Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, Д. С. Миненков, С. Б. Шлосман,
Асимптотика волновых функций стационарного уравне-
ния Шредингера в камере Вейля, *ТМФ*, 2018, том 197,
номер 2, 269–278

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9552>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 08:57:15

© 2018 г. С. Ю. Доброхотов^{*†}, Д. С. Миненков^{*},
С. Б. Шлосман^{‡§¶}

АСИМПТОТИКА ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В КАМЕРЕ ВЕЙЛЯ

Изучаются стационарные решения уравнения Шредингера с монотонным потенциалом U в некотором многогранном угле (камере Вейля) с граничным условием Дирихле. Потенциал имеет вид $U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n V(x_j)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, с монотонно возрастающей функцией $V(y)$. Построены квазиклассические асимптотики собственных значений и собственных функций в виде определителя Слэтера, составленного из функций Эйри с нелинейно зависящими от x_j аргументами. Предложен основанный на канонических преобразованиях способ реализации канонического оператора Маслова в виде функции Эйри.

Ключевые слова: стационарное уравнение Шредингера, краевая задача, многогранный угол типа камеры Вейля, спектр, условие квантования, канонический оператор Маслова, функции Эйри.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9552>

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1] изучались двумерная и трехмерная модели Изинга, когда капля одной фазы соприкасается со стенкой объемлющего сосуда. Их описание потребовало рассмотрения специальной краевой задачи для n -мерного уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2} \Delta \Psi + U(\mathbf{x}) \Psi = \mathcal{E} \Psi, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

Работа поддержана РФФИ-CNRS (грант № 17-51-150006).

---

^{*}Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.
E-mail: dothr@ipmnet.ru, minenkov.ds@gmail.com

[†]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[‡]Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия.
E-mail: shlosman@gmail.com

[§]Aix Marseille Université, Université de Toulon, CNRS, CPT, Marseille, France

[¶]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия

с потенциалом $U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n V(x_i)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, с монотонно возрастающей функцией $V(x)$: $V(0) = 0$, $V'(x) > 0$, $V \in C^2$. Оператор Шредингера рассматривался в области $\Omega = \{x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$ (камера Вейля) с условиями Дирихле на границе $\partial\Omega$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.2)$$

Важное наблюдение состояло в том, что собственные функции задачи (1.1), (1.2) даются определителями Слэтера. Именно, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $E_k, \psi_k(x)$ – собственные значения и соответствующие собственные функции одномерной задачи

$$-\frac{h^2}{2}\psi''(x) + V(x)\psi = E\psi, \quad x \geq 0, \quad \psi(0) = 0; \quad (1.3)$$

построим определитель Слэтера, составленный из функций $\psi_j(x_k)$:

$$\Psi_{\mathbf{k}}^{\text{SL}}(x) = \frac{1}{n} \det \begin{pmatrix} \psi_{k_1}(x_1) & \dots & \psi_{k_1}(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{k_n}(x_1) & \dots & \psi_{k_n}(x_n) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Тогда для мультииндекса с неповторяющимися элементами $\mathbf{k} = \{k_1, \dots, k_n\}$, $k_i \neq k_j$, $i, j = 1, \dots, n$, такой определитель является собственной функцией задачи (1.1), (1.2) в области Ω , отвечающей собственному значению

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \sum_{j=1}^n E_{k_j}. \quad (1.5)$$

Этот факт справедлив только для камеры Вейля и не имеет места для общих многогранников. Данное обстоятельство указывает на наличие некоторой структуры “интегрируемости” в рассматриваемой задаче, позволяет свести изучение квазиклассической асимптотики для многомерной задачи к совокупности одномерных и, более того, для функции (потенциала) вида $V(x) = ax$ или $V(x) = ax^2$ построить точные решения исследуемой задачи. В первом случае собственные функции $\psi_k(x)$ и собственные значения E_k одномерной задачи (1.3) выражаются через функцию Эйри и ее нули $z_k < 0$, $\text{Ai}(z_k) = 0$, $z_{k+1} < z_k$, $k = 0, 1, \dots$:

$$\psi_k = \text{Ai}\left(x\sqrt[3]{\frac{2a}{h^2}} + z_k\right), \quad E_k = |z_k| \frac{(ah)^{2/3}}{2^{1/3}}.$$

Для других функций V точные решения построить едва ли возможно и здесь можно использовать асимптотические методы. С другой стороны, как правило, квазиклассическое приближение не очень эффективно работает в краевых задачах, изменение области Ω разрушает “интегрируемость” и для краевых задач есть очень мало случаев, которые могут быть явно исследованы. Интуитивно понятно, что этот факт связан с интегрируемостью в теории билиардов (см. [2]). Поэтому нам представляется, что в предположении, что h – положительный малый параметр, рассмотрение указанной краевой задачи в камере Вейля с помощью квазиклассического приближения оказывается весьма интересным.

