Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Имамура, Т. Сасамото, О q -деформированном полностью асимметричном простом процессе с запретом со случайным начальным условием, *ТМФ*, 2019, том 198, номер 1, 79–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:39:29

© 2019 г.

Т. Имамура*, Т. Сасамото†

О q -ДЕФОРМИРОВАННОМ ПОЛНОСТЬЮ АСИММЕТРИЧНОМ ПРОСТОМ ПРОЦЕССЕ С ЗАПРЕТОМ СО СЛУЧАЙНЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В рамках стандартного подхода к изучению флуктуаций в одномерных моделях Кардара–Паризи–Чжана, к которым относятся асимметричный простой процесс с запретом и q -деформированный полностью асимметричный простой процесс с запретом, выписана формула для q -деформированных моментов и построена их производящая функция. Этот подход хорошо работает при начальном условии типа ступеньки, но не для случайного начального условия (в том числе в стационарном случае), поскольку при этом только первые несколько моментов конечны, а остальные расходятся. Ранее был предложен способ преодоления этой проблемы с помощью формулы суммирования Рамануджана и определителя Коши для тета-функций. Предлагается альтернативный подход без использования этих соотношений.

Ключевые слова: процесс с запретом, флуктуации, q -функция Уиттекера, теория случайных матриц.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9554>

1. ВВЕДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В последнее время был достигнут значительный прогресс в изучении процессов межчастичного взаимодействия в классе универсальности Кардара–Паризи–Чжана (КПЧ) [1]–[3]. Несмотря на нелинейную природу взаимодействия, для многих моделей были найдены предельные распределения и корреляции некоторых величин. Среди таких моделей выделяется q -деформированный полностью асимметричный простой процесс с запретом (далее q -TASEP, totally asymmetric simple exclusion

Работа Т. Имамуры, Т. Сасамото поддержана JSPS KAKENHI (гранты JP25800215, JP16K05192 и JP25103004, JP14510499, JP15K05203, JP16H06338 соответственно).

*Department of Mathematics and Informatics, Chiba University, Chiba, Japan.
E-mail: imamura@math.s.chiba-u.ac.jp

†Department of Physics, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan.
E-mail: sasamoto@phys.titech.ac.jp

process), в котором i -я частица перепрыгивает по оси $\mathbb{Z}$ в соседнюю точку справа с интенсивностью скачков $a_i(1 - q^{\text{gap}})$, где $0 \leq q < 1$ и $0 < a_i \leq 1$, а индекс “gap” означает расстояние до предыдущей частицы. Более точно правила q -TASEP для случая N частиц можно сформулировать следующим образом. Пусть $x_i(t)$ – положение частицы с номером i , $i = 1, 2, \dots, N$, в момент времени $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. В каждой точке может находиться не более одной частиц, положим также $x_1(t) > x_2(t) > \dots > x_N(t)$. Каждая частица перемещается в соседнюю справа точку, при этом интенсивность скачков для i -й частицы имеет вид

$$a_i(1 - q^{x_{i-1}(t) - x_i(t) - 1}), \quad 1 \leq i \leq N; \quad (1.1)$$

будем считать $x_0(t) = \infty$. Разность $x_{i-1}(t) - x_i(t) - 1$ представляет собой величину щели (с пустыми позициями) между i -й и предыдущей ($i - 1$)-й частицей, интенсивность перескоков (1.1) зависит от конфигурации частиц. С увеличением щели интенсивность увеличивается, приближаясь к a_i при стремлении величины щели к бесконечности. С другой стороны, если две частицы оказываются в одной точке, интенсивность равна нулю, что указывает на запрет взаимодействия между частицами. При $q = 0$ интенсивность (1.1) не зависит от размера щели, и тогда данный процесс есть не что иное, как TASEP (с зависящей от частицы интенсивностью перескоков a_i). В работе [4] был введен q -деформированный TASEP как процесс, описывающий маргинальную динамику, связанную с q -процессом Уиттекера (при этом q -бозонный полностью асимметричный процесс с нулевым радиусом, q -TAZRP, описывающий динамику щелей, был введен ранее в работе [5]). q -TASEP стал одной из стандартных моделей для изучения универсальности КПЧ. С тех пор были введены и изучены различные обобщенные модели (см., например, [6]–[8]).

Нас интересуют флуктуационные свойства положения N -й частицы $x_N(t)$. Для TASEP (при $q = 0$) предельное распределение величины $x_N(t)$ было получено при различных начальных условиях, прежде всего для начального условия типа ступеньки

$$x_i(0) = -i, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (1.2)$$

в работе [9] было показано, что предельное распределение положений частиц является распределением Трейси–Уидома для гауссова унитарного ансамбля [10]. Изучались также другие случаи, например случайное начальное условие [11]–[13], периодическое начальное условие [14], [15] и более общее фиксированное начальное условие [16], [17]. Все эти результаты для TASEP (и для родственных ему моделей типа моделей полизародышевого роста) были получены с помощью его связи с детерминантными точечными процессами, которые в свою очередь связаны с теорией случайных матриц [18], [19]. Эти результаты предоставляют единый подход к изучению флуктуационных явлений.

Для произвольного q такой подход не работает, поскольку до сих пор не найдено прямой связи с детерминантным точечным процессом (однако есть несколько работ в этом направлении [20]–[22]). Тем не менее были предложены и успешно применены к q -TASEP и его обобщению несколько методов были изобретены и успешно применены, при этом было получено немало интересных результатов. Стандартный подход в случае произвольного q заключается в том, что сначала выписывается формула для q -деформированных моментов, а затем определяются их производящие функции. Например, n -й q -деформированный момент для q -TASEP с начальным

условием типа ступеньки (1.2) можно записать в виде кратного интеграла

$$\langle q^{n(x_N(t)+N)} \rangle = \frac{(-1)^n q^{n(n-1)/2}}{(2\pi i)^n} \int \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{z_j - z_k}{z_j - qz_k} \prod_{j=1}^n \left(\prod_{m=1}^N \frac{a_m}{a_m - z_j} \right) e^{(q-1)t z_j} \frac{dz_j}{z_j}, \quad (1.3)$$

где контур по z_j содержит точки $\{qz_k\}_{k>j}$ и a_m , но не содержит нуля. Данную формулу можно получить, используя либо операторы Макдональда [4], либо дуальность [23]. Далее построим производящую функцию этих моментов. Применяв q -биномиальную теорему, находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{(q; q)_n} \langle q^{n(x_N(t)+N)} \rangle = \left\langle \frac{1}{(\zeta q^{x_N(t)+N}; q)_{\infty}} \right\rangle. \quad (1.4)$$

Правая часть этого равенства есть не что иное, как q -преобразование Лапласа плотности вероятности положения частицы $x_N(t) + N$, которое должно содержать полную информацию о статистике величины $x_N(t)$. Как оказалось, q -преобразование Лапласа можно выразить через определитель Фредгольма и из этой формулы получить закон Трейси–Уидома [4], [23]. Однако из-за некоторых технических трудностей большинство результатов, полученных при таком подходе, ограничены ступенчатым начальным условием (1.2). Рассмотрим в качестве обобщения начального условия (1.2) следующее случайное начальное условие:

$$-1 - x_1(0) = X_1, \quad x_{i-1}(0) - x_i(0) - 1 = X_i, \quad i = 2, \dots, N, \quad (1.5)$$

где $X_1, \dots, X_N$ – независимые q -пуассоновы случайные величины, распределение которых на интервале $\alpha \in [0, a_k)$ задается формулой

$$\text{Prob}(X_k = n) = \left(\frac{\alpha}{a_k}; q \right)_{\infty} \frac{(\alpha/a_k)^n}{(q; q)_n}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad (1.6)$$

где $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Начальное условие (1.5) означает, что величина щели между i -й и $(i-1)$ -й частицами имеет q -пуассоново распределение с параметром α/a_i (1.6), за исключением случая $i = 1$, когда X_1 равна величине щели между частицей и началом координат. Заметим, что при $\alpha = 0$ правая часть равенства (1.6) совпадает с $\delta_{n,0}$, при этом условие (1.5) сводится к начальному условию типа ступеньки (1.2). Известно, что в случае q -TASEP с бесконечным числом частиц и при $a_i = 1$, если щели между последующими частицами задаются независимыми q -пуассоновыми случайными величинами с параметром α , процесс является стационарным. По этой причине назовем начальное условие (1.5) полустационарным начальным условием. Положив $a_i = 1$ при $i \geq 2$ и рассмотрев предел $a_1 \rightarrow \alpha$, можно изучать стационарный q -TASEP на основе анализа полустационарного начального условия [24].

Воспроизведем полученное в работе [23] представление n -го момента при нашем случайном начальном условии в виде кратных контурных интегралов:

$$\begin{aligned} \langle q^{n(x_N(t)+N)} \rangle &= \frac{(-1)^n q^{n(n-1)/2}}{(2\pi i)^n} \int \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{z_j - z_k}{z_j - qz_k} \prod_{j=1}^n \left(\prod_{m=1}^N \frac{a_m}{a_m - z_j} \right) \times \\ &\times e^{(q-1)t z_j} \frac{dz_j}{z_j - \alpha/q}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где контур по переменной z_j содержит точки $\{qz_k\}_{k>j}$ и a_m , но не содержит α/q (для данного начального условия $\langle \cdot \rangle$ означает среднее по начальному условию и динамике q -TASEP). Выражение (1.7) очень похоже на (1.3), но имеется важное отличие. Как можно понять, положив в (1.7) $t = 0$, момент конечен только при малых n , удовлетворяющих условию $\alpha q^{-n} < \max_{m=1,\dots,N} a_m$, за исключением случая $\alpha = 0$ (ступенчатого начального условия), а высшие моменты расходятся. Поэтому нельзя использовать равенство (1.4) для вычисления q -преобразования Лапласа. С другой стороны, для $\zeta \neq q^n$, $n \in \mathbb{Z}$ по определению имеем

$$\left\langle \frac{1}{(\zeta q^{x_N(t)+N}; q)_\infty} \right\rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\zeta q^l; q)_\infty} \mathbb{P}[x_N(t) + N = l], \quad (1.8)$$

и, поскольку $\lim_{l \rightarrow -\infty} (\zeta q^l; q)_\infty = \infty$, $\lim_{l \rightarrow \infty} (\zeta q^l; q)_\infty = 1$, данное q -преобразование Лапласа конечно также при случайном начальном условии (1.5).

