Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ф. Хельминк, Е. А. Панасенко, Геометрические решения строгой иерархии Кадомцева–Петвиашвили, *ТМФ*, 2019, том 198, номер 1, 54–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 10:07:01

© 2019 г.

Г. Ф. Хельминк*, Е. А. Панасенко†

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СТРОГОЙ ИЕРАРХИИ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

Разложение алгебры Psd псевдодифференциальных операторов на подалгебру Ли всех дифференциальных операторов без свободного члена и подалгебру Ли всех интегральных операторов приводит к интегрируемой иерархии, называемой строгой иерархией Кадомцева–Петвиашвили. Рассмотрены два Psd -модуля, линейаризация строгой иерархии Кадомцева–Петвиашвили и ее дуальная версия, которые играют существенную роль в геометрическом построении решений. Охарактеризованы специальные векторы из Psd -модулей, так называемые волновые функции, приводящие непосредственно к решениям. Описана связь между иерархией Кадомцева–Петвиашвили и строгой иерархией Кадомцева–Петвиашвили, представлено бесконечномерное многообразие, из которого можно получить упомянутые специальные векторы. Показано, каким образом для любого подпространства W в грассманиане Сигала–Вильсона некоторого гильбертова пространства и любой прямой ℓ из W можно построить решение строгой иерархии Кадомцева–Петвиашвили. Кроме того, приведено геометрическое описание дуальной волновой функции и представлена группа коммутирующих потоков, которые оставляют полученные решения неизменными.

Ключевые слова: псевдодифференциальные операторы, иерархия Кадомцева–Петвиашвили, строгой иерархия Кадомцева–Петвиашвили, (дуальная) линейаризация, (дуальные) осциллирующие функции, (дуальные) волновые функции, грассманиан.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9557>

Посвящается памяти академика Людвига Дмитриевича Фаддеева

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе [1] нами был изучен более широкий, чем в иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП), класс деформаций базисного дифференцирования ∂ в алгебре Psd псевдодифференциальных операторов. Одевание оператора ∂ при

Работа частично поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (грант 3.8515.2017/8.9 в рамках базовой части государственного задания) и РФФИ (грант № 17-01-00553).

*Korteweg-de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands. E-mail: g.f.helminck@uva.nl

†Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, Тамбов, Россия.
E-mail: panlena_t@mail.ru

этом осуществляется группой, соответствующей подалгебре Ли всех интегральных операторов в Psd , а эволюционные уравнения этих деформаций представляют собой уравнения Лакса, определяемые проекцией на ее дополнение – подалгебру Ли дифференциальных операторов без свободных членов. В статье [1] показано, что эта система совместна и может быть записана в форме отношений нулевой кривизны, которая эквивалентна исходной форме Лакса. Последний факт позволяет сформулировать сопутствующую задачу Коши, разрешимость которой при определенных условиях была доказана в работе [2]. Описанная интегрируемая иерархия была названа *строгой иерархией КП* по аналогии с иерархией КП и формой ее уравнений Лакса. Помимо уже упомянутых двух форм, эту систему можно записать и в терминах билинейных соотношений (см. статью [3]).

Напомним, что Сигал и Вильсон в своей работе [4] показали, каким образом следует строить решения иерархии КП, используя грассманово многообразие $Gr(H)$. Цель данной работы – представить похожее аналитическое описание для строгой иерархии КП. Первым шагом в этом направлении является введение в рассмотрение двух Psd -модулей, линеаризации строгой иерархии КП и ее дуальной версии, которые лежат в основе геометрической структуры решений. На следующем этапе мы определяем в упомянутых модулях специальные векторы, называемые волновыми функциями, которые напрямую приводят к решениям иерархии. Далее мы описываем связь между иерархией КП и ее строгой версией, что позволяет определить покрытие бесконечномерного многообразия $Gr(H)$, из которого можно получить такие векторы. Более конкретно, для любого подпространства W из $Gr(H)$ и любой прямой ℓ из W мы строим волновую функцию строгой иерархии КП. После определения этой конструкции мы представляем группу коммутирующих потоков, которые не меняют найденных решений, и в заключение приводим геометрическое описание дуальной волновой функции.

Содержание статьи таково. В разделе 2 приведены некоторые свойства операторов из Psd , необходимые для дальнейшего изложения, а также описана форма строгой иерархии КП. В разделе 3 рассмотрены два Psd -модуля, линеаризация строгой иерархии КП и ее дуальная версия, волновые функции. В последнем разделе 4 сначала описана связь между иерархией КП и строгой иерархией КП, затем представлена схема построения волновых функций и рассмотрены левые сдвиги, которые не меняют решений. В завершение дано геометрическое описание дуальной волновой функции.

2. СТРОГАЯ ИЕРАРХИЯ КП

Строгую иерархию КП составляют эволюционные уравнения для определенного вида деформаций базисного дифференцирования ∂ в алгебре псевдодифференциальных операторов Psd . Напомним некоторые основные факты об алгебре Psd . Чтобы “уравнять” действительный и комплексный случаи, а также подчеркнуть алгебраический характер интересующих нас уравнений, рассмотрим некоторую алгебру R над полем k нулевой характеристики и k -линейное дифференцирование $\partial: R \rightarrow R$. По выбранным R и ∂ можно построить алгебру $R[\partial]$ дифференциальных операторов от ∂ с коэффициентами из R . Она состоит из k -линейных эндоморфизмов кольца R вида $\sum_{i=0}^n a_i \partial^i$, $a_i \in R$. Поскольку нам хотелось бы, чтобы равенство

дифференциальных операторов из $R[\partial]$ означало равенство их коэффициентов, везде далее мы будем предполагать, что:

$$\text{система } \{\partial^i \mid i \geq 0\} \text{ является } R\text{-линейно независимой в } R[\partial]. \quad (1)$$

Благодаря этому предположению алгебру дифференциальных операторов $R[\partial]$ можно расширить до алгебры псевдодифференциальных операторов, добавив обратные элементы всех степеней оператора ∂ и допустив существование бесконечных сумм отрицательных степеней ∂ . Таким образом, получается множество $Psd = R[\partial, \partial^{-1}]$ всех формальных степенных рядов $p = \sum_{j=-\infty}^N p_j \partial^j$, $p_j \in R$. Произведение рядов $a = \sum_j a_j \partial^j$ и $b = \sum_i b_i \partial^i$ определяется формулой

$$ab := \sum_j \sum_i \sum_{s=0}^{\infty} \binom{j}{s} a_j \partial^s (b_i) \partial^{i+j-s}. \quad (2)$$

Таким образом, множество Psd приобретает структуру ассоциативной алгебры. Особую роль в наших рассуждениях будет играть *свободный член* $\text{ct}(P) = p_0$ псевдодифференциального оператора $P = \sum_{j=-\infty}^N p_j \partial^j$.

В алгебре Psd нам потребуются различные разложения. Пусть $s \in \mathbb{Z}$; любой псевдодифференциальный оператор $P = \sum_j p_j \partial^j \in Psd$ можно представить как сумму

$$P = P_{>s} + P_{\leq s}, \quad \text{где } P_{>s} = \sum_{j>s} p_j \partial^j \quad \text{и} \quad P_{\leq s} = \sum_{j \leq s} p_j \partial^j. \quad (3)$$

Для $s = 0$ это соответствует записи P в виде суммы его дифференциальной части без свободного члена $P_{>0}$ и интегральной части $P_{\leq 0}$. Такое разложение лежит в основе строгой иерархии КП. Аналогично можно получить, что

$$P = P_{\geq s} + P_{<s}, \quad \text{где } P_{\geq s} = \sum_{j \geq s} p_j \partial^j \quad \text{и} \quad P_{<s} = \sum_{j < s} p_j \partial^j. \quad (4)$$

При $s = 0$ это означает, в частности, разложение P в сумму его дифференциальной части $P_{>0}$ и чисто интегральной части $P_{<0}$. Такой способ разложения псевдодифференциальных операторов приводит к иерархии КП.

Как любая ассоциативная k -алгебра, Psd является алгеброй Ли над полем k относительно коммутатора. Из правил умножения в Psd следует, что при $s = 0$ разложения (3) и (4) определяют два способа разложения алгебры Ли Psd в прямую сумму двух подалгебр Ли. Согласно первому способу

$$Psd = \{P \in Psd, P = P_{\leq 0}\} \oplus \{P \in Psd, P = P_{>0}\} := Psd_{\leq 0} \oplus Psd_{>0},$$

а второму –

$$Psd = \{P \in Psd, P = P_{<0}\} \oplus \{P \in Psd, P = P_{\geq 0}\} := Psd_{<0} \oplus Psd_{\geq 0}.$$

Через $\pi_{\geq 0}$ будем обозначать проецирование Psd на $Psd_{\geq 0}$, которое заключается в нахождении дифференциальной части элемента из Psd . Аналогично определим проекции Psd на $Psd_{\leq 0}$, $Psd_{>0}$ и $Psd_{<0}$, которые будем обозначать через $\pi_{\leq 0}$, $\pi_{>0}$ и $\pi_{<0}$ соответственно. Очевидно, для каждого $P \in Psd$ выполнено равенство

$$\pi_{\leq 0}(P) = P_{\leq 0}, \quad \pi_{\geq 0}(P) = P_{\geq 0}, \quad \pi_{>0}(P) = P_{>0}, \quad \pi_{<0}(P) = P_{<0}.$$

В дальнейшем нам потребуется ряд свойств, касающихся свободного члена оператора и проекции $\pi_{<0}$ алгебры Psd на $Psd_{<0}$. Доказательства этих свойств не вызывают затруднений, мы оставляем их читателю.

ЛЕММА 2.1. Для произвольных $f, g \in R$ и любого $P = \sum_{i=-\infty}^N p_i \partial^i \in Psd$ справедливы следующие соотношения:

$$(fPg)_{<0} = fP_{<0}g, \quad (5)$$

$$(\partial P)_{<0} = \partial P_{<0} - \mathbf{ct}(P \partial), \quad (6)$$

$$(P \partial)_{<0} = P_{<0} \partial - \mathbf{ct}(P \partial), \quad (7)$$

$$(P \partial^{-1})_{<0} = P_{<0} \partial^{-1} + \mathbf{ct}(P) \partial^{-1}. \quad (8)$$

На алгебре Psd можно определить еще одно важное преобразование, а именно операцию сопряжения. Оператор P^* , сопряженный к $P = \sum p_i \partial^i$, задается формулой

$$\begin{aligned} P^* &= \sum_i (-\partial)^i p_i = \sum_i (-1)^i \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i}{k} \partial^k (p_i) \partial^{i-k} = \\ &= \sum_{\ell} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\ell+k} \binom{\ell+k}{k} \partial^k (p_{\ell+k}) \right\} \partial^{\ell}. \end{aligned} \quad (9)$$

В частности, оператор, сопряженный к ∂ , равен $-\partial$, а сопряженный к $f \in R$ есть f . Это определение представляет собой алгебраический аналог следующего вещественно-аналитического случая: пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ – пространство функций Шварца–Брухата на $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $\langle f | g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx$. На $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ действуют линейные операторы $\partial := d/dx$ и $M_h: f \rightarrow hf$, $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Используя правило интегрирования по частям, для любых $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ получаем соотношение $\langle \partial f | g \rangle = \langle f | -\partial g \rangle$, которое часто трактуется в том смысле, что сопряженный к ∂ оператор есть $-\partial$. Очевидно, что тогда оператор, сопряженный к оператору M_h умножения на h , есть сам оператор M_h , а сопряженный к линейному оператору вида $D = \sum_{i=0}^N M_{h_i} \partial^i$, действующему на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, равен $\sum_{i=0}^N (-\partial)^i M_{h_i}$. Также в контексте алгебры Psd справедливо следующее утверждение [5].

ЛЕММА 2.2. Операция сопряжения на Psd является морфизмом антиалгебры.

По определению отображение $P \mapsto P^*$ переводит $Psd_{\geq 0}$ в $Psd_{\geq 0}$, а $Psd_{<0}$ – в $Psd_{<0}$, а поскольку $P = (P^*)^*$, оба этих отображения являются биекциями. Как мы увидим далее, сопряженные операторы играют ключевую роль в дуальной версии интересующих нас иерархий. Вполне естественно, что они проявляются в соотношениях, связывающих определенные комбинации псевдодифференциальных операторов и проекций $\pi_{\geq 0}$ и $\pi_{<0}$. Доказательства этих соотношений мы оставляем читателю в качестве упражнения.