В настоящей работе мы построили асимптотические решения задачи (1.1), (1.2) для произвольного монотонно растущего гладкого потенциала $V(x)$, $V'(x) > 0$, $x > 0$. В разделе 2 приведены формулы для этих решений и обсуждается связь собственных значений с условием квантования Бора–Зоммерфельда, в разделе 3 мы приводим их “геометрический” вывод, основанный на каноническом операторе Маслова и его свойствах. Для полноты изложения нужные нам свойства, касающиеся замен переменных в каноническом операторе, приведены в приложении.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ЗНАЧЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ. УСЛОВИЯ КВАНТОВАНИЯ БОРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА

Рассмотрим задачу (1.3) с произвольным гладким монотонным потенциалом $V(x)$: $V'(x) > 0$, $x \geq 0$. В этом случае асимптотики волновых функций выражаются через функции Эйри $\text{Ai}(z)$, а асимптотики собственных значений выражаются через нули $\text{Ai}(z)$ с помощью условий квантования, аналогичных условиям квантования Бора–Зоммерфельда. Приведем сразу соответствующие формулы, а потом их конструктивное доказательство.

Обозначим через $x^*(E)$ положительное решение уравнения $V(x) = E$ и введем функции

$$\mathcal{Y}(x, E) = \text{sgn}(x - x^*) \left| \frac{3}{2} \int_{x^*}^x \sqrt{2(V - E)} dx \right|^{2/3} \quad (2.1)$$

и

$$R(x, E) = \frac{\mathcal{Y}(x, E)}{V(x) - E}. \quad (2.2)$$

Нетрудно убедиться, что построенные функции $\mathcal{Y}(x, E)$, $R(x, E)$ бесконечно дифференцируемы при $E > 0$ и $\mathcal{Y}_x = \partial \mathcal{Y}(x, E) / \partial x$ не обращается в нуль (и, естественно, в бесконечность) на любом конечном отрезке прямой $\mathbb{R}_x$.

Напомним, что мы обозначили через z_k , $z_{k+1} < z_k$, $k = 0, 1, \dots$, нули функции Эйри $\text{Ai}(z)$. Определим числа E_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, из уравнения

$$\frac{1}{h} \int_0^{x^*(E_k)} \sqrt{2(E_k - V)} dx = \frac{2}{3} |z_k|^{3/2}. \quad (2.3)$$

Введем функции

$$\psi_k(x) = \frac{C \sqrt[4]{|R(x, E_k)|}}{\sqrt[6]{h}} \text{Ai} \left(\frac{\mathcal{Y}(x, E_k)}{h^{2/3}} \right). \quad (2.4)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. 1. Функции $\psi_k(x)$ и числа E_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, определяют асимптотику собственных функций и собственных значений задачи (1.3) с точностью до $O(h^{5/6})$ и $O(h^2)$ соответственно.

2. Выберем в определителе (1.4) функции ψ_k в виде (2.4) с номерами $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ и в формуле (1.5) числа E_k , найденные из условия квантования (2.3). Тогда эти функции и числа будут приближать собственные функции и значения оператора с точностью до $O(h)$ и $O(h^2)$ соответственно.

