведения верхнетреугольной и нижнетреугольной матриц:

$$g = zh = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ z_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}.$$

Это представление определяется на пространстве функций $\Phi(z)$, т.е. функций от $n(n-1)/2$ комплексных переменных z_{ij} , $1 \leq j < i \leq n$. Функции не предполагаются голоморфными, они могут зависеть также от $\bar{z}_{ij}$. Скалярное произведение задается формулой

$$(\Phi(z), \Psi(z)) = \int \prod_{i>j} dz_{ij} d\bar{z}_{ij} \Phi(z) \overline{\Psi(z)}, \quad (1)$$

где интегрирование ведется по всей комплексной плоскости для каждой из переменных z_{ij} . Пространством представлений основной серии является пространство функций с конечной нормой, задаваемой формулой (1), т. е. $L_2(\mathbb{C}^{n(n-1)/2})$.

Обозначим через $T^\sigma(g)$, $g \in GL(n, \mathbb{C})$, оператор представления, индуцированного одномерным представлением $\alpha^\sigma(h)$ подгруппы верхнетреугольных матриц; $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n; \bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n)$ – набор параметров, характеризующих представление. Эти параметры не являются независимыми (см. ниже).

Действие $T^\sigma(g)$ на $L_2(\mathbb{C}^{n(n-1)/2})$ задается формулой

$$T^\sigma(g)\Phi(z) = \alpha^\sigma(h^{-1})\Phi(z'), \quad (2)$$

где нижнетреугольная матрица z' и верхнетреугольная матрица h определяются из условия

$$g^{-1}z = z'h,$$

а $\alpha^\sigma(h^{-1})$ дается выражением

$$\alpha(h^{-1}) = [h_{11}]^{\sigma_1+1} [h_{22}]^{\sigma_2+2} \dots [h_{nn}]^{\sigma_n+n}. \quad (3)$$

В последней формуле введено обозначение $[h_{ii}]^{\sigma_i+i} = h_{ii}^{\sigma_i+i} \bar{h}_{ii}^{\bar{\sigma}_i+i}$, которое будет использоваться в дальнейшем, так как позволяет значительно сократить запись формул. Для группы $SL(n, \mathbb{C})$ условие $\det g = 1$ налагает на параметры дополнительную связь

$$\sum_{k=1}^n \sigma_k = \frac{1}{2}n(n-1). \quad (4)$$

Условие однозначности функции α и унитарности представления приводит к следующей параметризации для σ_k [10]:

$$\sigma_k = -\frac{n_k}{2} + i\lambda_k, \quad \bar{\sigma}_k = \frac{n_k}{2} + i\lambda_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad n_k \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

т. е. каждое представление характеризуется набором из n вещественных и n целых чисел с дополнительным условием (4).

2.2. Генераторы алгебры Ли $sl_n(\mathbb{C})$. В фундаментальном представлении алгебры Ли $gl_n(\mathbb{C})$ генераторами являются стандартные матричные единицы e_{ik} ,

$$(e_{ik})_{jm} = \delta_{ij}\delta_{km}, \quad (6)$$

коммутационные соотношения для которых имеют вид

$$[e_{ik}, e_{jl}] = \delta_{kj}e_{il} - \delta_{il}e_{jk}. \quad (7)$$

В представлении T^σ генераторы алгебры Ли являются дифференциальными операторами первого порядка по переменным z_{ik} , $1 \leq k < i \leq n$. Они определяются как линейные члены при разложении близкого к единице элемента $g = \mathbb{1} + \varepsilon e_{ik}$ в ряд по малому параметру ε :

$$T(g)\Phi(z) = \Phi(z) + (\varepsilon E_{ik} + \bar{\varepsilon} \bar{E}_{ik})\Phi(z) + O(\varepsilon^2), \quad (8)$$

где действие оператора $T(g)$ задается формулой (2). Наряду с генераторами E_{ij} , которые в дальнейшем будут называться голоморфными, возникают антиголоморфные генераторы $\bar{E}_{ij}$. Первые содержат только голоморфные переменные z_{ij} и производные по ним $\partial_{ij} \equiv \partial/\partial z_{ij}$, вторые – только антиголоморфные переменные $\bar{z}_{ij}$ и производные по ним $\bar{\partial}_{ij} = \partial/\partial \bar{z}_{ij}$. Эти генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[E_{ik}, E_{jl}] = \delta_{kj} E_{il} - \delta_{il} E_{jk}, \quad [\bar{E}_{ik}, \bar{E}_{jl}] = \delta_{kj} \bar{E}_{il} - \delta_{il} \bar{E}_{jk}, \quad [E_{ij}, \bar{E}_{kl}] = 0. \quad (9)$$