ЛЕММА 2.3. Для произвольных $f, g \in R$ и любого $P = \sum_{i=-\infty}^N p_i \partial^i \in Psd$ справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{ct}(Pf) = P_{\geq 0}(f), \quad (10)$$

$$\mathbf{ct}(\partial^{-1} f P \partial) = P_{\geq 0}^*(f), \quad (11)$$

$$(\partial^{-1} P)_{<0} = \partial^{-1} P_{<0} + \partial^{-1} \mathbf{ct}(P^*). \quad (12)$$

Подалгебрам Ли $Psd_{<0}$ и $Psd_{\leq 0}$ можно сопоставить группы

$$D(1) = \left\{ 1 + \sum_{j < 0} p_j \partial^j \in Psd \right\} \quad \text{и} \quad D(0) = \left\{ p_0 + \sum_{j < 0} p_j \partial^j \mid p_0 \in R^* \right\}$$

соответственно, где R^* – группа обратимых элементов R . Распирение группы $D(0)$, а именно $\Delta(0) := D(0)\{\partial^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, используется в линеаризации строгой иерархии КП. Рассмотрим теперь в алгебре Psd возмущение M базисного дифференцирования ∂ вида

$$M = \partial + \sum_{j=0}^{\infty} m_{j+1} \partial^{-j}. \quad (13)$$

Элементы M являются прототипами деформаций оператора ∂ при его сопряжении или *одевании* элементом из $D(0)$ или $\Delta(0)$.

Далее, найдем деформации $\{M^m, m \geq 1\}$ элементов $\{\partial^m, m \geq 1\}$, эволюция которых задается уравнениями Лакса, чью форму определяют проекции $\pi_{\leq 0}$. Предположим, что k -алгебра R наделена еще и k -линейными операциями дифференцирования $\{\partial_i \mid i \geq 1\}$, коммутирующими с ∂ и являющимися инфинитезимальными образующими различных потоков эволюции. Уравнения Лакса, которым должен удовлетворять каждый M^m , записываются как

$$\partial_i(M^m) = [M^m, (M^i)_{\leq 0}] = [(M^i)_{>0}, M^m] = [C_i, M^m], \quad i \geq 1, \quad (14)$$

где C_i – краткое обозначение для $(M^i)_{>0}$. Поскольку и ∂_i , и коммутатор с C_i являются операциями дифференцирования в Psd , достаточно найти такой оператор M , что

$$\partial_i(M) = [C_i, M] = [M, (M^i)_{\leq 0}] \quad \text{для любого} \quad i \geq 1. \quad (15)$$

Для заданного набора $(R, \partial, \{\partial_i \mid i \geq 1\})$ строгая иерархия КП состоит из уравнений (15) для оператора M из Psd (13). Уравнения (15) называются *уравнениями Лакса строгой иерархии КП*, а оператор M – *решением* этой иерархии. Набор $(R, \partial, \{\partial_i \mid i \geq 1\})$ называют *окружением* для этой нелинейной системы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Любое окружение строгой иерархии КП допускает *тривиальное решение* $M = \partial$. Поскольку $C_1 = \partial$ для любого M , при $r = 1$ уравнение Лакса принимает вид $\partial_1(M) = \partial(M)$. Более того, в статье [1] было показано, что все операторы $\{\partial_i\}$ коммутируют на k -подалгебре R , порожденной коэффициентами решения M и всех его производных относительно ∂ . Поэтому часто предполагают, что $\partial = \partial_1$ и все $\{\partial_i\}$ коммутируют между собой. Такое окружение $(R, \partial_1, \{\partial_i\})$ мы называем *стандартным* и используем для него упрощенное обозначение $(R, \{\partial_i\})$. Мы также полагаем $\partial = \partial_1$ для базисного окружения строгой иерархии КП, состоящего из алгебры R формальных степенных рядов $k[[s_i, i \geq 1]]$ и операторов дифференцирования $\{\partial_i = \partial/\partial s_i, i \geq 1\}$.

Как было показано в работе [1], система уравнений (15) *совместна*, т.е. строго дифференциальные операторы $\{C_i\}$ в Psd , соответствующие решению M строгой иерархии КП, удовлетворяют уравнениям

$$\partial_{i_1}(C_{i_2}) - \partial_{i_2}(C_{i_1}) - [C_{i_1}, C_{i_2}] = 0. \quad (16)$$

Уравнения (16) называются *отношениями нулевой кривизны* для строгих отсечений $\{C_i\}$ решения M строгой иерархии КП. Отношения нулевой кривизны для $\{C_i\}$ также являются достаточными условиями для получения уравнений Лакса для M (см. статью [1]), а именно, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть R есть k -алгебра с основным k -линейным дифференцированием ∂ , и пусть M – некоторый элемент алгебры Psd вида (13). Предположим, что R наделена множеством k -линейных дифференцирований $\{\partial_i \mid i \geq 1\}$, каждое из которых коммутирует с ∂ . Тогда M удовлетворяет уравнениям Лакса строгой иерархии КП в том и только том случае, когда $\{C_i \mid i \geq 1\}$ удовлетворяют отношениям нулевой кривизны (16).

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И ЕЕ ДУАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ

Начнем с окружения $(R, \partial, \{\partial_i\})$ для строгой иерархии КП и потенциального решения $M \in Psd$, т.е. элемента алгебры Psd вида (13). Цель этого раздела – описать два Psd -модуля. В первом модуле нас интересуют определенные собственные функции оператора M , во втором – подходящие собственные функции оператора M^* . И в том и в другом случае мы представляем набор уравнений для этих функций, который означает, что M получается одеванием оператора ∂ элементом из $D(0)$ и что M удовлетворяет уравнениям Лакса строгой иерархии КП. Более того, мы показываем, каким образом эти собственные функции связаны между собой.

Прежде чем определить вид элементов первого модуля и Psd -действие, рассмотрим уравнения, которым должна удовлетворять собственная функция w оператора M и выясним, как получить из них уравнения Лакса. Система, которую мы имеем в виду, записывается следующим образом:

$$Mw = zw \quad \text{и} \quad \partial_i(w) = C_i w \quad \text{для всех} \quad i \geq 1. \quad (17)$$

Эта система называется *линеаризацией строгой иерархии КП*. Подействуем дифференцированием ∂_i на первое уравнение в (17). Предполагая, что действие ∂_i на Mw подчиняется правилу Лейбница и что z есть скаляр и относительно действия $R[\partial]$, и относительно ∂_i , используя второе уравнение, получаем выражение

$$\begin{aligned} \partial_i(Mw - zw) &= \partial_i(M)w + M\partial_i(w) - z\partial_i(w) = \\ &= \partial_i(M)w + MC_iw - C_i(zw) = (\partial_i(M) - [C_i, M])w = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Если в этом соотношении мы сможем “отбросить” функцию w , то M будет удовлетворять уравнениям Лакса строгой иерархии КП.

Чтобы придать смысл уравнениям (17), необходимо определить левое действие таких операторов, как M и $\{C_i\}$. Для этого построим подходящий Psd -модуль и в определении того, как должны выглядеть элементы этого модуля, будем руководствоваться решением (17) для тривиального случая $M = \partial$. В этой ситуации $C_i = \partial^i = M^i$ для любого $i \geq 1$, и уравнения (17) принимают вид

$$Mw = zw \quad \text{и} \quad \partial_i(w) = M^i w = z^i w \quad \text{для всех} \quad i \geq 1.$$

Здесь можно заметить, что первое приближение потока, соответствующего ∂_i , представляет собой умножение на z^i . Пусть s_i – параметр для потока, соответствующего ∂_i , т.е. ∂_i действует как взятие частной производной $\partial/\partial s_i$ по s_i . Тогда

уравнения линеаризации можно формально проинтегрировать. Итак, рассмотрим формальный степенной ряд

$$w_0 = e^{\sum_{i=1}^{\infty} s_i z^i}. \quad (19)$$

С определенным выше действием ∂_i он удовлетворяет уравнениям линеаризации для тривиального решения строгой иерархии КП. Пространство $\mathcal{O}$ так называемых *осциллирующих функций* является тем пространством, в котором имеет смысл рассматривать уравнения (17) и которое можно понимать как семейство возмущений тривиального решения w_0 :

$$\mathcal{O} = \left\{ \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) e^{\sum_{i=1}^{\infty} s_i z^i} = \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) w_0 \mid a_j \in R \text{ для всех } j \right\}.$$

Число ℓ называется *порядком* элемента $(\sum_{j=-\infty}^{\ell} a_j z^j) w_0$ в $\mathcal{O}$ при условии, что $a_{\ell} \neq 0$. Отметим, что произведение $(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j) w_0$ в записи элементов $\mathcal{O}$ носит формальный характер. Если выразить w_0 через элементарные функции Шура, а именно $\exp(\sum_{i=1}^{\infty} s_i z^i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(s) z^n$, то это произведение как ряд от z и z^{-1} формально будет равно $(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j) \exp(\sum_{i=1}^{\infty} s_i z^i) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (\sum_{k=0}^{\infty} a_{\ell-k} p_k) z^{\ell}$. Таким образом, чтобы коэффициенты $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\ell-k} p_k$ были определены при всех $\ell \in \mathbb{Z}$, необходимы соответствующие условия сходимости. Их можно получить, рассматривая это произведение в подходящем классе граничных значений (см. статью [1]). А чтобы эти коэффициенты принадлежали R , можно использовать естественное вложение $k[s_i]$ как k -подалгебры R и тот факт, что ∂_i являются подходящими продолжениями дифференцирований $\partial/\partial s_i$ на $k[s_i]$.

Пространство $\mathcal{O}$ превращается в $R[\partial]$ -модуль с помощью естественного распространения операций:

$$\begin{aligned} b \cdot \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) w_0 &= \left(\sum_{j=-\infty}^N b a_j z^j \right) w_0, \quad b \in R, \\ \partial \cdot \left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) w_0 &= \left(\sum_{j=-\infty}^N \partial(a_j) z^j + \sum_{j=-\infty}^N a_j z^{j+1} \right) w_0. \end{aligned}$$

Отметим, что ∂ действует как обратимое преобразование на $\mathcal{O}$, следовательно, структуру $R[\partial]$ -модуля можно расширить так, чтобы $\mathcal{O}$ стал Psd -модулем. Далее, предположим, что каждое дифференцирование ∂_i на $\mathcal{O}$ подчиняется правилу Лейбница

$$\partial_i \left(\left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) w_0 \right) = \left(\sum_{j=-\infty}^N \partial_i(a_j) z^j + \sum_{j=-\infty}^N a_j z^{j+i} \right) w_0.$$

Тогда все операторы, задействованные в (17), будут определены. Следует отметить, что поскольку $(\sum_j p_j \partial^j) w_0 = (\sum_j p_j z^j) w_0$, модуль $\mathcal{O}$ является свободным Psd -модулем с образующим w_0 . Таким образом, если $Qw = 0$ в $\mathcal{O}$, где $Q \in Psd$ и $w = Pw_0$, где $P \in Psd$, то можно заключить, что $QP = 0$, а если P обратим, то и $Q = 0$. Все это возможно для следующего класса осциллирующих функций: элемент $w \in \mathcal{O}$ называется *осциллирующей функцией типа* $\alpha_{\ell} z^{\ell}$, где α_{ℓ} обратим в R ,

если его можно представить в виде

$$w = w(s, z) = \left\{ \alpha_\ell z^\ell + \sum_{k < \ell} \alpha_k z^k \right\} w_0 = K.w_0, \quad \text{где} \quad K = \sum_{k \leq \ell} \alpha_k \partial^k. \quad (20)$$