Итак, нам требуется найти способ вычисления q -преобразования Лапласа без использования q -моментов. Эта трудность была преодолена в работе [24], где с помощью формулы суммирования Рамануджана и определителя Коши для тета-функций (также известного как определитель Фробениуса) q -преобразование Лапласа было записано через определитель Фредгольма. В настоящей работе мы рассматриваем ту же задачу и предлагаем несколько иной подход, а также выводим иное представление q -преобразования Лапласа (1.4) через определитель Фредгольма для q -TASEP с полустационарным начальным условием (1.5). Нашим основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для q -TASEP со случайным начальным условием (1.5), (1.6)*

$$\left\langle \frac{1}{(\zeta q^{x_N(t)+N}; q)_\infty} \right\rangle = \det(1 + K_\zeta)_{L^2(C_a)}, \quad \zeta \neq q^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.9)$$

где C_a – контур вокруг точек a_i , а ядро имеет вид

$$K_\zeta(w_1, w_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}+\epsilon} ds \frac{(-\zeta)^s \pi}{\sin(\pi s)} \frac{e^{(q^s w_1 - w_2)t}}{q^s w_1 - w_2} \frac{(\alpha/w_1; q)_\infty}{(\alpha/(q^s w_1); q)_\infty} \prod_{m=1}^N \frac{(q^s w_1/a_m; q)_\infty}{(w_1/a_m; q)_\infty}. \quad (1.10)$$

Получив формулу такого типа, мы далее можем воспользоваться стандартным способом изучения предельного распределения. В частности, положив $a_i = 1$ при $i \geq 2$, взяв предел $a_1 \rightarrow \alpha$ и применив те же рассуждения, что и в работе [24], можно изучить стационарный q -TASEP. При этом воспроизводится полученный в [24] результат, состоящий в том, что предельное распределение положения частицы является распределением Бейка–Рейнса.

Ядро (1.10) намного ближе к ядру, используемому в работах [4], [23], чем ядро из работы [24]. Но подчеркнем еще раз, что метод нахождения ядра через q -моменты [4], [23], не работает при случайном начальном условии (1.5). В некоторых аспектах наш подход аналогичен подходу, использованному в работе [25] для моделей полимеров log-гамма и О’Коннелла–Йора (в случае условий типа ступеньки).

Что касается асимметричного простого процесса с запретом (ASEP), для изучения стационарного случая в работе [26] был использован несколько иной подход. В этой работе авторы применили тот факт, что ASEP можно получить как

предел вершинной модели с высшими спинами, поскольку в такой модели всё дискретно и все моменты конечны. Однако подход, предложенный нами в работе [24] для q -TASEP и затем обобщенный на вершинную модель с высшими спинами в работе [27], имеет то преимущество, что все модели в иерархии можно непосредственно исследовать единым образом, не прибегая к предельному переходу. Было бы интересно прояснить взаимосвязи между различными подходами и представлениями.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 мы напоминаем некоторые факты из работы [24]. Мы вводим двустороннюю версию q -меры Уиттекера и получаем для q -TASEP распределение положения частицы с полустационарным начальным условием (1.5) в виде кратного интеграла. В разделе 3 предлагается способ вычисления q -преобразования Лапласа (1.4), для которого записана формула в виде кратного интеграла. В разделе 4 получено представление через определитель Фредгольма и показана его эквивалентность представлению (1.9).

Чтобы придать формулам более наглядный вид, в следующих разделах мы заменим a_i на q^{a_i} и α на q^α .

2. q -МЕРА УИТТЕКЕРА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

Сначала напомним некоторые факты из работы [24]. Пусть Λ_N (при $N \in \mathbb{Z}_{>0}$) – набор сигнатур (или разбиение целого числа), имеющий вид

$$\Lambda_N = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}^N \mid \lambda_j \in \mathbb{Z} \text{ при } j = 1, 2, \dots, N, \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N\}.$$

Заметим, что, в отличие от обычного разбиения, здесь каждый параметр λ_j может быть отрицательным целым числом. Пусть $a_i \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$ при $1 \leq i \leq N$ и $q^c = (q^{c_1}, \dots, q^{c_N})$ при $c = a, \alpha$. Введем меру на Λ_N как

$$W_t(\lambda) = \frac{P_\lambda(q^a)Q_\lambda(q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)}, \quad (2.1)$$

где P_λ, Q_λ – q -функции Уиттекера, которые определяются выражениями

$$P_\lambda(q^a) = \sum_{\substack{\lambda_i^{(j)} \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq j \leq N-1, \\ \lambda_{i+1}^{(j+1)} \leq \lambda_i^{(j)} \leq \lambda_i^{(j+1)}, \\ \lambda_i^{(N)} = \lambda_i}} \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^N q^{a_j \lambda_i^{(j)}} \prod_{i=1}^{N-1} \frac{q^{-a_j \lambda_i^{(j-1)}}(q; q)_{\lambda_i^{(j)} - \lambda_{i+1}^{(j)}}}{(q; q)_{\lambda_i^{(j)} - \lambda_i^{(j-1)}}(q; q)_{\lambda_i^{(j-1)} - \lambda_{i+1}^{(j)}}}, \quad (2.2)$$

$$Q_\lambda(q^a) = \prod_{i=1}^{N-1} (q^{\lambda_i - \lambda_{i+1} + 1}; q)_\infty \int_{\mathbb{T}^N} \prod_{i=1}^N \frac{dz_i}{z_i} P_\lambda\left(\frac{1}{z}\right) \Pi(z; q^\alpha, t) m_N^q(z), \quad (2.3)$$

где

$$m_N^q(z) = \frac{1}{(2\pi i)^N N!} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \left(\frac{z_i}{z_j}; q\right)_\infty \left(\frac{z_j}{z_i}; q\right)_\infty \quad (2.4)$$

и

$$\Pi(q^a; q^\alpha, t) = \prod_{i,j=1}^N \frac{1}{(q^{\alpha_i - a_j}; q)_\infty} \prod_{j=1}^N e^{q^{a_j} t}. \quad (2.5)$$

Мера (2.1) называется двусторонней q -мерой Уиттекера.

Пусть $P_t(\lambda_N)$ – маргинальное распределение случайной величины λ_N с указанной двусторонней q -мерой Уиттекера, $P_t(\lambda_N) = \sum_{\lambda_i, 1 \leq i \leq N-1} W_t(\lambda)$. Перепишав тождество Коши для q -функции Уиттекера, получим следующую формулу в виде кратного интеграла [24].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Маргинальное распределение случайных величин λ_N с двусторонней q -мерой Уиттекера (2.1) имеет вид*

$$P_t(\lambda_N) = (q; q)_\infty^{N-1} \int_{\mathbb{T}^N} \prod_{j=1}^N \frac{dz_j}{z_j} \left(\frac{q^A}{z_1 \dots z_N} \right)^{\lambda_N} m_N^q(z) \times \\ \times \frac{\Pi(z; q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)} \frac{(q^A/(z_1 \dots z_N); q)_\infty}{\prod_{i,j=1}^N (q^{a_i}/z_j; q)_\infty}, \quad A = \sum_{j=1}^n a_j. \quad (2.6)$$

Заметим, что в правой части (2.6) зависимость от λ_N появляется только в виде степени множителя под интегралом. Это полезно для дальнейших вычислений.

Как показано в работе [24], при $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_i \rightarrow \infty$ при $i \geq 2$

$$\mathbb{P}[x_N(t) + N = \lambda_N] = P_t(\lambda_N), \quad (2.7)$$

т.е. вероятность $\mathbb{P}[x_N(t) + N = \lambda_N]$ того, что положение N -й частицы в q -TASEP с полустационарным начальным условием (1.5) будет описываться той же величиной $\lambda_N \in \mathbb{Z}$, что и маргинальное распределение величины λ_N с двусторонней q -мерой Уиттекера, если $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_i \rightarrow \infty$ при $i \geq 2$. В дальнейшем мы сосредоточимся на изучении $P_t(\lambda_N)$ для a_i и α_i общего вида.

3. q -ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

В этом разделе рассматривается q -преобразование Лапласа для $P_t(\lambda_N)$. Найдем его непосредственно без использования q -моментов (1.7). Сначала получим следующее интегральное представление.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для $\epsilon > 0$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$*

$$\left\langle \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N}; q)_\infty} \right\rangle = -(q; q)_\infty^{N-2} \int_{i\mathbb{R}-\epsilon} ds \frac{\pi}{\sin[\pi(s-A)]} (-\zeta)^{s-A} (q^{s-A+1}; q)_\infty (q^{A-s}; q)_\infty \times \\ \times \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \prod_{j=2}^N \frac{dw_j}{w_j} m_N^q(w) \frac{\Pi(w; q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)} \prod_{i,j=1}^N \frac{1}{(q^{a_i}/w_j; q)_\infty}, \quad (3.1)$$

где $m_N^q(w)$, $\Pi(w; q^\alpha, t)$ и A заданы соответственно формулами (2.4), (2.5) и в (2.6), а w_1 определяется как

$$w_1 = \begin{cases} q^s, & N = 1, \\ q^s/(w_2 \dots w_N), & N \geq 2. \end{cases} \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $|\zeta| < 1$. Как только соотношение (3.1) доказано для $|\zeta| < 1$, легко обобщить его на $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ с помощью аналитического продолжения. Сначала представим левую часть выражения (3.1) в виде

$$\sum_{\lambda_N=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N}; q)_\infty} P_t(\lambda_N), \quad (3.3)$$

где $P_t(\lambda_N)$ задано в (2.6) (так же, как (1.8) определяется формулой (2.7)).

Далее разделим сумму на две части: когда $\lambda_N \geq 0$ (положительная часть) и $\lambda_N \leq -1$ (отрицательная часть). Положительная часть рассчитывается непосредственно. Поскольку по предположению $|\zeta| < 1$, применив q -биномиальную теорему, представим положительную часть суммы в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \frac{\zeta^n}{(q; q)_n} \prod_{j=1}^N dz_j \frac{m_N^q(z_1, \dots, z_N)}{z_1 \dots z_N - q^{A+n}} \frac{\Pi(z; q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)} \frac{(q^A(z_1 \dots z_N); q)_\infty (q; q)_\infty^{N-1}}{\prod_{i,j=1}^N (q^{a_i}/z_j; q)_\infty}. \quad (3.4)$$

Что касается отрицательной части, то мы покажем, что ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \prod_{j=1}^N dz_j \frac{\zeta^n}{(q; q)_n} \frac{m_N^q(z_1, \dots, z_N)}{z_1 \dots z_N - q^{A+n}} \frac{\Pi(z; q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)} \frac{(q^A/(z_1 \dots z_N); q)_\infty (q; q)_\infty^{N-1}}{\prod_{i,j=1}^N (q^{a_i}/z_j; q)_\infty} - \\ & - (q; q)_\infty^{N-2} \int_{i\mathbb{R}-\epsilon} ds \frac{\pi}{\sin \pi(s-A)} (-\xi)^{s-A} (q^{s-A+1}; q)_\infty (q^{A-s}; q)_\infty \times \\ & \times \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \prod_{j=2}^N \frac{dw_j}{w_j} m_N^q(w) \frac{\Pi(w; q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)} \prod_{i,j=1}^N \frac{1}{(q^{a_i}/w_j; q)_\infty}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где w_1 во втором слагаемом задается выражением (3.2). Комбинируя выражения (3.3)–(3.5), получим требуемый результат (3.1).