Для алгебры $sl_n(\mathbb{C})$ должно выполняться дополнительное условие

$$E_{11} + \dots + E_{nn} = 0, \quad \bar{E}_{11} + \dots + \bar{E}_{nn} = 0. \quad (10)$$

Связь между голоморфными и антиголоморфными генераторами обеспечивает операция сопряжения: $(E_{ij})^+ = -\bar{E}_{ij}$.

Существуют рекуррентные формулы [11], связывающие генераторы E_{ij} алгебры $sl_n(\mathbb{C})$, действующие на пространстве функций переменных z_{ij} , $1 \leq j < i \leq n$, и генераторы $\mathcal{E}_{ij}$ алгебры $sl_{n-1}(\mathbb{C})$, действующие на пространстве функций от z_{kl} , $2 \leq l < k \leq n$:

$$E_{11} = -\sigma_1 + n - 1 + \sum_{k=2}^n z_{k1} \partial_{k1}, \quad (11)$$

$$E_{i1} = -\partial_{i1}, \quad (12)$$

$$E_{ij} = \mathcal{E}_{i-1, j-1} - z_{j1} \partial_{i1}, \quad (13)$$

$$E_{1j} = z_{j1} \left(-\sigma_1 + n - 1 + \sum_{k=2}^n z_{k1} \partial_{k1} \right) - \sum_{k=2}^n z_{k1} \mathcal{E}_{k-1, j-1}, \quad (14)$$

где индексы i, j принимают значения $i, j = 2, \dots, n$.

2.3. Эквивалентные представления и сплетающие операторы. Два представления T^σ и $T^{\sigma'}$ унитарно эквивалентны тогда и только тогда [5], когда существует перестановка s , переводящая числа σ_k в σ'_k : $s\sigma = \sigma'$. Это означает, что для каждого $s \in \mathbb{S}_n$ существует сплетающий оператор S ,

$$S T^\sigma S^{-1} = T^{s\sigma}, \quad (15)$$

осуществляющий унитарную эквивалентность представлений. Все сплетающие операторы могут быть построены из $n - 1$ базисных операторов S_i , сплетающих представления T^σ и T^{σ_i} :

$$S_i T^\sigma = T^{\sigma_i} S_i, \quad (16)$$

где $\sigma_i = s_i \sigma$, т. е. σ_i получается из σ перестановкой двух ближайших соседей

$$s_i(\dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots) = (\dots, \sigma_{i+1}, \sigma_i, \dots), \quad s_i(\dots, \bar{\sigma}_i, \bar{\sigma}_{i+1}, \dots) = (\dots, \bar{\sigma}_{i+1}, \bar{\sigma}_i, \dots).$$

Известны различные представления для сплетающих операторов [5], [10], для дальнейшего нам понадобится следующая явная формула для них:

$$S_i = [D_i]^{\sigma_i - \sigma_{i+1}} \equiv D_i^{\sigma_i - \sigma_{i+1}} \bar{D}_i^{\bar{\sigma}_i - \bar{\sigma}_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad (17)$$

где операторы D_i являются дифференциальными операторами первого порядка по производным:

$$D_i = \partial_{i+1,i} + \sum_{j=i+2}^n z_{j,i+1} \partial_{ji}, \quad \bar{D}_i = \bar{\partial}_{i+1,i} + \sum_{j=i+2}^n \bar{z}_{j,i+1} \bar{\partial}_{ji}. \quad (18)$$

Формула (17) имеет место для целых значений разностей $\sigma_k - \sigma_{k+1}$. Если разность не целая, то операторы доопределяются с использованием представления для оператора дробного дифференцирования $[\partial_z]^\alpha \equiv \partial_z^\alpha \bar{\partial}_z^{\bar{\alpha}}$:

$$[\partial_z]^\alpha f(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi\Gamma(-\bar{\alpha})} \int d^2 z' \frac{f(z')}{[z - z']^{\alpha+1}}. \quad (19)$$

