Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Акбарзаде, Топология изоэнергетических поверхностей интегрируемого случая Борисова–Мамаева–Соколова на алгебре Ли $so(3, 1)$, *ТМФ*, 2018, том 197, номер 3, 385–396

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9560>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 02:46:48

© 2018 г.

Р. Акбарзаде*

ТОПОЛОГИЯ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ
ПОВЕРХНОСТЕЙ
ИНТЕГРИРУЕМОГО СЛУЧАЯ
БОРИСОВА–МАМАЕВА–СОКОЛОВА
НА АЛГЕБРЕ ЛИ $so(3, 1)$

Описана топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемой системы на алгебре Ли $so(3, 1)$ и критические точки гамильтониана при различных значениях параметров. Построены бифуркационные диаграммы гамильтониана.

Ключевые слова: топология, интегрируемые гамильтоновы системы, изоэнергетические поверхности, критическое множество, бифуркационные диаграммы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9560>

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о движении твердого тела относительно неподвижной точки одна из самых известных в механике, ее различные обобщения исследовались многими авторами. Известно, что в общем случае эти задачи не являются интегрируемыми. Однако исследование интегрируемых случаев важно для понимания общих законов поведения решений таких систем. Одним из основных результатов исследования интегрируемых гамильтоновых систем является теорема Лиувилля, согласно которой неособые компактные поверхности уровней первых интегралов вполне интегрируемой гамильтоновой системы представляют собой объединение непересекающихся торов, заполненных квазипериодическими траекториями. Теорема Лиувилля показывает, как устроена система на неособых поверхностях уровней первых интегралов, но ничего не говорит о том, как система ведет себя на поверхностях уровней первых интегралов, имеющей особенности, и о вложении торов Лиувилля в фазовое пространство системы.

Это исследование было поддержано Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM) (грант № 96510037).

*School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences, Tehran, Iran.
E-mail: akbarzadeh.rasoul@gmail.com

Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем (теория топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем) была построена Фоменко в работах [1]–[3]. В этих статьях представлено полное исследование того, как торы Лиувилля вполне интегрируемых гамильтоновых систем преобразуются в окрестности критических поверхностей уровней первых интегралов. Для исследования торов Лиувилля в окрестности критической поверхности уровня важно знать бифуркационную диаграмму гамильтоновой системы. Бифуркационная диаграмма и топологическая классификация основных интегрируемых случаев уравнения движения твердого тела получены в работах Фоменко, Ошемкова и Болсинова [3]–[5].

Уравнения динамики твердого тела можно рассматривать как гамильтонову систему на общих уровнях так называемых геометрического интеграла f_1 и интеграла площади f_2 . После редукции к системе, заданной на этих уровнях, получается гамильтонова система с двумя степенями свободы, гамильтониан H которой является интегралом энергии. Изоэнергетическая поверхность $Q_{g,h} = \{H = h, f_2 = g\}$ зависит от двух параметров g и h . Если существует дополнительный интеграл, то система интегрируема в смысле Лиувилля и каждая изоэнергетическая поверхность расслаивается на торы Лиувилля. Эти слоения можно описать в терминах упомянутой выше теории топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем. Уравнения движения твердого тела могут быть заданы как уравнения Эйлера для алгебры Ли $e(3)$. Существуют также некоторые обобщения уравнений Эйлера для других алгебр Ли, в частности для алгебр Ли $so(4)$, $so(3,1)$. Новые интегрируемые случаи уравнений Эйлера в алгебрах Ли $so(4)$, $so(3,1)$ и $e(3)$ были описаны в работах [6]–[9]. Гамильтонианы в этих случаях квадратичны, но дополнительные интегралы являются многочленами четвертой степени. В настоящей работе мы описываем топологические свойства одного из интегрируемых случаев на алгебре Ли $so(3,1)$.