Заметим, что q -биномиальная теорема неприменима к отрицательной части, поскольку величина $|\zeta q^{\lambda_N}| > 1$ при $\lambda_N \rightarrow -\infty$. Введем $L \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $x \in \mathbb{C}$ и рассмотрим сумму

$$\sum_{\ell=-L}^{-1} \frac{1}{(\zeta x^{-\ell}; q)_\infty} P_t(\ell). \quad (3.6)$$

Как функция от x , она аналитична при $|x| < 1$. Далее мы расширим область аналитичности по x до области, включающей $x = 1/q$, и затем возьмем предел $L \rightarrow \infty$. Случай $x = q^{-1}$ в таком пределе соответствует левой части (3.5). Заметим, что q -биномиальная теорема при $|x| < 1$ применима для произвольного фиксированного L , поскольку выполняется условие $|\zeta x^L| < 1$. Следовательно, выражение (3.6) можно без труда представить в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{(q; q)_n} \int_{\mathbb{T}^N} \prod_{j=1}^N \frac{dz_j}{z_j} \sum_{\ell=1}^L \left(\frac{x^n z_1 \dots z_N}{q^A} \right)^\ell m_N^q(z) \times \\ & \times \frac{\Pi(z; q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)} \frac{(q^A/(z_1 \dots z_N); q)_\infty (q; q)_\infty^{N-1}}{\prod_{i,j=1}^N (q^{a_i}/z_j; q)_\infty}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя теорему о вычетах, перепишем сумму по n в виде контурного интеграла:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n x^{\ell n}}{(q; q)_n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-\epsilon} du \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \frac{(-\zeta x^\ell)^u (q^{1+u}; q)_\infty}{(q; q)_\infty}, \quad (3.8)$$

где мы выбрали разрез функции z^u по $\mathbb{R}_-$ (см. лемму 3.20 и п. 2 в доказательстве теоремы 3.18 в работе [4] для аналогичного тождества). Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=-L}^{-1} \frac{1}{(\zeta x^{-\ell}; q)_{\infty}} P_t(\ell) &= \int_{i\mathbb{R}-\epsilon} \frac{du}{2\pi i} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} \frac{(-\zeta)^u (q^{u+1}; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} \times \\ &\times \int_{\mathbb{T}^N} \prod_{j=1}^N \frac{dz_j}{z_j} \sum_{\ell=1}^L \left(\frac{x^u z_1 \dots z_N}{q^A} \right)^{\ell} \frac{(q^A/(z_1 \dots z_N); q)_{\infty} (q; q)_{\infty}^{N-1}}{\prod_{i,j=1}^N (q^{a_i}/z_j; q)_{\infty}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\epsilon > 0$. Теперь рассмотрим аналитическое продолжение по x в обеих частях равенства (3.9). Пусть $\mu, \theta \in (-\pi, \pi)$ – аргументы величин $-\zeta$ и x соответственно, т. е. $-\zeta = |\zeta|e^{i\mu}$, $x = |x|e^{i\theta}$. Видно, что левая часть аналитична при $x \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, где

$$\Omega = \left\{ \frac{e^{i(\mu+\pi)/\ell}}{|\zeta|q^n}; \ell \in \mathbb{Z}_{>0}, L, n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (3.10)$$

Таким образом, мы видим, что с помощью аналитического продолжения можно положить $x = 1/q$, поскольку $1/q \notin \Omega$ при $\mu \in (-\pi, \pi)$.

В правой части формулы (3.9) сосредоточимся на интеграле

$$\int_{i\mathbb{R}-\epsilon} \frac{du}{2\pi i} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} (-\zeta x^{\ell})^u (q^{u+1}; q)_{\infty} \quad (3.11)$$

для $\ell = 1, 2, \dots, L$. Учитывая тот факт, что $|q^{ix}| = 1$ при $x \in \mathbb{R}$ и

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-\pi|x|}}{2i \sin(\pi ix)} = 1, \quad (3.12)$$

получим, что выражение (3.11) как функция от x аналитично, если

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{(-\zeta x^{\ell})^{iy}}{e^{\pi|y|}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-\pi - \mu}{\ell} < \theta < \frac{\pi - \mu}{\ell} \quad (3.13)$$

при $\ell = 1, 2, \dots, L$. Напомним, что наиболее определенный случай $\ell = L$,

$$\frac{-\pi - \mu}{L} < \theta < \frac{\pi - \mu}{L}, \quad (3.14)$$

включает в себя окрестность точки $\theta = 0$ при любом фиксированном $\mu \in (-\pi, \pi)$. Таким образом, при условии (3.14) можно расширить область аналитичности $|x| < 1$ до большей области, включающей $\mathbb{R}_+$, и, в частности, можно положить $x = 1/q$.

Положив $x = 1/q$ и просуммировав по ℓ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=-L}^{-1} \frac{1}{(\zeta q^{\ell}; q)_{\infty}} P_t(\ell) &= (q; q)_{\infty}^{N-2} \int_{i\mathbb{R}-\epsilon} \frac{du}{2\pi i} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} (-\zeta)^u (q^{u+1}; q)_{\infty} \times \\ &\times \int_{\mathbb{T}^N} \prod_{j=1}^N dz_j \frac{1 - ((z_1 \dots z_N)/q^{A+u})^L}{z_1 \dots z_N - q^{A+u}} m_N^q(z) \frac{\Pi(z; q^{\alpha}, t)}{\Pi(q^{\alpha}; q^{\alpha}, t)} \frac{(q^A/(z_1 \dots z_N); q)_{\infty}}{\prod_{i,j=1}^N (q^{a_i}/z_j; q)_{\infty}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Заметим, что на этом этапе можно взять в качестве ϵ любое положительное действительное число. Положим его равным такому значению ϵ_A , что $\epsilon_A > A$, откуда следует $|z_1 \dots z_N / q^{A+u}| < 1$. Затем можно взять предел $L \rightarrow \infty$ и получить

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=-\infty}^{-1} \frac{1}{(\zeta q^\ell; q)_\infty} P_t(\ell) &= (q; q)_\infty^{N-2} \int_{i\mathbb{R}-\epsilon_A} \frac{du}{2\pi i} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} (-\zeta)^u (q^{u+1}; q)_\infty \times \\ &\times \int_{\mathbb{T}^N} \prod_{j=1}^N dz_j \frac{1}{z_1 \dots z_N - q^{A+u}} m_N^q(z) \frac{\Pi(z; q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)} \frac{(q^A / (z_1 \dots z_N); q)_\infty}{\prod_{i,j=1}^N (q^{a_i} / z_j; q)_\infty}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Сделаем замену переменных $w_1 = z_1 \dots z_N$ и $w_j = z_j$ при $j \geq 2$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=-\infty}^{-1} \frac{1}{(\zeta q^\ell; q)_\infty} P_t(\ell) &= \\ &= (q; q)_\infty^{N-2} \int_{i\mathbb{R}-\epsilon_A} \frac{du}{2\pi i} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} (-\zeta)^u (q^{u+1}; q)_\infty \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \prod_{j=2}^N \frac{dw_j}{w_j} \int_{\mathbb{T}} dw_1 \frac{C(w; a, \alpha)}{w_1 - q^{A+u}}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$C(w; a, \alpha) = m_N^q(z) \frac{\Pi(z; q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)} \frac{(q^A / (z_1 \dots z_N); q)_\infty}{\prod_{i,j=1}^N (q^{a_i} / z_j; q)_\infty} \Big|_{\substack{z_1=w_1/w_2 \dots w_N, \\ z_j=w_j \text{ при } j \geq 2}}. \quad (3.18)$$

Заменим контур $\mathbb{T}$ по w_1 на контур $\mathbb{T}_A$, охватывающий полюс $w_1 = q^{A+u}$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=-\infty}^{-1} \frac{1}{(\zeta q^\ell; q)_\infty} P_t(\ell) &= \\ &= (q; q)_\infty^{N-2} \int_{i\mathbb{R}-\epsilon_A} \frac{du}{2\pi i} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} (-\zeta)^u (q^{u+1}; q)_\infty \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \prod_{j=2}^N \frac{dw_j}{w_j} \int_{\mathbb{T}_A} dw_1 \frac{C(w; a, \alpha)}{w_1 - q^{A+u}} - \\ &- (q; q)_\infty^{N-2} \int_{i\mathbb{R}-\epsilon_A} \frac{du}{2\pi i} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} (-\zeta)^u (q^{u+1}; q)_\infty \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \prod_{j=2}^N \frac{dw_j}{w_j} \operatorname{Res}_{w_1=q^{A+u}} \frac{C(w; a, \alpha)}{w_1 - q^{A+u}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Заменив интегрирование по u на сумму вычетов в точках $u = 0, 1, 2, \dots$ и переменные w_j на z_j , найдем, что первое слагаемое в формуле (3.19) принимает вид

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}^N} \prod_{j=1}^N dz_j \frac{\zeta^n}{(q; q)_n} \frac{m_N^q(z_1, \dots, z_N)}{z_1 \dots z_N - q^{A+n}} \frac{\Pi(z; q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)} \frac{(q^A / (z_1 \dots z_N); q)_\infty}{\prod_{i,j=1}^N (q^{a_i} / z_j; q)_\infty}, \quad (3.20)$$

что в точности совпадает с первым слагаемым в выражении (3.5) и сокращается с (3.4). Легко получить, что второе слагаемое записывается как

$$\begin{aligned} &- (q; q)_\infty^{N-2} \int_{i\mathbb{R}-\epsilon_A} \frac{du}{2\pi i} \frac{\pi}{\sin(\pi u)} (-\xi)^u (q^{u+1}; q)_\infty \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \prod_{j=2}^N \frac{dw_j}{w_j} m_N^q(w) \times \\ &\times \frac{\Pi(w; q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)} \frac{(q^{-u}; q)_\infty}{\prod_{i,j=1}^N (q^{a_i} / w_j; q)_\infty}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $w_1 = q^{A+u}/(w_2 \dots w_N)$. С помощью сдвига по u , т. е. заменой $s = u + A$, получим второе слагаемое в (3.5). ■

Таким образом, теперь мы имеем еще одно интегральное представление, более полезное для нашей цели.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При $\epsilon > 0$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ имеем

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N}; q)_\infty} \right\rangle &= \frac{(-\pi)^N}{(2\pi i)^N N!} \int_{(i\mathbb{R}-\epsilon)^N} \prod_{j=1}^N \frac{ds_j}{q^{(N-1)a_j}(q; q)_\infty} \frac{(-\zeta)^{s_j}}{(-\zeta)^{a_j}} \frac{\Pi(q^s; q^\alpha, t)}{\Pi(q^a; q^\alpha, t)} \times \\ &\times \prod_{i,j=1}^N \frac{(q^{s_i-a_j+1}; q)_\infty}{\sin[\pi(s_i-a_j)]} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\sin[\pi(s_j-s_i)] \sin[\pi(a_j-a_i)] (q^{s_j}-q^{s_i})(q^{a_j}-q^{a_i})}{(q^{a_i-a_j}; q)_\infty (q^{a_j-a_i}; q)_\infty}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве предложения 2, предположим, что $|\zeta| < 1$. Тогда уравнения (3.1) и (3.22) сводятся к суммам вычетов в правой полуплоскости, поскольку оба интеграла обращаются в нуль при $\text{Re } s \rightarrow \infty$.