Тогда с помощью замены переменной получаем выражение для действия $[D_i]^\alpha$ на функции, зависящие от набора переменных $\{z_{kl}\}$:

$$[D_i]^\alpha f(\{z_{kl}\}) = \int d^2 z' \frac{f(z_{kl} + \delta_{kj} \delta_{il} z_{j,i+1}(z' - z_{i+1,i}))}{[z_{i+1,i} - z']^{\alpha+1}}. \quad (20)$$

3. БАЗИС ГЕЛЬФАНДА–ЦЕТЛИНА И КВАНТОВЫЕ МИНОРЫ

Для конечномерных представлений $gl(n, \mathbb{C})$ Гельфандом и Цетлиным в работе [1] был предложен способ параметризации базисных векторов представления Φ_Λ схемами Λ вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{n1} & & \lambda_{n2} & & \cdots & & \cdots & & \lambda_{nn} \\ & \lambda_{n-1,1} & & \lambda_{n-1,2} & & \cdots & & \lambda_{n-1,n-1} & \\ & & \ddots & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_{21} & & \lambda_{22} & & & \\ & & & & \lambda_{11} & & & & \end{pmatrix}, \quad (21)$$

в которых целые числа λ_{ij} удовлетворяют условию

$$\lambda_{i+1,j} \geq \lambda_{ij} \geq \lambda_{i+1,j+1}, \quad (22)$$

а $\lambda_{n1} \geq \cdots \geq \lambda_{nn}$ – параметры представления. Действие генераторов в этом базисе дается формулами

$$\begin{aligned} E_{kk} \Phi_\Lambda &= \left(\sum_{i=1}^k \lambda_{ki} - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{k-1,i} \right) \Phi_\Lambda, \\ E_{k+1,k} \Phi_\Lambda &= \sum_{i=1}^k \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (\lambda_{ki} - \lambda_{k-1,j} - i + j)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_{ki} - \lambda_{kj} - i + j)} \Phi_{\Lambda - \delta_{ki}}, \\ E_{k,k+1} \Phi_\Lambda &= - \sum_{i=1}^k \frac{\prod_{j=1}^{k+1} (\lambda_{ki} - \lambda_{k+1,j} - i + j)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_{ki} - \lambda_{kj} - i + j)} \Phi_{\Lambda + \delta_{ki}}, \end{aligned}$$

где схема $\Lambda \pm \delta_{ki}$ отличается от Λ заменой элемента λ_{ki} на $\lambda_{ki} \pm 1$.

В работах [9], [13] для построения Φ_Λ были использованы квантовые миноры, естественным образом возникающие в теории янгианов.

Введем $(n \times n)$ -матрицу

$$L(u) = u\mathbb{1} + \sum_{i,j=1}^n e_{ij}E_{ji}, \quad (23)$$

составленную из генераторов и зависящую от произвольного параметра u (спектрального параметра). Ее матричные элементы обозначим $L_j^i(u) = u\delta_{ij} + E_{ji}$. Квантовый минор матрицы $L(u)$, составленный из элементов, стоящих на пересечении строк $i_1, \dots, i_m$ и столбцов $j_1, \dots, j_m$, определяется как

$$L_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(u) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{sgn } \sigma} L_{\sigma(j_1)}^{i_1}(u) L_{\sigma(j_2)}^{i_2}(u-1) \dots L_{\sigma(j_m)}^{i_m}(u-m+1). \quad (24)$$

Выделенную роль играет семейство

$$A_m(u) = L_{12 \dots m}^{12 \dots m}(u) \quad (25)$$

коммутирующих операторов [14]:

$$[A_m(u), A_l(v)] = 0, \quad 1 \leq m, l \leq n. \quad (26)$$

В работе [9] было показано, что Φ_Λ являются собственными векторами семейства A_m :

$$A_m(u)\Phi_\Lambda = \prod_{k=1}^m (u + \lambda_{mk} - k + 1)\Phi_\Lambda. \quad (27)$$

Для построения Φ_Λ существуют различные алгебраические методы [4]. В каждом из них Φ_Λ строится путем последовательного применения определенных операторов (элементов алгебры Микельсона, квантовых миноров и др.) к младшему или старшему вектору представления.

Однако представления основной серии не имеют старшего или младшего вектора. Кроме того, для них необходимо рассматривать обобщенные схемы Гельфанда–Цетлина [6], [7], элементы которых являются произвольными комплексными числами, удовлетворяющими параметризации (5), условие (22) для которых теряет смысл.