Структура интегрируемого случая Соколова на алгебрах Ли $e(3)$ и $so(3,1)$ изучалась в работах [10], [11]. Это гамильтонова система с двумя степенями свободы, в которой гамильтониан и дополнительный интеграл являются однородными полиномами второй и четвертой степени соответственно. Имеется интересная особенность данной системы, состоящая в том, что связные компоненты изоэнергетических поверхностей гамильтониана оказываются некомпактными.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим пространства $so(4)^*$, $e(3)^*$, $so(3,1)^*$, дуальные алгебрам Ли $so(4)$, $e(3)$, $so(3,1)$. Пусть S_1 , S_2 , S_3 , R_1 , R_2 , R_3 – линейные координаты (безразмерные переменные). Скобка Ли–Пуассона, соответствующая алгебрам Ли $so(4)$, $e(3)$, $so(3,1)$, имеет вид

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k, \quad \{S_i, R_j\} = \epsilon_{ijk} R_k, \quad \{R_i, R_j\} = \kappa \epsilon_{ijk} S_k, \quad (1)$$

где ϵ_{ijk} – знак перестановки $(123) \rightarrow (ijk)$ и κ – параметр семейства. Случаи $\kappa > 0$, $\kappa = 0$ и $\kappa < 0$ отвечают алгебрам Ли $so(4)$, $e(3)$ и $so(3,1)$. Удобно рассматривать координаты (S_1, S_2, S_3) и (R_1, R_2, R_3) как компоненты двух трехмерных векторов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{R}$ (далее, в частности, $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{R}^2$ обозначают скалярные квадраты векторов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{R}$).

Уравнения Эйлера на алгебрах $so(4)$, $e(3)$ и $so(3,1)$ записываются как

$$\dot{S}_i = \{S_i, H\}, \quad \dot{R}_i = \{R_i, H\}, \quad (2)$$

где H называется гамильтонианом и представляет собой функцию на указанных выше дуальных пространствах.

В работах Борисова, Мамаева и Соколова [6]–[8] был найден новый интегрируемый случай. Гамильтониан и дополнительный интеграл в этом случае имеют вид

$$H_2 = \left(\alpha - \frac{\varkappa}{4\alpha} \right) S_1^2 + 2\alpha S_2^2 + \alpha S_3^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1, \quad (3)$$

$$K_2 = 4\alpha^2 S_2^2 \mathbf{S}^2 + 4\alpha S_2 (S_2 (S_1 R_2 - S_2 R_1) - S_3 (S_3 R_1 - S_1 R_3)) + (S_3 R_1 - S_1 R_3)^2 + (S_1 R_2 - S_2 R_1)^2 - S_1^2 \mathbf{R}^2. \quad (4)$$

Соответствующая гамильтонова система содержит параметр $\varkappa$ и может быть записана в форме уравнения Эйлера на шестимерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Гамильтонова система для гамильтониана H в терминах безразмерных переменных описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \{S_1, H_2\} &= 2\alpha S_2 S_3 + S_1 R_3 - S_3 R_1, & \{R_1, H_2\} &= 4\alpha S_2 R_3 - 2\alpha S_3 R_2 + \\ & & & + \varkappa S_1 S_3 - R_1 R_3, \\ \{S_2, H_2\} &= \frac{\varkappa}{2\alpha} S_1 S_3 + S_2 R_3 - S_3 R_2, & \{R_2, H_2\} &= -2 \left(\alpha - \frac{\varkappa}{4\alpha} \right) S_1 R_3 + 2\alpha S_3 R_1 - \\ & & & - R_2 R_3 + \varkappa S_2 S_3, \\ \{S_3, H_2\} &= -2 \left(\alpha + \frac{\varkappa}{4\alpha} \right) S_1 S_2, & \{R_3, H_2\} &= 2 \left(\alpha - \frac{\varkappa}{4\alpha} \right) S_1 R_2 - 4\alpha S_2 R_1 + \\ & & & + R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_1^2 - \varkappa S_2^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Первые интегралы уравнений (5) имеют вид

$$f_1 = \varkappa S_1^2 + \varkappa S_2^2 + \varkappa S_3^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = c \quad (\text{геометрический интеграл}),$$

$$f_2 = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = g \quad (\text{интеграл площади}),$$

$$H_2 = \left(\alpha - \frac{\varkappa}{4\alpha} \right) S_1^2 + 2\alpha S_2^2 + \alpha S_3^2 + Q_3 \quad (\text{гамильтониан}),$$

$$K_2 = 4\alpha^2 S_2^2 \mathbf{S}^2 + 4\alpha S_2 (S_2 Q_3 - S_3 Q_2) + Q_2^2 + Q_3^2 - S_1^2 (1 - \varkappa \mathbf{S}^2) \quad (\text{дополнительный интеграл}),$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{S} \times \mathbf{R}$ (знак $\times$ обозначает векторное произведение). Функции f_1 и f_2 – инварианты скобки Ли–Пуассона для алгебры (1), т. е. эти функции коммутируют с любой функцией относительно скобки Ли–Пуассона для алгебры (1).