Мы видим, что подынтегральное выражение в (3.1) имеет полюсы в следующих точках:

$$s = \alpha_k + \frac{\ln[\prod_{j=2}^N w_j]}{\ln q} + n_1 + \frac{2\pi i \ell}{\ln q}, \quad a_k + \frac{\ln[\prod_{j=2}^N w_j]}{\ln q} + n_1 + \frac{2\pi i \ell}{\ln q} \quad (3.23)$$

и

$$w_j = q^{\alpha_k+n_j}, q^{a_k+n_j}, \quad j = 2, 3, \dots, N, \quad (3.24)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$, $n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}$ и $\ell \in \mathbb{Z}$. Однако мы знаем, что, когда по крайней мере одна пара переменных w_j содержит одинаковые a_k или α_k , выбор не имеет значения. Пусть, например,

$$(w_j, w_k) = ((q^{a_m+n_j}, q^{a_m+n_k}), (q^{\alpha_m+n_j}, q^{\alpha_m+n_k})) \quad (3.25)$$

для некоторых j, k и m . Тогда находим, что множитель $(w_j/w_k; q)_\infty (w_j/w_k; q)_\infty$ в выражении для $m_N^q(w)$ из подынтегрального выражения в (3.1) обращается в нуль,

$$\left(\frac{w_j}{w_k}; q \right)_\infty \left(\frac{w_j}{w_k}; q \right)_\infty = (q^{n_j-n_k}; q)_\infty (q^{n_k-n_j}; q)_\infty = 0. \quad (3.26)$$

Поэтому нужно рассмотреть только полюсы, в которых все w_j для $j = 1, 2, \dots, N$ имеют различные a_k или α_k . Более того, вклад от полюсов не меняется при их перестановке, поскольку подынтегральное выражение в (3.1) симметрично относительно перестановок переменных w_i . Таким образом, получим, что (3.1) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N}; q)_\infty} \right\rangle &= N! \sum_{N_1=0}^N \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{N_1} \leq N} \sum_{1 \leq j_{N_1+1} < \dots < j_N \leq N} \times \\ &\times \sum_{n_1, \dots, n_N=0}^{\infty} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f(a_{j_1}, \dots, a_{j_{N_1}}, \alpha_{j_{N_1+1}}, \dots, \alpha_{j_N}, \mathbf{n}, \ell, N_1), \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$, а функция $f(a_{j_1}, \dots, a_{j_{N_1}}, \alpha_{j_{N_1+1}}, \dots, \alpha_{j_N}, \mathbf{n}, \ell, N_1)$ представляет собой вычет в полюсах

$$w_k = \begin{cases} q^{a_{j_k} + n_k}, & k = 1, \dots, N_1, \\ q^{\alpha_{j_k} + n_k}, & k = N_1 + 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.28)$$

Заметим, что в этом случае соответствующий полюс для s находится в точке

$$s = \sum_{k=1}^{N_1} a_{j_k} + \sum_{k=N_1+1}^N \alpha_{j_k} + \sum_{j=1}^N n_j + \frac{2\pi i \ell}{\ln q}. \quad (3.29)$$

Аналогично выражение (3.22) имеет полюс в точках

$$s_j = a_k + n_j, \alpha_k + n_j + \frac{2\pi i \ell_k}{\ln q}, \quad (3.30)$$

где $j, k = 1, 2, \dots, N$, $n_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и $\ell_j \in \mathbb{Z}$. Легко понять, что если по крайней мере одна пара точек s_j , $j = 1, 2, \dots, N$, имеет общие a_k или α_k , они не дают вклада: например, если $(s_i, s_j) = (a_k + n_i, a_k + n_j)$, то множитель $\sin[\pi(s_j - s_i)]$ в числителе формулы (3.22) становится равным нулю:

$$\sin[\pi(s_j - s_i)] = \sin[\pi(n_j - n_i)] = 0. \quad (3.31)$$

Аналогично найдем, что $(s_{j_1}, s_{j_2}) = (\alpha_k + n_{j_1} + 2\pi i \ell_{j_1} / \ln q, \alpha_k + n_{j_2} + 2\pi i \ell_{j_2} / \ln q)$ сокращается с $(s_{j_1}, s_{j_2}) = (\alpha_k + n_{j_1} + 2\pi i \ell_{j_2} / \ln q, \alpha_k + n_{j_2} + 2\pi i \ell_{j_1} / \ln q)$, поскольку в первом случае тот же множитель $\sin[\pi(s_{j_2} - s_{j_1})]$ порождает

$$\sin[\pi(s_{j_2} - s_{j_1})] = (-1)^{n_{j_2} - n_{j_1}} \sin\left(\frac{2\pi i(\ell_{j_2} - \ell_{j_1})}{\ln q}\right), \quad (3.32)$$

а в последнем случае получим то же выражение, но с противоположным знаком. Кроме того, вычеты в полюсах с разными a_k или α_k не меняются при перестановке полюсов, поскольку подынтегральное выражение в (3.22) симметрично относительно перестановок переменных s_j . Таким образом, мы преобразовали выражение (3.22) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N}; q)_{\infty}} \right\rangle &= N! \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{N_1} \leq N} \sum_{1 \leq j_{N_1+1} < \dots < j_N \leq N} \times \\ &\times \sum_{n_1, \dots, n_N=0}^{\infty} \sum_{\ell_{N_1+1}, \dots, \ell_N \in \mathbb{Z}} g(a_{j_1}, \dots, a_{j_{N_1}}, \alpha_{j_{N_1+1}}, \dots, \alpha_{j_N}, \mathbf{n}, \ell, N_1), \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$, $\ell = (\ell_{N_1+1}, \dots, \ell_N)$, а $g(a_{j_1}, \dots, a_{j_{N_1}}, \alpha_{j_{N_1+1}}, \dots, \alpha_{j_N}, \mathbf{n}, \ell, N_1)$ представляет собой вычет в полюсах

$$s_k = \begin{cases} a_{j_k} + n_k, & k = 1, 2, \dots, N_1, \\ \alpha_{j_k} + n_k + \frac{2\pi i \ell_k}{\ln q}, & k = N_1 + 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.34)$$

В приложении доказано равенство

$$\begin{aligned} f(a_{j_1}, \dots, a_{j_{N_1}}, \alpha_{j_{N_1+1}}, \dots, \alpha_{j_N}, \mathbf{n}, \ell, N_1) = \\ = \sum_{\substack{\ell_{N_1+1}, \dots, \ell_N \in \mathbb{Z}, \\ \ell_{N_1+1} + \dots + \ell_N = \ell}} g(a_{j_1}, \dots, a_{j_{N_1}}, \alpha_{j_{N_1+1}}, \dots, \alpha_{j_N}, \mathbf{n}, \ell, N_1), \end{aligned} \quad (3.35)$$

откуда сразу следует эквивалентность выражений (3.27) и (3.33). ■

4. ФОРМУЛЫ В ТЕРМИНАХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ФРЕДГОЛЬМА

В данном разделе мы получим представление для q -преобразования Лапласа $\langle 1/(\zeta q^{\lambda_N}; q)_{\infty} \rangle$ через определитель Фредгольма. Для этого используем предложение 2 и рациональные и тригонометрические версии определителей Коши:

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (q^{a_i} - q^{a_j})(q^{s_j} - q^{s_i})}{\prod_{i,j=1}^N (q^{s_i} - q^{a_j})} = \det \left(\frac{1}{q^{s_i} - q^{a_j}} \right)_{i,j=1}^N, \quad (4.1)$$

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} \sin[\pi(a_i - a_j)] \sin[\pi(s_j - a_i)]}{\prod_{i,j=1}^N \sin[\pi(s_i - a_j)]} = \det \left(\frac{1}{\sin[\pi(s_i - a_j)]} \right)_{i,j=1}^N. \quad (4.2)$$

Более подробное описание определителей Коши можно найти, например, в работе [28].

ТЕОРЕМА 2. Для двусторонней q -меры Уиттекера (2.1) при $\zeta \neq q^n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\left\langle \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N}; q)_{\infty}} \right\rangle = \det(1 - fK)_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (4.3)$$

Здесь ядро определено формулами

$$f(x) = \frac{-\zeta}{-\zeta + e^x}, \quad (4.4)$$

$$K(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k(x_1; a, \alpha, t) \psi_k(x_2; a, \alpha, t), \quad (4.5)$$

а функции $\phi_k(x_1; a, \alpha, t)$ и $\psi_k(x_2; a, \alpha, t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_k(x_1; a, \alpha, t) = \sqrt{q^{a_{k+1}} - q^{\alpha_{k+1}}} \int_D \frac{\ln q \, dv}{2\pi i} \frac{e^{vx_1 + q^v t}}{q^{(N-1)v} (q^v - q^{a_{k+1}})} \times \\ \times \prod_{\ell=1}^k \frac{q^v - q^{\alpha_{\ell}}}{q^v - q^{a_{\ell}}} \prod_{m=1}^N \frac{(q^{s-\alpha_m+1}; q)_{\infty}}{(q^{a_m-s+1}; q)_{\infty}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_k(x_2; a, \alpha, t) = \sqrt{q^{a_{k+1}} - q^{\alpha_{k+1}}} \int_{i\mathbb{R}} \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{sx_2 + q^s t - \delta|s|} q^{Ns}}{q^s - q^{\alpha_{k+1}}} \times \\ \times \prod_{\ell=1}^k \frac{q^s - q^{a_{\ell}}}{q^s - q^{\alpha_{\ell}}} \prod_{m=1}^N \frac{(q^{s-a_m+1}; q)_{\infty}}{(q^{\alpha_m-s+1}; q)_{\infty}}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

при этом в выражении (4.7) введен параметр $\delta = 0+$, обеспечивающий сходимость интеграла, а D – контур, проходящий через точки a_j , $j = 1, \dots, N$, в положительном направлении.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что представление через N -кратный интеграл (3.22) можно записать в виде (4.3). Следующие вычисления имеют некоторое сходство с вычислениями, проведенными в работе [25] для полимерных моделей О'Коннелла–Йора и $\ln$ -гамма.