Без условий (2.3) формула (2.4) содержится в [3], где она получена с помощью метода эталонных уравнений. Мы введем ее по-другому в разделе 3, а сейчас обсудим равенство (2.3). Оно очевидным образом вытекает из. Напомним (см., например, [4]), что при больших отрицательных z для функции Эйри справедлива асимптотическая формула

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{-z}} \sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O((-z)^{3/2}).$$

Отсюда при условии $\mathcal{Y}(x, E_k)/h^{2/3} \ll -1$ следует, что

$$\psi_k(x) = \frac{C}{\sqrt[4]{(E - V)}} \sin\left(\frac{1}{h} \int_{x^*}^x \sqrt{2(E_k - V)} dx + \frac{\pi}{4}\right); \quad (2.5)$$

эта функция, естественно, совпадает с ВКБ-асимптотикой [5], [6] функций $\psi_k(x)$ слева от фокальной точки $x = x^*$ (вне ее окрестности). Нули этой функции определяются равенством

$$\frac{1}{h} \int_0^{x^*(E_k)} \sqrt{2(E_k - V)} dx = \pi \left(\frac{3}{4} + k\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

которое можно переписать следующим образом. Хорошо известно (см. [6] и следующий раздел), что квазиклассические асимптотики собственных функций $\psi_k(x)$ связаны с кривыми на фазовой плоскости $\mathbb{R}_{px}^2$ (одномерными лагранжевыми многообразиями), задаваемыми уравнениями

$$\tilde{\Lambda}(E) = \left\{ p, x \in \mathbb{R}_{p,x}^2 : \frac{p^2}{2} + V(x) = E, x \geq 0 \right\}.$$

В рассматриваемом случае к дуге $\tilde{\Lambda}(E)$ разумно добавить вертикальный отрезок

$$\Gamma(E) = \{p, x \in \mathbb{R}_{p,x}^2 : -\sqrt{E - V(0)} \leq p \leq \sqrt{E - V(0)}, x = 0\}$$

и построить замкнутую кривую $\Lambda(E) = \tilde{\Lambda}(E) \cup \Gamma(E)$ (см. рис. 1). Тогда равенство (2.6) можно записать в виде условия квантования Бора–Зоммерфельда

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Lambda(E_k)} \sqrt{2(E_k - V)} dx = h \left(\frac{3}{4} + k\right). \quad (2.7)$$

Число $3/4$ есть $\text{Ind } \Lambda(E_k)/4$, где $\text{Ind } \Lambda(E_k)$ – индекс Маслова замкнутого пути на $\Lambda(E_k)$, совпадающего с $\Lambda(E_k)$. Для гладких кривых $\Lambda(E_k)$ он равен 2, но здесь кривая $\Lambda(E_k)$ негладкая из-за наличия граничного условия и ее индекс равен 3. В более общем случае такого сорта многообразия (“рогатые сферы”) и условия квантования на них описаны в книге [7]. Если теперь вернуться к исходной n -мерной задаче, ввести соответствующее $2n$ -мерное фазовое пространство, то произведение одномерных многообразий $\Lambda(E_{k_j})$, отвечающих различным x_j , даст n -мерное негладкое лагранжево многообразие указанного типа, а условия квантования на нем дадут спектр исходного n -мерного оператора Шредингера.

Наконец, отметим, что условие квантования Бора–Зоммерфельда, вообще говоря, справедливо для больших k , а именно для $k \sim 1/h$. Замена условия (2.3) на условие квантования (2.7) фактически означает замену нулей функции Эйри на нули ее

Рис. 1. Потенциалы $V_1(y) = y$ (сплошная линия) и $V_2 = 2(y + 0.1)^2 - 0.02$ (штриховая линия) (а). Лагранжевы многообразия в фазовом пространстве $\Lambda_k \in \mathbb{R}_{p,y}^2$, соответствующие энергии E_k , $k = 0, 2, 4, 6, 8$, для примера 1 (сплошные линии) и примера 2 (штриховые линии) (б).

Рис. 2. Асимптотики волновых функций $\psi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, 4, 6, 8$, для примеров 1 (сплошные линии) и 2 (штриховые линии).

асимптотики и даже при малых k дает хорошее приближение. Например, первый корень $z_0 \approx -2.338$, а его асимптотика $\tilde{z}_0 \approx -2.320$, т. е. ошибка меньше 1%. Таким образом, при нахождении E_k даже при $k = 0, 1, \dots$ вместо условия (2.3) можно пользоваться условием (2.7).

Рассмотрим два примера:

- 1) $V(x) = x$;
- 2) $V(x) = 2(x + 0.1)^2 - 0.02$ при $h = 0.01$.

Графики потенциалов и первые 10 собственных значений представлены на рис. 1. Там же изображены соответствующие лагранжевы многообразия.