Заметим, что с помощью линейной замены переменных $(S, R) \rightarrow \sqrt{c}(S, R)$ мы можем сделать величину c геометрического интеграла равной единице. Это изменение не влияет на топологический анализ задачи, и в дальнейшем мы полагаем $c = 1$.

Статьи [12], [13] были посвящены топологическому описанию изоэнергетических поверхностей гамильтониана $H = aS_1^2 + bS_2^2 + cS_3^2 + S_1 R_2 - S_2 R_1$, где a , b и c – произвольные действительные числа, а также их бифуркационным диаграммам. В настоящей работе мы описываем бифуркационные диаграммы отображения моментов для

интегрируемой гамильтоновой системы (5) с гамильтонианом (3) и дополнительным интегралом (4). Мы также описываем бифуркации торов Лиувилля для этой системы и вычисляем инвариант Фоменко. Отображение моментов есть отображение $F: \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое сопоставляет точке на многообразии $\mathcal{M}^4$ пару значений функций H и K в этой точке: $x \rightarrow (H(x), K(x))$. Тор Лиувилля отображается в одну точку. Множество особенностей отображения моментов – это множество точек многообразия $\mathcal{M}^4$, в которых функции H и K зависимы: $N = \{x \in \mathcal{M}^4: \text{rang } dF(x) < 2\}$. Образ $\Sigma = F(K)$ есть так называемое бифуркационное множество. Обозначим через $Q_h^3 = \{x \in \mathcal{M}^4: H(x) = h\}$ изоэнергетическую поверхность.

В рамках теории Фоменко [2], [3] можно описать глобальное поведение системы на изоэнергетической поверхности с помощью некоторого графа. Ребра графа (или молекулы) соответствуют однопараметрическим семействам неособых торов Лиувилля, а его вершины (или атомы) описывают бифуркации этих торов на сингулярных уровнях интеграла K . Граф обозначается как $W(Q_h^3)$ и называется инвариантом Фоменко. В соответствии с замечанием 1 в работе [12] будем считать, что параметры системы с гамильтонианом (3) и интегралом (4) на орбите $\mathcal{M}_{c,g}$ удовлетворяют следующим условиям: $c = 1$, $g \geq 0$, $\alpha > 0$.

3. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ НУЛЕВОГО РАНГА

Справедливо следующее предложение [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для каждого $\varkappa \neq -4\alpha^2$ множество точек, где оба гамильтоновых векторных поля $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } K$ (здесь sgrad обозначает косой градиент) с гамильтонианами (3) и (4) обращаются в ноль, представляет собой объединение следующих (двухпараметрических) семейств точек в пространстве $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$:

- 1) точки вида $(0, 0, S_3, 0, 0, R_3)$;
- 2) точки вида $(0, S_2, 0, R_1, R_2, 0)$, где $-4\alpha S_2 R_1 + R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_2^2 = 0$;
- 3) точки вида $(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, \sqrt{\varkappa + 4\alpha^2 S_2}, \sqrt{\varkappa + 4\alpha^2 S_3})$, где $\varkappa > -4\alpha^2$;
- 4) точки вида $(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, -\sqrt{\varkappa + 4\alpha^2 S_2}, -\sqrt{\varkappa + 4\alpha^2 S_3})$, где $\varkappa > -4\alpha^2$;
- 5) точки вида $(S_1, 0, 0, R_1, R_2, 0)$, где $2(\alpha - \varkappa/4\alpha)S_1 R_2 + R_1^2 + R_2^2 - \varkappa S_1^2 = 0$;
- 6) точки вида $(S_1, 0, S_3, 0, (\varkappa/2\alpha)S_1, 0)$.