Заметим, что множитель в формуле (3.22)

$$\prod_{i,j=1}^N \frac{(q^{s_i-a_j+1}; q)_\infty}{\sin[\pi(s_i-a_j)]} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\sin[\pi(s_j-s_i)] \sin[\pi(a_j-a_i)] (q^{s_j}-q^{s_i})(q^{a_j}-q^{a_i})}{(q^{a_i-a_j}; q)_\infty (q^{a_j-a_i}; q)_\infty} \quad (4.8)$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} & (-1)^N \prod_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N \frac{1}{(q^{a_i-a_j}; q)_\infty} \prod_{i,j=1}^N (q^{s_i-a_j}; q)_\infty \prod_{j=1}^N q^{Na_j} \times \\ & \times \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} \sin[\pi(a_i-a_j)] \sin[\pi(s_j-a_i)]}{\prod_{i,j=1}^N \sin[\pi(s_i-a_j)]} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (q^{a_i}-q^{a_j})(q^{s_j}-q^{s_i})}{\prod_{i,j=1}^N (q^{s_i}-q^{a_j})} = \\ & = (-1)^N \prod_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N \frac{1}{(q^{a_i-a_j}; q)_\infty} \prod_{i,j=1}^N (q^{s_i-a_j}; q)_\infty \prod_{j=1}^N q^{Na_j} \times \\ & \times \det \left(\frac{1}{q^{s_i}-q^{a_j}} \right)_{i,j=1}^N \det \left(\frac{1}{\sin[\pi(s_i-a_j)]} \right)_{i,j=1}^N, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где в последнем выражении используются формулы (4.1) и (4.2). Подставив это выражение в формулу (3.22), получим

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N^{(N)}}; q)_\infty} \right\rangle = \\ & = \frac{1}{(2i)^N N!} \int_{(i\mathbb{R}-\epsilon)^N} \prod_{j=1}^N \frac{ds_j q^{a_j}}{(q; q)_\infty} \frac{(-\zeta)^{s_j} \Pi(q^{s_j}; q^\alpha, t)}{(-\zeta)^{a_j} \Pi(q^{a_j}; q^\alpha, t)} \frac{\prod_{i,j=1}^N (q^{s_i-a_j}; q)_\infty}{\prod_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^N (q^{a_j-a_i}; q)_\infty} \times \\ & \times \det \left(\frac{1}{q^{s_i}-q^{a_j}} \right)_{i,j=1}^N \det \left(\frac{1}{\sin[\pi(s_i-a_j)]} \right)_{i,j=1}^N. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Получив детерминантную формулу такого вида, можно непосредственно прийти к определителю Фредгольма. Заметив, что к выражению (4.10) применимо тождество Андреева, получим простое детерминантное выражение ранга N :

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N^{(N)}}; q)_\infty} \right\rangle = \det \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R}-\epsilon} \frac{ds q^{a_j}}{(q; q)_\infty} \frac{(-\zeta)^s \Pi(q^s; q^\alpha, t)}{(-\zeta)^{a_j} \Pi(q^{a_j}; q^\alpha, t)} \times \right. \\ & \times \left. \frac{\prod_{m=1}^N (q^{s-a_m}; q)_\infty}{\prod_{\substack{m=1, \\ m \neq j}}^N (q^{a_j-a_m}; q)_\infty} \frac{q^{a_i}}{q^s - q^{a_i}} \frac{\pi}{\sin[\pi(s-a_j)]} \right)_{i,j=1}^N. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Теперь сдвинем контур из $i\mathbb{R} - \epsilon$ в $i\mathbb{R} + \epsilon_A$, где $a_j < \epsilon_A < a_j + 1$, $j = 1, \dots, N$. С учетом равенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R} - \epsilon} \frac{ds q^{a_j}}{(q; q)_\infty} \frac{(-\zeta)^s \Pi(q^s; q^\alpha, t)}{(-\zeta)^{a_j} \Pi(q^{a_j}; q^\alpha, t)} \frac{\prod_{m=1}^N (q^{s-a_m}; q)_\infty}{\prod_{m=1, m \neq j}^N (q^{a_j-a_m}; q)_\infty} \frac{q^{a_i}}{q^s - q^{a_i}} \frac{\pi}{\sin[\pi(s - a_j)]} = \\ & = \delta_{i,j} + \frac{1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R} + \epsilon_A} \frac{ds q^{a_j}}{(q; q)_\infty} \frac{(-\zeta)^s \Pi(q^s; q^\alpha, t)}{(-\zeta)^{a_j} \Pi(q^{a_j}; q^\alpha, t)} \times \\ & \quad \times \frac{\prod_{m=1}^N (q^{s-a_m}; q)_\infty}{\prod_{m=1, m \neq j}^N (q^{a_j-a_m}; q)_\infty} \frac{q^{a_i}}{q^s - q^{a_i}} \frac{\pi}{\sin[\pi(s - a_j)]} \end{aligned} \quad (4.12)$$

и соотношения

$$\frac{\pi(-\zeta)^y}{\sin(\pi y)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{-\zeta e^{xy}}{-\zeta + e^x} \quad (4.13)$$

для $0 < y < 1$ получим

$$\left\langle \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N^{(N)}}; q)_\infty} \right\rangle = \det \left(\delta_{i,j} + \int_{-\infty}^{\infty} dx A(i, x) B(x, j) \right)_{i,j=1}^N, \quad (4.14)$$

где

$$A(i, x) = \int_{i\mathbb{R} + \epsilon_A} \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{sx - \delta|s|} \Pi(q^s; q^\alpha, t) q^{a_i}}{q^s - q^{a_i}} \prod_{m=1}^N (q^{s-a_m}; q)_\infty, \quad (4.15)$$

$$B(x, i) = \frac{e^{-a_j x}}{(q; q)_\infty \Pi(q^{a_j}; q^\alpha, t)} \prod_{m=1}^N \frac{1}{(q^{s-a_m}; q)_\infty} \frac{-\zeta}{-\zeta + e^x}. \quad (4.16)$$

В выражении (4.15) введен параметра $\delta = 0+$, обеспечивающий сходимость интеграла. Используя основное свойство определителя, мы получаем, что

$$\det \left(\delta_{i,j} + \int_{-\infty}^{\infty} dx A(i, x) B(x, j) \right)_{i,j=1}^N = \det(1 + BA)_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (4.17)$$

где правая часть является определителем оператора Фредгольма на $L^2(\mathbb{R})$ с ядром

$$\begin{aligned} (BA)(x_1, x_2) &= \frac{-\zeta}{-\zeta + e^{x_1}} \sum_{j=1}^N \int_{i\mathbb{R} + \epsilon_A} \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{(q^s - q^{a_j})t + sx_2 - a_j x_1 - \delta|s|}}{(q; q)_\infty} \times \\ & \quad \times \frac{(q^{\alpha_m - a_j}; q)_\infty}{(q^{\alpha_m - s}; q)_\infty} \frac{\prod_{m=1}^N (q^{s-a_m}; q)_\infty}{\prod_{m=1, m \neq j}^N (q^{a_j-a_m}; q)_\infty} \frac{q^{a_j}}{q^s - q^{a_j}}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Перепишав сумму по $j = 1, \dots, N$ в виде интеграла по контуру D , проходящему через точки a_j , $j = 1, \dots, N$, в положительном направлении, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta \ln q}{-\zeta + e^x} \int_D \frac{dv}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R} + \epsilon_A} \frac{ds}{2\pi i} e^{(q^s - q^v)t + sx_2 - vx_1 - \delta|s|} \prod_{m=1}^N \frac{(q^{\alpha_m - v}; q)_\infty (q^{s - \alpha_m}; q)_\infty}{(q^{\alpha_m - s}; q)_\infty (q^{v - \alpha_m}; q)_\infty} \frac{q^v}{q^s - q^v} = \\ & = \frac{\zeta \ln q}{-\zeta + e^x} \int_D \frac{dv}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R} + \epsilon_A} \frac{ds}{2\pi i} e^{(q^s - q^v)t + sx_2 - vx_1 - \delta|s|} q^{N(s-v)+v} \times \\ & \times \prod_{m=1}^N \frac{(q^{\alpha_m - v + 1}; q)_\infty (q^{s - \alpha_m + 1}; q)_\infty}{(q^{\alpha_m - s + 1}; q)_\infty (q^{v - \alpha_m + 1}; q)_\infty} \left(\prod_{m=1}^N \frac{q^v - q^{\alpha_m}}{q^s - q^{\alpha_m}} \frac{q^s - q^{\alpha_m}}{q^v - q^{\alpha_m}} - 1 \right) \frac{1}{q^s - q^v}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

В выражении в скобках в последней строке мы вычли единицу, которая не дает вклада в интеграл. Подставляя соотношение

$$\begin{aligned} & \left(\frac{q^v - q^{\alpha_m}}{q^s - q^{\alpha_m}} \frac{q^s - q^{\alpha_m}}{q^v - q^{\alpha_m}} - 1 \right) \frac{1}{q^s - q^v} = \\ & = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{q^{\alpha_{k+1}} - q^{\alpha_{k+1}}}{(q^s - q^{\alpha_{k+1}})(q^v - q^{\alpha_{k+1}})} \prod_{\ell=1}^k \frac{(q^s - q^{\alpha_\ell})(q^v - q^{\alpha_\ell})}{(q^s - q^{\alpha_\ell})(q^v - q^{\alpha_\ell})} \end{aligned} \quad (4.20)$$

в формулу (4.19), находим, что $(BA)(x_1, x_2) = -f(x_1)K(x_1, x_2)$, где $f(x)$ и $K(x_1, x_2)$ заданы формулами (4.4) и (4.5). Отсюда и из равенств (4.14), (4.17) получим искомое выражение (4.3). ■

Полученное выражение (4.3) можно представить в виде, приближенном к тому, который использовался в теореме 3.18 в работе [4].