Рис. 3. Асимптотики волновых функций в угле $\Psi_{\{k,m\}}^{\text{SL}}(x,y)$ для $k = 2, 3, 4$, $m = 1$ и $k = 8$, $m = 4$ для примера 2.

На рис. 2 и рис. 3 показаны асимптотики волновых функций $\psi_k(x)$ и асимптотики функций $\Psi_{\{k,m\}}^{\text{SL}}(x,y)$ для двумерного угла $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $x \leq y$.

3. ВЫВОД АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ КАНОНИЧЕСКИХ ЗАМЕН ПЕРЕМЕННЫХ В КАНОНИЧЕСКОМ ОПЕРАТОРЕ МАСЛОВА

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Формула (2.3) вытекает очевидным образом из (2.4). В принципе, формулы (2.4) могут быть получены с помощью метода Лангера и эталонных уравнений (см. [3], [8], а также [9]). Мы покажем здесь, как они получаются прямо из канонического оператора Маслова и его общих свойств.

Построим (формальные) асимптотики в виде канонического оператора [6], которые в одномерном случае приближают волновые функции. Асимптотики связаны с семейством (локально) инвариантных кривых – лагранжевых многообразий Λ на фазовой плоскости $\mathbb{R}_{y,p}^2$, которые похожи на горизонтально расположенную параболу и являются траекториями гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(x,p) = p^2/2 + V(x)$ на уровне энергии $H = E$:

$$\Lambda = \{p = P(t, E), x = X(t, E), t \in [-T, T]\} \equiv \{H(x, p) = E, x \geq 0\}.$$

Функции $p = P(t, E)$, $x = X(t, E)$ – решения системы Гамильтона

$$\dot{p} = -H_x = -v_x, \quad \dot{x} = H_p = p, \quad p|_{t=0} = 0, \quad x|_{t=0} = x^*(E). \quad (3.1)$$

Здесь $x^*(E)$ – решение уравнения $V(x) = E$, x^* – точка поворота на кривых $\Lambda(E)$, время t – координата на кривой – выбрано так, что значение $t = 0$ соответствует точке поворота, время $t = \pm T$ соответствует точке $x = 0$ оси x . Положительным значениям t соответствуют положительные значения $P(t, E)$, а отрицательным – отрицательные, при этом $P(t, E) = \pm\sqrt{E - V(X(t))}$. В качестве меры на кривых $\Lambda(E)$ естественно выбрать dt . Якобианы проецирования точек на кривой $\Lambda(E)$ на оси x и p соответственно равны $J(t, E) = \dot{X} \equiv P$ и $\tilde{J} = \dot{P} \equiv -V_x$. Якобиан $J(t, E)$ обращается в нуль в точке поворота $t = 0$, якобиан $\tilde{J} \neq 0$ при всех t .

Многообразие $\Lambda(E)$ можно покрыть одной картой и написать асимптотику решения уравнения (1.1) (пока без учета условия Дирихле при $x = 0$) в виде канонического оператора $K_{\Lambda(E)}^h$, примененного к функции, равной единице, с помощью (одного) интеграла:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{as}}(x, E) &= K_{\Lambda(E)}^h 1 \equiv \\ &\equiv \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e(t)}{\sqrt{|\tilde{J}(t)|}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\int_0^t P dX + p(x - X(t)) \right) \right] \Big|_{t=t(p)} dp, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $e(t)$ – гладкая срезающая функция, равная единице на отрезке $[-T, T]$ и нулю вне некоторой окрестности этого отрезка, $t(p)$ – решение уравнения $P(t) = p$, C – комплексная константа, канонический оператор ψ_{as} определен с точностью $O(\hbar)$ и не зависит от выбора разбиения единицы $e(t)$. Значение спектрального параметра E выбирается из граничного условия $\psi(0, E) = 0$. Недостаток этой формулы состоит в ее неэффективности, что, в частности, не позволяет получить простые формулы для спектра исходной задачи. Цель последующих рассуждений – получение эффективного представления функции (3.2) в виде функции Эйри со сложным аргументом и зависящей от x амплитудой.