В данном предложении множество критических точек нулевого ранга рассматривается как подмножество всего пространства $\mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R})$. Каждое из шести семейств задает точки равновесия соответствующей интегрируемой системы на орбите. С учетом уравнений, определяющих орбиты, для каждого значения g мы получаем множество критических точек нулевого ранга на орбите $\mathcal{M}_{1,g}^4$ и их образы при отображении момента Φ_g . Этот результат сформулирован в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varkappa < 0$. Образ критической точки нулевого ранга состоит из объединения следующих точек, отвечающих семействам из предложения 1.

1. Для всех g и $\alpha > 0$ существуют две точки вида

$$(0, 0, S_3, 0, 0, R_3), \quad \text{где} \quad \varkappa S_3^2 + R_3^2 = 1, \quad S_3 R_3 = g;$$

здесь $h = \frac{\alpha}{2\varkappa}(1 - \sqrt{1 - 4\varkappa g^2})$ и $k = 0$.

2. Для всех g и $\alpha > \sqrt{-\kappa/4}$ существуют две точки вида

$$\left(0, S_2, 0, \frac{1}{4\alpha S_2} - \frac{\kappa S_2}{2\alpha}, \frac{g}{S_2}, 0\right), \quad \text{где} \quad S_2^2 = \frac{1}{2\kappa} - \frac{\alpha}{\kappa} \sqrt{\frac{1-4\kappa g^2}{\kappa+4\alpha^2}};$$

здесь $h = \frac{\alpha}{\kappa} - \frac{1}{2\kappa} \sqrt{(\kappa+4\alpha^2)(1-4\kappa g^2)}$ и $k = h^2$.

3. При $-2\alpha^2 < \kappa < 0$ и $\frac{1}{\sqrt{16\alpha^2+4\kappa}} < g < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\alpha^2+\kappa}{(2\alpha^2+\kappa)^2}}$ существуют четыре точки вида

$$(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, \sqrt{\kappa+4\alpha^2} S_2, \sqrt{\kappa+4\alpha^2} S_3),$$

где

$$S_2^2 = \frac{\sqrt{\kappa+4\alpha^2} - (2\kappa+4\alpha^2)g}{4\alpha^2\sqrt{\kappa+4\alpha^2}}, \quad S_3^2 = \frac{2g\sqrt{\kappa+4\alpha^2} - 1}{4\alpha^2};$$

здесь $h = \frac{2g\sqrt{\kappa+4\alpha^2}-1}{4\alpha}$ и $k = 0$.

4. При $-4\alpha^2 < \kappa \leq -2\alpha^2$ и $g > \frac{1}{\sqrt{16\alpha^2+4\kappa}}$ существуют четыре точки вида

$$(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, \sqrt{\kappa+4\alpha^2} S_2, \sqrt{\kappa+4\alpha^2} S_3),$$

где

$$S_2^2 = \frac{\sqrt{\kappa+4\alpha^2} - (2\kappa+4\alpha^2)g}{4\alpha^2\sqrt{\kappa+4\alpha^2}}, \quad S_3^2 = \frac{2g\sqrt{\kappa+4\alpha^2} - 1}{4\alpha^2};$$

здесь $h = \frac{2g\sqrt{\kappa+4\alpha^2}-1}{4\alpha}$ и $k = 0$.

5. При $2\alpha^2 < \kappa < 0$ и $-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\alpha^2+\kappa}{(2\alpha^2+\kappa)^2}} < g < -\frac{1}{\sqrt{16\alpha^2+4\kappa}}$ существуют четыре точки вида

$$(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, -\sqrt{\kappa+4\alpha^2} S_2, -\sqrt{\kappa+4\alpha^2} S_3),$$

где

$$S_2^2 = \frac{\sqrt{\kappa+4\alpha^2} + (2\kappa+4\alpha^2)g}{4\alpha^2\sqrt{\kappa+4\alpha^2}}, \quad S_3^2 = \frac{2g\sqrt{\kappa+4\alpha^2} + 1}{-4\alpha^2};$$

здесь $h = \frac{2g\sqrt{\kappa+4\alpha^2}+1}{-4\alpha}$ и $k = 0$.