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо соотношение*

$$\left\langle \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N}; q)_\infty} \right\rangle = \det(1 + K_\zeta)_{L^2(C_a)}, \quad (4.21)$$

где

$$K_\zeta(v_1, v_2) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R} + \epsilon} ds \frac{(-\zeta)^s \pi}{\sin(\pi s)} \frac{e^{(q^{v_1+s} - q^{v_1})t}}{q^{s+v_1} - q^{v_2}} \prod_{m=1}^N \frac{(q^{s+v_1-\alpha_m}; q)_\infty (q^{\alpha_m-v_1}; q)_\infty}{(q^{v_1-\alpha_m}; q)_\infty (q^{\alpha_m-s-v_1}; q)_\infty}. \quad (4.22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множитель $\prod_{m=2}^N (q^{\alpha_m - v_1}; q)_\infty / (q^{\alpha_m - x}; q)_\infty$ при $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_m \rightarrow \infty$, $m = 2, 3, \dots$, обращается в единицу, поэтому ядро (4.22) сводится к ядру (1.10) из теоремы 1 подстановкой $q^\alpha \rightarrow \alpha$ и заменой переменных $q^{v_i} = w_i$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем левую часть уравнения (4.19) в виде

$$\int_D \frac{dv}{2\pi i} C(x_2, v) D(v, x_1), \quad (4.23)$$

где

$$C(x, v) = \frac{\ln q}{2\pi i} \int_{i\mathbb{R} + \epsilon_A} ds \frac{e^{sx + q^s t - \delta|s|}}{q^s - q^v} \prod_{m=1}^N \frac{(q^{s - \alpha_m}; q)_\infty}{(q^{\alpha_m - s}; q)_\infty}, \quad (4.24)$$

$$D(v, x) = \frac{\zeta}{-\zeta + e^x} e^{-vx - q^v t} \prod_{m=1}^N \frac{(q^{\alpha_m - v}; q)_\infty}{(q^{v - \alpha_m}; q)_\infty}. \quad (4.25)$$

Из этих уравнений, а также из формул (4.14) и (4.17) имеем

$$\left\langle \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N}; q)_\infty} \right\rangle = \det(1 + CD)_{L^2(\mathbb{R})} = \det(1 + DC)_{L^2(C_a)}. \quad (4.26)$$

Легко видеть, что $(DC)(v_1, v_2) = K_\zeta(v_1, v_2)$ (4.22). ■

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство соотношения (3.35)

Докажем соотношение (3.35) для случая $(j_1, j_2, \dots, j_N) = (1, 2, \dots, N)$. Остальные случаи можно доказать аналогичным образом. Далее мы используем обозначения $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N_1})$ и $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{N_1+1}, \dots, \alpha_N)$.

Сначала получим явное выражение для функции $f(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}, \ell, N_1)$, заданной после уравнения (3.27). Для этого перепишем формулу (3.1) в виде

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{(\zeta q^{\lambda_N}; q)_\infty} \right\rangle = \\ & = \frac{-(q; q)_\infty^{N-2}}{(2\pi i)^N N! \Pi(q^a; q^\alpha, t)} \int_{i\mathbb{R}-\epsilon} ds \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \prod_{j=2}^N \frac{dw_j}{w_j} \frac{\pi(q^{s-A+1}; q)_\infty (q^{A-s}; q)_\infty}{\sin \pi(s-A)} \times \\ & \times \prod_j^{(1)} e^{w_j t} (-\zeta)^{\ln w_j / \ln q} \prod_{i,j}^{(1)} \frac{1}{(q^{a_i}/w_j; q)_\infty (q^{\alpha_i}/w_j; q)_\infty} \prod_{i < j}^{(1)} \left(\frac{w_i}{w_j}; q \right)_\infty \left(\frac{w_j}{w_i}; q \right)_\infty \times \\ & \times \prod_j^{(2)} e^{w_j t} (-\zeta)^{\ln w_j / \ln q} \prod_{i,j}^{(2)} \frac{1}{(q^{a_i}/w_j; q)_\infty (q^{\alpha_i}/w_j; q)_\infty} \prod_{i < j}^{(2)} \left(\frac{w_i}{w_j}; q \right)_\infty \left(\frac{w_j}{w_i}; q \right)_\infty \times \\ & \times \prod_{i,j}^{(3)} \frac{(w_i/w_j; q)_\infty (w_j/w_i; q)_\infty}{(q^{a_i}/w_j; q)_\infty (q^{a_j}/w_i; q)_\infty (q^{\alpha_i}/w_j; q)_\infty (q^{\alpha_j}/w_i; q)_\infty}, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где используются сокращенные обозначения для произведений

$$\begin{aligned} \prod_j^{(1)} &= \prod_{j=1}^{N_1}, & \prod_{i,j}^{(1)} &= \prod_{i,j=1}^{N_1}, & \prod_{i < j}^{(1)} &= \prod_{1 \leq i < j \leq N_1}, & \prod_j^{(2)} &= \prod_{j=N_1+1}^N, \\ \prod_{i,j}^{(2)} &= \prod_{i,j=N_1+1}^N, & \prod_{i < j}^{(2)} &= \prod_{N_1+1 \leq i < j \leq N}, & \prod_{i,j}^{(3)} &= \prod_{i=1}^{N_1} \prod_{j=N_1+1}^N. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Из формулы (П.1) следует, что функцию $f(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}, \ell, N_1)$ можно представить в виде

$$f(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}, \ell, N_1) = \frac{1}{N! \Pi(q^a; q^\alpha, t)} P^{(1)} P^{(2)} P^{(3)}. \quad (\text{П.3})$$

Здесь

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= \prod_j^{(1)} \frac{e^{q^{a_j+n_j} t} \zeta^{n_j}}{(q; q)_{n_j}} \prod_{i,j}^{(1)} \frac{1}{(q^{\alpha_i-a_j-n_j}; q)_\infty} \times \\ & \times \prod_{i < j}^{(1)} \frac{(q^{a_i-a_j+n_i-n_j}; q)_\infty (q^{a_j-a_i+n_j-n_i}; q)_\infty}{q^{n_i n_j} (q^{a_i-a_j-n_j}; q)_\infty (q^{a_j-a_i-n_i}; q)_\infty}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{(2)} &= \frac{\pi}{\ln q} \prod_j^{(2)} \frac{e^{q^{\alpha_j + n_j} t} (-1)^{\alpha_j - a_j} \zeta^{\alpha_j - a_j + n_j}}{(q; q)_{n_j}} \prod_{i,j}^{(2)} \frac{q^{(a_i - \alpha_i) n_j}}{(q^{a_i - \alpha_j - n_j}; q)_{\infty}} \times \\
&\quad \times \prod_{i < j}^{(2)} \frac{(q^{\alpha_i - \alpha_j + n_i - n_j}; q)_{\infty} (q^{\alpha_j - \alpha_i + n_j - n_i}; q)_{\infty}}{q^{n_i n_j} (q^{\alpha_i - \alpha_j - n_j}; q)_{\infty} (q^{\alpha_j - \alpha_i - n_i}; q)_{\infty}} \times \\
&\quad \times \frac{(-\zeta)^{2\pi i \ell / \ln q} (q^{\alpha^{(2)} - A^{(2)} + 1}; q)_{\infty} (q^{A^{(2)} - \alpha^{(2)}}; q)_{\infty}}{\sin(\alpha^{(2)} - A^{(2)} + 2\pi i \ell / \ln q) (q; q)_{\infty}^2}, \\
P^{(3)} &= \prod_{i,j}^{(3)} \frac{q^{(a_j - \alpha_j) n_i} (q^{a_i - \alpha_j + n_i - n_j}; q)_{\infty} (q^{\alpha_j - a_i + n_j - n_i}; q)_{\infty}}{q^{n_i n_j} (q^{a_i - \alpha_j - n_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_i - n_i}; q)_{\infty} (q^{\alpha_i - \alpha_j - n_j}; q)_{\infty} (q^{\alpha_j - a_i - n_i}; q)_{\infty}},
\end{aligned} \tag{П.4}$$

где $\alpha^{(2)} = \sum_{j=N_1+1}^N \alpha_j$, $A^{(2)} = \sum_{j=N_1+1}^N a_j$.

Перепишав правую часть соотношения (3.22) аналогичным образом, получим явное выражение для функции $g(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}, \ell, N_1)$, указанной после формулы (3.33):

$$g(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}, \ell, N_1) = \frac{1}{N!} Q^{(1)} Q^{(2)} Q^{(3)}, \tag{П.5}$$

где

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} &= \prod_j^{(1)} \frac{e^{q^{a_j + n_j} t} \zeta^{n_j}}{(q; q)_{n_j} q^{(N_1-1)a_j}} \prod_{i,j}^{(1)} \frac{1}{(q^{\alpha_i - a_j - n_j}; q)_{\infty}} \times \\
&\quad \times \prod_{i < j}^{(1)} \frac{(q^{a_i - a_j + n_i + 1}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_i + n_j + 1}; q)_{\infty} (q^{a_j + n_j} - q^{a_i + n_i})(q^{a_i} - q^{a_j})}{(q^{a_i - a_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_i}; q)_{\infty}}, \\
Q^{(2)} &= \prod_j^{(2)} \frac{\pi q^{n_j(n_j+1)/2} e^{q^{\alpha_j + n_j} t} \zeta^{\alpha_j + n_j + 2\pi i \ell_j / \ln q - a_j}}{\ln q (q; q)_{n_j} (q; q)_{\infty}^2 q^{(N-N_1-1)a_j}} \times \\
&\quad \times \prod_{i,j}^{(2)} \frac{(q^{\alpha_i - a_j + n_i + 1}; q)_{\infty}}{\sin[\pi(\alpha_i - a_j + 2\pi i \ell_i / \ln q)]} \times \\
&\quad \times \prod_{i < j}^{(2)} \frac{\sin[\pi(\alpha_j - \alpha_i + 2\pi i(\ell_j - \ell_i) / \ln q)] \sin[\pi(a_j - a_i)] (q^{\alpha_j + n_j} - q^{\alpha_i + n_i})(q^{a_j} - q^{a_i})}{(q^{\alpha_i - \alpha_j - n_j}; q)_{\infty} (q^{\alpha_j - \alpha_i - n_i}; q)_{\infty} (q^{a_i - a_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_i}; q)_{\infty}}, \\
Q^{(3)} &= \prod_{i,j}^{(3)} \frac{(q^{a_i - a_j + n_i + 1}; q)_{\infty} (q^{\alpha_j - a_i + n_j + 1}; q)_{\infty} (q^{\alpha_j + n_j} - q^{a_i + n_i})(q^{a_i} - q^{a_j})}{q^{a_i + a_j} (q^{\alpha_i - \alpha_j - n_j}; q)_{\infty} (q^{\alpha_j - a_i - n_i}; q)_{\infty} (q^{a_i - a_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_i}; q)_{\infty}}.
\end{aligned} \tag{П.6}$$

Далее мы покажем, что

$$P^{(1)} = Q^{(1)}, \quad \sum_{\substack{\ell_{N_1+1}, \dots, \ell_N = -\infty, \\ \ell_{N_1+1} + \dots + \ell_N = \ell}}^{\infty} P^{(2)} = Q^{(2)}, \quad P^{(3)} = Q^{(3)}, \tag{П.7}$$

откуда немедленно следует соотношение (3.35).