Миноры $A_m(u)$ в этом случае являются дифференциальными операторами m -го порядка по переменным z_{kl} , а базисные векторы Φ_Λ – функциями $\Phi_\Lambda(z)$.

В следующем разделе мы изложим метод, позволяющий построить функции Φ_Λ , являющиеся собственными для A_m .

4. БАЗИС ГЕЛЬФАНДА–ЦЕТЛИНА ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОСНОВНОЙ УНИТАРНОЙ СЕРИИ

4.1. Основные элементы конструкции. Из явного вида генераторов (11)–(14) можно получить, что в матричные элементы $L(u)$ спектральный параметр u и σ_i входят только в комбинациях $u_i = u - \sigma_i$. Поэтому, обозначая зависимость от параметров представления, будем писать $L(\vec{u}) \equiv L(u_1, u_2, \dots, u_n)$. В таких обозначениях определение сплетающих операторов (16) имеет вид

$$S_i(u_{i+1} - u_i)L(u_1, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) = L(u_1, \dots, u_{i+1}, u_i, \dots, u_n)S_i(u_{i+1} - u_i), \quad (28)$$

где в соответствии с (17) $S_i(u_{i+1} - u_i) = [D_i]^{u_{i+1} - u_i}$, а D_i даются формулой (18). Так как сплетающие операторы зависят только от разности параметров, то при замене $u_i \rightarrow u_i - 1$ в (28) аргумент S_i не поменяется. Это приводит к соотношению сплетения для миноров, в частности

$$\begin{aligned} S_i(u_{i+1} - u_i) A_m(u_1, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) = \\ = A_m(u_1, \dots, u_{i+1}, u_i, \dots, u_n) S_i(u_{i+1} - u_i), \quad m = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (29)$$

Квантовый минор A_n является квантовым детерминантом $L(u)$ и для представлений основной серии тождественно равен константе:

$$A_n(u) = u_1 u_2 \dots u_n, \quad (30)$$

т. е. находить семейство собственных функций нужно только для $m = 1, \dots, n - 1$.

Для дальнейшего удобнее переопределить понятие схемы Гельфанда–Цетлина и считать, что

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & \dots & u_n \\ & v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \dots & v_{n-1,n-1} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & v_{21} & v_{22} \\ & & & & v_{11} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

а соответствующая схеме функция $\Phi_\Lambda(z)$ является собственной для A_m :

$$A_m(u) \Phi_\Lambda(z) = v_{m1} v_{m2} \dots v_{mm} \Phi_\Lambda(z), \quad (32)$$

где каждый из параметров v_{ij} линеен по u :

$$v_{ij} = u + l_{ij}. \quad (33)$$

Первая строка состоит из параметров представления в силу (30). При таком определении Φ_Λ будет симметрично при перестановке параметров l_{kl} и $l_{kl'}$ из одной строки схемы.

Для антиголоморфных генераторов аналогичным образом определяются матрица

$$\bar{L}(\bar{u}) = \bar{u} \mathbb{1} + \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \bar{E}_{ji},$$

зависящая от комплексно-сопряженного спектрального параметра $\bar{u}$, и ее квантовые миноры $\bar{A}_m$. Функция Φ_Λ должна быть собственной и для них:

$$\bar{A}_m(\bar{u}) \Phi_\Lambda(z) = \bar{v}_{m1} \times \dots \times \bar{v}_{mm} \Phi_\Lambda(z), \quad (34)$$

где собственные значения $\bar{v}_{ij} = \bar{u} + \bar{l}_{ij}$ линейны по $\bar{u}$. Так как $\bar{A}_m(\bar{u}) = (A_m(u))^+$, то для элементов схемы получаем параметризацию, аналогичную (5):

$$l_{ij} = -\frac{n_{ij}}{2} + i\lambda_{ij}, \quad \bar{l}_{ij} = \frac{n_{ij}}{2} + i\lambda_{ij}, \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{R}, \quad n_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Ниже мы не будем выписывать явно формулы для антиголоморфной части генераторов, так как они полностью повторяют формулы для голоморфной.