В принципе интеграл (3.2) можно представить в виде функции Эйри с помощью подхода, предложенного в [9], однако нам кажется, что предлагаемый ниже “геометрический” подход оказывается более простым и наглядным и, кроме того, может быть применен в других ситуациях. Именно, пусть Λ – некоторое лагранжево многообразие на фазовой плоскости, $d\mu$ – мера, A – некоторая функция на нем. Пусть в конфигурационном пространстве вместо переменной x мы выбрали переменную $y = Y(x)$, причем эта замена невырождена и для определенности $\partial Y/\partial x > 0$. Эта замена индуцирует каноническую замену переменных на фазовой плоскости $x \rightarrow y$, $p \rightarrow q$: $y = \mathcal{Y}(x)$, $q = p/\mathcal{Y}'(x)$ и обратно: $x = \mathcal{X}(y)$, $p = q/\mathcal{X}'$. Поскольку замена координат каноническая, то для гамильтониана $H - E$ в новых координатах (обозначим его $\mathcal{H}(q, y)$) справедлива формула $\mathcal{H}(q, y, E) = H(\mathcal{P}(q, y), \mathcal{X}(y)) - E$. Покажем, что замену переменных можно выбрать так, чтобы $\mathcal{H}(q, y) = g(y)(q^2 + y)$, где $g(y) = G(\mathcal{X}(y)) \neq 0$ – гладкая функция. Действительно, имеем

$$\mathcal{H}(q, y, E) = \left(\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x} \right)^2 \frac{q^2}{2} + V - E = \frac{V - E}{\mathcal{Y}} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x} \right)^2 \frac{\mathcal{Y}}{2(V - E)} q^2 + y \right].$$

Выберем теперь функцию $\mathcal{Y}$ из условия

$$\left(\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x}\right)^2 \frac{\mathcal{Y}}{2(V-E)} = 1 \iff \left(\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x}\right)^2 \mathcal{Y} = 2(V-E). \quad (3.3)$$

Добавим к этому уравнению начальное условие $\mathcal{Y}(x^*) = 0$; интегрируя его, получим

$$\mathcal{Y}(x, E) = \operatorname{sgn}(x - x^*) \left(\frac{3}{2} \int_{x^*}^x \sqrt{2(V-E)} |dx| \right)^{2/3}. \quad (3.4)$$

Нетрудно убедиться, что построенная функция $\mathcal{Y}(x, E)$ бесконечно дифференцируема и $\mathcal{Y}_x = \partial \mathcal{Y}(x, E)/\partial x$ не обращается в нуль (и, естественно, в бесконечность) на любом конечном промежутке прямой $\mathbb{R}_x$. Таким образом, эта функция определяет взаимно однозначное преобразование $x \rightarrow y$, при этом

$$R(x) = \frac{\mathcal{Y}(x)}{V(x) - E} \equiv \frac{2}{\mathcal{Y}_x^2} \quad (3.5)$$

– также гладкая функция, не обращающаяся в нуль. Поскольку гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{Y}}{V-E} (q^2 + y) \equiv R(q^2 + y),$$

то кривая Λ в координатах (q, y) определяется равенством

$$\mathcal{H} = 0 \iff q^2 + y = 0. \quad (3.6)$$

Гамильтонова система в переменных (q, y) с учетом равенства нулю функции $\mathcal{H}$ на траекториях принимает вид

$$\dot{q} = -\frac{1}{R}, \quad \dot{y} = 2\frac{q}{R}.$$

Если ввести новое время τ с помощью равенства $d\tau = dt/R$, то эта система и ее решения $q = Q(\tau)$, $y = Y(\tau)$ примут совсем простой вид (естественно, согласованный с (3.6)):

$$\frac{dq}{d\tau} = -1, \quad \frac{dy}{d\tau} = 2q$$

и

$$Q = -\tau, \quad Y = -\tau^2. \quad (3.7)$$

Построим теперь канонический оператор Маслова $[\tilde{K}_{\Lambda(E)}^h A](y)$, действующий на функцию A на кривой Λ , в новой координате y в конфигурационном пространстве (координатах (q, y) в фазовом пространстве) и координате τ на кривой Λ с мерой $d\tau$. Реализуя формулу (3.2) для этого случая с учетом равенства $\tau = -q$, получим

$$[\tilde{K}_{\Lambda(E)}^h A](y) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) e(\tau) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{2\tau^3}{3} - \tau(y + \tau^2) \right) \right] \Big|_{\tau=-q} dq.$$

Теперь мы можем воспользоваться свойствами канонического оператора по отношению к заменам переменных. Именно, из общих свойств канонического оператора