6. При $-4\alpha^2 < \kappa \leq -2\alpha^2$ и $g < -\frac{1}{\sqrt{16\alpha^2+4\kappa}}$ существуют четыре точки вида

$$(0, S_2, S_3, 2\alpha S_2, -\sqrt{\kappa+4\alpha^2} S_2, -\sqrt{\kappa+4\alpha^2} S_3),$$

где

$$S_2^2 = \frac{\sqrt{\kappa+4\alpha^2} + (2\kappa+4\alpha^2)g}{4\alpha^2\sqrt{\kappa+4\alpha^2}}, \quad S_3^2 = \frac{2g\sqrt{\kappa+4\alpha^2} + 1}{-4\alpha^2};$$

здесь $h = \frac{2g\sqrt{\kappa+4\alpha^2}+1}{-4\alpha}$ и $k = 0$.

7. Для всех g и $\alpha > 0$ существуют две точки вида

$$\left(S_1, 0, 0, \frac{g}{S_1}, \frac{4\alpha\kappa S_1}{4\alpha^2 - \kappa} - \frac{2\alpha}{(4\alpha^2 - \kappa)S_1}, 0 \right),$$

где

$$S_1^2 = \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{2\kappa} \sqrt{\frac{(1 - 4\kappa g^2)(4\alpha^2 - \kappa)^2}{(\kappa + 4\alpha^2)^2}};$$

здесь $h = \frac{4\alpha^2 - \kappa}{8\alpha\kappa} - \frac{1}{8\alpha\kappa} \sqrt{(1 - 4\kappa g^2)(\kappa + 4\alpha^2)^2}$ и $k = -g^2$.

8. Для всех $\alpha < \frac{\sqrt{-\kappa}}{2}$ существуют четыре точки вида

$$\left(S_1, 0, S_3, 0, \frac{\kappa}{2\alpha} S_1, 0 \right), \quad \text{где} \quad \left(1 + \frac{\kappa}{4\alpha^2} \right) S_1^2 + S_3^2 = \frac{1}{\kappa};$$

здесь $g = 0$, $h = \alpha/\kappa$ и $k = 0$.

4. ТОПОЛОГИЯ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ $Q_{g,h}^3$

В этом разделе мы изучаем топологию изоэнергетических поверхностей интегрируемого случая Борисова–Мамаева–Соколова на алгебре Ли $so(3, 1)$.

При исследовании интегрируемых гамильтоновых систем важной характеристикой является топологический тип изоэнергетических поверхностей. Общая топологическая классификация трехмерных изоэнергетических поверхности была построена Фоменко [1]–[3]. Для классических случаев интегрируемости топология изоэнергетических поверхностей изучалась многими авторами (см., например, [4]). В частности, в работах [14], [15] было развито несколько методов анализа изоэнергетических поверхностей в задачах механики. Такие задачи описываются уравнениями Эйлера на алгебре Ли $e(3)$, и данные методы, вообще говоря, неприменимы к алгебре Ли $so(4)$ или другим алгебрам Ли. В работе [13] был предложен еще один метод изучения топологии изоэнергетической поверхности в случае $so(4)$. Кроме того, в [13] были построены бифуркационные диаграммы $\Sigma_{g,h}$ для гамильтонианов специального вида $H = aS_1^2 + bS_2^2 + cS_3^2 + S_1R_2 - S_2R_1$ и доказано, что для любых значений параметров a , b и c диаграмма $\Sigma_{g,h}$ состоит из нескольких эллипсов и отрезков, касательных к ним. Также в [13] была описана топология изоэнергетических поверхностей $Q_{g,h}^3$ в зависимости от значений параметров g и h и доказана следующая теорема (см. также работу [12]).

ТЕОРЕМА 2. В зависимости от значений g и h каждая связная компонента изоэнергетической поверхности $Q_{g,h}^3$ гамильтониана (3) на алгебре Ли $so(4)$ (т. е. для $\kappa > 0$) гомеоморфна либо трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$, либо связной сумме $N_k = \#_1^k(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)$ нескольких копий многообразия $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Точнее, различным областям в плоскости $\mathbb{R}^2(g, h)$ соответствуют следующие многообразия $Q_{g,h}^3$: $2\mathbb{S}^3$, N_1 , $2N_1$, N_3 , N_5 .