Для построения функций Φ_Λ нам потребуется оператор $C(\vec{u})$, осуществляющий циклическую перестановку индексов в $L_j^i(\vec{u})$:

$$L_j^i(\vec{u})C(\vec{u}) = C(\vec{u})L_{j+1}^{i+1}(\vec{u}), \quad n+1 \equiv 1. \quad (35)$$

Он строится из следующих соображений. Прямым вычислением можно проверить матричное соотношение

$$(e_{ij} + E_{ij}\mathbb{1}_n)L(u) = L(u)(e_{ij} + E_{ij}\mathbb{1}_n), \quad (36)$$

что означает $sl_n(\mathbb{C})$ -инвариантность $L(u)$ как оператора, действующего в тензорном произведении фундаментального представления и представления T^σ . Отсюда следует его инвариантность и относительно глобальных $SL(n, \mathbb{C})$ преобразований:

$$(T^\sigma(g) \otimes g)L(u) = L(u)(T^\sigma(g) \otimes g), \quad (37)$$

и, значит,

$$gL(u)g^{-1} = (T^\sigma(g))^{-1}L(u)T^\sigma(g), \quad (38)$$

т. е. любое матричное преобразование $L(u)$ вида $gL(u)g^{-1}$ может быть записано как преобразование, действующее в пространстве представления T^σ . Для

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

имеем $(cL(u))_j^i = (L(u)c)_{j+1}^{i+1}$, а значит, выполнено равенство (35) с $C(\vec{u}) = T^\sigma(c^{-1})$.

Матричные элементы $L_j^i(u)$ согласно (11)–(14) зависят только от части параметров $\{u_k\}$, а именно

$$L_j^i(u) = L_j^i(u_j, \dots, u_i), \quad i \geq j, \quad (40)$$

и при $i < j$ элементы L_j^i не зависят от параметров представления. Это означает, что $A_m(u) = A_m(u_1, \dots, u_m)$.

Для $m = 1, \dots, n-1$ ни один из операторов A_m не будет зависеть от u_n в силу (40). Это можно записать как

$$A_m(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) = A_m(u_1, \dots, u_{n-1}, v)$$

для произвольного v . Если v линеен по спектральному параметру ($v = u - l$), тогда

$$A_m(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)S_{n-1}(u_{n-1} - v) = S_{n-1}(u_{n-1} - v)A_m(u_1, \dots, v, \tilde{v}) \quad (41)$$

для всех $m = 1, \dots, n-1$. Таким образом, в оператор A_m удастся внести новый параметр v , который занимает место u_{n-1} . С помощью других сплетающих операторов этот параметр можно перенести на место любого из u_i . Это позволяет полу-

читать соотношение сплетения между семейством операторов $A_m(\vec{u}) = A_m(u_1, \dots, u_m)$ и $A_m(v) = A_m(v_1, \dots, v_n)$, зависящих от произвольных $v_i = u - l_i$:

$$A_m(\vec{u})W(\vec{u}, \vec{v}) = W(\vec{u}, \vec{v})A_m(\vec{v}), \quad (42)$$

где оператор W имеет вид

$$\begin{aligned} W(\vec{u}, \vec{v}) = & [S_{n-1}(u_{n-1} - v_1)S_{n-2}(u_{n-2} - v_1) \dots S_1(u_1 - v_1)] \times \\ & \times [S_{n-1}(u_{n-2} - v_2)S_{n-2}(u_{n-3} - v_2) \dots S_2(u_1 - v_2)] \times \dots \\ & \dots \times [S_{n-1}(u_2 - v_{n-2})S_{n-2}(u_1 - v_{n-2})] \times [S_{n-1}(u_1 - v_{n-1})]. \end{aligned} \quad (43)$$

Из (42) следует, что если Φ – собственная функция $A(\vec{v})$, то $W(\vec{u}, \vec{v})\Phi$ – собственная функция $A(\vec{u})$. Тогда если известна *частная* собственная функция $\Phi(\vec{u})$ для $A_m(\vec{u})$ с собственными значениями, зависящими от $\vec{u}$, то собственная функция *общего вида* с произвольными собственными значениями будет иметь вид $W(\vec{u}, \vec{v})\Phi(\vec{v})$.

В п. 4.2 мы опишем рекуррентную процедуру, которая позволяет построить частную собственную функцию.

4.2. Рекуррентная процедура. Пусть набор параметров $\vec{v}$ в (42) имеет вид

$$\vec{v} = (u_1, v_{n-1,1}, \dots, v_{n-1,n-1}), \quad (44)$$

т. е. параметр u_1 не подвергается замене, а для новых параметров введены обозначения $v_{n-1,k}$, удобство которых станет ясно из дальнейшего.