Чтобы доказать соотношение $P^{(1)} = Q^{(1)}$, достаточно показать, что

$$\begin{aligned}
&\frac{(q^{a_i - a_j + n_i - n_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_i + n_j - n_i}; q)_{\infty}}{q^{n_i n_j} (q^{a_i - a_j - n_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_i - n_i}; q)_{\infty}} = \\
&= \frac{(q^{a_i - a_j + n_i + 1}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_i + n_j + 1}; q)_{\infty} (q^{a_j + n_j} - q^{a_i + n_i})(q^{a_i} - q^{a_j})}{q^{a_i + a_j} (q^{a_i - a_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_i}; q)_{\infty}}.
\end{aligned} \tag{П.8}$$

Левая часть уравнения (П.8) представима в виде

$$\frac{(q^{a_i - a_j + n_i - n_j}; q)_{n_j+1} (q^{a_j - a_i + n_j - n_i}; q)_{n_i+1}}{q^{n_i n_j} (q^{a_i - a_j - n_j}; q)_{n_j} (q^{a_j - a_i - n_i}; q)_{n_i}} \frac{(q^{a_i - a_j + n_i + 1}; q)_\infty (q^{a_j - a_i + n_j + 1}; q)_\infty}{(q^{a_i - a_j}; q)_\infty (q^{a_j - a_i}; q)_\infty}. \quad (\text{П.9})$$

Применив соотношение

$$(x; q)_n = (-x)^n q^{n(n-1)/2} (x^{-1} q^{1-n}; q)_n \quad (\text{П.10})$$

к $(q^{a_j - a_i + n_j - n_i}; q)_{n_i+1}$ и $(q^{a_j - a_i - n_i}; q)_{n_i}$ в выражении (П.9), увидим, что первый множитель можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{(q^{a_i - a_j + n_i - n_j}; q)_{n_j+1} (q^{a_i - a_j - n_j}; q)_{n_i+1} (-q^{a_j - a_i + n_j - n_i})_{n_i+1} q^{n_i(n_i+1)/2}}{(q^{a_i - a_j - n_j}; q)_{n_j} (q^{a_i - a_j + 1}; q)_{n_i} (-q^{a_j - a_i - n_i})_{n_i} q^{n_i(n_i-1)/2 + n_i n_j}} = \\ = \frac{(q^{a_j + n_j} - q^{a_i + n_i})(q^{a_i} - q^{a_j})}{q^{a_i + a_j}}, \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

где использовано соотношение

$$\begin{aligned} (q^{a_i - a_j + n_i - n_j}; q)_{n_j+1} (q^{a_i - a_j - n_j}; q)_{n_i} &= (q^{a_i - a_j - n_j}; q)_{n_i + n_j} = \\ &= (q^{a_i - a_j - n_j}; q)_{n_j+1} (q^{a_i - a_j + 1}; q)_{n_i}. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Подставим его в выражение (П.9) и получим (П.8).

Чтобы доказать соотношение $P^{(3)} = Q^{(3)}$, достаточно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{q^{a_i} (q^{a_i - \alpha_j + n_i - n_j + 1}; q)_\infty (q^{\alpha_j - a_i + n_j - n_i}; q)_\infty}{q^{(n_i+1)(\alpha_j + n_j)} (q^{a_i - \alpha_j - n_j}; q)_\infty (q^{\alpha_j - a_i + n_j + 1}; q)_\infty} = \\ = - \frac{(q^{a_i - a_j + n_i + 1}; q)_\infty (q^{a_j - a_i - n_i}; q)_\infty}{q^{a_j n_i} (q^{a_i - a_j + 1}; q)_\infty (q^{a_j - a_i}; q)_\infty}. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

С помощью формулы (П.10) левую часть формулы (П.13) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{q^{a_i} (q^{\alpha_j - a_i + n_j - n_i}; q)_{n_i+1}}{q^{(n_i+1)(\alpha_j + n_j)} (q^{a_i - \alpha_j - n_j}; q)_{n_i+1}} = \\ = \frac{q^{a_i} (q^{a_i - \alpha_j - n_j}; q)_{n_i+1} (-q^{\alpha_j - a_i + n_j - n_i})_{n_i+1} q^{n_i(n_i+1)/2}}{q^{(n_i+1)(\alpha_j + n_j)} (q^{a_i - \alpha_j - n_j}; q)_{n_i+1}} = \\ = (-1)^{n_i+1} q^{-(a_i + n_i)n_i} q^{n_i(n_i-1)/2}. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Из формулы (П.10) также следует, что правая часть (П.13) принимает вид

$$\begin{aligned} - \frac{(q^{a_j - a_i - n_i}; q)_{n_i}}{q^{a_j n_i} (q^{a_i - a_j + 1}; q)_{n_i}} = - \frac{(q^{a_i - a_j + 1}; q)_{n_i} (-q^{a_j - a_i - n_i})_{n_i} q^{n_i(n_i-1)/2}}{q^{a_j n_i} (q^{a_i - a_j + 1}; q)_{n_i}} = \\ = (-1)^{n_i+1} q^{-(a_i + n_i)n_i} q^{n_i(n_i-1)/2}. \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Наконец, покажем, что $P^{(2)} = Q^{(2)}$. Для этого достаточно показать, что

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\ell_1, \dots, \ell_N = -\infty, \\ \ell_1 + \dots + \ell_N = \ell}}^{\infty} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} \sin[\pi(z_j - z_i + 2\pi i(\ell_j - \ell_i)/\ln q)]}{\prod_{i,j=1}^N \sin[\pi(z_i - a_j + 2\pi i\ell_i/\ln q)]} = \\ &= \frac{((q; q)_{\infty}^2 q^A \ln q)^{N-1}}{\pi^{N-1} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (q^{z_j} - q^{z_i})(q^{a_j} - q^{a_i}) \sin[\pi(a_j - a_i)]} \frac{(q^{Z-A+1}; q)_{\infty} (q^{A-Z}; q)_{\infty}}{\sin[\pi(Z - A + 2\pi i\ell/\ln q)]} \times \\ & \times \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (q^{z_i - z_j}; q)_{\infty} (q^{z_j - z_i}; q)_{\infty} (q^{a_i - a_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_i}; q)_{\infty}}{\prod_{i,j=1}^N (q^{z_i - a_j + 1}; q)_{\infty} (q^{a_i - z_j}; q)_{\infty}}, \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

где $z_j, a_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, N, \ell \in \mathbb{Z}, Z = z_1 + \dots + z_N$ и $A = a_1 + \dots + a_N$. Докажем (П.16) методом математической индукции. При $N = 1$ получим, что обе части равенства равны $1/\sin[\pi(Z - A + 2\pi i\ell/\ln q)]$. Предположим, что равенство справедливо при $N - 1$ и покажем, что при N обе части равенства (П.16) имеют одно и то же разложение в ряд Лорана по z_1 (заметим, что обе части равенства (П.16) суть мероморфные функции по $z_1, \dots, z_N$).

Для мероморфной функции $f(z)$ с полюсами $z = p_j, j = 1, 2, \dots$, существует единственное разложение в ряд Лорана

$$f(z) = f(0) + \sum_k \left[f_k \left(\frac{1}{z - p_k} \right) - f_k \left(\frac{1}{-p_k} \right) \right], \quad (\text{П.17})$$

где $f_k(1/(z - p_k))$ — главная часть в точке $z = p_k$. Обозначим через $f(z_1, \dots, z_N)$ левую часть соотношения (П.16). Она имеет полюсы в точках $z_1 = a_j + n_1 - 2\pi i\ell_1/\ln q$, где $j = 1, \dots, N$ и $n_1, \ell_1 \in \mathbb{Z}$, и имеет следующее разложение:

$$\begin{aligned} & f(z_1, z_2, \dots, z_N) - f(0, z_2, \dots, z_N) = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell_1=-\infty}^{\infty} \left[f_{j,n_1,\ell_1} \left(\frac{1}{z_1 - a_j - n_1 + 2\pi i\ell_1/\ln q} \right) - \right. \\ & \quad \left. - f_{j,n_1,\ell_1} \left(\frac{1}{-a_j - n_1 + 2\pi i\ell_1/\ln q} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Запишем главные части $f_{j,n_1,\ell_1}(\frac{1}{z_1 - a_j - n_1 + 2\pi i\ell_1/\ln q})$ в явном виде. При $j = 1$ явная формула имеет вид

$$\begin{aligned} & f_{1,n_1,\ell_1} \left(\frac{1}{z_1 - a_1 - n_1 + 2\pi i\ell_1/\ln q} \right) = \\ &= \frac{1}{z_1 - a_1 - n_1 + 2\pi i\ell_1/\ln q} \frac{(-1)^{n_1}}{\prod_{j=2}^N \sin[\pi(a_1 - a_j)]} \times \\ & \times \sum_{\substack{\ell_2, \dots, \ell_N = -\infty, \\ \ell_2 + \dots + \ell_N = \ell - \ell_1}}^{\infty} \frac{\prod_{2 \leq i < j \leq N} \sin[\pi(z_j - z_i + 2\pi i(\ell_j - \ell_i)/\ln q)]}{\prod_{i,j=2}^N \sin[\pi(z_i - a_j + 2\pi i\ell_i/\ln q)]}. \end{aligned} \quad (\text{П.19})$$

Пусть $g(z_1, \dots, z_N)$ – правая часть равенства (П.16). Ее можно представить в виде

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2, \dots, z_N) - g(0, z_2, \dots, z_N) = \\ = \sum_{j=1}^N \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell_1=-\infty}^{\infty} \left[g_{j,n_1,\ell_1} \left(\frac{1}{z_1 - a_j - n_1 + 2\pi i \ell_1 / \ln q} \right) - \right. \\ \left. - g_{j,n_1,\ell_1} \left(\frac{1}{-a_j - n_1 + 2\pi i \ell_1 / \ln q} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