(см. [6], [7] и приложение) с точностью до слагаемых более высокого порядка малости по параметру h (более точно до $O(h^{5/6})$) следует равенство

$$K_{\Lambda(E)}^h 1 = \sqrt{\left| \frac{\partial \mathcal{Y}(x)}{\partial x} \right|} \left[\tilde{K}_{\Lambda(E)}^h \sqrt{\left| \frac{dt}{d\tau} \right|} (y) \right]_{y=\mathcal{Y}(x)} = \sqrt[4]{\frac{2}{R}} [\tilde{K}_{\Lambda(E)}^h \sqrt{R}] (y)|_{y=\mathcal{Y}(x)}.$$

Заметим теперь, что функция $|R(\mathcal{X}(Y(\tau)))|$, на которую действует канонический оператор, получается из гладкой функции $|R(\mathcal{X}(y))|^{-1/2}$, заданной в конфигурационном пространстве. Поэтому ее можно поменять местами с каноническим оператором и получить с учетом равенств (3.3), (3.5) и определения канонического оператора

$$\begin{aligned} K_{\Lambda(E)}^h 1 &= \sqrt[4]{2|R(x)|} [\tilde{K}_{\Lambda(E)}^h 1] (y)|_{y=\mathcal{Y}(x)} = \\ &= c \frac{\sqrt[4]{|R(x)|}}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} e(-q) \exp \left[\frac{i}{h} \left(\frac{1}{3} q^3 + \mathcal{Y}(x) q \right) \right] dq, \end{aligned}$$

$c = \sqrt[4]{2} e^{i\pi/4} / \sqrt{2\pi}$. Интеграл в последнем выражении с точностью до $O(h^\infty)$ равен $2\pi h^{1/3} \text{Ai}(\mathcal{Y}(x)/h^{2/3})$, где $\text{Ai}(y)$ – функция Эйри. Отсюда немедленно получим (2.4). Эта формула дает формальную асимптотику для волновой функции, т. е. такую, которая дает малую невязку при подстановке в исходное одномерное уравнение. Доказательство того, что (2.4) определяет “истинную” асимптотику собственной функции, практически состоит в повторении рассуждений работ [10].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Замены переменных в каноническом операторе Маслова

Приведем здесь в компактной форме полезные для практических вычислений факты из [6], [7]. Пусть на вещественной оси $x \in \mathbb{R}$ задана замена координат $x = \mathcal{X}(y) \iff y = \mathcal{Y}(x)$, причем $\partial \mathcal{X} / \partial y > 0$. На фазовой плоскости $\mathbb{R}_{p,x}^2$ с координатами (p, x) эта замена индуцирует каноническую замену переменных $(p, x) \rightarrow (q, y)$: $p = q / \mathcal{X}_y$. Пусть на $\mathbb{R}_{p,x}^2$ задана гладкая кривая (лагранжево многообразие) $\Lambda = \{p = P(\alpha), x = X(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$, α – координаты на кривой Λ . Предположим также, что на Λ заданы другие координаты β , связанные с α уравнением $\alpha = \mathcal{A}(\beta) \iff \beta = \mathcal{B}(\alpha)$, $\partial \mathcal{A} / \partial \beta > 0$. Наконец, предположим, что на Λ задана функция $A(\alpha)$. Определим с помощью канонического оператора Маслова на кривой Λ с центральной точкой α^0 функцию $\psi = [K_\Lambda A(\alpha)](x)$. Перейдем от координат (p, x) на фазовой плоскости к координатам (q, y) , этот переход дает на фазовой плоскости с координатами (q, y) кривую $\tilde{\Lambda}$. Выберем на $\tilde{\Lambda}$ координату β , тогда мы можем записать $\tilde{\Lambda} = \{q = Q(\beta), y = Y(\beta)\}$ и $\Lambda = \{p = P(\alpha) \equiv Q(B(\alpha)) / \mathcal{X}_y(Y(B(\alpha))), x = X(\alpha) \equiv \mathcal{X}(Y(B(\alpha)))\}$. Построим теперь канонический оператор Маслова на кривой $\tilde{\Lambda}$ с координатами β , считая, что центральная точка $\beta^0 = \mathcal{B}(\alpha^0)$. Справедливо равенство

$$[K_\Lambda A(\alpha)](x) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{X}_y(y)}} [K_{\tilde{\Lambda}} (\sqrt{\mathcal{A}_\beta(\beta)} A(\alpha(\mathcal{A}(\beta))))](y)|_{y=\mathcal{Y}(x)}. \quad (\text{П.1})$$