Рассмотрим функцию

$$\Psi = C(\vec{v})\Phi(z'), \quad (45)$$

где z' – правый нижний $((n-1) \times (n-1))$ -блок матрицы z :

$$z = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ z_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ z_{n1} & & z' & \end{array} \right), \quad (46)$$

а $C(\vec{v})$ – оператор циклической перестановки индексов (35). Тогда

$$A_m(\vec{v})\Psi = C(\vec{v})L_{2 \dots mm+1}^{2 \dots mm+1}(\vec{v})\Phi(z'). \quad (47)$$

Поскольку $\Phi(z')$ не зависит от z_{k1} , то согласно (13) $L_j^i(u)\Phi(z') = (u\delta_{ij} + \mathcal{E}_{j-1,i-1})\Phi(z')$ для $2 \leq i, j \leq n$. Это значит, что на функциях, зависящих только от z' , действие $L_{2 \dots n}^{2 \dots n}(\vec{v})$ превращается в действие минора A_m , построенного из генераторов $\mathcal{E}_{ij}$ алгебры $sl_{n-1}(\mathbb{C})$. Обозначим эти миноры a_m ; они зависят только от $n-1$ параметров $\vec{v}' = (v_{n-1,1}, \dots, v_{n-1,n-1})$. Последний из них, a_{n-1} , совпадает с квантовым детерминантом для $sl_{n-1}(\mathbb{C})$ и равен тождественно константе:

$$a_{n-1}(\vec{v}') = v_{n-1,1} \times \dots \times v_{n-1,n-1}. \quad (48)$$

Таким образом, мы получили, что

$$A_m(\vec{v})\Psi = C(\vec{v})a_m(\vec{v}')\Phi(z'), \quad (49)$$

т. е. функция (45) будет собственной для $A_m(\vec{v})$, если $\Phi(z')$ – собственная функция для семейства a_m , $m = 1, \dots, n-2$.

Все приведенные выше рассуждения можно сформулировать следующим образом: если известна функция базиса Гельфанда–Цетлина $\Phi_{\Lambda'}(z')$ для алгебры $sl_{n-1}(\mathbb{C})$, соответствующая схеме

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} v_{n-1,1} & \cdots & \cdots & v_{n-1,n} \\ & \ddots & & \\ & & v_{11} & \end{pmatrix}, \quad (50)$$

то функция $\Phi_{\Lambda_0}(z) = C(\vec{v}')\Phi_{\Lambda'}(z')$ является функцией, принадлежащей базису Гельфанда–Цетлина для $sl_n(\mathbb{C})$ со схемой специального вида

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \cdots & v_{n-1,n-1} & v_{nn} \\ & v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \cdots & v_{n-1,n-1} \\ & & \ddots & & \\ & & & v_{21} & v_{22} \\ & & & & v_{11} \end{pmatrix} \quad (51)$$

(элемент v_{nn} в схеме может быть произвольным, функция от него не зависит). Функцией, соответствующей схеме общего вида (31), будет

$$\Phi_{\Lambda}(z) = W(\vec{u}, \vec{v})C(\vec{v})\Phi_{\Lambda'}(z'). \quad (52)$$

Таким образом, функции базиса Гельфанда–Цетлина в рамках такого подхода строятся рекуррентно по рангу алгебры n . В следующем разделе мы продемонстрируем несколько первых шагов такой процедуры.

5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

5.1. Случай $sl_2(\mathbb{C})$. Генераторы представлений основной унитарной серии $sl_2(\mathbb{C})$ действуют на пространстве функций одной переменной z_{21} , и параметрами представления является пара чисел u_1, u_2 . Единственным нетривиальным минором, принадлежащим семейству A_m , является $A_1(u_1, u_2) = u_1 + 1 + z_{21}\partial_{21}$, а $A_2(u_1, u_2) = u_1u_2$ (см. (30)). Базисные функции должны удовлетворять уравнению

$$A_1(u_1, u_2)\Phi_{\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ v_{11} \end{smallmatrix}\right)}(z_{21}) = v_{11}\Phi_{\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ v_{11} \end{smallmatrix}\right)}\Phi(z_{21}) \quad (53)$$

(и аналогичному уравнению для антиголоморфной части). Их решение легко найти: $\Phi_{\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ v_{11} \end{smallmatrix}\right)}(z_{21}) = [z_{21}]^{v_{11}-u_1-1}$. Оно не зависит от u_2 , как и должно быть из общих соображений.