Здесь s есть краткое обозначение для (s_i) , $i \geq 1$. Осциллирующая функция w типа $\alpha_\ell z^\ell$ называется *волновой функцией* строгой иерархии КП, если существует оператор M такой, что M и w удовлетворяют уравнениям (17). Отметим, что в этом случае M является решением строгой иерархии КП, так как все выкладки, описанные выше, здесь правомерны. Таким образом, оператор M полностью определяется функцией w . Действительно, если $w = K.w_0$, как в формуле (20), то первое уравнение в (17) можно переписать в виде $Mw = MK.w_0 = zw = zK.w_0 = K \partial.w_0$, и, следовательно, M получается в результате одевания ∂ оператором K или $K \partial^{-\ell} \in D(0)$, а именно, $M = K \partial K^{-1} = K \partial^{-\ell} \partial \partial^\ell K^{-1}$. Чтобы получить уравнения (17), на самом деле достаточно доказать более слабое утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть M – оператор первого порядка в Psd вида (13) и w – осциллирующая функция типа $\alpha_\ell z^\ell$, удовлетворяющая уравнению $Mw = zw$. Предположим, что для любого $i \geq 1$ существует не содержащий свободного члена дифференциальный оператор $Q_i \in R[\partial]$ такой, что $\partial_i(w) = Q_i w$. Тогда $Q_i = C_i$ для любого $i \geq 1$. Более того, M есть решение строгой иерархии КП, которое можно получить одеванием оператора ∂ подходящим элементом из $D(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор K такой, что $w = K.w_0$. Как было показано ранее, из уравнения $Mw = zw$ следует, что $M = K \partial K^{-1}$. По определению действия оператора ∂_r на $\mathcal{O}$, с одной стороны, имеем равенство $\partial_i(w) = \{\partial_i(K) + K \partial^i\}.w_0$, а с другой стороны, это должно равняться $Q_i K.w_0$. Отсюда получаем тождество

$$\partial_i(K) K^{-1} + K \partial^i K^{-1} = \partial_i(K) K^{-1} + M^i = Q_i.$$

Так как $\partial_i(K) K^{-1}$ содержит только члены с неположительными степенями ∂ , то сравнивая чисто дифференциальные части операторов в обеих частях равенства, приходим к соотношению $M_{>0}^i = (Q_i)_{>0} = Q_i$. Таким образом, утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Доказательство утверждения 3.1 показывает, что условия, которым должна удовлетворять осциллирующая функция w , равносильны тому, что одевающий K удовлетворяет уравнениям

$$\partial_i(K) K^{-1} = -(M^i)_{\leq 0} \quad \text{для всех} \quad i \geq 1. \quad (21)$$

Эти уравнения в контексте строгой иерархии аналогичны уравнениям

$$\partial_i(K) K^{-1} = -(L^i)_{< 0} \quad \text{для всех} \quad i \geq 1, \quad (22)$$

которым должен удовлетворять одевающий оператор K предполагаемого решения $L = K \partial K^{-1}$ иерархии КП. Уравнения (22) носят название *уравнений Сато–Вильсона*, поэтому уравнения (21) мы будем называть *строгими уравнениями Сато–Вильсона*.

В работе [6] важную роль в описании билинейной формы иерархии КП играла дуальная система уравнений. Здесь мы рассматриваем ее аналог для строгой иерархии КП и предлагаем соответствующую алгебраическую реализацию. В ее основе лежит второй Psd -модуль $\mathcal{O}^*$, называемый “дуальным” к модулю $\mathcal{O}$, поскольку он связан с антиинволюцией операции сопряжения в Psd . Если взять отношения, сопряженные отношениям нулевой кривизны для $\{C_i\}$, то можно заметить, что операторы $\{-C_i^*\}$ также удовлетворяют этим отношениям. Следовательно, подходящей линеаризацией для этого множества псевдодифференциальных операторов являются уравнения

$$M^* \tilde{w} = z \tilde{w} \quad \text{и} \quad \partial_i(\tilde{w}) = -C_i^* \tilde{w} \quad \text{для всех} \quad i \geq 1. \quad (23)$$

Будем называть эту систему *дуальной линеаризацией* строгой иерархии КП. Из нее также можно получить уравнения Лакса для M^* . Как в случае с линеаризацией (17), подействуем дифференцированием ∂_i на первое уравнение в (23). Если действие ∂_i на $M^* \tilde{w}$ подчиняется правилу Лейбница, а z является скаляром по отношению к элементам $R[\partial]$ и ∂_i , то, учитывая второе уравнение, получаем, что

$$\begin{aligned} \partial_i(M^* \tilde{w} - z \tilde{w}) &= \partial_i(M^*) \tilde{w} + M^* \partial_i(\tilde{w}) - z \partial_i(\tilde{w}) = \\ &= \partial_i(M^*) \tilde{w} - M^* C_i^* \tilde{w} + C_i^*(z \tilde{w}) = (\partial_i(M^*) + [C_i^*, M^*]) \tilde{w} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Если мы можем “отбросить” функцию $\tilde{w}$, то M^* будет удовлетворять уравнениям Лакса

$$\partial_i(M^*) + [C_i^*, M^*] = 0, \quad (25)$$

и, взяв элемент, сопряженный левой части (25), мы получаем уравнения Лакса строгой иерархии КП для M . Таким образом, система (23) является альтернативным способом нахождения решений M строгой иерархии КП. Осталось только указать, какому пространству принадлежит $\tilde{w}$. И снова это есть множество возмущений решения, соответствующего тривиальному случаю $M^* = -\partial$. Тогда $C_i = \partial^i$, а значит, $-C_i^* = -(-\partial)^i$, и мы приходим к уравнениям

$$M^* \tilde{w} = (-\partial) \tilde{w} = z \tilde{w} \quad \text{и} \quad \partial_i(\tilde{w}) = -(-\partial)^i \tilde{w} = -z^i \tilde{w} \quad \text{для всех} \quad i \geq 1,$$

тривиальным решением которых является

$$w_0^* = e^{\sum_{i=1}^{\infty} -s_i z^i}. \quad (26)$$

Дуальное пространство $\mathcal{O}^*$ состоит из формальных произведений

$$\left\{ \sum_{j \leq N} a_j z^j \right\} e^{-\sum s_i z^i} = \left\{ \sum_{j \leq N} a_j z^j \right\} w_0^*, \quad \text{где} \quad a_j \in R \quad \text{для всех} \quad j.$$

Действие кольца $R[\partial]$ на $\mathcal{O}^*$, как можно ожидать, определяется естественным расширением операций:

$$b \left\{ \left[\sum_{j \leq N} a_j z^j \right] w_0^* \right\} = \left[\sum_{j \leq N} b a_j z^j \right] w_0^*, \quad \partial \left\{ \left[\sum_{j \leq N} a_j z^j \right] w_0^* \right\} = \left[\sum_{j \leq N} \partial(a_j) z^j - \sum_{j \leq N} a_j z^{j+1} \right] w_0^*,$$

где ∂^0 действует как тождественный оператор. При любом $m \geq 1$ оператор ∂^m действует как обратимое преобразование на $\mathcal{O}^*$, поэтому $\mathcal{O}^*$ представляет собой

Psd -модуль, и даже свободный Psd -модуль, поскольку имеем $(\sum_{j \leq N} a_j (-\partial)^j) w_0^* = (\sum_{j \leq N} a_j z^j) w_0^*$. Действие ∂_i на $\mathcal{O}^*$ определяется аналогично действию ∂ соотношением

$$\partial_i \left(\left(\sum_{j=-\infty}^N a_j z^j \right) w_0^* \right) = \left(\sum_{j=-\infty}^N \partial_i(a_j) z^j - \sum_{j=-\infty}^N a_j z^{j+i} \right) w_0^*,$$

что подтверждает правило Лейбница для этого действия. Пусть $\beta_\ell \in R^*$. Элемент $\tilde{w} \in \mathcal{O}^*$ будем называть *дуальной осциллирующей функцией типа $\beta_\ell z^\ell$* , если он представим в виде

$$\tilde{w} = \left\{ \beta_\ell z^\ell + \sum_{k < \ell} \beta_k z^k \right\} w_0^* = \tilde{K} \cdot w_0^*, \quad \text{где} \quad \tilde{K} = \sum_{k \leq \ell} \beta_k (-\partial)^k. \quad (27)$$

Отметим, что если $\tilde{w} = \tilde{K} \cdot w_0^* \in \mathcal{O}^*$ – дуальная осциллирующая функция типа $\beta_\ell z^\ell$, то $\tilde{w}^* := (\tilde{K}^{-1})^* \cdot w_0 \in \mathcal{O}$ есть осциллирующая функция типа $\beta_\ell^{-1} z^{-\ell}$. Элемент $\tilde{w}^*$ называется *сопряженным к $\tilde{w}$* , и, наоборот, $\tilde{w}$ называется *сопряженным к $\tilde{w}^*$* .

Дуальная осциллирующая функция w^* типа $\beta_\ell z^\ell$ называется *дуальной волновой функцией* строгой иерархии КП, если существует оператор M такой, что M^* и w^* удовлетворяют уравнениям (23). В этом случае M есть решение строгой иерархии КП, поскольку все проделанные выше манипуляции для перехода от уравнений (23) к уравнениям Лакса (25) правомерны. Оператор M тогда полностью определяется функцией w^* . Действительно, если $w^* = \tilde{K} \cdot w_0^*$, как в (27), то первое уравнение в (23) можно переписать в виде

$$M^* w^* = M^* \tilde{K} \cdot w_0^* = z w^* = z \tilde{K} \cdot w_0^* = \tilde{K} (-\partial) \cdot w_0^*,$$

и, следовательно, M получается одеванием оператора ∂ оператором $K = ((\tilde{K})^*)^{-1}$ или же $K \partial^\ell \in D(0)$, а именно, $M = K \partial K^{-1} = K \partial^\ell \partial \partial^{-\ell} K^{-1}$. Резюмируя все вышеизложенное, можно сформулировать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть M – оператор из алгебры Psd , полученный одеванием оператора ∂ элементом из $D(0)$. Тогда M есть решение строгой иерархии КП в том и только том случае, когда в алгебре Psd найдется такой оператор K , что M и $w = K \cdot w_0$ удовлетворяют линейризации строгой иерархии КП или M^* и $w^* = (K^{-1})^* \cdot w_0^*$ удовлетворяют ее дуальной версии (23).

4. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Основой для построения решений строгой иерархии КП является ее связь с иерархией КП. С описания этой связи мы и начинаем настоящий раздел. Пусть задано окружение $(R, \partial, \{\partial_i\})$. Рассмотрим потенциальные решения M строгой иерархии КП, которые получаются одеванием тривиального решения ∂ элементом $\alpha^{-1} K \in D(0)$, где $\alpha \in R^*$ и $K \in D(1)$. Этим данным соответствует осциллирующая функция $w = \alpha^{-1} K \cdot w_0$ типа $\alpha^{-1} z^0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Имеют место следующие свойства.

А. Элемент $w \in \mathcal{O}$ является волновой функцией строгой иерархии КП для M в окружении $(R, \partial, \{\partial_i\})$ тогда и только тогда, когда $\alpha w = K \cdot w_0$ является волновой функцией иерархии КП и

$$\partial_i(\alpha) = (L^i)_{\geq 0}(\alpha) \quad (28)$$

для любого $i \geq 1$.

Б. Уравнения (28) также достаточны для получения следующего результата: пусть $L = K \partial K^{-1}$ – решение иерархии КП и $\psi = K.w_0$ – соответствующая ему волновая функция. Если $\alpha \in R^*$ удовлетворяет уравнениям (28), то $\alpha \partial \alpha^{-1} \psi$ является волновой функцией для оператора $L_\alpha := \alpha \partial \alpha^{-1} L (\alpha \partial \alpha^{-1})^{-1} = \alpha \partial \alpha^{-1} L \alpha \partial^{-1} \alpha^{-1}$. Более того, оператор L_α также является решением иерархии КП.