Даже для простых гамильтонианов не существует общего метода описания произвольных поверхностей уровня функций f_1 , f_2 и H . Для систем на $e(3)$ простой способ описания топологического типа изоэнергетических поверхностей можно найти в работах [14], [4]. Однако для гамильтонианов, рассматриваемых в настоящей работе, этим способом задачу решить нельзя.

Используя новый метод из статьи [13], мы описываем общие поверхности уровней функций f_1 , f_2 , и H для гамильтониана H специального вида. Этот метод дает полное описание топологии изоэнергетических поверхностей в изучаемом интегрируемом случае Борисова–Мамаева–Соколова. Мы рассматриваем проекции $\pi: \mathbb{R}^6(\mathbf{S}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3(\mathbf{S})$, заданные равенством $\pi(\mathbf{S}, \mathbf{R}) = \mathbf{S}$. При такой проекции образ изоэнергетической поверхности есть некоторое множество $P_{g,h}^3$ в пространстве $\mathbb{R}^3(\mathbf{S})$. Для нашего гамильтониана множество $P_{g,h}^3$ – это трехмерное многообразие с границей. Оказывается, что для гамильтониана H род двумерного многообразия $\partial P_{g,h}^3$, вложенного в $\mathbb{R}^3(\mathbf{S})$, единственным образом задает топологический тип изоэнергетической поверхности $Q_{g,h}^3$.

Хорошо известно, что топологический тип изоэнергетических поверхностей $Q_{g,h}^3$ один и тот же для всех точек (g, h) области, на которые бифуркационная диаграмма разбивает плоскость $\mathbb{R}^2(g, h)$.

Рассмотрим гамильтониан (3) на алгебре Ли $so(3, 1)$ (т.е. случай $\kappa = -1$), тогда систему уравнений, определяющую изоэнергетические поверхности $Q_{g,h}^3$, можно переписать как (здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение)

$$\mathbf{R}^2 = 1 + \mathbf{S}^2, \quad \langle \mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle = g, \quad \langle F(\mathbf{S}), \mathbf{R} \rangle = h - T(\mathbf{S}), \quad (6)$$

где $T(\mathbf{S}) = (\alpha + 1/4\alpha)S_1^2 + 2\alpha S_2^2 + \alpha S_3^2$ и $F(\mathbf{S}) = (-S_2, S_1, 0)$. Рассмотрим (6) как систему уравнений относительно $\mathbf{R}$ (другими словами, в пространстве $\mathbb{R}^3(\mathbf{R})$ при фиксированном $\mathbf{S}$). Для каждого решения $\mathbf{R}$ этой системы при данном $\mathbf{S}$ точка $(\mathbf{S}, \mathbf{R})$ принадлежит изоэнергетической поверхности $Q_{g,h}^3$. Следовательно, множество точек $\mathbf{S}$, для которых система (6) имеет решение, представляет собой образ поверхности $Q_{g,h}^3$, получающийся в результате проекции $\pi: (\mathbf{S}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{S}$. Обозначим это множество через $P_{g,h}^3$.

В пространстве $\mathbb{R}^3(\mathbf{R})$ уравнение $\mathbf{R}^2 = 1 + \mathbf{S}^2$ определяет сферу, а система уравнений $\langle \mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle = g$ и $\langle F(\mathbf{S}), \mathbf{R} \rangle = h - T(\mathbf{S})$ задает некоторое подпространство в $\mathbb{R}^3(\mathbf{R})$. Если векторы $\mathbf{S}$ и $F(\mathbf{S})$ линейно независимы, это подпространство одномерно, т.е. два последних уравнения системы (6) определяют прямую. Она пересекает сферу не более чем в двух точках. Следовательно, для каждого $\mathbf{S}$, такого что $\mathbf{S}$ и $F(\mathbf{S})$ линейно независимы, множество решений системы (6) содержит две точки, одну точку или является пустым, таким образом, проекция $\pi: Q_{g,h}^3 \rightarrow P_{g,h}^3$ имеет очень простой вид. Очевидно, что в нашем случае векторы $\mathbf{S}$ и $F(\mathbf{S})$ линейно зависимы, только если $S_1 = S_2 = 0$. Но такие точки принадлежат бифуркационной диаграмме.