где главная часть при $j = 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} g_{1,n_1,\ell_1} \left(\frac{1}{z_1 - a_1 - n_1 + 2\pi i \ell_1 / \ln q} \right) = \\ = \frac{1}{z_1 - a_1 - n_1 + 2\pi i \ell_1 / \ln q} \frac{(-1)^{n_1}}{\prod_{j=2}^N \sin[\pi(a_1 - a_j)]} \times \\ \times \frac{(\ln q(q; q)_{\infty}^2 q^{A^{(N-1)}})^{N-2}}{\pi^{N-2} \prod_{2 \leq i < j \leq N} (q^{z_j} - q^{z_i})(q^{a_j} - q^{a_i}) \sin[\pi(a_j - a_i)]} \times \\ \times \frac{(q^{Z^{(N-1)} - A^{(N-1)} + n_1 + 1}; q)_{\infty} (q^{A^{(N-1)} - Z^{(N-1)} - n_1}; q)_{\infty}}{\sin[\pi(Z^{(N-1)} - A^{(N-1)} + 2\pi i \ell / \ln q)]} \times \\ \times \frac{\prod_{2 \leq i < j \leq N} (q^{z_i - z_j}; q)_{\infty} (q^{z_j - z_i}; q)_{\infty} (q^{a_i - a_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_i}; q)_{\infty}}{\prod_{i,j=2}^N (q^{z_i - a_j + 1}; q)_{\infty} (q^{a_i - z_j}; q)_{\infty}} \times \\ \times \frac{1}{(q^{n_1 + 1}; q)_{\infty}} \prod_{j=2}^N \frac{(q^{a_1 + n_1 - z_j}; q)_{\infty} (q^{z_j - a_1 - n_1}; q)_{\infty} (q^{a_1 - a_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_1}; q)_{\infty}}{(q^{a_1 + n_1 - a_j + 1}; q)_{\infty} (q^{z_j - a_1 + 1}; q)_{\infty} (q^{a_1 - z_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_1 - n_1}; q)_{\infty}} \times \\ \times \frac{\ln q(q; q)_{\infty}^2 q^{a_1(N-1) + A^{(N-1)}}}{(-1)^{N-1} \prod_{j=2}^N (q^{a_j} - q^{a_1})(q^{z_j} - q^{a_1 + n_1})} \frac{(-1)^{n_1} q^{n_1(n_1+1)/2}}{(q; q)_{n_1} (q; q)_{\infty} \ln q}, \end{aligned} \quad (\text{П.21})$$

$Z^{(N-1)} = z_2 + \dots + z_N$, $A^{(N-1)} = a_2 + \dots + a_N$. Проведем преобразования

$$\begin{aligned} \prod_{j=2}^N \frac{(q^{a_1 + n_1 - z_j}; q)_{\infty} (q^{z_j - a_1 - n_1}; q)_{\infty} (q^{a_1 - a_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_1}; q)_{\infty}}{(q^{a_1 + n_1 - a_j + 1}; q)_{\infty} (q^{z_j - a_1 + 1}; q)_{\infty} (q^{a_1 - z_j}; q)_{\infty} (q^{a_j - a_1 - n_1}; q)_{\infty}} = \\ = \prod_{j=2}^N \frac{(q^{z_j - a_1 - n_1}; q)_{n_1+1} (q^{a_1 - a_j}; q)_{n_1+1}}{(q^{a_1 - z_j}; q)_{n_1} (q^{a_j - a_1 - n_1}; q)_{n_1}} = \\ = \prod_{j=2}^N \frac{(-q^{z_j - a_1 - n_1})^{n_1+1} q^{n_1(n_1+1)/2} (q^{a_1 - z_j}; q)_{n_1+1} (q^{a_1 - a_j}; q)_{n_1+1}}{(-q^{a_j - a_1 - n_1})^{n_1} q^{n_1(n_1-1)/2} (q^{a_1 - z_j}; q)_{n_1} (q^{a_1 - a_j + 1}; q)_{n_1}} = \\ = \frac{(-1)^{N-1} q^{(Z^{(N-1)} - A^{(N-1)})n_1}}{q^{(N-1)a_1 + A^{(N-1)}}} \prod_{j=2}^N (q^{a_j} - q^{a_1})(q^{z_j} - q^{a_1 + n_1}), \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

где во втором равенстве использовано соотношение (П.10), получим

$$\begin{aligned}
 g_{1,n_1,\ell_1} \left(\frac{1}{z_1 - a_j - n_1 + 2\pi i \ell_1 / \ln q} \right) &= \\
 &= \frac{1}{z_1 - a_1 - n_1 + 2\pi i \ell_1 / \ln q} \frac{(-1)^{n_1}}{\prod_{j=2}^N \sin[\pi(a_1 - a_j)]} \times \\
 &\times \frac{(\ln q(q; q)_\infty^2 q^{A^{(N-1)}})^{N-2}}{\pi^{N-2} \prod_{2 \leq i < j \leq N} \sin[\pi(a_j - a_i)] (q^{z_j} - q^{z_i}) (q^{a_j} - q^{a_i})} \times \\
 &\times \frac{(q^{Z^{(N-1)} - A^{(N-1)} + 1}; q)_\infty (q^{A^{(N-1)} - Z^{(N-1)}}; q)_\infty}{\sin[\pi(Z^{(N-1)} - A^{(N-1)} + 2\pi i \ell / \ln q)]} \times \\
 &\times \frac{\prod_{2 \leq i < j \leq N} (q^{z_i - z_j}; q)_\infty (q^{z_j - z_i}; q)_\infty (q^{a_i - a_j}; q)_\infty (q^{a_j - a_i}; q)_\infty}{\prod_{i,j=2}^N (q^{z_i - a_j + 1}; q)_\infty (q^{a_i - z_j}; q)_\infty}. \quad (\text{П.23})
 \end{aligned}$$

Используя предположение математической индукции для случая $N - 1$, можно проверить эквивалентность формул (П.19) и (П.23), а случаи других j можно рассмотреть аналогично. Таким образом, задача доказательства эквивалентности соотношений (П.18) и (П.20) сводится к доказательству равенства $f(0, z_2, z_3, \dots, z_N) = g(0, z_2, z_3, \dots, z_N)$. Далее, применяя ту же стратегию к этому соотношению, сведем задачу к доказательству соотношения $f(0, 0, z_3, \dots, z_N) = g(0, 0, z_3, \dots, z_N)$. Однако нетрудно понять, что благодаря антисимметрии имеет место равенство

$$f(0, 0, z_3, \dots, z_N) = g(0, 0, z_3, \dots, z_N) = 0. \quad (\text{П.24})$$

Это завершает доказательство соотношения (П.16).

Список литературы

- [1] I. Corwin, “The Kardar–Parisi–Zhang equation and universality class”, *Random Matrices Theory Appl.*, **1**:1 (2012), 1130001, 76 pp.
- [2] J. Quastel, H. Spohn, “The one-dimensional KPZ equation and its universality class”, *J. Stat. Phys.*, **160**:4 (2015), 965–984, arXiv: 1503.06185.
- [3] T. Sasamoto, “The 1D Kardar–Parisi–Zhang equation: height distribution and universality”, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, **2016**:2 (2016), 022A01, 15 pp.
- [4] A. Borodin, I. Corwin, “Macdonald processes”, *Probab. Theory Related Fields*, **158**:1–2 (2014), 225–400.
- [5] T. Sasamoto, M. Wadati, “Exact results for one-dimensional totally asymmetric diffusion models”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**:28 (1998), 6057–6071.
- [6] A. Borodin, L. Petrov, *Lectures on integrable probability: stochastic vertex models and symmetric functions*, arXiv: 1605.01349.
- [7] I. Corwin, L. Petrov, “The q -PushASEP: a new integrable model for traffic in $1 + 1$ dimension”, *J. Stat. Phys.*, **160**:4 (2015), 1005–1026.
- [8] A. M. Povolotsky, “On the integrability of zero-range chipping models with factorized steady states”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **46**:46 (2013), 465205, 25 pp., arXiv: 1308.3250.
- [9] K. Johansson, “Shape fluctuations and random matrices”, *Commun. Math. Phys.*, **209**:2 (2000), 437–476, arXiv: math/9903134.
- [10] C. A. Tracy, H. Widom, “Level-spacing distributions and the Airy kernel”, *Commun. Math. Phys.*, **159**:1 (1994), 151–174, arXiv: hep-th/9211141.

- [11] J. Baik, E. M. Rains, “Limiting distributions for a polynuclear growth model with external sources”, *J. Stat. Phys.*, **100**:3–4 (2000), 523–541.
- [12] P. L. Ferrari, H. Spohn, “Scaling limit for the space-time covariance of the stationary totally asymmetric simple exclusion process”, *Commun. Math. Phys.*, **265**:1 (2006), 1–44, arXiv: math-ph/0504041.
- [13] T. Imamura, T. Sasamoto, “Fluctuations of the one-dimensional polynuclear growth model with external sources”, *Nucl. Phys. B*, **699**:3 (2004), 503–544.
- [14] A. Borodin, P. L. Ferrari, M. Prähofer, T. Sasamoto, “Fluctuation properties of the TASEP with periodic initial configuration”, *J. Stat. Phys.*, **129**:5–6 (2007), 1055–1080, arXiv: math-ph/0608056.
- [15] T. Sasamoto, “Spatial correlations of the 1D KPZ surface on a flat substrate”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **38**:33 (2005), L549–L556, arXiv: cond-mat/0504417.
- [16] P. L. Ferrari, A. Occelli, “Universality of the GOE Tracy–Widom distribution for TASEP with arbitrary particle density”, *Electron. J. Probab.*, **23** (2018), 51, 24 pp., arXiv: 1704.01291.
- [17] K. Matetski, J. Quastel, D. Remenik, “The KPZ fixed point”, arXiv: 1701.00018.
- [18] P. J. Forrester, *Log Gases and Random Matrices*, London Mathematical Society Monographs Series, **34**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2010.
- [19] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Pure and Applied Mathematics, **142**, Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [20] A. Borodin, “Stochastic higher spin six vertex model and Macdonald measures”, *J. Math. Phys.*, **59**:2 (2018), 023301, arXiv: 1608.01553.
- [21] A. Borodin, G. Olshanski, “The ASEP and determinantal point processes”, *Commun. Math. Phys.*, **353**:2 (2017), 853–903, arXiv: 1608.01564.
- [22] T. Imamura, T. Sasamoto, “Determinantal structures in the O’Connell–Yor directed random polymer model”, *J. Stat. Phys.*, **163**:4 (2016), 675–713.
- [23] A. Borodin, I. Corwin, T. Sasamoto, “From duality to determinants for q -TASEP and ASEP”, *Ann. Prob.*, **42**:6 (2014), 2314–2382.
- [24] T. Imamura, T. Sasamoto, “Fluctuations for stationary q -TASEP”, *Probab. Theory Relat. Fields*, 2018, 84 pp., arXiv: 1701.05991.
- [25] A. Borodin, I. Corwin, D. Remenik, “Log-gamma polymer free energy fluctuations via a Fredholm determinant identity”, *Commun. Math. Phys.*, **324**:1 (2013), 215–232, arXiv: 1206.4573.
- [26] A. Aggarwal, “Current fluctuations of the stationary ASEP and six-vertex model”, *Duke Math. J.*, **167**:2 (2018), 269–384, arXiv: 1608.04726.
- [27] T. Imamura, M. Mucciconi, T. Sasamoto, “Fluctuations for stationary higher spin six vertex model” (to appear).
- [28] Y. Kajihara, M. Noumi, “Multiple elliptic hypergeometric series. An approach from the Cauchy determinant”, *Indag. Math. (N. S.)*, **14**:3–4 (2003), 395–421.

Поступила в редакцию 20.02.2018,
 после доработки 20.02.2018,
 принята к печати 23.04.2018