В. Пусть α_1 и α_2 – элементы R^* , каждый из которых удовлетворяет уравнениям (28) для решения L иерархии КП, и пусть $\alpha_1 \partial \alpha_1^{-1} = \alpha_2 \partial \alpha_2^{-1}$, т. е. $L_{\alpha_1} = L_{\alpha_2}$. Тогда $\partial(\alpha_1/\alpha_2) = 0$ и $\partial_r(\alpha_1/\alpha_2) = 0$ для всех $r \geq 1$, а решения $\alpha_1^{-1} L \alpha_1$ и $\alpha_2^{-1} L \alpha_2$ строгой иерархии КП совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение А. Пусть αw – волновая функция иерархии КП и $L = K \partial K^{-1}$ – соответствующее решение этой иерархии. Тогда $M = \alpha^{-1} L \alpha$, и мы получаем выражение

$$\begin{aligned} \partial_i(\alpha^{-1} \alpha w) &= -\partial_i(\alpha) \alpha^{-1} w + \alpha^{-1}((L^i)_{\geq 0} \alpha w) = ((M^i)_{\geq 0} - \partial_i(\alpha) \alpha^{-1}) w = \\ &= ((M^i)_{> 0} + \alpha^{-1}(L^i)_{\geq 0}(\alpha) - \partial_i(\alpha) \alpha^{-1}) w = (M^i)_{> 0} w. \end{aligned}$$

Таким образом, w есть волновая функция строгой иерархии КП для M . Предположим теперь, что при любом $i \geq 1$ функция w удовлетворяет уравнению $\partial_i(w) = (M^i)_{> 0} w$. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_i(w) &= \partial_i(\alpha^{-1} K.w_0) = (\partial_i(\alpha^{-1} K) K^{-1} \alpha + M^i) w = \\ &= (-\partial_i(\alpha) \alpha^{-1} + \alpha^{-1} \partial_i(K) K^{-1} \alpha + M^i) w. \end{aligned} \quad (29)$$

Отметим, что оператор $\alpha^{-1} \partial_i(K) K^{-1} \alpha$ принадлежит $Psd_{< 0}$. Сравнивая последнее уравнение в (29) и равенство $\partial_i(w) = (M^i)_{> 0} w$, получаем, что, во-первых, свободный член оператора M^i равен $\partial_i(\alpha) \alpha^{-1}$, а это, как было показано выше, есть $\alpha^{-1}(L^i)_{\geq 0}(\alpha)$. А во-вторых, компонента $M^i_{< 0}$ должна совпадать с $-\alpha^{-1} \partial_i(K) K^{-1} \alpha$. Это приводит к уравнениям Сато–Вильсона для $L = K \partial K^{-1}$: $(L^i)_{< 0} = -\partial_i(K) K^{-1}$, которые эквивалентны равенству $\partial_i(\alpha w) = (L^i)_{\geq 0}(\alpha w)$. Таким образом, αw является волновой функцией для иерархии КП, и первое утверждение доказано.

Докажем теперь утверждение Б. Пусть $L = K \partial K^{-1}$ – решение иерархии КП и $\psi = K.w_0$ – соответствующая ему волновая функция. Предположим, что $\alpha \in R^*$ удовлетворяет соотношениям (28). Определим оператор $K_\alpha := \alpha \partial \alpha^{-1} K$ и покажем, что K_α удовлетворяет уравнениям Сато–Вильсона. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_i(K_\alpha) K_\alpha^{-1} &= \partial_i(\alpha \partial \alpha^{-1}) \alpha \partial^{-1} \alpha^{-1} + \alpha \partial \alpha^{-1} \partial_i(K) K^{-1} \alpha \partial^{-1} \alpha^{-1} = \\ &= -\alpha \partial \alpha^{-1} (L^i)_{< 0} \alpha \partial^{-1} \alpha^{-1} + \partial_i(\alpha \partial \alpha^{-1}) \alpha \partial^{-1} \alpha^{-1} = \\ &= -\alpha \partial \alpha^{-1} (L^i)_{< 0} \alpha \partial^{-1} \alpha^{-1} + \partial_i(\alpha) \alpha^{-1} - \alpha \partial \alpha^{-1} \partial_i(\alpha) \partial^{-1} \alpha^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим первый оператор в правой части; используя свойства (5) и (8) леммы 2.3, получаем, что

$$\begin{aligned} -\alpha \partial \alpha^{-1} (L^i)_{< 0} \alpha \partial^{-1} \alpha^{-1} &= -\alpha \partial (\alpha^{-1} L^i \alpha)_{< 0} \partial^{-1} \alpha^{-1} = \\ &= -\alpha \partial (\alpha^{-1} L^i \alpha \partial^{-1})_{< 0} \alpha^{-1} + \alpha \partial \text{ct}(\alpha^{-1} L^i \alpha) \partial^{-1} \alpha^{-1}. \end{aligned}$$

Применяя свойство (6) леммы 2.3 к первому слагаемому в полученном выражении, приходим к выражению

$$-\alpha(\partial\alpha^{-1}L^i\alpha\partial^{-1})_{<0}\alpha^{-1} - \alpha\mathbf{ct}(\alpha^{-1}L^i\alpha\partial^{-1}\partial)\alpha^{-1} + \alpha\partial\mathbf{ct}(\alpha^{-1}L^i\alpha)\partial^{-1}\alpha^{-1}.$$

Далее, с помощью свойств (5) и (10) упрощаем полученное выражение:

$$\begin{aligned} & -(\alpha\partial\alpha^{-1}L^i\alpha\partial^{-1}\alpha^{-1})_{<0} - \alpha^{-1}\mathbf{ct}(L^i\alpha) + \alpha\partial\alpha^{-1}\mathbf{ct}(L^i\alpha)\partial^{-1}\alpha^{-1} = \\ & = -(\alpha\partial\alpha^{-1}L^i\alpha\partial^{-1}\alpha^{-1})_{<0} - (L^i)_{\geq 0}(\alpha)\alpha^{-1} + \alpha\partial\alpha^{-1}(L^i)_{\geq 0}(\alpha)\partial^{-1}\alpha^{-1}. \end{aligned}$$

Теперь можно увидеть, что если $\partial_i(\alpha) = (L^i)_{\geq 0}(\alpha)$, то последние два слагаемых в полученном выражении и два слагаемых в выражении для оператора $\partial_i(K_\alpha)K_\alpha^{-1}$ взаимно уничтожаются, и, как следствие, оператор K_α удовлетворяет равенствам

$$\partial_i(K_\alpha)K_\alpha^{-1} = -(K_\alpha\partial^i K_\alpha^{-1})_{<0}, \quad (30)$$

т. е. уравнениям Сато–Вильсона. Таким образом, утверждение Б доказано.

Для доказательства пункта В отметим, что равенство $\alpha_1\partial\alpha_1^{-1} = \alpha_2\partial\alpha_2^{-1}$ означает, что $\partial(\alpha_1)/\alpha_1 = \partial(\alpha_2)/\alpha_2$; используя это соотношение в вычислениях, получаем равенства

$$\partial\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \frac{\partial(\alpha_1)}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\partial(\alpha_2)}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{\partial(\alpha_1)}{\alpha_1} - \frac{\partial(\alpha_2)}{\alpha_2}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $\partial^m(\alpha_1/\alpha_2) = 0$ для любого $m \geq 1$, и, значит, имеет место формула

$$(L^i)_{\geq 0}(\alpha_1) = (L^i)_{\geq 0}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\alpha_2\right) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(L^i)_{\geq 0}(\alpha_2).$$

Далее, используем это равенство, чтобы определить действие остальных операций дифференцирования:

$$\partial_i\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \frac{\partial_i(\alpha_1)}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{\partial_i(\alpha_2)}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{\partial_i(\alpha_1)}{\alpha_1} - \frac{\partial_i(\alpha_2)}{\alpha_2}\right) = 0.$$

Последнее утверждение теперь следует напрямую из того факта, что α_1/α_2 есть константа для всех операций дифференцирования в окружении. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Преобразование $L \rightarrow L_\alpha$ в утверждении 4.1 является примером преобразования Дарбу для иерархии КП (см., например, работы [7] и [8]).

Для свойств А и Б утверждения 4.1 справедливы дуальные версии.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. *Имеют место следующие свойства.*

А. Функция $w \in \mathcal{O}$ является волновой функцией строгой иерархии КП для M в окружении $(R, \partial, \{\partial_i\})$ тогда и только тогда, когда $\alpha^{-1}w^* = (K^*)^{-1}.w_0^*$ является дуальной волновой функцией иерархии КП и

$$\partial_i(\alpha^{-1}) = -(\alpha\partial\alpha^{-1}L^i\alpha\partial^{-1}\alpha^{-1})_{\geq 0}^*(\alpha^{-1}) \quad (31)$$

для любого $i \geq 1$.

Б. Соотношения (31) также достаточны для выполнения следующего трансформационного свойства для иерархии КП: пусть $L = K \partial K^{-1}$ – решение иерархии КП и $\psi^* = (K^*)^{-1} \cdot w_0^*$ – соответствующая ему дуальная волновая функция. Если $\beta \in R^*$ удовлетворяет соотношениям

$$\partial_i(\beta) = -(L^i)^*_{\geq 0}(\beta), \quad i \geq 1, \quad (32)$$

то функция $\beta^{-1} \partial^{-1} \beta \psi^*$ является дуальной волновой функцией для оператора вида $\beta^{-1} \partial^{-1} \beta L \beta^{-1} \partial \beta$. Более того, этот оператор также является решением иерархии КП.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было доказано в утверждении 4.1, w является волновой функцией строгой иерархии КП тогда и только тогда, когда αw является волновой функцией иерархии КП и α удовлетворяет уравнениям (28). Поскольку $(\alpha w)^* = \alpha^{-1} w^*$, первое условие эквивалентно тому, что $\alpha^{-1} w^*$ является дуальной волновой функцией иерархии КП. Предположим, что α удовлетворяет условиям в (28). Тогда, используя эти условия, а также свойство (11), получаем, что

$$\partial_i(\alpha^{-1}) = -\alpha^{-2} \partial_i(\alpha) = -\alpha^{-2} (L^i)^*_{\geq 0}(\alpha) = -\alpha^{-2} \text{ct}(\partial^{-1} \alpha (L^i)^* \partial).$$

Далее, внося два множителя α^{-1} под знак свободного члена, добавляя вспомогательное слагаемое и используя свойство (10), а также тот факт, что взятие сопряженного элемента и проектирование $\pi_{\geq 0}$ коммутируют, выражение для $\alpha^{-2} \text{ct}(\partial^{-1} \alpha (L^i)^* \partial)$ приводим к виду

$$\begin{aligned} -\text{ct}(\alpha^{-1} \partial^{-1} \alpha (L^i)^* \alpha^{-1} \partial) &= -\text{ct}(\alpha^{-1} \partial^{-1} \alpha (L^i)^* \alpha^{-1} \partial \alpha \alpha^{-1} \partial^{-1} \partial) = \\ &= -(\alpha^{-1} \partial^{-1} \alpha (L^i)^* \alpha^{-1} \partial \alpha)_{\geq 0}(\alpha^{-1}) = -(\alpha \partial \alpha^{-1} L^i \alpha \partial^{-1} \alpha^{-1})^*_{\geq 0}(\alpha^{-1}), \end{aligned}$$

т. е. получаем искомое соотношение.

Докажем обратное утверждение. Обозначим $L_\alpha = \alpha \partial \alpha^{-1} L \alpha \partial^{-1} \alpha^{-1}$ и предположим, что α^{-1} удовлетворяет равенству $\partial_i(\alpha^{-1}) = -(L^i_\alpha)^*_{\geq 0}(\alpha^{-1})$ для всех $i \geq 1$. Чтобы получить требуемое свойство для α , будем действовать аналогично предыдущим вычислениям и сначала применим выражение (11):

$$\partial_i(\alpha) = -\alpha^2 \partial_i(\alpha^{-1}) = \alpha^2 (L^i_\alpha)^*_{\geq 0}(\alpha^{-1}) = \alpha^2 \text{ct}(\partial^{-1} \alpha^{-1} (L^i_\alpha) \partial).$$

Далее, внесем два множителя α под знак свободного члена, добавим вспомогательное слагаемое, используем свойство (10) и тот факт, что операция сопряжения и проекция $\pi_{\geq 0}$ коммутируют друг с другом, чтобы привести выражение для $\alpha^2 \text{ct}(\partial^{-1} \alpha^{-1} (L^i_\alpha) \partial)$ к виду

$$\begin{aligned} \text{ct}(\alpha \partial^{-1} \alpha^{-1} L^i_\alpha \alpha \partial) &= \text{ct}(\alpha \partial^{-1} \alpha^{-1} L^i_\alpha \alpha \partial \alpha^{-1} \alpha) = \\ &= (\alpha \partial^{-1} \alpha^{-1} L^i_\alpha \alpha \partial \alpha^{-1})_{\geq 0}(\alpha) = (L^i)^*_{\geq 0}(\alpha). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что α удовлетворяет соотношениям (28). Таким образом, мы показали, что утверждения “ α^{-1} удовлетворяет уравнениям (31)” и “ α удовлетворяет уравнениям (28)” равносильны, т. е. свойство А доказано.