Для неособой изоэнергетической поверхности $Q_{g,h}^3$ векторы $\mathbf{S}$ и $F(\mathbf{S})$ всегда линейно независимы, следовательно, два последних уравнения системы (6) задают прямую l . Она пересекает сферу, если и только если $\rho^2(0, l) \leq 1 + \mathbf{S}^2$, где $\rho(0, l)$ – расстояние от прямой l до начала координат. Другими словами, прямая l пересекает сферу, если и только если

$$\rho^2(0, l) = \frac{g^2}{\mathbf{S}^2} + \frac{((\alpha + 1/4\alpha)S_1^2 + 2\alpha S_2^2 + \alpha S_3^2 - h)^2}{S_1^2 + S_2^2} \leq 1 + \mathbf{S}^2,$$

причем равенство соответствует случаю, когда линия пересекает сферу в одной точке, а строгое неравенство соответствует двум общим точкам прямой и сферы.

ЛЕММА 1. Образ $P_{g,h}^3$ изоэнергетической поверхности $Q_{g,h}^3$, получающийся в результате проекции $\pi: (\mathbf{S}, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{S}$, задается неравенством

$$\mathbf{S}^2 \left(\left(\alpha + \frac{1}{4\alpha} \right) S_1^2 + 2\alpha S_2^2 + \alpha S_3^2 - h \right)^2 - (\mathbf{S}^2 + \mathbf{S}^4 - g^2)(S_1^2 + S_2^2) \leq 0. \quad (7)$$

Прообраз каждой граничной точки области $P_{g,h}^3$ (при проекции π) состоит из одной точки, а прообраз каждой внутренней точки – из двух.

Теперь изучим топологию изоэнергетической поверхности $Q_{g,h}^3$ при различных значениях g и h . Обозначим через D_k^2 открытый двумерный диск с k дырками.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\varkappa < 0$. Для $0 < \alpha < \sqrt{-\varkappa/8}$ и $\sqrt{-\varkappa/8} < \alpha < \sqrt{-\varkappa/4}$, если точка (g, h) принадлежит областям, изображенным соответственно на рис. 1 и рис. 2, проекция множества $P_{g,h}^3$ диффеоморфна одному из следующих некомпактных множеств:

1) для области 1 множество $P_{g,h}^3$ является непересекающимся объединением двух полупространств;

2) для областей 2 и 4 множество $P_{g,h}^3$ диффеоморфно пространству $\mathbb{R}^3(\mathbf{S})$ с удаленной малой трубкообразной окрестностью координатных осей, вдоль которых лежат составляющие S_2 и S_3 вектора $\mathbf{S}$;

3) для области 3 множество $P_{g,h}^3$ диффеоморфно прямому произведению двух торов T^2 с двумя проколами и прямой $\mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\varkappa < 0$. Для $\sqrt{-\varkappa/4} < \alpha < \sqrt{-\varkappa/2}$ и $\alpha > \sqrt{-\varkappa/2}$, если точка (g, h) принадлежит областям, изображенным соответственно на рис. 3 и рис. 4, то каждая связная компонента многообразия $P_{g,h}^3$ гомеоморфна замкнутой компактной области A_k (т. е. полноторию рода k) в $\mathbb{R}^3$, где $k = 0, 1, 3$. Точнее, области, помеченные цифрами 1–5 на рис. 3 и рис. 4, соответствуют следующим многообразиям $P_{g,h}^3$:

$$1 \sim 2A_0, \quad 2, 3 \sim A_1, \quad 4, 5 \sim A_3.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varkappa < 0$. При $0 < \alpha < \sqrt{-\varkappa/4}$ топология изоэнергетических поверхностей $Q_{g,h}^3$, отвечающих регулярным значениям (g, h) (не принадлежащим множеству точек бифуркации гамильтониана (3)), должна быть одним из многообразий $2\mathbb{R}^3$ или $D_3^2 \times \mathbb{R}$ (см. рис. 1 и рис. 2).

ТЕОРЕМА 4. При $\alpha > \sqrt{-\varkappa/4}$ связные компоненты изоэнергетических поверхностей $Q_{g,h}^3$ для гамильтониана (3) при различных g и h гомеоморфны либо трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$, либо связной сумме нескольких копий многообразия $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Точнее, области, помеченные цифрами 1–5 на рис. 3 и рис. 4, соответствуют следующим многообразиям $Q_{g,h}^3$: $1 \sim 2\mathbb{S}^3$, $2 \sim N_1$, $3 \sim N_1$, $4, 5 \sim N_3$.