Это решение можно получить и с помощью формулы (52). В ней $\vec{v} = (u_1, v_{11})$, и, значит, $W(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 1$. Собственная функция для алгебры меньшего ранга $\Phi \equiv 1$. Оператор циклической перестановки индексов $C(\vec{u}) = C(u_1, u_2)$ имеет вид

$$C(u_1, u_2)f(z_{21}) = [z_{21}]^{u_2-u_1-1}f\left(\frac{1}{z_{21}}\right).$$

Таким образом, формула (52) дает

$$\Phi\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ v_{11} & \end{smallmatrix}\right)(z_{21}) = C(u_1, v_{11}) \cdot 1 = [z_{21}]^{v_{11}-u_1-1},$$

что совпадает с решением, полученным непосредственно.

5.2. Случай $sl_3(\mathbb{C})$. Пространством представления является пространство функций трех переменных $f(z) = f(z_{21}, z_{31}, z_{32})$. Представления подалгебры $sl_2(\mathbb{C})$ в рамках рекуррентной конструкции действуют на пространстве функций $f(z') = f(z_{32})$.

Квантовые миноры A_1 и A_2 зависят от трех параметров представления u_1, u_2, u_3 , и собственные функции $\Phi_\Lambda(z)$, которые требуется определить, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} A_1(u_1, u_2, u_3)\Phi\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_{21} & v_{22} \\ v_{11} & \end{smallmatrix}\right)(z_{21}, z_{31}, z_{32}) &= v_{11}\Phi\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_{21} & v_{22} \\ v_{11} & \end{smallmatrix}\right)(z_{21}, z_{31}, z_{32}), \\ A_2(u_1, u_2, u_3)\Phi\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_{21} & v_{22} \\ v_{11} & \end{smallmatrix}\right)(z_{21}, z_{31}, z_{32}) &= v_{21}v_{22}\Phi\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_{21} & v_{22} \\ v_{11} & \end{smallmatrix}\right)(z_{21}, z_{31}, z_{32}), \end{aligned}$$

а $A_3(u_1, u_2, u_3) \equiv u_1u_2u_3$. В этом случае оператор $W(\vec{u}, \vec{v}) = S_2(u_2 - v_{21})$, так как

$$A_m(u_1, u_2, u_3)S_2(u_2 - v_{21}) = S_2(u_2 - v_{21})A_m(u_1, v_{21}, v_{22}), \quad i = 1, 2, \quad (54)$$

где $S_2(u_2 - v_{21}) = [\partial_{32}]^{u_2-v_{21}}$ (см. (17), (18)).

Оператор циклической перестановки индексов (35) имеет вид

$$C(u_1, u_2, u_3)f(z_{21}, z_{31}, z_{32}) = [z_{31}]^{u_2-u_1-1}[z_{32}]^{u_3-u_2-1}f\left(\frac{1}{z_{31}}, \frac{z_{21}}{z_{31}}, z_{21} - \frac{z_{31}}{z_{32}}\right). \quad (55)$$

Тогда формула (52) дает

$$\Phi\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_{21} & v_{22} \\ v_{11} & \end{smallmatrix}\right)(z_{21}, z_{31}, z_{32}) = S_2(u_2 - v_{21})C(u_1, v_{21}, v_{22})\Phi\left(\begin{smallmatrix} v_{21} & v_{22} \\ v_{11} & \end{smallmatrix}\right)(z_{32}). \quad (56)$$

В явном виде без учета нормировки имеем

$$\Phi\left(\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_{21} & v_{22} \\ v_{11} & \end{smallmatrix}\right)(z_{21}, z_{31}, z_{32}) \sim [z_{31}]^{v_{21}-u_1-1} \int d^2z' \frac{[z']^{v_{22}-v_{11}}[z' - z_{32}]^{v_{21}-u_2-1}}{[z'z_{21} - z_{31}]^{v_{21}-v_{11}+1}}. \quad (57)$$

Для конечномерных представлений, т. е. для целых разностей параметров, полученный ответ является представлением Эйлера для гипергеометрической функции. Это находится в согласии с результатами работ [15], [16], где были получены выражения для функций базиса Гельфанда–Цетлина алгебры sl_3 в терминах ${}_2F_1$ (которые также были обобщены авторами на случай q -деформированной алгебры $U_q(sl_3)$).