Для произвольного $\beta \in R^*$, удовлетворяющего условиям (32), и любого решения $L = K \partial K^{-1}$ иерархии КП определим оператор K_β , равный $\beta^{-1} \partial^{-1} \beta K$. Чтобы доказать свойство Б в нашем утверждении, достаточно показать, что оператор K_β удовлетворяет уравнениям Сато–Вильсона. Действуя, как при доказательстве утверждения 4.1, получаем, что

$$\begin{aligned} \partial_i (K_\beta) K_\beta^{-1} &= -\beta^{-1} \partial^{-1} \beta (L^i)_{<0} \beta^{-1} \partial \beta + \partial_i (\beta^{-1} \partial^{-1} \beta) \beta^{-1} \partial \beta = \\ &= -\beta^{-1} \partial^{-1} (\beta L^i \beta^{-1})_{<0} \partial \beta - \partial_i (\beta) \beta^{-1} + \beta^{-1} \partial^{-1} (\partial_i (\beta) \beta^{-1}) \partial \beta. \end{aligned}$$

Далее, воспользуемся свойствами свободного члена применительно к первому слагаемому в правой части полученного выражения. Сначала, используя свойство (12), внесем ∂^{-1} слева под знак свободного члена, получаем выражение

$$-\beta^{-1} \{(\partial^{-1} \beta L^i \beta^{-1})_{<0} - \partial^{-1} \mathbf{ct}(\beta^{-1} (L^i)^* \beta)\} \partial \beta.$$

Затем используем свойство (10), чтобы прийти к сумме

$$-\beta^{-1} (\partial^{-1} \beta L^i \beta^{-1})_{<0} \partial \beta + \beta^{-1} \partial^{-1} \beta^{-1} (L^i)^*_{\geq 0} (\beta) \partial \beta.$$

В первом слагаемом этого выражения, используя правило (7), внесем сомножитель ∂ справа под знак проекции, получаем формулу

$$-\beta^{-1} \{(\partial^{-1} \beta L^i \beta^{-1} \partial)_{<0} + \mathbf{ct}(\partial^{-1} \beta L^i \beta^{-1} \partial)\} \beta + \beta^{-1} \partial^{-1} \beta^{-1} (L^i)^*_{\geq 0} (\beta) \partial \beta.$$

Далее, в первом слагаемом полученной суммы внесем сомножители из R , используя (5), а второе слагаемое перепишем, используя свойство (11). В итоге получаем формулу

$$-(\beta^{-1} \partial^{-1} \beta L^i \beta^{-1} \partial \beta)_{<0} - \beta^{-1} (L^i)^*_{\geq 0} (\beta) + \beta^{-1} \partial^{-1} \beta^{-1} (L^i)^*_{\geq 0} (\beta) \partial \beta.$$

Поскольку для любого $i \geq 1$ выполнено равенство $\partial_i (\beta) = - (L^i)^*_{\geq 0} (\beta)$, последние два слагаемых взаимно уничтожаются со слагаемыми $-\partial_i (\beta) \beta^{-1}$ и $\beta^{-1} \partial^{-1} (\partial_i (\beta) \beta^{-1}) \partial \beta$ в представлении $\partial_i (K_\beta) K_\beta^{-1}$, и, следовательно, K_β удовлетворяет уравнениям Сато–Вильсона

$$\partial_i (K_\beta) K_\beta^{-1} = -(K_\beta \partial^i K_\beta^{-1})_{<0}. \quad (33)$$

Утверждение Б и теорема доказаны.

Теперь мы используем утверждение 4.1, чтобы описать решения строгой иерархии КП, применяя подход, аналогичный подходу Сигала и Вильсона. Напомним сначала основные составляющие этого аналитического подхода, необходимые для построения волновых функций иерархии КП (см. статью [4]). Сигал и Вильсон рассматривали гильбертово пространство

$$H = L^2(S^1, \mathbb{C}) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \mid a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty \right\}$$

со скалярным произведением $\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n \mid \sum_{m \in \mathbb{Z}} b_m z^m \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \overline{b_n}$. Пространство H обладает гильбертовым базисом $\{e_i := z^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, а координаты вектора

$h = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n z^n \in H$ в этом базисе можно записать в виде матрицы $[h]$ размерности $\mathbb{Z} \times 1$, т. е.

$$[h] = \begin{pmatrix} \vdots \\ h_{n-1} \\ h_n \\ h_{n+1} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Аналогично, действие любого ограниченного оператора $A: H \rightarrow H$ на произвольный вектор $h \in H$ можно понимать в этом контексте как умножение $[h]$ слева на соответствующую $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -матрицу $[A]$.

Наличие грассмановых многообразий $\text{Gr}(m, n)$, состоящих из m -мерных подпространств пространства $\mathbb{C}^n$, свидетельствует о том, что “объединение всех сравнимых подпространств фиксированного векторного пространства” может привести к интересным геометрическим конструкциям. Похожим образом для упомянутого гильбертова пространства H можно построить бесконечномерные грассманианы, имеющие большое значение. Они состоят, грубо говоря, из подпространств “одинакового размера” заданного пространства H . Опишем подпространство пространства H , которое можно считать некоторым ориентиром. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим на H ортогональное разложение $H = H_{<k} \oplus H_{\geq k}$, где

$$H_{<k} = \left\{ \sum_{n < k} a_n z^n \in H \right\} \quad \text{и} \quad H_{\geq k} = \left\{ \sum_{n \geq k} a_n z^n \in H \right\}. \quad (34)$$

Через $p_{<k}$ обозначим ортогональную проекцию на $H_{<k}$, через $p_{\geq k}$ – ортогональную проекцию на $H_{\geq k}$. Основным подпространством, имеющим значение для наших приложений, является $H_{\geq 0}$. “Быть одного размера” с $H_{\geq 0}$ понимается в терминах функционально-аналитического подхода. Грассманиан $\text{Gr}(H)$, соответствующий разложению (34) при $k = 0$, состоит из всех замкнутых подпространств W пространства H таких, что ортогональная проекция $p_{\geq 0}: W \rightarrow H_{\geq 0}$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $p_{<0}: W \rightarrow H_{<0}$ – оператором Гильберта–Шмидта. Эти два условия определяют класс подпространств того же размера, что и $H_{\geq 0}$. Можно построить грассманово многообразие, используя разложение (34) для некоторого ненулевого k с ортогональными проекциями $p_{<k}$ и $p_{\geq k}$, но семейство подпространств при этом останется тем же.

Напомним, что каждое многообразие $\text{Gr}(m, n)$ является однородным пространством для общей линейной группы $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ и унитарной группы $\text{U}_n(\mathbb{C})$. Аналогично, грассманово многообразие $\text{Gr}(H)$ является однородным пространством для так называемой *ограниченной линейной группы* $\text{Gl}_{\text{res}}(H)$, состоящей из всех ограниченных обратимых операторов $g: H \rightarrow H$, которые относительно $H = H_{<0} \oplus H_{\geq 0}$ разлагаются как

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где a и d – операторы Фредгольма с индексами, удовлетворяющими равенству $i(a) = -i(d)$, а b и c – операторы Гильберта–Шмидта. Также подгруппа $\text{U}_{\text{res}}(H)$ унитарных преобразований в $\text{Gl}_{\text{res}}(H)$ действует транзитивно на $\text{Gr}(H)$. Отметим, что

стабилизатором $H_{\geq 0}$ в $\text{Gl}_{\text{res}}(H)$ является подгруппа

$$P_{\text{res}}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{Gl}_{\text{res}}(H) \mid a \in \text{Gl}(H_{\geq 0}) \text{ и } d \in \text{Gl}(H_{< 0}) \right\},$$

и

$$P_{\text{res}}(H) \cap U_{\text{res}}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \text{Gl}_{\text{res}}(H) \mid a \in U(H_{\geq 0}) \text{ и } d \in U(H_{< 0}) \right\}.$$

Используя эти определения, можно показать, что $\text{Gr}(H) = \text{Gl}_{\text{res}}(H)/P_{\text{res}}(H)$ есть гильбертово многообразие, порожденное операторами Гильберта–Шмидта, действующими из $H_{\geq 0}$ в $H_{< 0}$ (см. работу [9]).

Многие группы можно непрерывно вложить в $\text{Gl}_{\text{res}}(H)$. Мы рассматриваем одну из таких групп; она играет центральную роль в иерархии КП и ее строгой версии. Для каждого $r > 1$ определим замкнутое кольцо $A_r = \{z \in \mathbb{C} \mid 1/r \leq |z| \leq r\}$ и группу $\Gamma(r)$ всех функций $f: A_r \rightarrow \mathbb{C}^*$, которые являются голоморфными в открытой окрестности A_r . Каждая $\Gamma(r)$ наделена топологией равномерной сходимости, ее индуктивный предел обозначим через Γ . Любая $\gamma \in \Gamma$ разложима в ряд Фурье $\gamma = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i z^i$ такой, что

$$\sum_{i \geq 0} |p_i| r^i + \sum_{i > 0} |p_{-i}| r^i < \infty. \quad (36)$$

Эта оценка означает, что умножение на γ задает ограниченный оператор $M_\gamma: H \rightarrow H$, матрица которого в базисе $\{e_i\}$ имеет вид

$$[M_\gamma] = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & p_0 & p_{-1} & p_{-2} & p_{-3} & \cdots \\ \cdots & p_1 & p_0 & p_{-1} & p_{-2} & \cdots \\ \cdots & p_2 & p_1 & p_0 & p_{-1} & \cdots \\ \cdots & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Следовательно, если $M_\gamma = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$, то матрицы операторов b и c имеют вид

$$\begin{pmatrix} \cdots & p_3 & p_2 & p_1 \\ \cdots & p_4 & p_3 & p_2 \\ \cdots & p_5 & p_4 & p_3 \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ p_{-3} & p_{-4} & p_{-5} & \cdots \\ p_{-2} & p_{-3} & p_{-4} & \cdots \\ p_{-1} & p_{-2} & p_{-3} & \cdots \end{pmatrix}$$

соответственно. Далее, операторы b и c являются операторами Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда коэффициенты их матриц удовлетворяют неравенствам $\sum_{i > 0} i |p_i|^2 < \infty$ и $\sum_{i < 0} i |p_i|^2 < \infty$. Таким образом, в силу оценки (36) группа Γ непрерывно вложима посредством $\gamma \rightarrow M_\gamma$ в $\text{Gl}_{\text{res}}(H)$. На Γ можно определить инволюцию взятия сопряженного элемента, а именно, для каждой функции $\gamma = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i z^i \in \Gamma$ определить $\gamma^* = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \bar{p}_i z^{-i}$ так, что оператор, сопряженный к M_γ , равен M_{γ^*} .

Рассмотрим теперь связные компоненты $\text{Gr}(H)$. Отметим, что согласно теореме Кёйпера (см. статью [10]) и $\text{Gl}(H_{\geq 0})$, и $\text{Gl}(H_{< 0})$ являются односвязными. Используя этот факт, можно показать, что группа $P_{\text{res}}(H)$ является линейно связной. Следовательно, связные компоненты $\text{Gr}(H)$ определяются связными компонентами в $\text{Gl}_{\text{res}}(H)$. Известно (см., например, работу [11]), что связные компоненты пространства фредгольмовых операторов, действующих в гильбертовом пространстве, определяются индексами операторов. Значит, все

$$\text{Gl}_{\text{res}}^{(k)}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{Gl}_{\text{res}}(H) \mid i(d) = k \right\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

являются непересекающимися, открытыми и замкнутыми множествами в $\text{Gl}_{\text{res}}(H)$. Поскольку любой оператор Фредгольма с нулевым индексом линейно связан с обратимым оператором, то, применяя снова теорему Кёйпера, можно показать, что $\text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)$ линейно связно, и, следовательно, связно. Таким образом, связными компонентами $\text{Gl}_{\text{res}}(H)$ являются $\{\text{Gl}_{\text{res}}^{(k)}(H) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Отметим, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ оператор M_{z^k} принадлежит $\text{Gl}_{\text{res}}^{(k)}(H)$ и, значит, справедливы равенства $\text{Gl}_{\text{res}}^{(k)}(H) = M_{z^k} \text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H) = \text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H) M_{z^k}$. Следовательно, можно сделать вывод, что связные компоненты $\text{Gr}(H)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \text{Gr}^{(k)}(H) &= \{W \in \text{Gr}(H) \mid p_{\geq k} : W \rightarrow H_{\geq k} \text{ имеет нулевой индекс}\} = \\ &= \text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H) M_{z^k} (H_{\geq 0}) = \text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H) H_{\geq k}. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Каждая связная компонента в $\text{Gr}(H)$ является также однородным пространством для замкнутой подгруппы

$$G(2) = \{g \in \text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H) \mid g - \text{Id} \text{ есть оператор Гильберта–Шмидта}\}.$$

Действительно, операторы Фредгольма с нулевым индексом “отличаются” от обратимых ограниченных операторов только на конечномерное ограниченное отображение, а операторы вида $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ в $\text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)$ стабилизируют подпространство $H_{\geq 0}$.