Предположим, что в фазовом пространстве заданы гладкая функция (символ) $\Phi(p, x)$ и соответствующий ей псевдодифференциальный оператор $\Phi(\frac{1}{2}\tilde{x}, -i\hbar \partial / \partial x)$. Подействуем этим оператором на $[K_\Lambda A(\alpha)](x)$, тогда справедлива формула коммутации

псевдодифференциального оператора и канонического оператора

$$\Phi\left(\frac{2}{x}, -ih\frac{\partial}{\partial x}\right)[K_{\Lambda}A(\alpha)](x) = [K_{\Lambda}(\Phi|_{\Lambda}A(\alpha) + O(h))](x),$$

где $\Phi|_{\Lambda}$ – сужение функции Φ на Λ . Разумеется, справедлива и обратная формула, которая позволяет вынести часть амплитуды A или даже всю амплитуду за канонический оператор. При этом если Φ – полином по p , то $\Phi(\frac{2}{x}, -ih\frac{\partial}{\partial x})$ – это дифференциальный оператор, а если Φ не зависит от p , то просто функция. Поэтому если в (П.1) $\sqrt{\mathcal{A}_{\beta}(\beta)}$ можно представить как $\Phi(y)$, то равенство (П.1) принимает вид

$$[K_{\Lambda}A(\alpha)](x) = \frac{\Phi(y)}{\sqrt{\mathcal{X}_y(y)}}[K_{\Lambda}(A(\alpha(\mathcal{A}(\beta))))](y)|_{y=\mathcal{Y}(x)}. \quad (\text{П.2})$$

Это равенство означает, что мы можем построить канонический оператор Маслова, используя новые координаты q, y в фазовом пространстве, вводя на лагранжевом многообразии новые координаты β , а затем перейти назад к координатам x с помощью формулы $y = \mathcal{Y}(x)$. Все приведенные формулы оказываются справедливыми и в многомерном случае, если производные $\mathcal{X}_y(y)$, $\mathcal{A}_{\beta}$ заменить соответственно на $\det \mathcal{X}_y(y)$, $\det \mathcal{A}_{\beta}(\beta)$.

Благодарности. Авторы благодарят А. Ю. Аникина, В. Е. Назайкинского, А. И. Нейштадта и А. И. Шафаревича за обсуждения и полезные замечания.

Список литературы

- [1] D. Ioffe, S. Shlosman, Y. Velenik, “An invariance principle to Ferrari–Spohn diffusions”, *Commun. Math. Phys.*, **336**:2 (2015), 905–932; D. Ioffe, Y. Velenik, V. Wachtel, “Dyson Ferrari–Spohn diffusions and ordered walks under area tilts”, *Probab. Theory Relat. Fields*, **170**:1–2 (2018), 11–47.
- [2] Г. Гальперин, А. Земляков, *Математические бильярды*, Наука, М., 1990.
- [3] С. Ю. Славянов, *Асимптотика решений одномерного уравнения Шредингера*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1991.
- [4] М. В. Федорюк, *Асимптотика. Интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 3: *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Наука, М., 2004.
- [6] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965; В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [7] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейная скобка Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991.
- [8] В. М. Бабич, “Математическая теория дифракции (обзор некоторых исследований, выполненных в лаборатории математических проблем геофизики ЛОМИ)”, *Тр. МИАН СССР*, **175** (1986), 47–62; А. Найфэ, *Введение в методы возмущений*, Мир, М., 1984.
- [9] M. V. Berry, “Uniform approximation for potential scattering involving a rainbow”, *Proc. Phys. Soc.*, **89** (1966), 479–90.
- [10] Y. Colin de Verdière, “Bohr–Sommerfeld rules to all orders”, *Ann. H. Poincaré*, **6**:5 (2005), 925–936; Д. В. Косыгин, А. А. Минасов, Я. Г. Синай, “Статистические свойства спектров операторов Лапласа–Бельтрами на поверхностях Лиувилля”, *УМН*, **48**:4(292) (1993), 3–130.