Согласно (52) базис для sl_4 строится из функций (57) и т. д.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученная в работе формула (52) позволяет рекуррентным образом строить функции базиса Гельфанда–Цетлина для представлений основной унитарной серии $sl_n(\mathbb{C})$. Выше была изложена лишь алгебраическая часть конструкции: дальнейшее исследование этой системы функций должно включать изучение вопроса об их ортогональности и полноте.

Конструкция обобщается и на представления основной серии янгиана $Y(sl_n(\mathbb{C}))$ [13]. В этом случае появляется еще один сплетающий оператор, который переставляет параметры в произведении двух операторов $L_{1,2}(\vec{u})$, каждый из которых действует по своему набору переменных $z_{kl}^{(1,2)}$:

$$\begin{aligned} S_n(u_1 - v_n)L_1(u_1, u_2, \dots, u_n)L_2(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n) = \\ = L_1(v_n, u_2, \dots, u_n)L_2(v_1, \dots, v_{n-1}, u_1)S_n(u_1 - v_n). \end{aligned} \quad (58)$$

Он представляет из себя оператор умножения на функцию и возникает также в задаче построения универсальной R -матрицы для $SL(n, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки [16].

Список литературы

- [1] И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин, “Конечномерные представления группы унимодулярных матриц”, *Докл. АН СССР*, **71**:6 (1950), 1017–1020.
- [2] А. Барут, Р. Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения*, Мир, М., 1980.
- [3] Л. Биденхарн, Дж. Лаук, *Угловой момент в квантовой физике*, Мир, М., 1984.
- [4] A. I. Molev, “Gelfand–Tsetlin bases for classical Lie algebras”, *Handbook of Algebra*, **4**, ed. M. Hazewinkel, Elsevier, Amsterdam, 2006, 109–170.
- [5] И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, *Унитарные представления классических групп*, Тр. МИАН СССР, **36**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1950.
- [6] М. И. Граев, “Континуальный аналог схем Гельфанда–Цетлина и реализация основной серии неприводимых унитарных представлений группы $GL(n, \mathbb{C})$ в пространстве функций на многообразии этих схем”, *Докл. АН СССР*, **412**:2 (2007), 154–158.
- [7] M. I. Graev, “Infinite-dimensional representations of the Lie algebra $gl(n, \mathbb{C})$ related to complex analogs of the Gelfand–Tsetlin patterns and general hypergeometric functions on the Lie group $GL(n, \mathbb{C})$ ”, *Acta Appl. Math.*, **81**:1–3 (2004), 193–220.
- [8] Yu. A. Neretin, “Restriction of representations of $GL(n+1, \mathbb{C})$ to $GL(n, \mathbb{C})$ and action of the Lie overalgebra”, *Algebr. Represent. Theory*, **21**:5 (2018), 1087–1117, arXiv: 1510.03611.
- [9] M. Nazarov, V. O. Tarasov, “Yangians and Gelfand–Zetlin bases”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **30**:3 (1994), 459–478.
- [10] С. Э. Деркачёв, А. Н. Манашов, “Общее решение уравнения Янга–Бакстера с группой симметрии $SL(n, \mathbb{C})$ ”, *Алгебра и анализ*, **21**:4 (2009), 1–94.
- [11] П. А. Валиневич, С. Э. Деркачёв, П. П. Кулиш, Е. М. Уваров, “Построение системы собственных функций квантовых миноров матрицы монодромии $SL(n, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки”, *ТМФ*, **189**:2 (2016), 149–175.
- [12] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Конечномерные неприводимые представления унитарной и полной линейной группы и связанные с ними специальные функции”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:6 (1965), 1329–1356.

- [13] M. Nazarov, V. O. Tarasov, “Representations of Yangians with Gelfand–Zetlin bases”, *J. Reine Angew. Math.*, **496** (1998), 181–212.
- [14] А. И. Молев, *Янгианы и классические алгебры Ли*, Изд-во МЦНМО, М., 2009.
- [15] V. K. Dobrev, P. Truini, “Polynomial realization of $U_q(sl(3))$ Gel’fand–(Weyl)–Zetlin basis”, *J. Math. Phys.*, **38**:7 (1997), 3750–3767.
- [16] V. K. Dobrev, A. D. Mitov, P. Truini, “Normalized $U_q(sl(3))$ Gel’fand–(Weyl)–Zetlin basis and new summation formulas for q -hypergeometric functions”, *J. Math. Phys.*, **41**:11 (2000), 7752–7768.

Поступила в редакцию 19.02.2018,
после доработки 19.02.2018,
принята к печати 23.04.2018