Таким образом, можно сказать, что каждая связная компонента $\text{Gr}^{(k)}(H)$ также изоморфна однородному пространству $G(2)/P_{\text{res}}(2)$, где $P_{\text{res}}(2) = G(2) \cap P_{\text{res}}(H)$. Использовать группу $\text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)$ удобнее, поскольку интересующие нас коммутирующие потоки естественным образом вкладываются в $\text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)$, а не в $G(2)$.

Опишем теперь соответствующие коммутирующие потоки для двух упомянутых иерархий. В Γ рассмотрим подгруппу

$$\begin{aligned} \Gamma_{>0} &= \{\gamma_{>0} \in \Gamma, \gamma_{>0} \text{ голоморфно продолжаемо на } \{z \mid |z| < 1\}, \gamma_{>0}(0) = 1\} = \\ &= \left\{ \gamma_{>0} \mid \gamma_{>0}(z) := e^{\sum_{i \geq 1} s_i z^i} \mid s_i \in \mathbb{C}, \sum_{i \geq 1} |s_i| r^i < \infty \text{ при некотором } r > 1 \right\} = \\ &= \left\{ \gamma_{>0} \in \Gamma, \gamma_{>0}(z) = 1 + \sum_{i \geq 1} p_i z^i \right\}. \end{aligned}$$

Наборы $\{s_i\}$ удобно называть *координатами* $\gamma_{>0} \in \Gamma_{>0}$. Для обеих иерархий коммутирующие потоки из $\Gamma_{>0}$ приводят к волновым функциям, для которых произведение в элементах $\mathcal{O}$ реально, а не формально.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Несмотря на то, что элементы $\Gamma_{>0}$ нельзя вложить в $G(2)$, действие $\Gamma_{>0}$ можно определить на $G(2)$ -орбитах в $\text{Gr}(H)$ формулой

$$gz^\ell H_{\geq 0} \rightarrow M_{\gamma_{>0}} g M_{\gamma_{>0}}^{-1} z^\ell H_{\geq 0} = M_{\gamma_{>0}} g M_{z^\ell} M_{\gamma_{>0}}^{-1} H_{\geq 0},$$

так как $M_{\gamma_{>0}}^{-1}$ стабилизирует $H_{\geq 0}$ и коммутирует с M_{z^ℓ} .

Мы также рассмотрим группу $\Gamma_{\leq 0}$, противоположную $\Gamma_{>0}$, состоящую из всех голоморфных функций, определенных на некотором кольце A_r , $r > 1$, и голоморфно продолжаемых на единичный диск вокруг бесконечности так, что продолжения не имеют нулей в этой области. Элемент $\gamma_{\leq 0} \in \Gamma_{\leq 0}$ имеет форму $\gamma_{\leq 0} = \sum_{i \geq 0} p_{-i} z^{-i}$ и разлагается следующим образом:

$$p_0 \left(\sum_{i \geq 0} \frac{p_{-i}}{p_0} z^{-i} \right) = \gamma_{\leq 0}(\infty) \gamma_{< 0}.$$

Семейство $\{\gamma_{< 0}\}$ образует подгруппу $\Gamma_{< 0}$ группы $\Gamma_{\leq 0}$, состоящую из сопряженных элементов $\{\gamma^* \mid \gamma \in \Gamma_{> 0}\}$. В частности, каждый элемент $\gamma_{< 0}$ из $\Gamma_{< 0}$ можно представить в виде $\gamma_{< 0} = \exp(\sum_{j \geq 1} t_j z^{-j})$, где $\sum_{j \geq 1} t_j z^{-j}$ сходится на некотором кольце A_r . Набор $\{t_j\}$ также будем называть *координатами* $\gamma_{< 0} \in \Gamma_{< 0}$. Группа Γ строится из подгрупп $\Gamma_{> 0}$, $\Gamma_{\leq 0}$ и $\Gamma(0) = \{z^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, поскольку согласно факторизационной теореме Биркгофа (см. работы [12], [13]) $\Gamma = \Gamma_{> 0} \Gamma(0) \Gamma_{\leq 0}$. В статье [14] этот результат сформулирован в терминах линейных расслоений над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Для каждого $W \in \text{Gr}^{(k)}(H)$, определим $\Gamma_{> 0}^W$ равенством

$$\Gamma_{> 0}^W = \{\gamma_{> 0}(s) = e^{\sum_{i=1}^{\infty} s_i z^i} \in \Gamma_{> 0} \mid p_{\geq k} : \gamma_{> 0}^{-1} W \rightarrow H_{\geq k} \text{ является биекцией}\}.$$

Аналогично тому, как это сделано в работе [4], можно показать, что $\Gamma_{> 0}^W$ есть непустое открытое подмножество $\Gamma_{> 0}$. Ключевым свойством элементов $\gamma_{> 0}(s)$ в этом плотном открытом подмножестве $\Gamma_{> 0}$ является то, что $W \cap \gamma_{> 0}(s)(H_{\geq k})^\perp = \{0\}$. Теперь в качестве R мы возьмем алгебру R_W голоморфных функций на $\Gamma_{> 0}^W$, в качестве ∂_r – частную производную по s_r (параметру $\Gamma_{> 0}$), а также положим $\partial = \partial_1$. Это определит стандартное окружение $(R_W, \{\partial_r\})$. Для $\gamma_{> 0} \in \Gamma_{> 0}^W$ через $\hat{\psi}_W(\gamma_{> 0})(z)$ обозначим прообраз z^k при ортогональной проекции $p_{\geq k} : \gamma_{> 0}^{-1} W \rightarrow H_{\geq k}$. Тогда для каждого $\gamma_{> 0} \in \Gamma_{> 0}^W$ ряд $\hat{\psi}_W(\gamma_{> 0})(z)$ принадлежит $\gamma_{> 0}^{-1} W$ и является L^2 -граничным значением голоморфной функции $\hat{\psi}_W(\gamma_{> 0})(\zeta)$, $|\zeta| > 1$. Каждому W можно сопоставить осциллирующую функцию

$$\psi_W(\gamma_{> 0})(z) = \hat{\psi}_W(\gamma_{> 0})(z) e^{\sum_{i=1}^{\infty} s_i z^i} = \hat{\psi}_W(s)(z) w_0 = \psi_W(s)(z)$$

типа z^k , для которой произведение двух указанных рядов от z корректно определено, является элементом W и L^2 -граничным значением на $|z| = 1$ ряда $\psi_W(\gamma_{> 0})(\zeta)$, который голоморфен в полосе $1 < |\zeta| < 1 + \varepsilon$. Аналогично можно показать, что все осциллирующие функции $\partial_r(\psi_W)(\gamma_{> 0})(z)$, $r \geq 1$, а также $\partial_1^m(\psi_W)(\gamma_{> 0})(z)$, $m \geq 0$, есть L^2 -граничные значения на $|z| = 1$ рядов, голоморфных в $1 < |\zeta| < 1 + \varepsilon$, и, поскольку W замкнуто, эти граничные значения принадлежат W и определены на

плотном открытом подмножестве $\Gamma_{>0}$. В частности, имеем

$$\psi_W(\gamma_{>0})(z) = \psi_W(s)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\gamma_{>0}(s)) z^n, \quad \text{где} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\gamma_{>0}(s))|^2 < \infty. \quad (38)$$

Пусть V – замыкание в H оболочки граничных значений $\psi_W(\gamma_{>0}(s))(z)$ на $|z| = 1$ во всех $\gamma_{>0}(s) \in \Gamma_{>0}^{(W)}$. Тогда V по определению есть замкнутое подпространство W . Для каждого $n \geq 1$ рассмотрим $\partial_n(\psi_W)(s)(z) = \{\partial_n(\hat{\psi}_W)(s)(z) + \hat{\psi}_W(s)(z)z^n\}_{w_0}$. Граничные значения на $|z| = 1$ каждой $\partial_n(\psi_W)(t)(z)$ принадлежат W , и выражение в правой части этого равенства означает, что $\partial_n(\psi_W)$ есть осциллирующая функция типа z^{k+n} . Поэтому пространство V содержит множество векторов, которые топологически порождают W . Таким образом, имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 4.1. *Замыкание оболочки граничных значений $\psi_W(s)(z)$ на $|z| = 1$ для всех $\gamma_{>0}(s) \in \Gamma_{>0}^{(W)}$ совпадает с W .*

Соединив вместе все описанные выше составляющие, Сигал и Вильсон доказали следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для каждого подпространства $W \in \text{Gr}^{(\ell)}(H)$ функция $\psi_W(s)(z) = \hat{\psi}_W(s)(z)e^{\sum_{i=1}^{\infty} s_i z^i}$ является волновой функцией для иерархии КП относительно окружения $(R_W, \{\partial_r\})$, а псевдодифференциальный оператор $L_W := K_W \partial K_W^{-1}$, где $K_W = \hat{\psi}_W(s)(\partial)$, – соответствующим решением этой иерархии.*

Обсудим теперь, как действует $\Gamma_{\leq 0}$ на решения иерархии КП, полученные согласно этой теореме. Пусть $\gamma_{\leq 0} \in \Gamma_{\leq 0}$ имеет вид $\gamma_{\leq 0} = \sum_{i \geq 0} p_{-i} z^{-i}$ и $W \in \text{Gr}^{(k)}(H)$. Тогда $W = gH_{\geq k}$, где $g \in \text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)$. Возьмем $\gamma_{>0} \in \Gamma_{>0}^{\gamma_{\leq 0} W}$ и разложим все три оператора $M_{\gamma_{\leq 0}}$, g и $M_{\gamma_{>0}}$ в соответствии с разложением $H_{<k} \oplus H_{\geq k}$:

$$M_{\gamma_{\leq 0}} = \begin{pmatrix} d & c \\ o & a \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_{--}(k) & g_{-+}(k) \\ g_{+-}(k) & g_{++}(k) \end{pmatrix}, \quad \text{и} \quad M_{\gamma_{>0}} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$M_{\gamma_{>0}}^{-1} M_{\gamma_{\leq 0}} g = M_{\gamma_{\leq 0}} M_{\gamma_{>0}}^{-1} g = \begin{pmatrix} * & d\delta g_{-+}(k) + c(\beta g_{-+}(k) + \alpha g_{++}(k)) \\ * & a(\beta g_{-+}(k) + \alpha g_{++}(k)) \end{pmatrix},$$

откуда напрямую следует, что $a(\beta g_{-+}(k) + \alpha g_{++}(k))$ является обратимым тогда и только тогда, когда обратим $\beta g_{-+}(k) + \alpha g_{++}(k)$. Другими словами, $\Gamma_{>0}^{\gamma_{\leq 0} W} = \Gamma_{>0}^W$. Используя матрицу оператора a , получаем, что $a^{-1}(z^k) = z^k/p_0$, и согласно определению

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{\gamma_{\leq 0} W}(\gamma_{>0})(z) &= \left(d\delta g_{-+}(k)(\beta g_{-+}(k) + \alpha g_{++}(k))^{-1} a^{-1}(z^k) + c a^{-1}(z^k) \right)_{z^k} = \\ &= \begin{pmatrix} d & c \\ o & a \end{pmatrix} \frac{1}{p_0} \left(\delta g_{-+}(k)(\beta g_{-+}(k) + \alpha g_{++}(k))^{-1} (z^k) \right)_{z^k} = \left(\sum_{i \geq 0} \frac{p_{-i}}{p_0} z^{-i} \right) \hat{\psi}_W(\gamma_{>0})(z). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что $K_{\gamma_{\leq 0}W} = K_W \sum_{i \geq 0}^{\infty} (p_{-i}/p_0) \partial^{-i}$ и, следовательно,

$$L_{\gamma_{\leq 0}W} = K_{\gamma_{\leq 0}W} \partial K_{\gamma_{\leq 0}W}^{-1} = K_W \partial K_W = L_W.$$