ТЕОРЕМА 5 [16], [12]. В случае Борисова–Мамаева–Соколова на алгебре $e(3)$ изоэнергетические поверхности гомеоморфны $2\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, N_3 и $\mathbb{R}P^3$ (см. рис. 5).

На всех рисунках бифуркационная диаграмма изображена симметрично относительно оси $g = 0$.

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{g,h}$ при $\kappa < 0$ и $0 < \alpha < \sqrt{-\kappa/8}$ и топологические типы поверхностей $Q_{g,h}^3$ для случая Борисова–Мамаева–Сокколова на алгебре Ли $so(3, 1)$.

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{g,h}$ при $\kappa < 0$ и $\sqrt{-\kappa/8} < \alpha < \sqrt{-\kappa/4}$ и топологические типы поверхностей $Q_{g,h}^3$ для случая Борисова–Мамаева–Сокколова на алгебре Ли $so(3, 1)$.

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{g,h}$ при $\kappa < 0$ и $\sqrt{-\kappa/4} < \alpha < \sqrt{-\kappa/2}$ и топологические типы поверхностей $Q_{g,h}^3$ для случая Борисова–Мамаева–Соколова на алгебре Ли $so(3, 1)$.

Рис. 4. Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{g,h}$ при $\kappa < 0$ и $\alpha > \sqrt{-\kappa/2}$ и топологические типы поверхностей $Q_{g,h}^3$ для случая Борисова–Мамаева–Соколова на алгебре Ли $so(3, 1)$.

Рис. 5. Бифуркационная диаграмма $\Sigma_{g,h}$ и топологические типы поверхностей $Q^3_{g,h}$ для случая Борисова–Мамаева–Соколова алгебры Ли $e(3)$ (т.е. случай $\kappa = 0$).

Список литературы

- [1] A. T. Fomenko, “The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom”, *Topological Classification of Integrable Systems*, Advances in Soviet Mathematics, **6**, ed. A. T. Fomenko, AMS, Providence, RI, 1991, 1–35.
- [2] А. Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Докл. АН СССР*, **287**:5 (1986), 1071–1075.
- [3] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 38–51.
- [4] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, Изд-во Удмурт. гос. ун-та, Ижевск, 1999.
- [5] A. A. Oshemkov, “Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations”, *Topological Classification of Integrable Systems*, Advances in Soviet Mathematics, **6**, ed. A. T. Fomenko, AMS, Providence, RI, 1991, 67–146.
- [6] В. В. Соколов, “Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$ ”, *Докл. РАН*, **394**:5 (2004), 602–605.
- [7] В. В. Соколов, “Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа”, *ТМФ*, **129**:1 (2001), 31–37.
- [8] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, В. В. Соколов, “Новый интегрируемый случай на $so(4)$ ”, *Докл. РАН*, **381**:5 (2001), 614–615.
- [9] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела*, РХД, Ижевск, 2001.
- [10] Д. В. Новиков, “Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$ ”, *Матем. сб.*, **202**:5 (2011), 127–160.

- [11] Д. В. Новиков, “Топология изоэнергетических поверхностей для интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(3,1)$ ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **66**:4 (2011), 62–64.
- [12] R. Akbarzadeh, G. Haghighatdoost, “The topology of Liouville foliation for the Borisov–Mamaev–Sokolov integrable case on the Lie algebra $so(4)$ ”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **20**:3 (2015), 317–344.
- [13] R. Akbarzadeh, “Topological analysis corresponding to the Borisov–Mamaev–Sokolov integrable system on the Lie algebra $so(4)$ ”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **21**:1 (2016), 1–17.
- [14] S. Smale, “Topology and mechanics I”, *Invent. Math.*, **10**:4 (1970), 305–331; “Topology and mechanics. II”, **11**:1 (1970), 45–64.
- [15] Я. В. Татаринов, “Уравнения классической механики в новой форме”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **58**:3 (2003), 67–76.
- [16] П. Е. Рябов, “Бифуркации первых интегралов в случае Соколова”, *ТМФ*, **134**:2 (2003), 207–226.

Поступила в редакцию 3.03.2018