Рассмотрим действие группы $\Gamma(0)$ на решения, описанные в теореме 4.1. Возьмем $W = gH_{\geq k}$, где $g \in \text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)$, $n \in \mathbb{Z}$, и найдем решение, соответствующее $z^n W$. Пусть $\gamma_{>0}$ принадлежит $\Gamma_{>0}^{z^n W}$, тогда

$$\gamma_{>0}^{-1} z^n W = M_{\gamma_{>0}}^{-1} M_{z^n} g M_{z^{-n}} H_{\geq n+k} = M_{z^n} M_{\gamma_{>0}}^{-1} g M_{z^{-n}} H_{\geq n+k},$$

где $\hat{g} := M_{z^n} M_{\gamma_{>0}}^{-1} g M_{z^{-n}} = M_{z^n} \tilde{g} M_{z^{-n}} \in \text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)$. Непосредственные вычисления показывают, что (p, q) -й коэффициент матрицы $\hat{g}$ равен $(p-n, q-n)$ -му коэффициенту матрицы $\tilde{g}$. Более того, матричные коэффициенты $\hat{g}_{++}(n+k)$ и $\tilde{g}_{++}(k)$ совпадают, как и коэффициенты $\hat{g}_{-+}(n+k)$ и $\tilde{g}_{-+}(k)$. Это означает, что $\Gamma_{>0}^{z^n W} = \Gamma_{>0}^W$. Согласно конструкции, лежащей в основе теоремы 4.1, получаем, что

$$\hat{\psi}_W(s)(z) = z^k + \tilde{g}_{-+}(k) \tilde{g}_{++}(k)^{-1} (z^k)$$

и

$$\hat{\psi}_{z^n W}(s)(z) = z^{k+n} + \hat{g}_{-+}(k+n) \hat{g}_{++}(k+n)^{-1} (z^{k+n}).$$

Таким образом, изложенные выше рассуждения приводят к равенству $\hat{\psi}_{z^n W}(t)(z) = z^n \hat{\psi}_W(t)(z)$. Следовательно, выполнено соотношение $K_{z^n W} = K_W \partial^n$, что, в свою очередь, означает, что $L_{z^n W} = L_W$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Объединим эти результаты в следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Для любой функции $\gamma \in \Gamma_{\leq 0} \Gamma(0)$ и любого $W \in \text{Gr}(H)$ справедливо равенство $L_{\gamma W} = L_W$.*

Из следствия 4.1 вытекает, что любая связная компонента в $\text{Gr}(H)$ порождает одно и то же множество решений иерархии КП; кроме того, это множество соответствует фактор-пространству $\Gamma_{\leq 0} \setminus \text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)/P_{\text{res}}(H)$ двойных смежных классов. Поэтому было бы достаточно рассмотреть, как это сделано в статье [4], только $\text{Gr}^{(0)}(H)$. Однако в настоящей работе нам нужны решения из разных компонент.

Следующим этапом является построение для заданного решения L_W , $W \in \text{Gr}^{(k)}(H)$, обратимой функции α , которая удовлетворяет уравнению (28) в утверждении 4.1. Для этого рассмотрим для $v \in H$ и $W \in \text{Gr}^{(k)}(H)$ голоморфную на $\Gamma_{>0}^W$ функцию $q_{W,v}$, определенную равенством

$$q_{W,v}(\gamma_{>0}(s)) = q_{W,v}(s) := \langle \psi_W(s)(z) | v \rangle = \langle \psi_W(\gamma_{>0}(s)) | v \rangle. \quad (39)$$

Если $v \in W^\perp$, то она равна нулю. Тем не менее при каждом $v \neq 0$ из W эта функция в нуль не обращается, так как образ ψ_W плотен в W (см. лемму 4.1), а поэтому в $\Gamma_{>0}$ существует плотная открытая область

$$\Gamma_{>0}^{(W,v)} = \{\gamma_{>0}(s) \mid \gamma_{>0}(s) \in \Gamma_{>0}^W, q_{W,v}(\gamma_{>0}(s)) \neq 0\},$$

в которой $q_{W,v}$ обратима. Более того, действие каждого ∂_r , $r \geq 1$, на функцию $q_{W,v}$ дает выражение $\partial_r(q_{W,v}) = \langle \partial_r(\psi_W) | v \rangle = \langle (L_W^r)_{\geq 0}(\psi_W) | v \rangle = (L_W^r)_{\geq 0}(q_{W,v})$, так как ψ_W есть волновая функция иерархии КП. Таким образом, если мы изменим

окружение, взяв вместо алгебры R_W алгебру $R_{W,\ell}$ голоморфных на $\Gamma_{>0}^{(W,v)}$ функций и сохранив прежними операции дифференцирования, как в теореме 4.1, то получим включение $q_{W,v} \in R_{W,\ell}^*$. Отметим, что для каждого отличного от нуля $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $q_{W,\lambda v} = \bar{\lambda} q_{W,v}$. Следовательно, для любого $\lambda \neq 0$ справедливо равенство $\Gamma_{>0}^{(W,v)} = \Gamma_{>0}^{(W,\lambda v)}$. Применяя утверждение 4.1, приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть для произвольного $W \in \text{Gr}^{(k)}(H)$ и произвольной прямой $\ell = \langle w \rangle$ в W функция $q_{W,w}$ определена равенством (39). Тогда $\psi_{W,w} := q_{W,w}^{-1} \psi_W$ является волновой функцией строгой иерархии КП, а $M_{W,\ell} = q_{W,w}^{-1} L_W q_{W,w}$ — соответствующим решением этой иерархии.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Пусть $H_{>0} = \{\sum_{n \geq 1} a_n z^n \in H\}$. Рассмотрим разложение

$$H = H_{<0} \oplus \langle 1 \rangle \oplus H_{>0}. \quad (40)$$

Стабилизатором пары $(H_{\geq 0}, \langle 1 \rangle)$ в $\text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)$ является подгруппа P_0 , состоящая из всех $p \in \text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)$, которые в соответствии с разложением (40) для H представимы в виде

$$p = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ p_{31} & 0 & p_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{где все } p_{ii} \text{ обратимы.} \quad (41)$$

Пусть $P_0(2) = G(2) \cap P_0$. Тогда многообразия $\text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)/P_0$ и $G(2)/P_0(2)$ изоморфны и определяют множество решений строгой иерархии КП, описанных в теореме 4.2 для всех плоскостей W из одной связной компоненты $\text{Gr}(H)$. Однородное многообразие $\text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)/P_0$ является покрытием $\text{Gl}_{\text{res}}^{(0)}(H)/P_{\text{res}}(H)$ пространства, которое согласно теореме 4.1 дает решения иерархии КП со слоями, изоморфными проективному пространству $\mathbb{P}^1(H_{\geq 0})$, т. е. семейству прямых в $H_{\geq 0}$.

Можно показать, что для строгой иерархии КП имеет место аналог следствия 4.1. Действительно, предположим, что $\gamma = \gamma_{\leq 0} z^n \in \Gamma_{\leq 0} \Gamma(0)$, и выберем пару (W, ℓ) согласно теореме 4.2. Тогда $L_{\gamma W} = L_W$ и $\psi_{\gamma W} = z^n \gamma_{<0} \psi_W$. Обозначим через $p_{\gamma W}$ ортогональную проекцию на γW и определим вектор $v = p_{\gamma W}(z^n M_{\gamma_{<0}}^{-1}(w))$. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} q_{\gamma W, v} &= \langle \psi_{\gamma W} | p_{\gamma W}(z^n (M_{\gamma_{<0}}^*)^{-1}(w)) \rangle = \langle z^n M_{\gamma_{<0}} \psi_W | z^n (M_{\gamma_{<0}}^{-1}(w)) \rangle = \\ &= \langle M_{\gamma_{<0}} \psi_W | (M_{\gamma_{<0}}^*)^{-1}(w) \rangle = \langle \psi_W | M_{\gamma_{<0}}^* (M_{\gamma_{<0}}^*)^{-1}(w) \rangle = q_{W, w}. \end{aligned}$$

В частности, получаем равенство $M_{\gamma W, \langle v \rangle} = M_{W, \langle w \rangle}$. Оформим этот результат как следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $\gamma = \gamma_{\leq 0} z^n \in \Gamma_{\leq 0} \Gamma(0)$ и (W, ℓ) — произвольная пара, состоящая из пространства $W \in \text{Gr}^{(k)}(H)$ и прямой $\ell = \langle w \rangle$ из W . Тогда решение строгой иерархии КП, соответствующее паре $(\gamma W, \langle v \rangle)$, где вектор $v \in \gamma W$ отличен от нуля и определяется равенством $v = p_{\gamma W}(z^n M_{\gamma_{<0}}^{-1}(w))$, совпадает с решением, соответствующим паре (W, ℓ) .

Теперь мы можем более точно описать волновую функцию преобразования Дарбу $(L_W)_{q_{W,v}}$ для L_W , упомянутого в утверждении 4.1. Напомним, что волновая функция $(L_W)_{q_{W,v}}$ определялась как

$$q_{W,v} \partial q_{W,v}^{-1} \psi_W = \left(\partial - \frac{\partial(q_{W,v})}{q_{W,v}} \right) \psi_W = \left(\partial(\hat{\psi}_W) + z \hat{\psi}_W - \frac{\partial(q_{W,v})}{q_{W,v}} \hat{\psi}_W \right) \cdot w_0.$$

И она, в первую очередь, является осциллирующей функцией типа $z^{\ell+1}$. Далее, все граничные значения функции $q_{W,v} \partial q_{W,v}^{-1} \psi_W(s, z)$ в точке $z = 1$ при различных $\gamma_{>0}(s) \in \Gamma_{>0}^{(W,v)}$ лежат в W . Обозначим через W_v замыкание в W этих граничных значений. Рассмотрим теперь все производные $\partial_n(q_{W,v} \partial q_{W,v}^{-1} \psi_W)$. Можно показать, что каждая из них есть осциллирующая функция типа $z^{\ell+n+1}$, чьи граничные значения в $z = 1$ при различных s принадлежат W_v . Поэтому W_v является подпространством W коразмерности единица. Поскольку для каждого $b \in R$ выполнено равенство $\langle b \psi_W | v \rangle = b \langle \psi_W | v \rangle$, то

$$\left\langle \left[\partial - \frac{\partial(q_{W,v})}{q_{W,v}} \right] \psi_W | v \right\rangle = \left[\langle \partial(\psi_W) | v \rangle - \frac{\partial(q_{W,v})}{q_{W,v}} \langle \psi_W | v \rangle \right] = \partial(\langle \psi_W | v \rangle) - \partial(q_{W,v}) = 0.$$

Другими словами, мы доказали следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Для любого отличного от нуля вектора $v \in W$ решение $(L_W)_{q_{W,v}}$ иерархии КП является решением Сигала–Вильсона, соответствующим подпространству $W_v = W \cap \langle v \rangle^\perp$. Более того, $q_{W,v} \partial q_{W,v}^{-1} \psi_W$ совпадает с ψ_{W_v} .*

В заключение покажем, что волновые функции, сопряженные ψ_W и $\psi_{W,w}$, также имеют геометрические интерпретации в терминах грассманиана. Рассмотрим пространство $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$ со скалярным произведением

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z) \overline{g(z)}}{z} dz, \quad (42)$$

где $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ и $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n \in H$.

Отметим, что грассманову многообразию $\text{Gr}(H)$ естественным образом можно сопоставить грассманово многообразие $\text{Gr}(H)^\perp$, состоящее из $\{W^\perp | W \in \text{Gr}(H)\}$. Оно имеет структуру, аналогичную $\text{Gr}(H)$. Действительно, если индекс ортогональной проекции $p_{\geq k}: W \rightarrow H_{\geq k}$ равен нулю, то в силу свойств индексов фредгольмовых операторов проекция $p_{< k}: W^\perp \rightarrow H_{< k}$ также имеет нулевой индекс. Более того, если $p_{\geq k}: W \rightarrow H_{\geq k}$ – биекция, то ортогональная проекция $p_{< k}: W^\perp \rightarrow H_{< k}$ также биективна. А именно, условие, наложенное на W , означает, что существует оператор Гильберта–Шмидта $A: H_{\geq k} \rightarrow H_{< k}$ такой, что $W = \{h_{\geq k} + A(h_{\geq k}) | h_{\geq k} \in H_{\geq k}\}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\widetilde{W} = \{h_{< k} - A^*(h_{< k}) | h_{< k} \in H_{< k}\}$ является подпространством $W^\perp$. Далее, поскольку оператор

$$g = \begin{pmatrix} \text{Id} & A \\ -A^* & \text{Id} \end{pmatrix} : H_{< k} \oplus H_{\geq k} \rightarrow W^\perp \oplus W$$

инъективный и фредгольмов с нулевым индексом, то он является биективным, и, следовательно, имеет место равенство $\widehat{W} = W^\perp$. Связными компонентами пространства $\text{Gr}(H)^\perp$ являются множества $\text{Gr}^{(k)}(H)^\perp$, $k \in \mathbb{Z}$, определенные соотношением

$$\text{Gr}^{(k)}(H)^\perp = \{\widehat{W} \mid p_{<k}: \widehat{W} \rightarrow H_{<k} \text{ имеет нулевой индекс}\} = \{W^\perp \mid W \in \text{Gr}^{(k)}(H)\}.$$

Группа $\text{Gl}_{\text{res}}(H)$ действует транзитивно на $\text{Gr}(H)^\perp$, а $\text{Gl}_{\text{res}}^0(H)$ – на каждой связной компоненте. Нас интересует действие коммутативной группы $\Gamma_{<0}$ на $\text{Gr}(H)^\perp$. По аналогии с действием $\Gamma_{>0}$ на $\text{Gr}(H)$ можно показать, что каждое $W^\perp \in \text{Gr}^{(k)}(H)^\perp$ можно поместить с помощью левого сдвига на элементы из $\Gamma_{<0}$ в большую клетку

$$\{\widehat{W} \mid \widehat{W} \in \text{Gr}^{(k)}(H)^\perp, p_{<k}: \widehat{W} \rightarrow H_{<k} \text{ является биекцией}\}.$$

Таким образом, имеет смысл рассмотреть в выбранном окружении аналог $\Gamma_{>0}^W$, открытое плотное множество $\Gamma_{<0}^{W^\perp}$ в $\Gamma_{<0}$:

$$\Gamma_{<0}^{W^\perp} = \{\gamma_{<0} \in \Gamma_{<0} \mid p_{<k}: \gamma_{<0}^{-1}W^\perp \rightarrow H_{<k} \text{ является биекцией}\}.$$

Для каждого $\gamma_{<0} \in \Gamma_{<0}^{W^\perp}$ обозначим через $\hat{\psi}_{W^\perp}(\gamma_{<0}, z)$ прообраз z^{k-1} в $\gamma_{<0}^{-1}W^\perp$ при отображении $p_{<k}$. Он имеет вид $\hat{\psi}_{W^\perp}(\gamma_{<0})(z) = z^{k-1}(1 + \sum_{m \geq 1} b_m(\gamma_{<0})z^m)$ и является L^2 -граничным значением сходящегося ряда $\hat{\psi}_{W^\perp}(\gamma_{<0})(\eta)$ на $|\eta| < 1$. Умножение на $\gamma_{<0}$ приводит к ряду $\psi_{W^\perp}(\gamma_{<0})(z)$ со значениями в $W^\perp$, который является L^2 -граничным значением ряда

$$\begin{aligned} \psi_{W^\perp}(\gamma_{<0})(\eta) &= \eta^{k-1} \left(1 + \sum_{m > 0} b_m(\gamma_{<0})\eta^m \right) e^{\sum_{i \geq 1} s_i \eta^{-i}} = \\ &= \hat{\psi}_{W^\perp}(s)(\eta) e^{\sum_{i \geq 1} s_i \eta^{-i}} = \eta^{k-1} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j(\gamma_{<0})\eta^j \right\} = \psi_{W^\perp}(s)(\eta), \end{aligned}$$

сходящегося в кольце $1/(1 + \varepsilon) < |\eta| < 1$. Более того, существует связь между $\Gamma_{>0}^W$ и $\Gamma_{<0}^{W^\perp}$. Действительно, для каждого $\gamma_{>0}$ из $\Gamma_{>0}$, любого $w \in W$ и некоторого $v \in (\gamma_{>0}^{-1}W)^\perp$ выполнено соотношение $\langle \gamma_{>0}^{-1}(w) \mid v \rangle = 0 = \langle w \mid (\gamma_{>0}^*)^{-1}(v) \rangle$, что приводит к равенству $(\gamma_{>0}^{-1}W)^\perp = \gamma_{>0}^*(W^\perp)$. В частности, можно заметить, что $\gamma_{>0} \in \Gamma_{>0}^W$ тогда и только тогда, когда $(\gamma_{>0}^*)^{-1} \in \Gamma_{<0}^{W^\perp}$. Следовательно, можно рассматривать $\psi_{W^\perp}$ как функцию, определенную на $\Gamma_{>0}^W$, и использовать запись $\psi_{W^\perp}(-\bar{s})(z)$, где $-\bar{s}$ – краткое обозначение для $\{-\bar{s}_i\}$, а $\{s_i\}$ – координаты $\gamma_{>0} \in \Gamma_{>0}^W$. Теперь мы можем “привязать” эту функцию к дуальной осциллирующей функции типа z^{-k} . А именно, рассмотрим выражение

$$\frac{1}{z} \overline{\psi_{W^\perp}(-\bar{s})(z)} = z^{-k} \left(1 + \sum_{m > 0} \overline{b_m(-\bar{s})} z^{-m} \right) \exp \left(\sum_{i \geq 1} -s_i z^i \right) = \tilde{\psi}(s, z).$$

Из построения функции $\psi_{W^\perp}$ следует, что все $\{s \mapsto \overline{b_m(-\bar{s})} \mid m > 0\}$ принадлежат R_W и, следовательно, $\tilde{\psi}(s, z)$ является элементом $\mathcal{O}^*$ требуемой формы. Остается показать, что $\tilde{\psi}(t, z)$ – сопряженная к ψ_W . Из утверждения 4.2 в статье [3]

известно, каким образом характеризуется сопряженный элемент. Пусть w – осциллирующая функция типа $\beta_\ell^{-1}z^\ell$, а $\tilde{w}$ – дуальная осциллирующая функция типа $\beta_\ell z^{-\ell}$. Тогда $\tilde{w}$ является сопряженной к w в том и только том случае, когда она удовлетворяет равенству

$$\mathfrak{B}_1(w(s, z), \partial^n(\tilde{w}(s, z))) = 0 \quad \text{для любого } n \geq 0. \quad (43)$$

Пара $\mathfrak{B}_1: \mathcal{O} \times \mathcal{O}^* \rightarrow R_W$ определяется следующим образом: если $w = w(s, z) = (\sum_j a_j(s)z^j)w_0$ принадлежит $\mathcal{O}$, а $\tilde{w} = \tilde{w}(s, z) = (\sum_k b_k(s)z^k)w_0^*$ принадлежит $\mathcal{O}^*$, то $\mathfrak{B}_1(w, \tilde{w}) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{-k-1}(s)b_k(s)$. Чтобы доказать свойство (43) для $w = \psi_W$ и $\tilde{w} = \tilde{\psi}(s, z)$, мы используем выражение (42). Отметим, что аналогично тому, как $\psi_W(s)(z)$ зависит от s , отображение $\bar{s} \mapsto \psi_{W^\perp}(-\bar{s})(z)$ сколь угодно раз дифференцируемо по каждому $\bar{s}_i$, и, поскольку $W^\perp$ замкнуто, получаемое отображение также имеет значения в $W^\perp$. Применяя этот факт к скалярному произведению $\psi_W(\tilde{s})(z)$ и $\partial^n(\psi_{W^\perp}(-\bar{s})(z))/\partial \bar{s}_1$, $n \geq 0$, для любых $\gamma_{>0}(\tilde{s})$ и $\gamma_{>0}(s) \in \Gamma_{>0}^W$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_W(\tilde{s}) \left| \frac{\partial^n}{\partial \bar{s}_1}(\psi_{W^\perp}(-\bar{s})) \right. \right\rangle &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\psi_W(\tilde{s})(z) \overline{\frac{\partial^n}{\partial \bar{s}_1}(\psi_{W^\perp}(-\bar{s})(z))}}{z} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \psi_W(\tilde{s})(z) \frac{\partial^n}{\partial s_1} \left(\frac{1}{z} \overline{\psi_{W^\perp}(-\bar{s})(z)} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \psi_W(\tilde{s})(z) \frac{\partial^n}{\partial s_1}(\tilde{\psi}(s, z)) dz = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Полагая в формуле (44) $\tilde{s}$ равным s , мы приходим к билинейным соотношениям (43) для $\psi_W(s)(z)$ и $\tilde{\psi}(s, z)$. Объединяя теперь вышеизложенные результаты с утверждением 4.3, получаем следующие формулы для функций, сопряженных построенным волновым функциям.

ТЕОРЕМА 4.3. *Для каждого $W \in \text{Gr}(H)$ и любого отличного от нуля $w \in W$ функции, сопряженные волновым функциям ψ_W и $\psi_{W,w}$, построенным в теоремах 4.1 и 4.2 соответственно, определяются равенствами*

$$\psi_W^* = \frac{1}{z} \overline{\psi_{W^\perp}(-\bar{s})(z)} \quad \text{и} \quad \psi_{W,w}^* = q_{W,w} \frac{1}{z} \overline{\psi_{W^\perp}(-\bar{s})(z)}.$$

Список литературы

- [1] Г. Ф. Хельминк, А. Г. Хельминк, Е. А. Панасенко, “Интегрируемые деформации в алгебре псевдодифференциальных операторов с точки зрения алгебраической теории Ли”, *ТМФ*, **174**:1 (2013), 154–176.
- [2] G. F. Helminck, A. G. Helminck, E. A. Panasencko, “Cauchy problems related to integrable deformations of pseudo differential operators”, *J. Geom. Phys.*, **85** (2014), 196–205.
- [3] Г. Ф. Хельминк, Е. А. Панасенко, С. В. Поленкова, “Билинейные уравнения для строгой иерархии Кадомцева–Петвиашвили”, *ТМФ*, **185**:3 (2015), 512–526.
- [4] G. Segal, G. Wilson, “Loop groups and equations of KdV type”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **61** (1985), 5–65.
- [5] L. A. Dickey, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*, Advanced Series in Mathematical Physics, **26**, World Sci., Singapore, 2003.

- [6] E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, *Nonlinear Integrable Systems – Classical Theory and Quantum Theory* (Kyoto, Japan, May 13–16, 1981), eds. M. Jimbo, T. Miwa, World Sci., Singapore, 1983, 39–119.
- [7] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer, Berlin, 1991.
- [8] W. Oevel, W. Schief, “Darboux theorems and the KP hierarchy”, *Applications of Analytic and Geometric Methods in Differential Equations*, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop (Exeter, UK, 14–17 July, 1992), NATO ASI Series (Ser. C: Mathematical and Physical Sciences), **413**, ed. P. A. Clarkson, Springer, Dordrecht, 1993, 193–206.
- [9] A. Pressley, G. Segal, *Loop Groups*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1988.
- [10] N. H. Kuiper, “On the general linear group in Hilbert space”, *Math. Centrum Amsterdam Afd. Zuivere Wisk.*, **1964** (1964), ZW-011, 9 pp.
- [11] M. F. Atiyah, *K-theory*, Benjamin, New York, 1967.
- [12] G. D. Birkhoff, “Singular points of ordinary differential equations”, *Trans. AMS*, **10**:4 (1909), 436–470.
- [13] G. D. Birkhoff, “Equivalent singular points of ordinary linear differential equations”, *Math. Ann.*, **74**:1 (1913), 134–139.
- [14] A. Grothendieck, “Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann”, *Amer. J. Math.*, **79**:1 (1957), 121–138.

Поступила в редакцию 20.02.2018,
после доработки 26.04.2018,
принята к печати 5.06.2018